UNIVERZITET U NOVOM SADU
FAKULTET TEHNIČKIH NAUKA

Dejan Ćebić

Optimalni višekoračni metodi Njutnovog tipa za nalaženje višestrukih korena nelinearne jednačine sa poznatom celobrojnom višestrukošću

-doktorska disertacija-

Novi Sad, 2017.

УНИВЕРЗИТЕТ У НОВОМ САДУ ● **ФАКУЛТЕТ ТЕХНИЧКИХ НАУКА**
21000 НОВИ САД, Трг Доситеја Обрадовића 6

КЉУЧНА ДОКУМЕНТАЦИЈСКА ИНФОРМАЦИЈА

Редни број, **РБР**:	
Идентификациони број, **ИБР**:	
Тип документације, **ТД**:	Монографска документација
Тип записа, **ТЗ**:	Текстуални штампани материјал
Врста рада, **ВР**:	Докторска дисертација
Аутор, **АУ**:	Дејан Ћебић
Ментор, **МН**:	Проф. др Небојша Ралевић
Наслов рада, **НР**:	Оптимални вишекорачни методи Њутновог типа за налажење вишеструких корена нелинеарне једначине са познатом целобројном вишеструкошћу
Језик публикације, **ЈП**:	Српски
Језик извода, **ЈИ**:	Српски, Енглески
Земља публиковања, **ЗП**:	Република Србија
Уже географско подручје, **УГП**:	Војводина
Година, **ГО**:	2017
Издавач, **ИЗ**:	Ауторски репринт
Место и адреса, **МА**:	Нови Сад, Факултет техничких наука, Трг Доситеја Обрадовића 6
Физички опис рада, **ФО**: (поглавља/страна/цитата/табела/слика/графика/прилога)	5/107/98/41/9/0/0
Научна област, **НО**:	Примењена математика
Научна дисциплина, **НД**:	Нумеричка анализа
Предметна одредница/Кључне речи, **ПО**:	нелинеарне једначине, вишеструка решења, итеративни методи, ред конвергенције, оптималност
УДК	
Чува се, **ЧУ**:	Библиотека Факултета техничких наука, Трг Доситеја Обрадовића 6, Нови Сад
Важна напомена, **ВН**:	
Извод, **ИЗ**:	Ова дисертација се бави проблемом одређивања вишеструких решења реалних нелинеарних једначина када је вишеструкост унапред познати природан број. Теоријски се анализирају и нумерички тестирају ред конвергенције и оптималност неки добро познатих метода попут Лиу-Чоу метода и Чоу-Чен-Сонг метода. Изводи се и објашњава зависност оптималног реда конвергенције и парности/непарности вишеструкости решења. Такође, конструишу се две нове фамилије поступака осмог реда конвергецније. Разматрају се нове фамилије двокорачних поступака намењене за решавање проблема које класични методи Њутновог типа не могу да реше.
Датум прихватања теме, **ДП**:	26.1.2017.
Датум одбране, **ДО**:	

Чланови комисије, **КО**:	Председник:	др Зорана Лужанин, редовни професор	
	Члан:	др Братислав Иричанин, доцент	
	Члан:	др Тибор Лукић, ванредни професор	
	Члан:	др Татјана Дошеновић, ванредни професор	Потпис ментора
	Члан, ментор:	др Небојша Ралевић, редовни професор	

Образац **Q2.НА.06-05**-
Издање 1

УНИВЕРЗИТЕТ У НОВОМ САДУ ● **ФАКУЛТЕТ ТЕХНИЧКИХ НАУКА**
21000 НОВИ САД, Трг Доситеја Обрадовића 6

КЉУЧНА ДОКУМЕНТАЦИЈСКА ИНФОРМАЦИЈА

Accession number, **ANO**:	
Identification number, **INO**:	
Document type, **DT**:	Monographic publication
Type of record, **TR**:	Textual printed material
Contents code, **CC**:	PhD thesis
Author, **AU**:	Dejan Ćebić
Mentor, **MN**:	Professor Nebojša Ralević, PhD
Title, **TI**:	Optimal multistep Newton-type methods for finding multiple roots of nonlinear equation with known integer multiplicity
Language of text, **LT**:	Serbian
Language of abstract, **LA**:	Serbian, English
Country of publication, **CP**:	Republic of Serbia
Locality of publication, **LP**:	Province of Vojvodina
Publication year, **PY**:	2017
Publisher, **PB**:	Author's reprint
Publication place, **PP**:	Novi Sad, Faculty of Technical Sciences, Trg Dositeja Obradovića 6
Physical description, **PD**: (chapters/pages/ref./tables/pictures/graphs/appendixes)	5/107/98/41/9/0/0
Scientific field, **SF**:	Applied Mathematics
Scientific discipline, **SD**:	Numerical analysis
Subject/Key words, **S/KW**:	nonlinear equations, multiple roots, iterative methods, order of convergence, optimality
UC	
Holding data, **HD**:	Library of the Faculty of Technical Sciences, Trg Dositeja Obradovića 6, Novi Sad
Note, **N**:	
Abstract, **AB**:	This thesis deals with the problem of determing multiple roots of real nonlinear equations where the multiplicity is some integer known in advance. The convergence order and optimal properties of some well-known methods such as Liu-Zhou method and Zhou-Chen-Song method are theoretically analyzed and numerically tested. The dependence of optimal convergence order on multiplicity has been derived and explained. Further, two new efficient families of methods with optimal eighth convergence order have been constructed. Furthermore, some new families of two-step methods are considered to solve certain problems where the classical Newton-type methods fail.
Accepted by the Scientific Board on, **ASB**:	26.1.2017.
Defended on, **DE**:	
Defended Board, **DB**: President:	Zorana Lužanin, PhD, full professor
Member:	Bratislav Iričanin, PhD, assistant professor
Member:	Tibor Lukić, PhD, associate professor
Member:	Tatjana Došenović, PhD, associate professor
Member, Mentor:	Nebojša Ralević, PhD, full professor

Menthor's sign

Obrazac **Q2.HA.06-05-**
Izdanje 1

Predgovor

Rešavanje nelinearnih jednačina je značajan problem kojim se matematika bavi. Važnost ove teme ne ogleda se samo u činjenici da se mnogi matematički problemi različitog nivoa složenosti svode na određivanje rešenja nelinearnih jednačina, već i u širokoj primeni nelinearnih jednačina pri modelovanju problema raznih naučnih i industrijskih oblasti. Zato zainteresovanost za ova pitanja pokazuju istraživači mnogih inženjerskih disciplina, hemičari, fizičari, arhitekte, astronomi, itd. Zbog toga je potreba za efikasnim metodama određivanja rešenja nelinearnih jednačina izuzetno velika.

Pojedini postupci za rešavanje poznati su već nekoliko vekova, a temelje u ovoj oblasti postavili su neki od najvećih naučnika u istoriji čovečanstva. Na primer, početkom XVII veka Kepler izvodi jednačinu

$$x - e \sin x = M$$

kojom opisuje kretanje planeta oko Sunca po eliptičnoj putanji. Interesovanje za ovaj problem pokazuje Njutn[1] i u drugom i trećem izdanju svog čuvenog dela *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* objavljuje iterativni postupak za numeričko rešavanje Keplerove jednačine. Na bazi ovih Njutnovih ideja je razvijen iterativni postupak koji nosi njegovo ime. Njutnov metod je opisan u uvodnom delu disertacije, a istorijske činjenice vezane za nastanak i razvoj Njutnovog metoda mogu se naći u [1].

Danas su poznati mnogobrojni složeniji iterativni postupci zasnovani na Njutnovom metodu. Složeni iterativni metodi zahtevaju visoke računarske performanse u pogledu mogućnosti izvođenja aritmetičkih operacija višestruke preciznosti, odgovarajućih memorijskih kapaciteta, brzine procesora, itd. Istraživači za potrebe teorijske analize i numeričkog testiranja novih algoritama koriste softverska rešenja koja nude programski paketi *Mathematica, Matlab, Maple, Fortran,* itd.

[1] Newton

Ova disertacija se bavi proučavanjem višekoračnih iterativnih postupaka za traženje višestrukih rešenja nelinearne jednačine, pri čemu je višestrukost rešenja unapred poznat prirodan broj. Sadržaj disertacije podeljen je na pet poglavlja. Uvodno poglavlje prikazuje kratak istorijski osvrt na razvoj iterativnih postupaka, najvažnije osobine i stavove koji omogućavaju dalje praćenje rada i definišu kriterijume komparacije različitih postupaka. Osim toga, prvo poglavlje sadrži klasifikaciju i pregled najznačajnijih do sada objavljenih postupaka za rešavanje nelinearnih jednačina. Originalan doprinos disertacije predstavljen je u drugom, trećem i četvrtom poglavlju. U drugom poglavlju detaljnije se proučavaju neke ranije razvijene familije dvokoračnih postupaka, i ispituje na koji način parnost/neparnost višestrukosti rešenja utiče na red konvergencije. Na taj način utvrđuju se do tada nepoznati nedostaci opisanih postupaka. U trećem poglavlju razvijeni su efikasni optimalni trokoračni postupci osmog reda konvergencije. U četvrtom poglavlju prikazane su nove dvokoračne familije postupaka trećeg i četvrtog reda konvergencije, razvijene kao unapređene generalizovane verzije postupaka ispitanih u drugom poglavlju. Peto poglavlje sadrži kratak opis najvažnijih zaključaka rada i smernice daljeg istraživanja. Svi teorijski rezultati u disertaciji potvrđeni su odgovarajućim numeričkim test primerima.

Predstavljeni numerički rezultati dobijeni su korišćenjem programa *Mathematica,* a opcije simboličkog računanja ovog programskog paketa omogućile su konstrukciju originalnih postupaka i dokazivanje teorema o njihovoj konvergenciji. Svi prezentovani teorijski i numerički rezultati plod su višegodišnjeg istraživanja u ovoj oblasti.

****

Ovom prilikom želim da se zahvalim svom mentoru dr Nebojši Raleviću na ukazanom poverenju, sveukupnoj podršci u radu, pomoći svake vrste, dostupnosti, otvorenosti i uloženom trudu i vremenu.

Veliku zahvalnost dugujem dr Zorani Lužanin na stručnim savetima, korektnom odnosu i podršci koju sam imao prilikom rada na disertaciji, kao i na prenetom znanju i lepoj saradnji tokom osnovnih i magistarskih studija.

Zahvaljujem se i članovima komisije za ocenu i odbranu doktorske disertacije dr Tatjani Došenović, dr Bratislavu Iričaninu i dr Tiboru Lukiću na korisnim sugestijama koje su značajno uticale na kvalitet disertacije.

Hvala i prijateljima, rodbini, kolegama, učenicima i svima onima koji su na bilo koji način pomogli prilikom izrade ove disertacije.

Najviše se zahvaljujem roditeljima, sestri i sestričini Anđeli na bezuslovnoj podršci koja mi predstavlja motivaciju za sve što radim.

Dejan Ćebić

Sadržaj

Predgovor **i**

1 Uvod **1**
1.1 Klasifikacija iterativnih postupaka 2
1.2 Osobine iterativnih postupaka: red konvergencije, efikasnost i optimalnost 3
1.3 Postupci za traženje jednostrukih rešenja 7
1.3.1 Jednokoračni postupci za traženje jednostrukih rešenja 7
1.3.2 Višekoračni postupci za traženje jednostrukih rešenja 10
1.4 Postupci za traženje višestrukih rešenja 14
1.4.1 Jednokoračni postupci za traženje višestrukih rešenja 15
1.4.2 Višekoračni postupci za traženje višestrukih rešenja 16

2 Optimalnost Njutnovih metoda za traženje višestrukih rešenja **25**
2.1 Optimalnost Liu-Čou metoda 25
2.2 Optimalnost Čou-Čen-Song metoda 29
2.3 Numerički rezultati 31

3 Optimalni Njutnovi metodi osmog reda konvergencije **37**
3.1 Metod za parnu višestrukost 37
3.2 Metod za neparnu višestrukost 44
3.3 Numerički rezultati 49

4 Modifikovani metodi Njutnovog tipa **57**
4.1 Metod za parnu višestrukost 58

4.1.1 Metod četvrtog reda konvergencije 58
4.1.2 Numerički rezultati 63
4.2 Metodi za neparnu višestrukost 71
4.2.1 Metod trećeg reda konvergencije 71
4.2.2 Metod četvrtog reda konvergencije 74
4.2.3 Numerički rezultati 79

5 Zaključna razmatranja i pravci daljeg istraživanja 85

Bibliografija 90

Glava 1

Uvod

Predmet istraživanja ove disertacije su postupci za rešavanje nelinearnih algebarskih i transcedentnih jednačina opšteg oblika

$$f(x) = 0, \tag{1.1}$$

gde je f realna funkcija jedne realne promenljive. Za rešenje jednačine ravnopravno se koriste termini *koren* jednačine ili *nula* funkcije $f(x)$. U daljem radu se simbolom α označava tačno rešenje jednačine (1.1).

Poznato je da se u opštem slučaju do tačnog rešenja nelinearne jednačine (1.1) ne može doći analitički, tj. rešenje nije moguće zapisati eksplicitno u obliku formule koja se sastoji od elementarnih funkcija i elementarnih algebarskih operacija. Zato se ovakve jednačine rešavaju približno, primenom numeričkih iterativnih postupaka. Ovi postupci podrazumevaju definisanje pravila kojim se, na osnovu jedne ili više početnih aproksimacija rešenja, generiše niz tačaka $\{x_n\}$ koji treba da konvergira ka α.

