Zbornik radova Fakulteta tehničkih nauka, Novi Sad

UDK: 517.98

DOI: https://doi.org/10.24867/04JV01Baljint

PRIMENA TEOREME O FIKSNOJ TAČKI U DIGITALNOJ SLICI

APPLICATION OF THE FIXED POINT THEOREM TO DIGITAL IMAGE

Emilija Baljint, Nebojša Ralević, *Fakultet tehničkih nauka, Novi Sad*

Oblast – MATEMATIKA U TEHNICI

Kratak sadržaj – *Predmet istraživanja rada je vezan za pojam digitalne slike, tj. primena Banahove teoreme o fiksnoj tački u digitalnoj slici, kao i neke od metoda denoizacije slike.. Pojam Banahovog principa kontrakcije se vezuje za metričke prostore, pa time i za digitalne metričke prostore. Znanje o postojanju fiksne tačake ima primene u mnogim granama analize i topologije, međutim primenjuje se i u nekim područjima kompjuterskih nauka, kao što su računarska grafika, obrada slike i tako dalje.*

Ključne reči: *digitalni metrički prostor, digitalna slika, Banahova teorema fiksne tačke, denoizacija slike.*

Abstract - *The subject of work research is related to the concept of digital image, i.e. the application of Banach's theorem on a fixed point in a digital image, as well as some of the methods of image denatization. The notion of Banach's contraction principle is related to metric spaces, and therefore to digital metric spaces. Knowledge of the existence of a fixed point has applications in many branches of analysis and topology, but it is also applied in some areas of computer science, such as computer graphics, image processing, and so on.*

Keywords: *digital metric space, digital image, Banach fixed point theorem , denoising image.*

1. UVOD

Teorija fiksne tačke igra ključnu ulogu u raznim granama matematike. U metričkim prostorima ova teorija počinje sa Banahovom teoremom o fiksnoj tački, poljskog matematičara Štefana Banaha 1922, godine. Postoje različite primene teorije fiksne tačake u matematici, u računarstvu, u inženjerstvu, u obradi slike itd.

Digitalna topologija je područje u razvoju koje se odnosi na karakteristike 2D i 3D digitalnih slika i koje koristi topološke osobine objekata. Ovaj rad je osvrt na primenu Banahove teoreme o fiksnoj tački u digitalnoj slici, iako je jasno da njena široka primena ne može da obuhvati sve aspekte.

2. METRIČKI PROSTORI

Istorijski gledano pojam granice se vezuje za pojam rastojanja između dve tačke. U svim klasičnim prostorima je prisutan, kako kod realnih i kompleksnih brojeva, skupu uređenih *n*-torki, skupu ograničenih realnih funkcija...

Metrički prostor je uređeni par (X, d) nepraznog skupa X i metrike d na X. Realni broj $d(x, y)$ je rastojanje elemenata (tačaka) x, y iz X. Za prostor $(\mathbb{R}^n, d)$ kažemo da je n-dimenzionalni euklidski prostor, ako je metrika definisana sa $d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i - x_i)^2}$, $x = (x_1, x_2 \dots x_n)$, $y = (y_1, y_2 \dots y_n)$.

Neka je dat metrički prostor (X, d) i $a \in X, r \in \mathbb{R}^+$.

Za skup $L(a, r) = \{x \in X: d(a, x) < r\}$ kažemo da je otvorena lopta u metričkom prostoru (X, d) sa centrom u tački a i poluprečnika r .

Za neprazan skup $U \subset X$ kažemo da je otvoren u (X, d) ako $(\forall x \in U)(\exists r \in \mathbb{R}^+)\ L(x, r) \subset U$.

Familiju τ svih otvorenih skupova metričkog prostora (X, d) zovemo topološka struktura ili topologija metričkog prostora (X, d).

Za topologiju τ metričkog prostora (X, d) veže sledeće osobine: T1) $\emptyset, X \in \tau$; T2) Unija svake familije elemenata iz τ je element iz τ; T3) Presek konačno mnogo elemenata iz τ je element iz τ.

Ako imamo neprazan skup X tada familiju τ podskupova od X $\left(\tau \subseteq \mathcal{P}(X)\right)$ za koji važe osobine *T1*, *T2*, *T3* zovemo topologija, a uređeni par (X, τ) zovemo topološki prostor.