Iako se zna da se iterativni postupci za rešavanje nelinearnih jednačina koriste već nekoliko stotina godina [1, 2], može se reći da su šezdesete i sedamdesete godine XX veka značajnije razdoblje u razvoju ove oblasti. Paralelno sa razvojem računara, dolazi do razvoja brojnih iterativnih metoda, naročito nakon objavljivanja knjiga Ostrovskog[1] [3] i Trauba [4]. Oni daju pregled dotad poznatih postupaka i sistematizuju znanja iz ove oblasti, ali predlažu i neke nove postupke, a uvode i kriterijume za upoređivanje metoda koji će biti opisani u narednim odeljcima. Međutim, najproduktivniji period u razvoju iterativnih metoda nesumnjivo je XXI vek jer je u proteklih petnaestak godina prezentovan ogroman broj raznovrsnih postupaka za rešavanje nelinearnih jednačina oblika (1.1).

[1] Ostrowski

Radi lakšeg razumevanja i praćenja sadržaja, u okviru ovog poglavlja izloženi su neki osnovni teorijski koncepti, definicije, pojmovi, vladajuće pretpostavke i stavovi iz oblasti iterativnih metoda za rešavanje nelinearnih jednačina. Pre toga je prikazana odgovarajuća klasifikacija metoda, a zatim se pažnja usmerava na višekoračne postupke. Iako je cilj disertacije analiza i razvoj postupaka za traženje višestrukih korena nelinearnih jednačina, u ovom poglavlju opisani su i najznačajniji postupci za određivanje jednostrukih korena jer oni predstavljaju osnovu za razvoj većine ostalih algoritama.

1.1 Klasifikacija iterativnih postupaka

Kao što je već rečeno, osnovna ideja iterativnih metoda za rešavanje problema (1.1) je formiranje niza realnih brojeva $\{x_n\}$ koji treba da konvegira rešenju, tj. treba da važi

$$\lim_{n\to\infty}\{x_n\} = \alpha.$$

Skup pravila kojim se generiše niz $\{x_n\}$ naziva se iterativno pravilo ili iterativna šema, a iterativni metod skraćeno se zapisuje pomoću svoje iterativne funkcije koju ćemo u nastavku označavati sa φ.

Iterativni postupci mogu se klasifikovati na više načina uvažavajući različite kriterijume, ali ovde će biti prikazana najčešće navođena i opšteprihvaćena klasifikacija koju uvodi Traub u [4]. Tako po Traubu možemo razlikovati sledeće tipove iterativnih postupaka.

- Ako postupak ima formu
$$x_{n+1} = \varphi(x_n), \tag{1.2}$$
tj. ako se za izračunavanje svake naredne iteracije x_{n+1} koriste samo informacije iz tekuće iteracije x_n, odnosno samo vrednosti $f(x_n)$ ili vrednosti nekog izvoda funkcije f u tački x_n, onda ovakav metod nazivamo *jednotačkasti* ili *jednokoračni metod bez memorije.*

- Ako se postupak može opisati iterativnom funkcijom oblika
$$x_{n+1} = \varphi(x_n; x_{n-1}, ..., x_{n-k}), \tag{1.3}$$
odnosno ako izračunavanje x_{n+1} uključuje informacije iz tekuće i k prethodnih iteracija, ovakav postupak nazivamo *jednotačkasti* ili *jednokoračni postupak sa memorijom.* Znak ; odvaja argumente koji se koriste prvi put (x_n) i one čije su informacije već korišćene za računanje prethodnih iteracija.

- Ako se za izračunavanje x_{n+1} koriste informacije $\omega_1(x_n), \omega_2(x_n), ..., \omega_k(x_n)$, (funkcije sa istim argumentom x_n) gde je $k \geq 1$, onda iterativna funkcija

$$x_{n+1} = \varphi(x_n, \omega_1(x_n), \omega_2(x_n), ..., \omega_k(x_n)) \tag{1.4}$$

  određuje takozvani *višetačkasti* ili *višekoračni metod bez memorije.*

- Neka je φ iterativna funkcija čiji su argumenti z_i gde svako z_i predstavlja $k+1$ veličinu x_i, $\omega_1(x_i)$,...,$\omega_k(x_i)$. Tada iterativna funkcija

$$x_{n+1} = \varphi(z_n; z_{n-1}, ..., z_{n-k}) \tag{1.5}$$

  opisuje *višetačkasti* ili *višekoračni metod sa memorijom*, gde se sa ; odvajaju nove informacije od onih koje se ponovo koriste.

U ovoj disertaciji obrađuju se postupci bez memorije, i to uglavnom višekoračni postupci iz klase (1.4) zbog njihove veće efikasnosti u odnosu na jednokoračne metode. Od jednokoračnih postupaka oblika (1.2) veća pažnja biće posvećena samo Njutnovom metodu jer on predstavlja osnovu za konstrukciju najvećeg broja poznatih višekoračnih postupaka sa ili bez memorije. Vrlo značajni radovi novijeg datuma koji predstavljaju sveobuhvatniji pregled višekoračnih metoda sa ili bez memorije razvijenih u proteklih pedesetak godina su knjiga [5] čiji su autori M. Petković, B. Neta, LJ. Petković, J. Džunić, rad [6] istih autora i doktorska disertacija J. Džunić [7].

1.2 Osobine iterativnih postupaka: red konvergencije, efikasnost i optimalnost

Problem koji posmatramo u radu je određivanje realnog broja α koji predstavlja rešenje nelinearne jednačine

$$f(x) = 0, \quad f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \tag{1.6}$$

gde je f dovoljno puta diferencijabilna funkcija na D, a D neki otvoreni interval za koji važi $\alpha \in D$. Takođe, podrazumevaćemo da je α izolovano rešenje jednačine, tj. da postoji $\epsilon > 0$ za koje važi da je α jedino rešenje u $[\alpha - \epsilon, \alpha + \epsilon] \subset D$.

Definicija 1.1 [8] *Broj α je rešenje višestrukosti m jednačine $f(x) = 0$ ako je*

$$f(x) = (x - \alpha)^m g(x), \quad g(\alpha) \neq 0, \tag{1.7}$$

pri čemu je funkcija $g(x)$ ograničena u tački α.

Ako su izvodi funkcije $f, f', f'', ..., f^{(m-1)}, f^{(m)}$, definisani u tački α, onda je

$$f'(\alpha) = f''(\alpha) = ... = f^{(m-1)}(\alpha) = 0, \quad \text{a} \quad f^{(m)}(\alpha) \neq 0.$$

Ako je $m = 1$, onda broj α nazivamo *jednostruko* ili *prosto* rešenje, a ako je $m > 1$, rešenje je *višestruko*. Iako višestrukost rešenja može biti u opštem slučaju realan broj, u radu će se pažnja posvetiti slučaju $m \in \mathbb{N}$.

Važna karakteristika iterativnih postupaka je brzina konvergencije koja se meri redom konvergencije. Red konvergencije iterativnog postupka se može definisati na sledeći način.

Definicija 1.2 *Neka je $\alpha \in \mathbb{R}$ i $\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha$. Ako postoje konstante $p > 1$, $C \geq 0$ i ceo broj $N \geq 0$ takav da za svako $n \geq N$ važi*

$$|x_{n+1} - \alpha| \leq C|x_n - \alpha|^p, \tag{1.8}$$

tada kažemo da niz $\{x_n\}$ konvergira ka α sa redom barem p.

S druge strane, u pojedinim radovima poput [9, 10, 11] definicija reda konvergencije iterativnih postupaka ima sledeći oblik.

Definicija 1.3 *Ako iterativni metod generiše niz x_n koji konvergira ka α tako da važi*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - \alpha}{(x_n - \alpha)^p} = C \tag{1.9}$$

za neko $C \neq 0$ i $p \geq 1$, onda kažemo da metod ima red konvergencije (order of convergence) jednak p, a konstanta C se naziva asimptotska konstanta greške (asymptotic error constant). Specijalno, za $p = 1$, $p = 2$ ili $p = 3$ kažemo da metod konvergira linearno, kvadratno ili kubno, respektivno.

Ako se sa e_n označi greška $n-$te aproksimacije, tj. $e_n = x_n - \alpha$, onda se formula (1.9) može zapisati u obliku $\lim_{n\to\infty} \frac{e_{n+1}}{(e_n)^p} = C$, a jednačina oblika

$$e_{n+1} = Ce_n^p + O(e_n^{p+1}) \tag{1.10}$$

naziva se jednačina greške (*error equation*).

U literaturi je poznato nekoliko načina kako se red konvergencije posmatranih postupaka numerički proverava na test funkcijama. Na primer, Virakun[2] i Fernando [12] numerički proveravaju teorijske rezultate određivanjem vrednosti

[2] Weerakoon

takozvanog *računskog reda konvergencije* (*computational order of convergence - COC*), definisanog formulom

$$\mathrm{COC} = \frac{\ln|(x_{n+1}-\alpha)/(x_n-\alpha)|}{\ln|(x_n-\alpha)/(x_{n-1}-\alpha)|}, \tag{1.11}$$

gde su x_{n+1}, x_n i x_{n-1} tri uzastopne iteracije u blizini rešenja α.

Glavni nedostatak ove formule je što zahteva poznavanje tačnog rešenja α. Zato se ona uglavnom koristi da bi se numerički potvrdio teorijski izveden red konvergencije gde je α unapred poznat broj, a može se koristiti i kada je α izračunato sa većom preciznošću (većim brojem sigurnih cifara) u odnosu na iteracije x_n. Od većeg praktičnog značaja su sledeće formule koje aproksimiraju vrednost COC-a

$$\mathrm{COC} \approx \frac{\ln|f(x_{n+1})/f(x_n)|}{\ln|f(x_n)/f(x_{n-1})|}, \tag{1.12}$$

i

$$\mathrm{COC} \approx \frac{\ln|(x_{n+1}-x_n)/(x_n-x_{n-1})|}{\ln|(x_n-x_{n-1})/(x_{n-1}-x_{n-2})|}, \tag{1.13}$$

jer one ne zahtevaju unapred poznatu vrednost rešenja. Više detalja o osobinama formula (1.11) i (1.13) i njihova veza sa teorijski određenim redom konvergencije p, kao i još neke formule za aproksimiranje COC vrednosti, mogu se naći u [13]. Ako je $p \in \mathbb{N}$, onda je relativno jednostavno ustanoviti red konvergencije datog postupka i bez upotrebe navedenih formula jer je broj tačnih decimala vrednosti greške e_n približno p puta manji od broja tačnih decimala greške naredne iteracije x_{n+1}.

Iako je jedan od osnovnih ciljeva istraživača konstrukcija iterativnih postupaka sa velikim redom konvergencije, ovakvi postupci zahtevaju veći broj informacija u pogledu izračunavanja vrednosti izvoda višeg reda posmatrane funkcije, ili izračunavanje vrednosti funkcije u više tačaka u okviru iste iteracije, a sve ovo utiče na računsku složenost postupka i može da umanji njegovu efikasnost ili čak onemogući praktičnu primenu algoritma. Zato se kao mera efikasnosti postupaka koriste indeksi

$$I = \frac{p}{q} \qquad \text{(Traub [4])} \tag{1.14}$$

i

$$E = p^{\frac{1}{q}} \qquad \text{(Ostrovski [3])}, \tag{1.15}$$

gde q predstavlja broj izračunavanja funkcije f ili nekog njenog izvoda u okviru jedne iteracije. Indeks (1.14) u literaturi je poznat kao *informacijska efikasnost*

(*informational efficiency*), ali se ređe koristi u odnosu na *indeks efikasnosti* (*efficiency index*)(1.15) koji je opšte prihvaćen kao jedan od najvažnijih kriterijuma za upoređivanje iterativnih metoda.

S obzirom na činjenicu da su vrednosti p i q međusobno zavisne, prirodno se postavlja sledeće pitanje: Ako je broj funkcijskih izračunavanja po iteraciji fiksiran, koji je maksimalan red konvergencije koji postupak može da dostigne? Kada su u pitanju jednokoračni postupci bez memorije (1.2), odgovor na ovo pitanje je dao Traub [4] u vidu dve teoreme (jedna se odnosi na jednostruke nule funkcije f, a druga na višestruke nule poznate višestrukosti m). On dokazuje da jednokoračni postupak zasnovan na n funkcijskih izračunavnja, ne može imati red konvergencije veći od n. Osim toga, Traub dokazuje da za proizvoljan red konvergencije p uvek postoji jednokoračna iterativna funkcija φ, koja mora zavisiti od prvih $p-1$ izvoda funkcije f (u slučaju višestrukih nula φ zavisi i od m), tako da važi $I(\varphi) = p/q = 1$.

Sa druge strane, za višekoračne postupke bez memorije za traženje prostih nula 1974. godine Kung i Traub [14] iznose svoju poznatu hipotezu.

Hipoteza Kunga i Trauba. *Red konvergencije višekoračnog iterativnog postupka koji zahteva* $n+1$ *funkcijskih izračunavanja po iteraciji, mora biti manji ili jednak sa* 2^n.

Ova pretpostavka do danas nije ni dokazana, niti oborena, pa se zato u literaturi postupci koji dostižu red konvergencije 2^n sa $n+1$ funkcijskih izračunavanja po iteraciji nazivaju *optimalnim*. Brojna naučna istraživanja iz ove oblasti su usmerena na razvijanje optimalnih metoda. Analiza optimalnosti nekih postojećih metoda i konstrukcija novih optimalnih iterativnih pravila prikazani su u narednim poglavljima.

Osim navedenih osobina, analiza kvaliteta iterativnih postupaka često podrazumeva i ispitivanje računske složnosti algoritama, odnosno broja aritmetičkih operacija neophodnih za izvršavanje jedne iteracije, ili broja izračunavanja izvoda višeg reda posmatrane funkcije. Komplikovane forme algoritama ili traženje izvoda višeg reda mogu znatno da uspore proces traženja rešenja, i pored moćnih računara i softvera koji se danas koriste. Zato se u disertaciji proučavaju isključivo višekoračni postupci koji ne zahtevaju računanje drugog, trećeg ili nekog izvoda funkcije većeg reda, dok se pri konstrukciji iterativne funkcije φ koriste jednostavne funkcije polinomnog i racionalnog tipa. Sem toga, kod numeričkog upoređivanja i testiranja posmatranih postupaka, u tabelama je prikazano i vreme potrebno računaru za izvršavanje algoritama.