Za topološki prostor kažemo da je Hausdorfov ako za svake dve različite tačke postoje disjunktni otvoreni skupovi koji ih sadrže.

U ovom prostoru ako imamo niz koji konvergira, tada je granična vrednost jednoznačno određena. Pokazuje se da specijalna klasa nizova, takozvani Košijevi nizovi ukoliko imaju graničnu vrednost u (X, d) , tada takve prostore nazivamo kompletnim prostorima.

Neka preslikavanje f preslikava skup X u samog sebe. Tada za tačku $x \in X$ kažemo da je fiksna tačka (nepokretna) tog preslikavanja ako je $f(x) = x$. U metričkim prostorima (X, d_1) i (Y, d_2) i funkciju $f: X \to Y$ nazivamo kontrakcija ukoliko postoji $\lambda \in (0,1)$ (koji nazivamo koeficijentom kontrakcije) za $x_1, x_2 \in X$ tada važi $d_2\big(f(x_1), f(x_2)\big) \le \lambda d_1(x_1, x_2)$.

Važi tvrđenje (nazvano po čuvenom matematičaru Banahu [1]):

U kompletnom metričkom prostoru (X, d) ukoliko je $f: X \to X$ kontrakcija sa koeficijentom λ, tada je $x \in X$ jedina fiksna tačka tog preslikavanja f.

Niz $\{x_n\}$ definisan sa $x_1 \in X$, $x_{n+1} = f(x_n)$, $n \in \mathbb{N}$, gde je x_1 proizvoljan element iz X, zovemo niz sukcesivnih aproksimacija.

NAPOMENA:

Ovaj rad proistekao je iz master rada čiji mentor je bio dr Nebojša Ralević, red. prof.

Taj niz konvergira u metričkom prostoru X i njegova granična vrednost x je nepokretna tačka tog preslikavanja i važi nejednakost

$$d(x_n, x) \leq \frac{q^{n-1}}{1-q} d(x_2, x_1), \; n = 2,3, \dots \; [7].$$

3. DIGITALNA SLIKA

Slika je medij koji je predmet vizuelne percepcije. Njena upotreba u multimedijalnim sistemima podrazumeva digitalnu reprezentaciju koju samo posredstvom odgovarajućeg uređaja (računara, mobilnog telefona, DVD plejera...) možemo videti u elektronskom obliku. Kada digitalnu sliku odštampamo ona postaje klasična slika. Matematički slika može da se predstavi kao funkcija dve realne promenljive $f(x, y)$. Promenljive x, y su prostorne koordinate, a vrednost funkcije se može neformalno povezati sa intenzitetom neke fizičke veličine, npr. svetlošću [2].

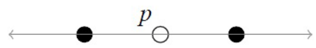
Za elemente digitalne slike se koristi termin pikseli (geometrijski gledano kvadratići). Prema tome možemo reći da je digitalna slika dvodimenzionalni niz vrednosti piksela. U praksi često umesto termina digitalne slike se koristi bitmapa, piksmapa i rasterska slika. Raster se odnosi na mrežu lokacija piksela. Svaki piksel je ofarban određenom bojom. Digitalizacija obuhvata: merenje svetlosti na mestu svakog piksela i kvantizaciju, dodeljivanje diskretnih vrednosti izmerenim nivoima svetlosti. Sa odmeravanjem slike povezan je i pojam prostorne rezolucije slike. Prostorna rezolucija slike je zapravo broj piksela u digitalnoj slici i kada se govori o rezoluciji slike obično se misli na prostornu rezoluciju. Rezolucija uređaja je koncept koji se razlikuje od rezolucije slike, pokazuje koliko dobro uređaj aproksimira kontinualne slike, i izražava se gustinom piksela. U postupku kvantizacije svakom pikselu slike se dodeljuje vrednost iz predefinisanog skupa intenziteta i obično se izražava brojem bita. Na osnovu toga imamo binarne slike, gde za reprezentaciju piksela koristimo 1 bit. Binarne i sive slike se u memoriji predstavljaju dvodimenzionalnim nizovima, odnosno matricama čiji su elementi vrednosti piksela. Kod slika u boji situacija je složenija, jer su potrebne tri komponente, crvena, zelena i plava takozvane RGB (red-green-blue). Tada slika u boji se memoriše korišćenjem tri matrice od kojih svaka sadrži vrednosti intenziteta piksela za jednu komponentu. Česti formati fajlova u rasterskoj grafici su GIF, JPEG, PNG, TIFF, BMP [3].

4. BANAHOVA TEOREMA O FIKSNOJ TAČKI U DIGITALNOJ SLICI

Banahova teorema o fiksnoj tački (poznata kao teorema o kontraktivnom preslikavanju) je važan alat u teoriji metričkih prostora, time i u digitalnim; i ona garantuje postojanje i jedinstvenost fiksnih tačaka određenih preslikavanja iz nekog digitalnog metričkog prostora u samog sebe, i daje konstruktivni metod za pronalaženje tih fiksnih tačaka.

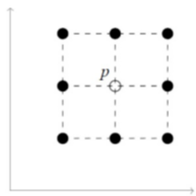
Digitalna slika je uređeni par (X, k), gde je $X \subset \mathbb{Z}^n, n \in \mathbb{N}$, i gde je $\mathbb{Z}^n$ skup uređenih n-torki sa celobrojnim koordinatama u n-dimenzionalnom euklidskom prostoru, a k predstavlja odnos koordinata u podskupu X.

Neka su $l, n \in \mathbb{Z}^+, 1 \leq l \leq n$ i dve različite tačke $p = (p_1, p_2, \dots p_n), \; q = (q_1, q_2, \dots q_n) \in \mathbb{Z}^n$.
Tačke p i q su k_l susedne ukoliko postoji najviše l indeksa i tako da je $|p_i - q_i| = 1$, a za sve ostale indekse j takve da je $|p_j - q_j| \neq 1$, mora biti $p_j = q_j$.
Iz toga proizilazi definisanost u $\mathbb{Z}, \mathbb{Z}^2, \mathbb{Z}^3$ kada su tačke p, q 2,4,6,8,18,26-susedne. Neki od primera:
Dve tačke $\boldsymbol{p}$ i $\boldsymbol{q}$ u Z su ***2- susedne*** ako je $|p - q| = 1$, Slika 1.;



Slika 1. 2-susedne tačke [4]

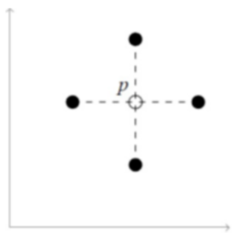
Dve različite tačke $\boldsymbol{p}$ i $\boldsymbol{q}$ u $\mathbb{Z}^2$ su ***8-susedne*** ako se razlikuju za najviše 1 u svakoj koordinati, Slika 2.;



Slika 2. 8-susedne tačke [4]

$p = (p_1, p_2)$
$q = (q_1, q_2)$
$|p_1 - q_1| = 1 \; \wedge \; |p_2 - q_2| = 1;$

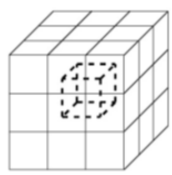
Dve različite tačke $\boldsymbol{p}$ i $\boldsymbol{q}$ u $\mathbb{Z}^2$ su ***4-susedne*** ukoliko su one 8-susedne i razlikuju se u tačno 1 koordinati, Slika 3.;



Slika 3. 4-susedne tačke [4]

$p = (p_1, p_2)$
$q = (q_1, q_2)$
$|p_1 - q_1| = 1 \; \wedge \; p_2 = q_2$
$|p_2 - q_2| = 1 \; \wedge \; p_1 = q_1;$

Jedan od primera u $\mathbb{Z}^3$:
Dve tačke $\boldsymbol{p}$ i $\boldsymbol{q}$ u $\mathbb{Z}^3$ su ***26-susedne*** ukoliko se razlikuju za najviše 1 u svakoj koordinati, Slika 4..