1.3 Postupci za traženje jednostrukih rešenja

1.3.1 Jednokoračni postupci za traženje jednostrukih rešenja

U ovom delu biće predstavljeni najznačajniji jednokoračni iterativni postupci za određivanje jednostrukih rešenja nelinearne jednačine $f(x) = 0$. Ova grupa postupaka čini bazu za razvoj složenijih formi iterativnih metoda kao što su višekoračni metodi ili metodi za traženje višestrukih rešenja.

Jedan od najpoznatijih jednokoračnih iterativnih postupaka je Njutnov ili Njutn-Rafsonov[3] metod. Ovaj metod generiše niz tačaka $\{x_n\}$ po sledećem iterativnom pravilu

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \tag{1.16}$$

Njutnov metod zasnovan je na aproksimaciji funkcije $f(x_n)$ linearnom funkcijom u blizini rešenja α, gde se za linearnu funkciju uzima tangenta na krivu $f(x_n)$ u tački $(x_n, f(x_n))$. S obzirom na to da je koeficijent pravca posmatrane tangente $f'(x_n)$, jednačina tangente može se napisati u obliku

$$y - f(x_n) = f'(x_n)(x - x_n). \tag{1.17}$$

Ako važi $f'(x_n) \neq 0$, naredna aproksimacija rešenja x_{n+1} se dobija određivanjem preseka date tangente i x-ose, tj. rešavanjem jednostavnog sistema čije su jednačine $y = 0$ i (1.17), odakle sledi iterativno pravilo (1.16). Slika 1.1 predstavlja grafičku ilustraciju opisanog postupka.

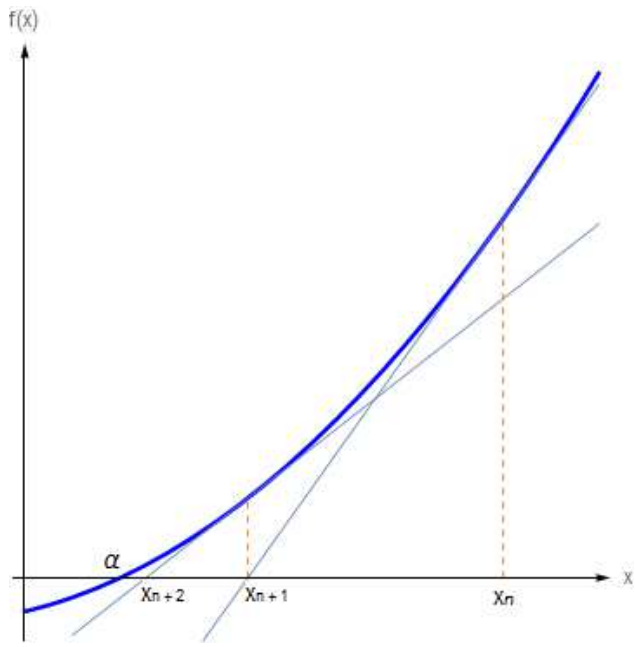
Ako je α prosta nula funkcije $f(x)$ definisane i dovoljan broj puta diferencijabilne na nekom otvorenom intervalu $D \subset \mathbb{R}$, onda je Njutnov metod kvadratno konvergentan za dovoljno dobro izabranu početnu aproksimaciju x_0. To se lako može pokazati koristeći Tejlorov[4] razvoj funkcije f u okolini tačke α

$$\begin{aligned} f(x_n) &= f(\alpha) + f'(\alpha)(x_n - \alpha) + \frac{f''(\alpha)}{2!}(x_n - \alpha)^2 + ... + \frac{f^{(k)}(\alpha)}{k!}(x_n - \alpha)^k \\ &\quad + O((x_n - \alpha)^{k+1}). \end{aligned} \tag{1.18}$$

S obzirom na to da je α jednostruka nula funkcije imamo $f(\alpha) = 0$ i $f'(\alpha) \neq 0$, pa uvodeći oznaku $e_n = x_n - \alpha$, jednakost (1.18) se može zapisati u sledećem obliku

$$f(x_n) = f'(\alpha)\big(e_n + c_2 e_n^2 + c_3 e_n^3 + ... + c_k e_n^k\big) + O(e_n^{k+1}), \tag{1.19}$$

[3] Raphson [4] Taylor



Slika 1.1: Njutnov metod

gde je

$$c_i = \frac{f^{(i)}(\alpha)}{i! f'(\alpha)}.$$

Tejlorov razvoj prvog izvoda funkcije f u okolini tačke α može se zapisati kao

$$f'(x_n) = f'(\alpha)\big(1 + 2c_2 e_n + 3c_3 e_n^2 + ... + kc_k e_n^{k-1}\big) + O(e_n^k). \tag{1.20}$$

Iz (2.3) i (1.20) lako je pokazati da važi

$$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = e_n - c_2 e_n^2 + 2(c_2^2 - c_3)e_n^3 + (c_2 c_3 - 4c_2^3 - 3c_4)e_n^4 + ... \tag{1.21}$$

pa se na osnovu (1.16) dobija jednačina greške Njutnovog iterativnog postupka

$$e_{n+1} = c_2 e_n^2 + O(e_n^3), \tag{1.22}$$

ili u drugačije zapisanom obliku

$$x_{n+1} - \alpha = \frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)}(x_n - \alpha)^2 + O((x_n - \alpha)^3).$$

Prethodna jednačina jasno ukazuje na kvadratnu konvergenciju Njutnovog postupka. Da bi se postigla ova konvergencija, dovoljno je da funkcija f bude dva puta diferencijabilna na D i da $|f''(\alpha)| < \infty$, mada se na funkciju f mogu nametnuti i slabiji uslovi [8].

S druge strane, da bi Njutnov postupak konvergirao ka rešenju, početna aproksimacija x_0 mora biti dovoljno dobro izabrana. Na primer, ukoliko je x_0 odabrano tako je prvi izvod funkcije u toj tački jednak ili skoro jednak nuli, može doći do usporavanja konvergencije ili divergencije postupka, a za funkciju $f(x)$ koja ima više nula, može se desiti da niz aproksimacija ne konvergira ka najbližoj nuli funkcije u odnosu na početnu aproksimaciju x_0, već ka nekoj drugoj nuli.

Ali i pored navedenih nedostataka, Njutnov metod predstavlja osnovu za konstrukciju najraznovrsnijih modifikacija i unapređenih algoritama. Jedan od najpoznatijih je Stefensenov[5] metod [15]

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)^2}{f(x_n + f(x_n)) - f(x_n)}. \tag{1.23}$$

Ovo iterativno pravilo se direktno dobija iz Njutnovog (1.16) aproksimacijom prvog izvoda

$$f'(x_n) \approx \frac{f(x_n + f(x_n)) - f(x_n)}{f(x_n)}.$$

Postoji i uopšteni Stefensenov postupak (poznat i pod imenom Traub-Stefensenov postupak [4]) oblika

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\gamma f(x_n)^2}{f(x_n + \gamma f(x_n)) - f(x_n)}, \tag{1.24}$$

gde je $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Oba metoda su kvadratno konvergentna, a njihova prednost u odnosu na Njutnov metod je u tome što uopšte ne zahtevaju izračunavanje izvoda funkcije. Zato se iteraivna pravila (1.23) i (1.24) koriste kao osnova za razvoj čitave klase višekoračnih metoda koji ne zahtevaju računanje izvoda - *derivative free methods* [16, 17, 18, 19, 20, 21, 22].

S druge strane, Njutnov metod (1.16) može se modifikovati u metod oblika

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{C}. \tag{1.25}$$

C predstavlja konstantnu vrednost kojom se aproksimira prvi izvod funkcije, ili na primer, može biti jednom izračunat prvi izvod funkcije u početnoj tački x_0.

[5] Steffensen

Postupci ovog tipa poznati su pod imenom *pojednostavljeni Njutnovi postupci* (*simplified Newton methods*). Konvergencija postupka (1.25) za $C = f'(x_0)$ je linearna. Više o osobinama pojednostavljenog Njutnovog postupka može se naći u [8, 23].

Još jedan vrlo popularan metod može da se posmatra kao modifikacija Njutnovog metoda (1.16). To je *metod sečice* (*secant method*) gde se $f'(x_n)$ aproksimira podeljenom razlikom $f[x_n, x_{n-1}] = (f(x_n) - f(x_{n-1}))/(x_n - x_{n-1})$, pa je odgovarajući algoritam dat sledećom formulom

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} f(x_n).$$

Iako je očigledno da metod sečice nije postupak bez memorije jer zahteva informacije iz prethodne iteracije, u praksi se može kombinovati sa Njutnovim metodom radi konstrukcije višekoračnih postupaka bez memorije većeg reda konvergencije [10, 24, 25].

Narednih nekoliko jednokoračnih postupaka su trećeg reda konvergencije, pa shodno Traubovoj teoremi zahtevaju računanje drugog izvoda funkcije. Zapravo, nekoliko poznatih metoda iz ove klase mogu se prikazati uopštenom formulom

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\lambda f(x_n)}{f'(x_n) \pm \sqrt{(\lambda - 1)^2 f'(x_n)^2 - \lambda(\lambda - 1) f(x_n) f''(x_n)}}, \tag{1.26}$$

gde je λ realan parametar različit od 0 i 1. Metod (1.26) naziva se Lagerov[6] metod, a za specijalno izabrane vrednosti parametra λ dobijaju se poznati postupci: Ojler[7]-Košijev[8] za $\lambda = 2$, Halejev[9] metod za $\lambda \to 0$ [26], metod Ostrovskog za $\lambda \to \infty$ [3], Hansen-Patrikov[10] metod za $\lambda = 1/\beta + 1$ i $\beta \neq 0$ [27]. Za $\lambda = 1$ Lagerov metod (1.26) svodi se na Njutnov (1.16). Više detalja o navedenim postupcima trećeg reda biće u odeljku koji se odnosi na višestruka rešenja gde su prikazane generalizovane verzije ovih algoritama.

1.3.2 Višekoračni postupci za traženje jednostrukih rešenja

S obzirom na to da jednokoračni metodi imaju teorijska ograničenja opisana u Traubovoj teoremi, veći red konvergencije postiže se korišćenjem višekoračnih metoda. Osim toga, višekoračni metodi ne zahtevaju računanje izvoda višeg reda funkcije da bi se dostigao odgovarajući red konvergencije. To je razlog

[6] Laguerre [7] Euler [8] Cauchy [9] Halley [10] Patrick

zašto se ovakvi postupci intenzivnije proučavaju od jednokoračnih. Imajući u vidu da se postupci za traženje višestrukih rešenja, što je i glavni predmet proučavanja disertacije, gotovo uvek zasnivaju na postupcima za jednostruka rešenja, u okviru ovog odeljka prikazaćemo samo najznačajnije metode za jednostruka rešenja ili one koje imaju poznatu generalizovanu verziju za određivanje višestrukih rešenja.

Ostrovski je 1960. godine u [3] objavio poznati dvokoračni postupak koji se može zapisati u obliku

$$\begin{aligned} y_n &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \\ x_{n+1} &= y_n - \frac{f(y_n)}{f'(x_n)} \cdot \frac{f(x_n)}{f(x_n) - 2f(y_n)}. \end{aligned} \tag{1.27}$$

Ovo je prvi višekoračni postupak koji ispunjava kriterijume optimalnosti u smislu Kung-Traubove hipoteze, iako je ona objavljena kasnije, 1974. godine. S obzirom na to da metod zahteva tri funkcijska izračunavanja po iteraciji, i da dostiže maksimalni 4. red kovergencije, indeks efikasnosti metoda iznosi 1.5874, što je bolje u odnosu na Njutnov postupak čiji je indeks 1.4142. Nekoliko različitih načina za izvođenje postupka Ostrovskog opisano je u [5].

Nekoliko godina potom, Traub [4] detaljnije izučava dvokoračne postupke trećeg reda konvergencije i svojim novim pristupom u analizi iterativnih metoda, značajno utiče na razvoj ove oblasti. Zanimljivo je zapaziti da su mnogi postupci trećeg reda konvergencije koji su objavljivani nekoliko decenija nakon publikovanja Traubove knjige, zapravo samo ponovo otkriveni Traubovi postupci. Ova interesantna pojava opisana je u [28, 29].

Dvokoračni postupak trećeg reda konvergencije zapisan u obliku

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{\frac{1}{2}(f'(x_n) + f'(x_n - u(x_n)))},$$

gde je $u(x) = f(x)/f'(x)$, brojni autori referišu kao postupak Virakuna i Fernanda [12]. Međutim, ovaj metod je takođe jedan od ponovo otkrivenih Traubovih postupaka, konstruisan sa idejom da se prvi izvod iz Njutnove iterativne formule zameni aritmetičkom sredinom izvoda izračunatog u tačkama x_n i $x_n - u(x_n)$. Ukoliko se umesto aritmetičke sredine koristi neka druga sredina (npr. harmonijska, geometrijska,...) dobijaju se novi postupci trećeg reda konvergencije sa indeksom efikasnosti 1.4422. Ovakvi metodi su u literaturi poznati kao metodi zasnovani na sredinama - *mean based methods* [9, 30, 31, 32, 33, 34]. Iako

zauzimaju značajno mesto u ovoj oblasti, ovi postupci se dalje neće razmatrati jer nisu optimalni.

Pomenuti optimalni metod Ostrovskog (1.27) može se generalizovati na sledeći način

$$\begin{aligned} y_n &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \\ x_{n+1} &= y_n - \frac{f(y_n)}{f'(x_n)} \cdot \frac{f(x_n) + \beta f(y_n)}{f(x_n) + (\beta - 2) f(y_n)}, \end{aligned} \tag{1.28}$$

gde je $\beta \in \mathbb{R}$. Ovu familiju optimalnih postupaka četvrtog reda konvergencije konstruisao je 1973. godine King [35], a lako je primetiti da se metod (1.27) dobija za $\beta = 0$. Osim toga, i za Kingov metod karakteristično je da su početkom 21. veka prezentovani metodi koji predstavljaju specijalne slučajeve (1.28). Tako se na primer, za $\beta = 1$ dobija metod Kou-Li-Vanga[11] [36], za $\beta = 2$ metod Čuna[12] [37], za $\beta = (2\gamma - 1)/2$ metod Čuna i Hama [38]. Pojedine generalizacije i modifikacije Kingovog postupka mogu se naći u [39, 40, 41].

Svi prethodno navedeni dvokoračni metodi kao prvi korak u iterativnoj šemi koriste Njutnov korak. Nešto drugačiji pristup izneo je Džarat[13] [42, 43] koji umesto kvadratno konvergentnog Njutnovog koraka koristi linearno konvergentni prvi korak (Džaratov korak), te tako razvija optimalni postupak četvrtog reda sledećeg oblika

$$\begin{aligned} y_n &= x_n - \frac{2}{3} \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \\ x_{n+1} &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \cdot \frac{3f'(y_n) + f'(x_n)}{6f'(y_n) - 2f'(x_n)}. \end{aligned} \tag{1.29}$$

Uopšteni Džaratov postupak može se napisati u obliku

$$\begin{aligned} y_n &= x_n - \frac{2}{3} \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \\ x_{n+1} &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} g(t_n), \end{aligned} \tag{1.30}$$

gde je $t_n = f'(y_n)/f'(x_n)$. Funkcija poput g čiji je argument količnik vrednosti funkcije ili vrednosti nekog izvoda funkcije (uglavnom prvog izvoda) u različitim tačkama iste iteracije u literaturi se nazivaju *težinske funkcije* (*weight functions*).

[11] Wang [12] Chun [13] Jarratt

Ukoliko funkcija $g(t_n)$ zadovoljava uslove

$$g(1) = 1, \quad g'(1) = -\frac{3}{4}, \quad g''(1) = \frac{9}{4} \quad \text{i} \quad |g'''(1)| < \infty, \tag{1.31}$$

onda je postupak (1.30) optimalnog četvrtog reda konvergencije sa indeksom efikasnosti 1.5874 [5]. Postupci sa prvim korakom kao kod iterativne šeme (1.30) nazivaju se Džaratovi/Džaratovski postupci ili postupci Džaratovog tipa.

Na sličan način se mogu uopštiti i dvokoračni postupci Njutnovog tipa. Ako je sada $t_n = f(y_n)/f(x_n)$, onda metod

$$\begin{aligned} y_n &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \\ x_{n+1} &= y_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} g(t_n), \end{aligned} \tag{1.32}$$

dostiže optimalni četvrti red pod uslovom da za težinsku funkciju g važi

$$g(0) = 1, \quad g'(0) = 2 \quad \text{i} \quad |g''(0)| < \infty. \tag{1.33}$$

U poslednjih petnaestak godina razvijeni su brojni trokoračni metodi koji imaju za cilj povećanje reda konvergencije gde se kao prva dva koraka koriste dvokoračne iterativne šeme oblika (1.30) i (1.32). Na primer, uz dodatno izračunavanje funkcije, konstruisano je nekoliko trokoračnih metoda Njutnovog tipa optimalnog osmog reda konvergencije [44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51]. S obzirom na to da ovi postupci zahtevaju četiri funkcijska izračunavanja po iteraciji (tri vrednosti funkcije i jedan prvi izvod), njihov indeks efikasnosti iznosi 1.6818. Ovde je umesto pojedinačnih Njutnovih postupaka osmog reda prikazana klasa postupaka u obliku

$$\begin{aligned} y_n &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \\ z_n &= y_n - \frac{f(y_n)}{f'(x_n)} g(t_n), \\ x_{n+1} &= z_n - \frac{f(z_n)}{f'(x_n)} h(t_n, s_n), \end{aligned} \tag{1.34}$$

gde su $t_n = f(y_n)/f(x_n)$ i $s_n = f(z_n)/f(y_n)$. Zapravo, ovaj metod dostiže optimalni osmi red ako su g i h realne funkcije čiji je Tejlorov razvoj sledećeg

oblika

$$\begin{aligned} g(t) &= 1 + 2t + \frac{a}{2}t^2 + \frac{b}{6}t^3 + ... \\ h(t,s) &= 1 + 2t + s + \frac{a+2}{2}t^2 + 4ts + \frac{c}{2}s^2 + \frac{6a+b-24}{6}t^3 + ... \end{aligned}$$

gde su a, b i c proizvoljne konstante. U praksi se najčešće biraju jednostavne funkcije g i h (uglavnom polinomnog ili racionalnog tipa) da se ne bi povećavala računska složenost algoritama. Formulacija i dokaz teoreme o osmom redu konvergencije familije postupaka (1.34) data je u [7].

Interesantno je zapaziti da, nasuprot opisanim metodima Njutnovog tipa, za sada nisu poznati optimalni trokoračni metodi Džaratovog tipa za jednostruka rešenja, to jest, nije poznato da se dvokoračni postupak (1.30) može nadograditi trećim korakom tako da se, uz dodatno funkcijsko izračunavanje, dobije postupak osmog reda. Na ovaj način dobijeni su Džaratovski postupci najviše šestog reda [52, 53, 54, 55]. Džaratovski postupci još većeg reda [56, 57] takođe ne zadovoljavaju kriterijume optimalnosti.

1.4 Postupci za traženje višestrukih rešenja

Ako je α višestruko rešenje nelinearne jednačine $f(x) = 0$, tada su prethodno opisani postupci za traženje prostih rešenja uglavnom neodgovarajući. Najčešće se dešava da su tada ovakvi postupci samo linearno konvergentni, ili uopšte ne konvergiraju ka posmatranoj višestrukoj nuli. Zato je uobičajeno da se opisani postupci generalizuju i modifikuju da bi ostvarili isti red konvergencije i u slučaju višestrukih nula.

Osim standardne podele na jednokoračne i višekoračne, postupci za traženje višestrukih rešenja razlikuju se i po tome da li je višestrukost (najčešće označena sa m) poznata unapred ili je nepoznata. Ako je nepoznata, tada se može definisati nova funkcija $F(x) = f(x)/f'(x)$ za koju iz (1.7) važi da je α njena prosta nula [5], pa se na funkciju $F(x)$ mogu primenjivati prethodno opisani postupci za nalaženje prostih rešenja. Tako na primer, primenjujući Njutnov metod (1.16) na $F(x)$, Šreder[14] [58] izvodi iterativnu formulu

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)f'(x_n)}{f'(x_n)^2 - f(x_n)f''(x_n)},$$

koja generiše kvadratno konvergentan niz koji teži višestrukoj nuli α.

[14] Schröder

Ukoliko je višestukost m unapred poznata, moguće je konstruisati efikasnije iterativne metode većeg reda. U narednim odeljcima biće predstavljeni najznačajniji postupci za poznato m. U daljem radu posmatraćemo slučaj $m \in \mathbb{N}$. Postupci za određivanje m mogu se naći u [11, 59], a slučajevi realne višestrukosti detaljnije su obrađeni u [60].

1.4.1 Jednokoračni postupci za traženje višestrukih rešenja

Na osnovu (1.22) očigledno je da je Njutnov metod (1.16) kvadratno konvergentan kada je reč o traženju prostog rešenja nelinearne jednačine, ali u slučaju višestrukog rešenja, ovaj postupak je linearan. Da bi se očuvala kvadratna konvergencija kada je rešenje α poznate višetrukosti $m > 1$, neophodno je modifikovati postupak (1.16), što se može uraditi na sledeći način (vidi [58, 61])

$$x_{n+1} = x_n - m\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \tag{1.35}$$

U literaturi se ovaj metod za traženje višestrukih rešenja može sresti pod nekoliko različitih naziva - modifikovani Njutnov metod, Šrederov metod, Ralov[15] metod.

Sledeća grupa jednokoračnih metoda trećeg reda konvergencije predstavlja generalizaciju Legerovog metoda (1.26) i može se zapisati u obliku

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\lambda\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}{1 + sgn(\lambda - m)\sqrt{(\frac{\lambda-m}{m})\big((\lambda-1) - \lambda\frac{f(x_n)f''(x_n)}{f'(x_n)^2}\big)}}, \tag{1.36}$$

gde je λ realni parametar za koji važi $\lambda \neq 0$ i $\lambda \neq m$. Slično kao i kod metoda za jednostruka rešenja, i ovde se za specijalan izbor parametra λ dobijaju sledeći poznati postupci.

- Za $\lambda = 2m$ dobijamo Ojler-Košijev metod

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2m\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}{1 + \sqrt{(2m-1) - 2m\frac{f(x_n)f''(x_n)}{f'(x_n)^2}}}.$$

[15] Rall

- Za $\lambda = m(1/\beta + 1)$ dobijamo Hansen-Patrikov metod [27, 62]

$$x_{n+1} = x_n - \frac{m(\beta+1)\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}{\beta + \sqrt{m(\beta+1) - \beta - m(\beta+1)\frac{f(x_n)f''(x_n)}{f'(x_n)^2}}}.$$

- Za $\lambda \to 0$ imamo Halajev metod

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}{\frac{m+1}{2m} - \frac{f(x_n)f''(x_n)}{2f'(x_n)^2}}.$$

- Za $\lambda \to \infty$ imamo metod Ostrovskog

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\sqrt{m}\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}{\sqrt{1 - \frac{f(x_n)f''(x_n)}{f'(x_n)^2}}}.$$

Više o ovoj značajnoj familiji postupaka može se naći u [63, 64].
Osim Legerove familije postupaka, poznati su i metod Ojler-Čebiševa[16]

$$x_{n+1} = x_n - \Big(\frac{m(3-m)}{2} + \frac{m^2 f(x_n)f''(x_n)}{2f'(x_n)^2}\Big)\frac{f(x_n)}{f'(x_n)},$$

i Osadin metod [65]

$$x_{n+1} = x_n - m(m+1)\frac{f(x_n)}{2f'(x_n)} + (m-1)^2\frac{f'(x_n)}{2f''(x_n)}.$$

Za sve navedene postupke iz Lagerove familije, kao i za metod Ojler-Čebiševa i metod Osade, važi da dostižu treći red konvergencije, što je u skladu sa Traubovom teoremom optimalnosti jednokoračnih postupaka za traženje višestrukih rešenja. Mogućnosti za ubrzanje ovih postupaka i povećanje reda konvergencije pomoću generatora iterativnih metoda detaljnije su razmotreni u [7, 66].

1.4.2 Višekoračni postupci za traženje višestrukih rešenja

Slično kao i u slučaju određivanja prostih nula funkcije, Traubova teorema postavlja granice efikasnosti jednokoračnih postupaka za nalaženje višestrukih

[16] Chebyshev

rešenja, pa se efikasniji postupci dobijaju konstrukcijom višekoračnih iterativnih pravila. Brojni višekoračni postupci za traženje višestrukih nula razvijeni su modifikovanjem ili uopštavanjem višekoračnih metoda za traženje jednostrukih rešenja (npr. [67, 68, 69, 70, 71]). U nastavku će biti prikazani samo postupci visoke efikasnosti koji će se analizirati i upoređivati sa originalnim postupcima opisanim u kasnijim poglavljima.

Jedan od prvih optimalnih dvokoračnih metoda četvrtog reda konvergencije za višestruke nule 2009. godine razvijaju Li, Liao i Čeng[17] [72]. Metod zahteva jedno izračunavanje funkcije i dva izvoda funkcije po iteraciji i ima sledeću strukturu

$$\begin{aligned} y_n &= x_n - \frac{2m}{m+2}\cdot\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \\ x_{n+1} &= x_n - \frac{\frac{1}{2}m(m-2)\left(\frac{m}{m+2}\right)^{-m} f'(y_n) - \frac{m^2}{2} f'(x_n)}{f'(x_n) - \left(\frac{m}{m+2}\right)^{-m} f'(y_n)}\cdot\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \end{aligned} \tag{1.37}$$

U daljem radu ovaj metod će biti označen sa **LLC**.

Slične performanse ima i metod Šarme[18] i Šarme[19] [73] objavljen 2010. godine u obliku

$$\begin{aligned} y_n &= x_n - \frac{2m}{m+2}\cdot\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \\ x_{n+1} &= x_n - k_1\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - k_2\frac{f(x_n)}{f'(y_n)} - k_3\frac{f(x_n)f'(x_n)}{f'(y_n)^2}, \end{aligned} \tag{1.38}$$

gde koeficijenti k_1, k_2 i k_3 zadovoljavaju jednakosti $k_1 = \frac{1}{8}m(m^3 - 4m + 8)$, $k_2 = -\frac{1}{4}m(m-1)(m+2)^2\left(\frac{m}{m+2}\right)^m$ i $k_3 = \frac{1}{8}m(m+2)^3\left(\frac{m}{m+2}\right)^{2m}$. Za ovaj metod koristiće se oznaka **ShSh**.