Slika 4. 26-susedne tačke [4]

$\boldsymbol{k_3 = 26}$
$p = (p_1, p_2, p_3)$

$q = (q_1, q_2, q_3)$
$|p_1 - q_1| = 1 \wedge |p_2 - q_2| = 1 \wedge |p_3 - q_3| = 1.$

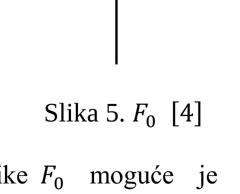
U slučaju ***18-susednih tačaka***, oni su specijalan slučaj 26-susednih, dok ***6-susedne tačke*** su specijalni slučaj 18-susednih tačaka.
Zatim se nameće pitanje rastojanja između dve tačke u digitalnoj slici.
Digitalna k-putanja od x do y u digitalnoj slici X je $(2, k)$ −neprekidna funkcija $f: [0, m]_{\mathbb{Z}} \to X$ tako da je $f(0) = x$ i $f(m) = y$.
Kao i u običnim metričkim, pa tako i u digitalnim metričkim prostorima niz $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tačaka je Košijev ako za sve $\varepsilon > 0$ postoji $\alpha \in \mathbb{N}$ tako da je za sve $n, m > \alpha$ važi $d(x_n, x_m) < \varepsilon$.
Neka je (X, d, k) digitalni metrički prostor, i neka ga funkcija f preslikava u samog sebe. Ako postoji $\lambda \in (0,1)$ tako da $\forall x, y \in X$ važi $d\big(f(x), f(y)\big) \leq \lambda d(x, y)$, tada kažemo da je f digitalno kontraktivno preslikavanje, a λ kontrakciona konstanta.
Kada je preslikavanje u pitanju ne možemo izbeći pojam neprekidnosti. Prema tome svako digitalno kontrakciono preslikavaje je digitalno neprekidno. Veza između digitalnog metričkog prostora, kao i specijalne klase nizova – Košijevih, nam daje pojam kompletnosti (X, d, k). Kažemo da je (X, d, k) kompletan metrički prostor ako bilo koji Košijev niz $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ iz (X, d, k) konvergira ka tački a iz (X, d, k).
Banahova teorema u kompletnom (X, d, k) garantuje jedinstvenost fiksne tačke za preslikavanje $f: X \to X$, ako je $f(c) = c,\ c \in X$ i euklidsku metriku d u $\mathbb{Z}^n$ [4].

5. PRIMENA BANAHOVE TEOREME NA DIGITALNE SLIKE

U ovom delu rada dat je primer primene Banahove teoreme fiksne tačke na kompresiju slike. Cilj kompresije slike je smanjenje redundantnih, suvišnih informacija u digitalnoj slici. Postoje neki problemi pri skladištenju slike. Memorijski podaci su obično preveliki, pa se događa da uskladištena slika ima manje informacija od originalne slike. Poznato je da kvalitet kompresovane slike može biti loš. Iz tog razloga, moramo obratiti pažnju na kompresiju digitalne slike. Teorema fiksne tačke se može koristiti za kompresiju digitalne slike.

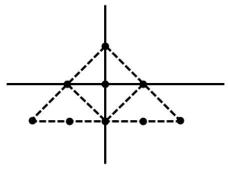
5.1. Primeri primene teoreme na digitalne slike

Neka je F_0 digitalna slika kao na Slici 1.



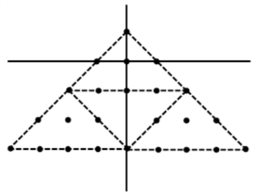
Slika 5. F_0 [4]

Polazeći od slike F_0 moguće je napraviti sledeći postupak:
Napraviti kopiju F_0 i nalepiti na donji levi vrh;
Napraviti kopiju F_0 i nalepiti na donji desni vrh;
Dobija se nova digitalna slika koju označavamo sa F_1, kao na Slici 6.



Slika 6. F_1 [4]

Opisani postupak možemo nastaviti i primeniti na sliku F_1 i dobićemo novu digitalnu sliku F_2, kao na Slici 7., i koja je identična slici F_1.