Godinu dana kasnije, grupa autora Čou[20], Čen[21] i Song [74] razvija generalizovani metod

$$\begin{aligned} y_n &= x_n - \frac{2m}{m+2}\cdot\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \\ x_{n+1} &= x_n - Q\left(\frac{f'(y_n)}{f'(x_n)}\right)\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \end{aligned} \tag{1.39}$$

gde funkcija $Q(\cdot) \in C^2(\mathbb{R})$ obezbeđuje četvrti red konvergencije ako zadovoljava sledeće uslove:

$$Q(u) = m,\ Q'(u) = -\frac{1}{4}m^{3-m}(m+2)^m \ \text{ i } \ Q''(u) = \frac{1}{4}m^4\left(\frac{m}{m+2}\right)^{-2m}, \tag{1.40}$$

[17] Cheng [18] J.R. Sharma [19] R. Sharma [20] Zhou [21] Chen

za $u = \left(\frac{m}{m+2}\right)^{m-1}$. Primetimo da se za $m = 1$ ovaj postupak svodi na uopšteni Džaratov postupak za jednostruke nule (1.30). U daljem radu koristiće se specijalan član ove familije postupaka (u oznaci **ZCS**) sa polinomnom funkcijom $Q(t) = k_1t^2 + k_2t + k_3$, gde su koeficijenti dati sa

$$k_1 = \frac{1}{8}m^4\Big(\frac{m+2}{m}\Big)^{2m}, \qquad k_2 = -\frac{1}{4}m^3(m+3)\Big(\frac{m+2}{m}\Big)^{m},$$

$$k_3 = \frac{1}{8}m(m^3 + 6m^2 + 8m + 8).$$

2013. godine, Ri[22] i Kim predstavljaju još uopšteniju familiju postupaka četvrtog reda [75]. Iz ove familije odabrana su dva reprezentativna metoda, predložena i numerički testirana u izvornom radu. Prvi metod sa oznakom **RK1** ima sledeći oblik

$$\begin{aligned} y_n &= x_n - \Big(\frac{2m}{m+2} + \frac{h^3}{h+1}\Big)h, \\ x_{n+1} &= x_n - h(Av^2 + Bv + C), \end{aligned} \tag{1.41}$$

gde su

$$h = \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad v = \frac{f'(y_n)}{f'(x_n)}, \quad \rho = \Big(\frac{m}{m+2}\Big)^{m-1},$$

$$A = \frac{(m(m+2))^2}{8\rho^2}, B = \frac{m^2(m+2)(m+3)}{-4\rho} \text{ i } C = \frac{m(m^3+6m^2+8m+8)}{8},$$

dok drugi metod **RK2** ima formu

$$\begin{aligned} y_n &= x_n - \Big(\frac{2m}{m+2} + \frac{h^3}{h+1}\Big)h, \\ x_{n+1} &= x_n - h\Big(\frac{A + Bv^3}{C + v^3}\Big), \end{aligned} \tag{1.42}$$

gde su

$$A = \frac{\rho^3 m(m^2+4)}{2(m+4)}, \quad B = -\frac{m(m^2-8)}{2(m+4)} \text{ i } C = -\frac{\rho^3(m-2)}{m+4}.$$

Uopšteni postupak Bela[23], Kordera[24], Moce[25] i Toregrose[26] objavljen 2015. godine, izveden je modifikovanjem poznatih postupaka Haleja i Šredera, tj. odgovarajućom aproksimacijom drugog izvoda funkcije [76]. Takođe je optimalan

[22] Rhee [23] Behl [24] Cordero [25] Motsa [26] Torregrosa

u smislu Kung-Traubove hipoteze, a osnovna iterativna šema izgleda ovako

$$\begin{aligned} y_n &= x_n - \frac{2m}{m+2}\cdot\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \\ x_{n+1} &= x_n - \Big(\frac{2ma_1 f(x_n)}{(3m-2)f'(x_n)+(m+2)a_2 f'(y_n)} \\ &\quad + \frac{ma_3 f(x_n)}{(m-2)a_4 f'(x_n)+(m+2)a_5 f'(y_n)}\Big), \end{aligned} \tag{1.43}$$

gde su

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{2-3m}{2(m^3(m-2)a_4+u(m^4+2m^3-4m^2+16)a_5)} \\ &\quad \cdot\frac{(m^2(m-2)a_4+u(m^3+4m^2-8)a_5)^3}{(m-2)^2m^3a_4^2+2m^3u(m^2-4)a_4a_5+u^2(m+2)^2(m^3-4m+8)a_5^2}, \\ a_2 &= \frac{-m^2(\frac{m}{m+2})^{1-m}(3m-2)((m-2)a_4+(m+2)ua_5)}{m^3(m-2)a_4+u(m^4+2m^3-4m^2+16)a_5}, \\ a_3 &= \frac{-(m-2)(m(m-2)a_4+u(m+2)^2a_5)^3}{2((m-2)^2m^3a_4^2+2m^3u(m^2-4)a_4a_5+u^2(m+2)^2(m^3-4m+8)a_5^2)}, \end{aligned}$$

za $u = \left(\frac{m}{m+2}\right)^m$, a koeficijenti a_4 i a_5 se mogu proizvoljno odabrati. Za specijalno izabrane koeficijente a_4 i a_5 dobijaju se pojedini prethodno opisani postupci (npr. za $a_5 = 0$ i $a_4 \neq 0$ algoritam (1.43) svodi se na (1.37)). Osim ovog specijalnog slučaja, u radu će se razmatrati i metod sa oznakom **BKMT** koji dobijamo za $a_4 = -u(m+2)^2$ i $a_5 = -1$.

Lako je primetiti da svi do sada navedeni postupci u ovom odeljku imaju nekoliko zajedničkih osobina. Svi postupci zahtevaju izračunavanje $f(x_n)$, $f'(x_n)$ i $f'(y_n)$ i sa ova tri funkcijska izračunavanja dostižu optimalni četvrti red. Shodno tome, indeks efikasnosti za sve postupke je 1.5874. Osim toga svi postupci su dvokoračni gde je prvi korak linearni, odnosno još preciznije prvi korak je Džaratovog tipa (sa izuzetkom blago modifikovanih RK-metoda) jer za $m = 1$ dobijamo klasičan Džaratov korak poput prvog koraka iz postupka (1.29).

Nešto drugačiji pristup pri konstrukciji prvog koraka uvode Kanvar[27], Batia[28] i Kansal [77]. Poznato je da u situaciji kada je vrednost $f'(x_n)$ jednaka nuli ili kada je veoma bliska nuli, postoje različite poteškoće u ponašanju algoritama koje dovode do divergencije ili konvergencije ka rešenjima udaljenim u odnosu na početnu aproksimaciu x_0. Osnovna ideja je da se Džaratov korak izmeni modifikovanjem imenioca, tj. uvođenjem slobodnog parametra p_n čija se vrednost

[27] Kanwar [28] Bhatia

može menjati iz iteracije u iteraciju tako što se bira p_n za koje se dobija imenilac najveće apsolutne vrednosti. Iterativna šema izgleda ovako

$$\begin{aligned} y_n &= x_n - \frac{2m}{m+2} \cdot \frac{f(x_n)}{f'(x_n) - p_n f(x_n)}, \\ x_{n+1} &= x_n - Q\Big(\frac{f'(y_n) + k_1 f'(x_n)}{k_2 f'(x_n) - p_n f(x_n)}\Big) \frac{f(x_n)}{f'(x_n) - p_n f(x_n)}, \end{aligned} \tag{1.44}$$

gde realna funkcija $Q(\cdot)$ obezbeđuje četvrti red konvergencije ako zadovoljava uslove

$$Q(u) = m, \;\; Q'(u) = -\frac{m^3}{4(1+m)}\big(\frac{m}{m+2}\big)^{-m} \;\text{ i }\; Q''(u) = \frac{m^4}{4(1+m)^2}\big(\frac{m}{m+2}\big)^{-2m}$$

za $k_1 = -\big(\frac{m}{m+2}\big)^m$, $k_2 = 1/(m+1)$ i $u = \frac{2(m+1)}{m}\big(\frac{m}{m+2}\big)^m$. Primetimo da za $p_n = 0$ prvi korak postaje standardan Džaratov korak kao u prethodno predstavljenim metodima. U daljem radu koristiće se vrednosti $p_n = 1$ ili $p_n = -1$ kao što sugerišu i autori izvornog rada [77]. Takođe, za dalju analizu su odabrana dva posebna postupka iz familije (1.44) koja su pokazala najbolje numeričke rezultate u istraživanju Čuna i Nete [78] iz 2015. godine. Prvi postupak je određen funkcijom $Q(t) = a_1 + a_2/t$, gde je

$$a_1 = -\frac{m(m-2)}{2} \quad \text{i} \quad a_2 = m(m+1)\Big(\frac{m}{m+2}\Big)^m,$$

a drugi sa $Q(t) = b_1 + b_2 \cdot (t + b_3)^{-2}$, gde je

$$b_1 = -\frac{3}{8}m^2 + m, \;\; b_2 = \frac{27}{8}(m+1)^2\Big(\frac{m}{m+2}\Big)^{2m} \;\text{ i }\; b_3 = \frac{m+1}{m}\Big(\frac{m}{m+2}\Big)^m,$$

u oznakama **KBK1** i **KBK2** redom.

Za razliku od do sada navedenih postupaka Džaratovog tipa, naredne dve familije dvokoračnih postupaka su zasnovane na modifikovanom Njutnovom metodu (1.35). Obe familije su objavljene 2013. godine.

Prvu ovakvu familiju razvili su Liu i Čou [79], a odgovarajuća iterativna šema izgleda ovako

$$\begin{aligned} y_n &= x_n - m\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \\ x_{n+1} &= y_n - m \cdot Q(w_n)\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \end{aligned} \tag{1.45}$$

gde je $w_n = \sqrt[m-1]{f'(y_n)/f'(x_n)}$, a funkcija $Q(\cdot)$ zadovoljava uslove

$$Q(0) = 0, \quad Q'(0) = 1, \quad Q''(0) = 4m/(m-1) \quad \text{i} \quad |Q'''(0)| < \infty. \tag{1.46}$$

U daljem radu koristiće se dve posebno izabrane funkcije $Q(\cdot)$, od kojih je prva neznatno izmenjena u odnosu na funkciju $Q(\cdot)$ iz [79], gde su kroz numeričke testove pokazale optimalne rezultate. To su

$$Q(w_n) = w_n + \frac{2m}{m-1} w_n^2 + k w_n^3 \quad \text{i} \quad Q(w_n) = \frac{(m-1)w_n}{m-1-2mw_n}, \tag{1.47}$$

redom označene sa **LZ1** i **LZ2**, a k je proizvoljan realan broj.

Drugu familiju dvokoračnih postupaka sa modifikovanim Njutnovim prvim korakom razvili su Čou, Čen i Song [80]. Generalizovana iterativna šema izgleda ovako

$$\begin{aligned} y_n &= x_n - m\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \\ x_{n+1} &= y_n - m \cdot G(w_n)\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \end{aligned} \tag{1.48}$$

gde je $w_n = \sqrt[m]{f(y_n)/f(x_n)}$, a funkcija $G(\cdot)$ zadovoljava uslove

$$G(0) = 0, \quad G'(0) = 1, \quad G''(0) = 4 \quad \text{i} \quad |G'''(0)| < \infty. \tag{1.49}$$

U daljem radu za numeričko upoređivanje postupaka posmatraće se dve funkcije iz [80]

$$G(w_n) = k w_n^3 + 2w_n^2 + w_n \quad \text{i} \quad G(w_n) = \frac{w_n}{(1-w_n)^2}, \tag{1.50}$$

gde je $k \in \mathbb{R}$, a odgovarajući metodi su redom označeni sa **ZCS1** i **ZCS2**.

Naučna istraživanja u ovoj oblasti dovela su i do postupaka šestog reda konvergencije. Jednu takvu klasu postupaka razvili su Geum, Kim i Neta 2015. godine [81]. To je uopšteni dvokoračni metod koji zahteva dva izračunavanja funkcije i dva prva izvoda,

$$\begin{aligned} y_n &= x_n - m\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \\ x_{n+1} &= y_n - Q(u_n, s_n)\frac{f(y_n)}{f'(y_n)}, \end{aligned} \tag{1.51}$$

gde su

$$u_n = \Big(\frac{f(y_n)}{f(x_n)}\Big)^{\frac{1}{m}} \quad \text{i} \quad s_n = \Big(\frac{f'(y_n)}{f'(x_n)}\Big)^{\frac{1}{m-1}}.$$

Da bi navedeni metod dostigao šesti red konvergencije, funkcija $Q(\cdot,\cdot)$ treba da zadovolji sledeće:

$$Q_{00} = m, \quad Q_{01} = -2m(m-1), \quad Q_{02} = m + Q_{20} + \frac{m-1}{2}(Q_{03} + Q_{12} + Q_{21} + Q_{30}),$$

$$Q_{10} = -Q_{01} \quad \text{i} \quad Q_{11} = -(3m + Q_{02} + Q_{20}),$$

gde je $Q_{ij} = \frac{1}{i!j!}\frac{\partial^{i+j}}{\partial u^i \partial s^j} Q(u,s)|_{(u=0,s=0)}$ za $0 \le i, j \le 4$.

Za potrebe daljeg istraživanja, koristićemo dva predstavnika ove familije koja su kroz niz numeričkih testova pokazala najbolje rezultate u originalnom radu. Prvi takav postupak označen je sa **GKN1a** [81, str.391, slučaj 1C] gde je

$$Q(u_n, s_n) = m(1 + 2(m-1)(u_n - s_n) - 2u_n^2 - s_n^2),$$

a drugi označen sa **GKN2a** [81, str.391, slučaj 2A] određen je funkcijom

$$Q(u_n, s_n) = \frac{m + \frac{2m}{m-1}u_n}{1 - \frac{2m(m-2)}{m-1}u_n + 2(m-1)s_n + 3s_n u_n}.$$

Isti autori 2016. godine predstavljaju još jednu familiju postupaka šestog reda [82]. Za razliku od prethodne, ova grupa postupaka je trokoračna i zahteva izračunavanje jednog prvog izvoda i tri vrednosti funkcije po iteraciji

$$\begin{aligned} y_n &= x_n - m\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \\ w_n &= x_n - m \cdot Q(s_n)\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \\ x_{n+1} &= x_n - m \cdot K(s_n, v_n)\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \end{aligned} \tag{1.52}$$

gde su

$$s_n = \Big(\frac{f(y_n)}{f(x_n)}\Big)^{\frac{1}{m}} \quad \text{i} \quad v_n = \Big(\frac{f(w_n)}{f(x_n)}\Big)^{\frac{1}{m}}.$$

Ako za Tejlorov razvoj funkcije $Q(\cdot)$ u okolini 0 važi

$$Q(s) = A_0 + A_1 s + A_2 s^2 + A_3 s^3 + A_4 s^4 + A_5 s^5 + ...$$

gde je $A_j = \frac{Q^{(j)}(0)}{j!}$ za $0 \leq j \leq 5$, a za Tejlorov razvoj funkcije $K(\cdot,\cdot)$ u okolini $(0,0)$ važi

$$K(s,v) = K_{00}+K_{10}s+K_{20}s^2+K_{30}s^3+K_{40}s^4+K_{50}s^5+(K_{01}+K_{11}s+K_{21}s^2)v+...$$

gde je $K_{ij} = \frac{1}{i!j!}\frac{\partial^{i+j}}{\partial s^i \partial v^j}K(s,v)|_{(s=0,v=0)}$ za $0 \leq i \leq 5, 0 \leq j \leq 1$, onda sledeći uslovi obezbeđuju dostizanje šestog reda konvergencije:

$$A_0 = A_1 = 1,\ \ A_2 = 2,\ |A_3| < \infty,\ |A_4| < \infty,\ |A_5| < \infty,\ K_{00} = K_{10} = K_{01} = 1,$$

$$K_{11} = K_{20} = 1,\ \ K_{30} = A_3,\ \ K_{40} = A_4,\ \ |K_{50}| < \infty \ \text{ i } \ |K_{21}| < \infty.$$

I u slučaju ove familije postupaka, izabrana su dva predstavnika sa najboljim teorijskim i numeričkim performansama. Reč je o metodu **GKN1b** [82, str.126, slučaj 5XF], definisanom sa

$$\begin{aligned} Q(s_n) &= \frac{5-14s_n+6s_n^2}{5-19s_n+15s_n^2}, \\ K(s_n,v_n) &= \frac{5-14s_n+6s_n^2}{5-19s_n+15s_n^2-(5-14s_n)v_n}, \end{aligned}$$

i metodu **GKN2b** [82, str.127, slučaj 5YD], gde su

$$\begin{aligned} Q(s_n) &= \frac{(s_n-2)(2s_n-1)}{(s_n-1)(5s_n-2)}, \\ K(s_n,v_n) &= \frac{(s_n-2)(2s_n-1)}{(s_n+v_n-1)(5s_n-2)}. \end{aligned}$$

Lako je primetiti da familije postupaka (1.51) i (1.52) nisu optimalne u smislu Kung-Trauba, ali s obzirom na to da se odnose na određivanje višestrukih rešenja nelinearne jednačine, imaju visok indeks efikasnosti 1.5651.

Glava 2

Optimalnost Njutnovih metoda za traženje višestrukih rešenja

U okviru ovog poglavlja biće detaljnije analizirani postupci Liu-Čoua (1.45) i Čou-Čen-Songa (1.48), sa posebnim osvrtom na njihov red konvergencije i osobine optimalnosti. S obzirom na to da se obe familije postupaka zasnivaju na Njutnovom prvom koraku, to jest da je prvi korak u iteraciji kvadratno konvergentan, za dostizanje četvrtog reda konvergencije u drugom koraku ovi postupci zahtevaju korišćenje m-tog korena (ili $(m-1)$-og korena) odgovarajuće težinske funkcije, što može da bude uzrok problema u konvergenciji postupka koji se koristi za određivanje realnog višestrukog rešenja nelinearne jednačine $f(x) = 0$. Zato će se u narednim odeljcima ponašanje ovih postupaka razmatrati odvojeno kroz slučajeve kada je višestrukost m parna ili neparna.

2.1 Optimalnost Liu-Čou metoda

Liu i Čou su razvili dvokoračni iterativni postupak (1.45) za određivanje višestrukih rešenja nelinearne jednačine, a da bi posmatrani metod dostigao optimalni četvrti red konvergecije, oni daju dovoljne uslove u formi naredne teoreme.

Teorema 2.1 [79] *Neka je $\alpha \in \mathbb{R}$ višestruki koren višestrukosti m dovoljno puta diferencijabilne funkcije $f : D \to \mathbb{R}$ na otvorenom intervalu D. Ako je početna aproksimacija rešenja x_0 dovoljno blizu α, i ako važe uslovi* (1.46)*, onda je red*

konvergencije metoda (1.45) *najmanje četiri, a odgovarajuća jednačina greške*

$$\begin{aligned} e_{n+1} &= \frac{1}{6(m-1)^2m^3}\Big(\big(3(m^3+8m^2+m+2)-(m-1)^2Q'''(0)\big)c_1^3 \\ &\quad -6(m-1)m^2c_1c_2\Big)e_n^4+O(e_n^5). \end{aligned} \tag{2.1}$$

Simbolom e_n predstavljena je greška n-te iteracije, tj. $e_n = x_n - \alpha$, dok je

$$c_i = \frac{m!}{(m+i)!}\cdot\frac{f^{(m+i)}(\alpha)}{f^{(m)}(\alpha)} \tag{2.2}$$

za $i \geq 1$. Navedena teorema je dokazana, a jednačina greške (2.1) izvedena u radu [79].

Sa druge strane, u okviru ovog odeljka biće pokazano da postoji klasa dovoljno puta diferencijabilnih nelinearnih funkcija sa korenom α čija je višestrukost m neparna, gde metod (1.45) ne dostiže četvrti red konvergencije i pored činjenice da su svi uslovi Teoreme 2.1 zadovoljeni. Kao posledica ove činjenice sledi da Teorema 2.1 ne garantuje optimalnost postupka.

Zbog svega navedenog, podsetićemo se najbitnijih koraka i ukazati na nedostatke u dokazu Teoreme 2.1, a notacija biće slična onoj iz originalnog rada [79]. Iz Tejlorovog razvoja $f(x_n)$ i $f'(x_n)$ u okolini tačke α imamo

$$f(x_n) = \frac{f^{(m)}(\alpha)}{m!}e_n^m\big(1+c_1e_n+c_2e_n^2+c_3e_n^3+O(e_n^4)\big), \tag{2.3}$$

$$f'(x_n) = \frac{f^{(m)}(\alpha)}{(m-1)!}e_n^{m-1}\big(1+\frac{m+1}{m}c_1e_n+\frac{m+2}{m}c_2e_n^2+\frac{m+3}{m}c_3e_n^3+O(e_n^4)\big), \tag{2.4}$$

$$\begin{aligned} \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} &= \frac{1}{m}e_n-\frac{c_1}{m^2}e_n^2+\frac{c_1^2(m+1)-2mc_2}{m^3}e_n^3 \\ &\quad +\frac{c_1c_2m(3m+4)-3m^2c_3-(m+1)^2c_1^3}{m^4}e_n^4+O(e_n^5), \end{aligned} \tag{2.5}$$

$$\begin{aligned} y_n-\alpha &= \frac{c_1}{m}e_n^2-\frac{(m+1)c_1^2-2mc_2}{m^2}e_n^3 \\ &\quad +\frac{(m+1)^2c_1^3-(3m+4)mc_1c_2+3m^2c_3}{m^3}e_n^4+O(e_n^5). \end{aligned} \tag{2.6}$$

Iz (2.4) i (2.6) dobijamo

$$\begin{aligned} f'(y_n) &= \frac{f^{(m)}(\alpha)}{(m-1)!} e_n^{2(m-1)} \Big(\frac{c_1}{m}\Big)^{m-1} \Big[1 + \frac{m-1}{mc_1}(2mc_2 - (m+1)c_1^2)e_n \\ &+ \frac{1}{2m^2c_1^2}\Big(2(m+1)c_1^4 + m(m-1)((m+1)^2c_1^4 - 2m(2m+1)c_1^2c_2 \\ &+ 4m(m-2)c_2^2 + 6mc_1c_3\Big)e_n^2 + O(e_n^3)\Big], \end{aligned} \tag{2.7}$$

a posle deljenja sa $f'(x_n)$, imamo sledeći rezultat

$$\frac{f'(y_n)}{f'(x_n)} = e_n^{m-1}\Big(\frac{c_1}{m}\Big)^{m-1}\big(1 + \psi_1 e_n + \psi_2 e_n^2 + O(e_n^3)\big), \tag{2.8}$$

gde su

$$\begin{aligned} \psi_1 &= 2(m-1)\frac{c_2}{c_1} - (m+1)c_1, \\ \psi_2 &= 3\frac{c_3}{c_1}(m-1) + 2\frac{c_2^2}{c_1^2}(m-2)(m-1) - m(2m+1)c_2 \\ &+ \frac{(m+1)(m+2)(m^2+1)}{2m^2}c_1^2. \end{aligned}$$

Pošto je argument funkcije $Q(\cdot)$ oblika $w_n = \sqrt[m-1]{f'(y_n)/f'(x_n)}$, koristeći (2.8) i Tejlorov razvoj u okolini α, Liu i Čou u [79] dobijaju w_n sledećeg oblika

$$\begin{aligned} w_n &= \frac{c_1}{m}\Big(e_n + \frac{\psi_1}{m-1}e_n^2 - \frac{(m-2)\psi_1^2 - 2(m-1)\psi_2}{2(m-1)^2}e_n^3 \\ &+ \frac{(m-2)\psi_1((2m-3)\psi_1^2 - 6(m-1)\psi_2}{6(m-1)^3}e_n^4 + O(e_n^5)\Big). \end{aligned} \tag{2.9}$$

Međutim, glavna primedba vezana za dokaz teoreme odnosi se upravo na jednakost (2.9). Naime, ova jednakost nije ispunjena za svaku dovoljno puta diferencijabilnu funkciju $f(x)$, čak ni u slučaju kada je početna iteracija x_0 veoma blizu rešenja α. Ako je višestrukost m neparna ($m-1$ je paran broj), i ukoliko je $e_nc_1 < 0$, onda w_n mora biti pozitivno, tako da w_n ima oblik

$$\begin{aligned} w_n &= -\frac{c_1}{m}e_n\Big(1 + \frac{\psi_1}{m-1}e_n - \frac{(m-2)\psi_1^2 - 2(m-1)\psi_2}{2(m-1)^2}e_n^2 \\ &+ \frac{(m-2)\psi_1((2m-3)\psi_1^2 - 6(m-1)\psi_2}{6(m-1)^3}e_n^3 + O(e_n^4)\Big). \end{aligned} \tag{2.10}$$

Ako je sada izabrana funkcija $Q(w_n)$ tako da zadovoljava uslove (1.46), onda iz (2.5), (2.6) i (2.10) sledi da je

$$e_{n+1} = \frac{2c_1}{m}e_n^2 + \frac{4m(m-1)c_2 - 2(m^2+2m-1)c_1^2}{m^2(m-1)}e_n^3 + O(e_n^4). \quad (2.11)$$

Prethodni rezultat ukazuje da ovakav iterativni korak obezbeđuje samo kvadratnu konvergenciju, umesto očekivanu konvergenciju četvrtog reda.

Ako za potrebe dalje analize uvedemo oznaku

$$A = \big(3(m^3+8m^2+m+2) - (m-1)^2 Q'''(0)\big)c_1^2 - 6(m-1)m^2 c_2,$$

onda jednačinu greške (2.1) možemo pisati u obliku

$$e_{n+1} = \frac{1}{6(m-1)^2 m^3} c_1 A \cdot e_n^4 + O(e_n^5). \quad (2.12)$$

Kada je višestrukost m neparna, red konvergencije postupka (1.45) zavisi od vrednosti koeficijenta A. Na primer, neka je A negativan broj i neka je početna aproksimacija x_0 izabrana veoma blizu α tako da važi $e_0 c_1 > 0$ (e_0 predstavlja grešku početne aproksimacije). Tada izračunavanje $(m-1)$-og korena količnika definisanog sa (2.8) dovodi do w_n određenog formulom (2.9), a greška prve iteracije x_1 može se izraziti pomoću (2.12) na sledeći način

$$e_1 \approx \frac{1}{6(m-1)^2 m^3} c_1 A \cdot e_0^4.$$

Pošto je $A < 0$, greška e_1 mora biti suprotnog znaka u odnosu na c_1, pa u narednom iterativnom koraku imamo da je $e_1 c_1 < 0$. Odavde sledi da je računanje narednog $(m-1)$-og korena količnika (2.8), umesto formulom (2.9), određeno formulom (2.10), pa je greška druge iteracije

$$e_2 \approx \frac{2c_1}{m} e_1^2 + O(e_1^3). \quad (2.13)$$

Iz (2.13) je jasno da je $e_2 c_1 > 0$, pa se u narednoj iteraciji za računanje w_n koristi (2.9), što za posledicu ima da ova iteracija opet ima grešku oblika (2.1), tj. može se reći da je iteracija opet četvrtog reda.

Ovo naizmenično smenjivanje iteracija drugog i četvrtog reda ponavlja se sve dok se na zadovolji odgovarajući zaustavni kriterijum. To zapravo znači da konvergencija niza aproksimacija $\{x_n\}$ ka α generisana algoritmom (1.45)

neće biti četvrtog reda, odnosno, postupak (1.45) ne zadovoljava kriterijume optimalnosti za neparnu višestrukost m ako je $A < 0$.