Slika 7. F_2 [4]

Kao rezultat F_2 je fiksna tačka u ovom postupku. Ovaj postupak se može matematički predstaviti na sledeći način. Neka je V funkcija od F_i koju zapisujemo $V(F_i)$, $F_i, i = 1,2, \ldots$ su digitalne slike. Zapažamo da je $V(F_2) = F_2$, tj. F_2 je fiksna tačka ove funkcije. Ako beskonačno nastavimo sa postupkom, dobijamo beskonačani niz koji se sastoji od skupova F_n. Niz $\{F_n\}$ konvergira ka F_2. Ne može se razlikovati F_5 od F_2, pa kao rezultat toga, program za obradu koristi F_5 umesto F_2, radi bolje rezolucije. U isto vreme program može da koristi F_2 umesto F_5 da bi se lakše odredila neka svojstva digitalne slike. Ovaj primer pokazuje da se za neke aplikacije digitalne slike može koristiti teorema o fiksnoj tački [4].
Jedna od primena jeste u kompresiji slike. Princip kompresije slike je da kodira manje informacije od prvobitne slike, ali da to uradi na pametan način, tako da oči nemogu videti da se posmatrana slika pogoršava. Jedan od najpoznatijih principa kompresije slike je JPEG, koji je postao standard za digitalne slike. Postoji i drugi princip, koji je eksperimentalniji. Nazvan je kao iteracioni funkcionalni sistem. Osnovna ideja ove metode je približiti sliku geometrijskim objektima. Nećemo koristiti uobičajene geometrijske oblike, već komplikovane fraktalne objekte poput tepiha Sjerpinskog, paprata, itd.
Objasnićemo ideju procesa kompresije na tepihu Sjerpinskog. Tepih Sjerpinskog je skup tri tepiha Sjerpinskog (tj. tri kopije od sebe), koje su pola njegove veličine, prvenstveno mislimo na širinu i visinu, Slika 8.

Slika 8. Postupak dobijanja tepiha Sjerpinskog [11]

Postupak je sledeći: smanjićemo tepih u pola njegove veličine krenuvši od donjeg levog ugla; napravićemo drugu kopiju ovog tepiha i nalepiti ga desno; napravićemo treću kopiju tepiha i nalepiti je na vrh.
Dakle, druga figura koju smo dopili, izgradili ovim postupkom je identična početnom tepihu Sjerpinskog. Primećujemo da je tepih Sjerpinskog fiksna tačka za ovaj postupak [6].

6. DENOIZACIJA SLIKE

Probleme koje se pojavljuju kod slika, pa time i kod digitalnih slika je šum. Šum slike može narušiti nivo detalja na digitalnim ili analognim slikama, te shodno tome, smanjenje šuma može znatno poboljšati sliku kada se prikazuje na ekranu ili štampa. Postupak uklanjanja šuma na digitalnim ili analognim slikama se naziva denoizacija slike. Primećeno je kako smanjenje šuma istovremeno povećava detalje na slici. U praksi se koriste programi za smanjenje šuma.

Shodno tome, pojavlju se pitanja šta je uzrok pojavljivanja šuma, kao i zašto je potrebno njegovo uklanjanje. Česti izvori šuma su: neadekvatna oprema za snimanje slika - video kamera, skener; loši uslovi snimanja; smetnje tokom prenosa preko analognih kanala - ometanje iz izvora elektromagnetnih polja, unutrašnji šum aktivnih komponenti (pojačavača) , dalekovoda (na primer, televizijski signal). Uklanjanje, smanjenje šuma je potrebno za poboljšanje vizuelne percepcije slike. U medicini, kod rengenskih snimaka povećanje jasnoće slike, leži u činjenici smanjenja šuma. Važnu ulogu smanjenje šuma igra kod kompresije video zapisa i slike. Algoritmi za smanjenje šuma obično se specijalizuju za suzbijanje određene vrste šuma. Još uvek ne postoje univerzalni filtri, otkrivanje i suzbijanje svih vrsta šumova. Međutim, mnogi šumovi mogu biti aproksimirani prilično dobro modelom belog Gaussovog šuma, tako da je većina algoritama orijentisana na suzbijanje ove vrste šuma. Filteri za smanjenje šuma takođe su podeljeni na prostorne i vremenske. U praksi se obično koristi kombinacija prostornih i vremenskih metoda smanjenja šuma, tzv. 3D filtera. Glavni problem smanjenja prostornog šuma je da ne pokvari oštrinu ivica objekata na slici, dok problem kod vremenskog smanjenja šuma je efekat zamućenog pokreta. Još jedna od komplikacija jeste procena kvaliteta smanjenja šuma. Najčešće za ovu svrhu se koristi metrika PSNR, koja je definisana formulom (1):

$$PSNR(x,y) = 20 \cdot \log_{10} \frac{255}{\sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} d(x_i,y_i)^2}} \qquad (1)$$

gde su x_i, y_i pikseli dve upoređivane slike, N ukupan broj piksela u svakoj slici, $d(x_i, y_i)$ razlika između boje odgovarajućih piksela. Ukoliko je filtrirana slika bliža originalu vrednost $PSNR$ je veća.