Sa druge strane, Teorema 2.1 ipak obezbeđuje optimalnost postupka za svako parno m. Isto tako, posmatrani postupak je optimalnog četvrtog reda i za svako neparno $m > 1$ ako za funkcije $f(x)$ i $Q(\cdot)$ važi da je $A > 0$.

2.2 Optimalnost Čou-Čen-Song metoda

Familija iterativnih postupaka (1.48) predstavljena je u radu Čoua, Čena i Songa, gde se u okviru sledeće teoreme dokazuje četvrti red konvergencije.

Teorema 2.2 [*80*] *Neka je $\alpha \in \mathbb{R}$ višestruki koren višestrukosti m dovoljno puta diferencijabilne funkcije $f : D \to \mathbb{R}$ na otvorenom intervalu D. Ako je početna aproksimacija rešenja x_0 dovoljno blizu α, i ako važe uslovi* (1.49)*, onda je red konvergencije metoda* (1.48) *najmanje četiri, a jednačina greške je data sa*

$$e_{n+1} = \frac{1}{6m^3}\Big(\big(3m + 27 - G'''(0)\big)c_1^3 - 6mc_1c_2\Big)e_n^4 + O(e_n^5). \tag{2.14}$$

Prema ovoj teoremi i Kung-Traubovoj hipotezi, postupak (1.48) je optimalan pošto je za ostvarivanje konvergencije četvrtog reda potrebno dva izračunavanja funkcije i jedno izračunavanje prvog izvoda po iteraciji. Međutim, na sličan način kao kod postupka (1.45), u daljoj analizi pokazaćemo da Teorema 2.2 ne važi za neke nelinearne funkcije sa višestrukim korenom α parne višestrukosti m.

S obzirom na to da je modifikovani Njutnov korak (1.35) prvi korak iterativne šeme (1.48) kao i u slučaju metoda (1.45), možemo iskoristiti rezultate (2.3), (2.4), (2.5) i (2.6) iz prethodnog odeljka za potrebe dalje analize. Tako iz (2.3) and (2.6) dobijamo

$$\begin{aligned} f(y_n) \;=\; & \frac{f^{(m)}(\alpha)}{m!}e_n^{2m}\Big(\frac{c_1}{m}\Big)^m\Big[1 + \frac{2mc_2 - (m+1)c_1^2}{c_1}e_n \\ & + \frac{1}{2mc_1^2}\Big((m^3 + 3m^2 + 3m + 3)c_1^4 - 2m(2m^2 + 3m + 2)c_1^2c_2 \\ & + 4m^2(m-1)c_2^2 + 6m^2c_1c_3\Big)e_n^2 + O(e_n^3)\Big]. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Sada iz (2.15) i (2.3) imamo

$$\begin{aligned}\frac{f(y_n)}{f(x_n)} &= e_n^m\Big(\frac{c_1}{m}\Big)^m\Big[1+\frac{2mc_2-(m+2)c_1^2}{c_1}e_n \\ &+\frac{1}{2mc_1^2}\Big((m+1)^2(m+3)c_1^4-2m(2m^2+5m+3)c_1^2c_2 \\ &+4m^2(m-1)c_2^2+6m^2c_1c_3\Big)e_n^2+O(e_n^3)\Big]. \qquad (2.16)\end{aligned}$$

Za svako neparno m (uključujući i $m=1$), kao i za svako parno m za koje važi $c_1e_n>0$, m-ti koren količnika (2.16) se može izraziti kao

$$\begin{aligned}w_n &= e_n\frac{c_1}{m}\Big[1+\Big(\frac{2c_2}{c_1}-\frac{(m+2)c_1}{m}\Big)e_n \\ &+\frac{(2m^2+7m+7)c_1^3-2m(3m+7)c_1c_2+6m^2c_3}{2m^2c_1}e_n^2+O(e_n^3)\Big]. \qquad (2.17)\end{aligned}$$

Na osnovu (2.5), (2.17) i Tejlorovog razvoja funkcije $G(w_n)$ u okolini nule, iz drugog koraka iterativne šeme (1.48) dobijamo jednačinu greške (2.14), koja se može zapisati i u sledećem obliku

$$e_{n+1} = \frac{1}{6m^3}c_1\hat{A}e_n^4+O(e_n^5), \qquad (2.18)$$

gde je $\hat{A}=-6mc_2+c_1^2(3(m+9)-G'''(0))$.

Međutim, kada je višestrukost m paran broj, a pri tome je $c_1e_n<0$, m-ti koren izraza (2.16) ima drugačiji oblik

$$\begin{aligned}w_n &= -e_n\frac{c_1}{m}\Big[1+\Big(\frac{2c_2}{c_1}-\frac{(m+2)c_1}{m}\Big)e_n \\ &+\frac{(2m^2+7m+7)c_1^3-2m(3m+7)c_1c_2+6m^2c_3}{2m^2c_1}e_n^2+O(e_n^3)\Big], \qquad (2.19)\end{aligned}$$

jer vrednost w_n mora biti pozitivna. U ovom slučaju, za funkciju $G(w_n)$ koja zadovoljava uslove (1.49), posle uvrštavanja (2.6), (2.16) i (2.19) u drugi korak algoritma (1.48), dobijamo tek kvadratno konvergentan iterativni korak izražen jednačinom

$$e_{n+1} = \frac{2c_1}{m}e_n^2+\frac{8mc_2-4(m+3)c_1^2}{2m^2}e_n^3+O(e_n^4). \qquad (2.20)$$

Dakle, kada je višestrukost korena α paran broj, konvergencija Čou-Čen-Song postupka zavisi od odgovarajućeg koeficijenta $\hat{A}$ definisanog formulom (2.18). Ako je $\hat{A} > 0$, postupak je optimalnog četvrtog reda. Ako je $\hat{A} < 0$, lako je pokazati na isti način kao i za Liu-Čou postupak, da iterativno pravilo (1.48) naizmenično generiše korake drugog i četvrtog reda, i da shodno tome Čou-Čen-Song postupak gubi karakteristike optimalnosti.

2.3 Numerički rezultati

U prethodna dva odeljka razmatrani su red konvergencije i optimalnost Liu-Čou (1.45) i Čou-Čen-Song postupka (1.48). U okviru ovog odeljka kroz nekoliko konkretnih primera biće potvrđena prethodna teorijska analiza. Osim toga, neki značajni predstavnici ovih familija biće numerički upoređivani sa ostalim optimalnim postupcima četvrtog reda.

Tabela 2.1 Numerički rezultati za $f(x) = x^3(x-1)^2$, $\alpha = 0$, $m = 3$ i $x_0 = -0.5$

metod LZ1 za $k = 15$ ($A = -300$)			metod LZ1 za $k = 1$ ($A = 1044$)		
i	$x_i - \alpha$	$\lvert f(x_i)\rvert$	i	$x_i - \alpha$	$\lvert f(x_i)\rvert$
1	-0.010718	$1.2578 \cdot 10^{-6}$	1	-0.021346	$1.1015 \cdot 10^{-5}$
2	$9.6869 \cdot 10^{-9}$	$9.0898 \cdot 10^{-25}$	2	$-5.8496 \cdot 10^{-7}$	$2.0016 \cdot 10^{-19}$
3	$-1.2511 \cdot 10^{-16}$	$1.9585 \cdot 10^{-48}$	3	$-3.7728 \cdot 10^{-25}$	$5.3702 \cdot 10^{-74}$
4	$2.2689 \cdot 10^{-64}$	$1.1679 \cdot 10^{-191}$	4	$-6.5284 \cdot 10^{-98}$	$2.7824 \cdot 10^{-292}$
5	$-6.8636 \cdot 10^{-128}$	$3.2334 \cdot 10^{-382}$			

Tabela 2.2 Numerički rezultati za $f(x) = (x^2 - e^x - 3x + 2)^5$, $\alpha = 0.25753...$, $m = 5$ i $x_0 = 1.8$

metod LZ1 za $k = 0$ ($A \approx -6.12$)			metod LZ1 za $k = -1$ ($A \approx 14.84$)		
i	$x_i - \alpha$	$\lvert f(x_i)\rvert$	i	$x_i - \alpha$	$\lvert f(x_i)\rvert$
1	0.025738	$8.5990 \cdot 10^{-6}$	1	0.037103	$5.3260 \cdot 10^{-5}$
2	$-1.2117 \cdot 10^{-4}$	$2.0121 \cdot 10^{-17}$	2	$-2.4923 \cdot 10^{-4}$	$7.4089 \cdot 10^{-16}$
3	$5.0974 \cdot 10^{-20}$	$2.6512 \cdot 10^{-94}$	3	$-2.2463 \cdot 10^{-18}$	$4.4060 \cdot 10^{-86}$
4	$-4.8566 \cdot 10^{-40}$	$2.0814 \cdot 10^{-194}$	4	$-1.4714 \cdot 10^{-74}$	$5.3129 \cdot 10^{-367}$
5	$1.3258 \cdot 10^{-161}$	$3.1559 \cdot 10^{-802}$			

Tabela 2.3 Numerički rezultati za $f(x) = x^3(x-1)^2$, $\alpha = 1$, $m = 2$ and $x_0 = 1.75$

metod ZCS1 za $k = 10$ ($\hat{A} = -297$)			metod ZCS1 za $k = 2$ ($\hat{A} = 153$)		
i	$x_i - \alpha$	$\lvert f(x_i)\rvert$	i	$x_i - \alpha$	$\lvert f(x_i)\rvert$
1	0.05332	0.0033229	1	0.1095	0.016367
2	$-5.789 \cdot 10^{-5}$	$3.3607 \cdot 10^{-9}$	2	$6.764 \cdot 10^{-4}$	$4.5847 \cdot 10^{-7}$
3	$1.009 \cdot 10^{-8}$	$1.0175 \cdot 10^{-16}$	3	$1.993 \cdot 10^{-12}$	$3.9713 \cdot 10^{-24}$
4	$-1.805 \cdot 10^{-31}$	$3.2590 \cdot 10^{-62}$	4	$1.508 \cdot 10^{-46}$	$2.2744 \cdot 10^{-92}$
5	$9.777 \cdot 10^{-62}$	$9.5590 \cdot 10^{-123}$	5	$4.947 \cdot 10^{-183}$	$2.4469 \cdot 10^{-365}$
6	$-1.593 \cdot 10^{-243}$	$2.5387 \cdot 10^{-486}$			

Tabela 2.4 Numerički rezultati za $f(x) = (x^2 - e^x - 3x + 2)^4$, $\alpha = 0.25753...$, $m = 4$ i $x_0 = 2$

metod ZCS1 za $k = 0$ ($\hat{A} \approx -1.29$)			metod ZCS1 za $k = -2$ ($\hat{A} \approx 0.39$)		
i	$x_i - \alpha$	$\lvert f(x_i)\rvert$	i	$x_i - \alpha$	$\lvert f(x_i)\rvert$
1	0.055831	0.0019412	1	0.11229	0.031168
2	$-5.5293 \cdot 10^{-4}$	$1.9060 \cdot 10^{-11}$	2	$-2.0972 \cdot 10^{-3}$	$3.9467 \cdot 10^{-9}$
3	$1.1652 \cdot 10^{-16}$	$3.7575 \cdot 10^{-62}$	3	$-7.9249 \cdot 10^{-15}$	$8.0414 \cdot 10^{-55}$
4	$-2.5375 \cdot 10^{-33}$	$8.4521 \cdot 10^{-129}$	4	$-1.5016 \cdot 10^{-60}$	$1.0365 \cdot 10^{-237}$
5	$5.1894 \cdot 10^{-134}$	$1.4785 \cdot 10^{-531}$			

Metod LZ1 odabran je kao predstavnik familije (1.45) za ispitivanje osobina konvergencije u slučaju određivanja korena neparne višestrukosti. Numerički rezultati za ovaj slučaj predstavljeni su u Tabelama 2.1 i 2.2 za različite vrednosti koeficijenta k. Iako funkcija $Q(w_n)$ zadovoljava uslove (1.46) za svaki realan broj k, to ipak nije dovoljno da bi metod LZ1 bio četvrtog reda konvergencije. Sa leve strane ovih tabela prikazani su rezultati dobijeni za izbor k za koje je $A < 0$, dok su rezultati za izbor k za koje je $A > 0$ dati sa desne strane. Očigledno je da postupci gde je $A < 0$ zaustavni kriterijum zadovoljavaju kasnije, tj. nakon većeg broja iteracija, pa je zato konvergencija postupaka sa leve strane sporija u odnosu na odgovarajuće postupke sa desne strane. Na ova dva primera jednostavno je pratiti konvergenciju po iteracijama posmatranjem eksponenata broja 10 u kolonama koje prikazuju grešku i-te iteracije $x_i - \alpha$ ili kolone vrednosti funkcije i-te iteracije $|f(x_i)|$, naročito kada su tačke x_i veoma blizu korenu α. Naime, poznato je da se kod postupaka sa redom konvergencije p broj tačnih decimala povećava otprilike p puta iz iteracije u iteraciju u blizini tačke α, odnosno broj nula iza decimalnog zareza greške $x_i - \alpha$ se povećava p puta posle svake iteracije. Lako je primetiti da se posle deljenja eksponenata u kolonama $x_i - \alpha$ ili $|f(x_i)|$ dobija broj približno jednak 4 za postupke koji su prikazani sa desne strane. Nasuprot ovome, deljenjem ovih eksponenata kod postupaka na

levoj strani, kao rezultat se dobija naizmenično smenjivanje vrednosti približno jednakih dva i četiri, što jasno ukazuje na neoptimalnost algoritma (1.45) za neparno m kada je $A < 0$. U ovom slučaju, niz aproksimacija $\{x_i\}$ oscilira oko α sve dok se ne zadovolji zaustavni kriterijum. Tabele 2.3 i 2.4 prikazuju slično ponašanje metoda ZCS1 (1.50) kada je višestrukost korena α parna, a vrednost odgovarajućeg koeficijenta $\hat{A}$ negativna. Ovi numerički primeri jasno potvrđuju teorijske zaključke izvedene u prethodnim odeljcima.