Postoje razni prostorni pristupi smanjenja šuma, jedan od njih je srednje filtriranje. Ovaj metod je dostupan u većini Photoshop-va, efikasan je u uklanjaju manjeg šuma i eliminiše detalje na nivou piksela [8].

Da bi se odredio odgovarajući radijus za datu ulaznu sliku (izbor prozora W), napravljena su četiri heuristika na osnovu unakrsne validacije i dva kriterijuma za selekciju modela: Bajesovski informativni kriterijum (BIC) i kriterijum sniženog normalizovanja najmanjih kvadrata (SNLS).

Kratko su prikazana ta četiri heuristika LinMod-BIC, LinMod-SNLS, Median-LOO i Mean-LOO.

U radu [9] je predstavljen je algoritam za jedan od četiri metoda (heuristika), podprogram MedIter, programa AdaptMedItera koji služi za usklađivanje varijanse šuma.

Pokazalo se da je najbolja Mean-LOO metoda. U tom eksperimentu su merene performanse denoizovanja na dobro poznatim testnim slikama Lena, Barbara i Zlatno brdo.

7. ZAKLJUČAK

U radu su prikazani neki od primera primena Banahove teoreme o fiksnoj tački. Data teorema je značajna u mnogim oblastima matematike, pre svega u funkcionalnoj analizi.

Denoizovana slika je fiksna tačka nelinearnog operatora i može se dobiti kao granica konvergentnog niza.

Nakon istraživanja postaje jasno da uspeh primene Banahove teoreme zavisi i od izbora prozora W u nekom od datih metoda za smanjenje šuma.

8. LITERATURA

[1] I. Kovačević, N. Ralević, *Funkcionalna analiza*, Fakultet tehničkih nauka, Novi Sad

[2] https://nastavnikinformatike.com/index.php/digitalna-slika (pristupljeno u martu 2019.)

[3] https://dsp.etfbl.net/multimediji/2017/09_slika.pdf (pristupljeno u martu 2019.)

[4] Ozgur Ege, Ismet Karaca, *Banach fIxed point theorem for digital images*, Turkey

[5] https://arxiv.org/pdf/1806.06110.pdf (prikupljeno u oktobru 2018.)

[6] http://dmuw.zum.de/images/b/bd/Banach2.pdf (prikupljeno u oktobru 2018.)

[7] http://www.milanmerkle.com/documents/3za%20studente%20racunarstva/3-insert.pdf (prikupljeno u oktobru 2018.)

[8] https://tehinginiring.ru/bs/ averaging-method.html (pristupljeno u martu 2019.)

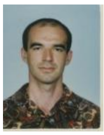
[9] J.Matta, S.Siltanen and T.Roos, *A fixed point image Denoising algorithm with automatic window Selection*, 2014 IEEE

[10] Master rad N.Gajinov, *Banahov princip kontrakcije -primene i generalizacije*, decembar 2010.

[11] https://sr.wikipedia.org/sr-el/Троугао_Сјерпињског

Kratka biografija:

Emilija Baljint rođena je 16. februara 1990. godine u Vrbasu. Završila je Srednju školu u Ruskom Krsturu, smer Gimnazija 2009. godine. Diplomirala je 2016. godine na Prirodno-matematičkom fakultetu u Novom Sadu, smer Diplomirani profesor matematike. U oktobru 2016. godine upisuje master studije primenjene matematike na Fakultetu tehničkih nauka u Novom Sadu, smer Matematika u tehnici.
Kontakt: emilija.baljint@gmail.com



Nebojša M. Ralević rođen je 1965. god. u Beranama. Doktorirao je na PMF-u u Novom Sadu 1997. god, a od 2010. god. je u zvanju redovnog profesora matematike na FTN-u u Novom Sadu. Oblasti interesovanja su teorija mere i verovatnoće, nelinearne jednačine, fazi sistemi, obrada slike i optimizacija.