Tabela 2.5 Test funkcije

$f(x)$	α	m	x_0
$f_1(x) = (x^2 - e^x - 3x + 2)^5$	0.2575302...	5	1.8
$f_2(x) = (\cos x - x)^3$	0.7390851...	3	2.5
$f_3(x) = 1 - xe^{1-x}$	1.0000000	2	0.5
$f_4(x) = (x^{10} - \sqrt{3}x^3 \cos(\frac{x\pi}{6}) + \frac{1}{x^2+1})(x-1)^5$	1.0000000	6	1.08

Da bi slika o numeričkom ponašanju postupaka (1.45) i (1.48) bila upotpunjena, iskoristićemo nekoliko standardnih test funkcija iz radova [75, 80] prikazanih u Tabeli 2.5, i uporedićemo ih sa rezultatima nekih opisanih postupaka četvrtog reda konvergencije. Kao što se iz Tabele 2.5 vidi, izabrane su četiri test funkcije, dve sa neparnom i dve sa parnom višestrukošću korena. Numerički rezultati su predstavljeni u Tabelama 2.6-2.9, gde su za predstavnike familija (1.45) i (1.48) izabrani metodi LZ1 (za $k = 0$), LZ2, ZCS1 (za $k = 0$) i ZCS2. Oznakom **MNM** obeležen je kvadratno konvergentni modifikovani Njutnov metod (1.35), koji se često koristi kod numeričke komparacije.

Tabele 2.6-2.9 u prvoj koloni prikazuju broj iteracija neophodan da posmatrani metod zadovolji zaustavni kriterijum $|f(x_n)| < 10^{-200}$, gde je maksimalan broj iteracija 100. Zatim su tu kolone koje predstavljaju vrednost greške $|x_i - \alpha|$ i vrednost funkcije $|f(x_i)|$ nakon treće iteracije. Na ovaj način vidi se koliko je svaki metod prišao blizu tačnom rešenju na istom nivou iterativnog procesa, tj. nakon istog broja iteracija. Svaka test funkcija rešavana je po 25 puta izabranim metodom, a prosečno vreme u sekundama prikazano je u petoj koloni označenoj sa CPU. Za numeričku proveru reda konvergencije korišćen je računski red konvergencije COC definisan sa (1.11). Ukoliko metod prevazilazi 100 iteracija ili ako se algoritam zaustavi zbog numeričke singularnosti (*Mathematica* daje rezultate *Indeterminate* ili *Overflow*), tada smatramo da metod divergira za dato x_0, a takav slučaj označavamo simbolima *div* i –.

Tabela 2.6 Numerički rezultati za $f_1(x)$

metod	it	$\lvert x_3-\alpha\rvert$	$\lvert f(x_3)\rvert$	CPU	COC
MNM	6	$4.2743\cdot 10^{-6}$	$1.0991\cdot 10^{-24}$	0.870	2.0000
LLC	4	$3.3967\cdot 10^{-22}$	$3.4830\cdot 10^{-105}$	0.929	4.0000
ShSh	4	$1.4137\cdot 10^{-22}$	$4.3495\cdot 10^{-107}$	0.946	4.0000
ZCS	4	$6.8563\cdot 10^{-23}$	$1.1672\cdot 10^{-108}$	0.943	4.0000
RK1	4	$4.5104\cdot 10^{-16}$	$1.4380\cdot 10^{-74}$	0.920	4.0000
RK2	4	$1.8611\cdot 10^{-15}$	$1.7200\cdot 10^{-71}$	0.960	4.0000
BKMT	4	$3.3319\cdot 10^{-22}$	$3.1636\cdot 10^{-105}$	0.934	4.0000
KBK1	4	$4.0249\cdot 10^{-27}$	$8.1370\cdot 10^{-130}$	0.946	4.0031
KBK2	4	$9.3881\cdot 10^{-28}$	$5.6180\cdot 10^{-133}$	0.947	4.0032
LZ1	5	$5.0974\cdot 10^{-20}$	$2.6512\cdot 10^{-94}$	1.40	6.0718
LZ2	4	$3.5201\cdot 10^{-13}$	$4.1636\cdot 10^{-60}$	1.09	6.0133
ZCS1	3	$4.2578\cdot 10^{-60}$	$1.0780\cdot 10^{-294}$	0.611	4.0004
ZCS2	4	$6.8013\cdot 10^{-32}$	$1.1211\cdot 10^{-153}$	0.873	4.0000

Tabela 2.7 Numerički rezultati za $f_2(x)$

metod	it	$\lvert x_3-\alpha\rvert$	$\lvert f(x_3)\rvert$	CPU	COC
MNM	7	0.00016723	$2.1924\cdot 10^{-11}$	2.91	2.0000
LLC	5	$4.2258\cdot 10^{-15}$	$3.5375\cdot 10^{-43}$	3.55	4.0000
ShSh	5	$4.9948\cdot 10^{-15}$	$5.8414\cdot 10^{-43}$	4.13	4.0000
ZCS	5	$6.7304\cdot 10^{-15}$	$1.4292\cdot 10^{-42}$	4.13	4.0000
RK1	div.	–	–	–	–
RK2	div.	–	–	–	–
BKMT	5	$4.2897\cdot 10^{-15}$	$3.7004\cdot 10^{-43}$	3.79	4.0000
KBK1	4	$7.3185\cdot 10^{-21}$	$1.8375\cdot 10^{-60}$	3.30	4.0000
KBK2	4	$1.3422\cdot 10^{-20}$	$1.1334\cdot 10^{-59}$	3.21	4.0000
LZ1	7	0.18489	0.025967	6.00	4.0000
LZ2	6	0.17199	0.026513	4.96	4.0000
ZCS1	4	$1.4633\cdot 10^{-22}$	$1.4689\cdot 10^{-65}$	2.51	4.0000
ZCS2	4	$2.2723\cdot 10^{-25}$	$5.5003\cdot 10^{-74}$	2.51	4.0000

U Tabelama 2.6 i 2.7 testirani su primeri gde je višestrukost m neparna. Posmatrajući vrednosti iz kolona $|x_3-\alpha|$ i $|f(x_3)|$, lako je primetiti da metodi ZCS1 i ZCS2 konvergiraju brže ka α od ostalih. Konvergencija ovih metoda brža je i u pogledu CPU vremena potrebnog za postizanje zaustavnog kriterijuma, što je interesantna činjenica s obzirom na to da pojedini autori smatraju da računanje m-tog korena u svakoj iteraciji značajno usporava postupak. Ovakvo stanovište demantuju Čun, Neta i Skot[1] u radu [83].

[1] Scott

Tabela 2.8 Numerički rezultati za $f_3(x)$

metod	it	$\lvert x_3-\alpha\rvert$	$\lvert f(x_3)\rvert$	CPU	COC
MNM	7	$1.0630\cdot 10^{-6}$	$5.6499\cdot 10^{-13}$	0.782	2.0000
LLC	4	$1.3815\cdot 10^{-52}$	$9.5425\cdot 10^{-105}$	0.761	4.0000
ShSh	4	$2.0398\cdot 10^{-50}$	$2.0804\cdot 10^{-100}$	0.814	4.0000
ZCS	4	$1.8465\cdot 10^{-46}$	$1.7049\cdot 10^{-92}$	0.831	4.0000
RK1	4	$2.0998\cdot 10^{-32}$	$2.2047\cdot 10^{-64}$	0.874	4.0000
RK2	4	$5.7219\cdot 10^{-33}$	$1.6370\cdot 10^{-65}$	0.878	4.0000
BKMT	4	$1.3815\cdot 10^{-52}$	$9.5425\cdot 10^{-105}$	0.784	4.0000
KBK1	4	$8.2292\cdot 10^{-34}$	$3.3860\cdot 10^{-67}$	0.847	4.0000
KBK2	4	$1.9041\cdot 10^{-32}$	$1.8128\cdot 10^{-64}$	1.26	4.0000
LZ1	4	$7.8987\cdot 10^{-30}$	$3.1195\cdot 10^{-59}$	0.973	4.0000
LZ2	4	$1.4115\cdot 10^{-39}$	$9.9615\cdot 10^{-79}$	0.846	4.0000
ZCS1	4	$8.0997\cdot 10^{-41}$	$3.2803\cdot 10^{-81}$	0.650	4.0000
ZCS2	4	$2.3269\cdot 10^{-49}$	$2.7073\cdot 10^{-98}$	0.682	4.0000

Tabela 2.9 Numerički rezultati za $f_4(x)$

metod	it	$\lvert x_3-\alpha\rvert$	$\lvert f(x_3)\rvert$	CPU	COC
MNM	6	$4.0588\cdot 10^{-9}$	$2.4380\cdot 10^{-50}$	3.63	2.0000
LLC	3	$2.5592\cdot 10^{-55}$	$1.5320\cdot 10^{-327}$	3.55	3.9999
ShSh	3	$3.5306\cdot 10^{-55}$	$1.0563\cdot 10^{-326}$	3.40	3.9999
ZCS	3	$4.4903\cdot 10^{-55}$	$4.4701\cdot 10^{-326}$	3.62	3.9999
RK1	3	$3.7429\cdot 10^{-55}$	$1.4993\cdot 10^{-326}$	3.09	3.9999
RK2	3	$2.1744\cdot 10^{-55}$	$5.7643\cdot 10^{-328}$	3.10	3.9999
BKMT	3	$2.5691\cdot 10^{-55}$	$1.5680\cdot 10^{-327}$	3.63	3.9999
KBK1	3	$3.9386\cdot 10^{-52}$	$2.0359\cdot 10^{-308}$	3.63	3.9998
KBK2	3	$4.2105\cdot 10^{-52}$	$3.0386\cdot 10^{-308}$	3.63	3.9998
LZ1	3	$3.6869\cdot 10^{-51}$	$1.3697\cdot 10^{-302}$	3.69	3.9998
LZ2	3	$1.4482\cdot 10^{-62}$	$5.0302\cdot 10^{-371}$	3.68	4.0000
ZCS1	3	$4.3113\cdot 10^{-54}$	$3.5019\cdot 10^{-320}$	2.12	3.9999
ZCS2	3	$9.6919\cdot 10^{-61}$	$4.5197\cdot 10^{-360}$	2.36	4.0000

Tabele 2.8 i 2.9 prikazuju numeričke rezultate za funkcije sa parnom višestrukošću korena. I pored toga, postupci ZCS1 i ZCS2 dostižu optimalni četvrti red konvergencije i ostvaruju relativno dobre numeričke rezultate u poređenju sa ostalim postupcima. U slučaju parne višestrukosti, optimalnost metoda ZCS1 i ZCS2 postiže se zahvaljujući pozitivnim vrednostima $\hat{A}$. Nasuprot tome, primetimo da su za funkciju $f_1(x)$ COC vrednosti postupaka LZ1 i LZ2 približno jednake 6 (vidi Tabelu 2.6). Nije teško pokazati da ako je zaustavni kriterijum $|f(x_n)| < 10^{-300}$, onda metod LZ2 zahteva još jednu iteraciju, a tada se COC

vrednost menja u 1.3. Ovo se dešava jer je m neparno, a odgovarajući koeficijent A je negativan, tj. metod ne dostiže optimalan četvrti red. Slično tome, ovakve COC vrednosti karakteristične su i za postupke (1.48) kada je m parno a odgovarajuće $\hat{A} < 0$.

Ovo je i glavni nedostatak familije postupaka (1.45) i (1.48). Jedan od mogućih načina kako da se problem prevaziđe je da se funkcije $Q(w_n)$ i $G(w_n)$ izaberu dovoljno dobro. Na primer, ako se izabere dovoljno dobro k iz (1.50), tj. negativno k sa dovoljno velikom apsolutnom vrednošću, s obzirom na to da je $G'''(0) = 6k$, koeficijent $\hat{A}$ metoda ZCS1 će na osnovu (2.18) biti pozitivan, a metod optimalan. I pored navedenih nedostataka, numerički rezultati pokazuju da su Liu-Čou i Čou-Čen-Song postupci veoma efikasni i da mogu biti dobra alternativa postupcima četvrtog reda Džaratovog tipa, pa je opravdano očekivati da se na bazi ovih algoritama mogu razvijati postupci većeg reda.

Deo teorijske i numeričke analize predstavljene u ovom poglavlju, publikovan je u radu [84].

Glava 3

Optimalni Njutnovi metodi osmog reda konvergencije

3.1 Metod za parnu višestrukost

Ako je α realan koren nelinearne funkcije čija je višestrukost m parna, za dovoljno dobro izabranu početnu aproksimaciju $x_0 \in \mathbb{R}$, Liu-Čou postupak (1.45) generiše niz $\{x_n\}$ četvrtog reda konvergencije. Dodavanjem novog koraka iterativnoj šemi (1.45), uz dodatno izračunavanje prvog izvoda funkcije u odgovarajućoj tački i još jedno računanje $(m-1)$-og korena, dobijamo novu trokoračnu iterativnu šemu

$$\begin{aligned} y_n &= x_n - m\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \\ z_n &= y_n - mQ(w_n)\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \\ x_{n+1} &= z_n - mG(w_n, u_n)\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \end{aligned} \tag{3.1}$$

gde je $w_n = \sqrt[m-1]{f'(y_n)/f'(x_n)}$, a $u_n = \sqrt[m-1]{f'(z_n)/f'(y_n)}$. Osnovna ideja nadogradnje Liu-Čou algoritma trećim korakom je konstrukcija postupka osmog reda konvergencije. Zato je neophodno koristiti Tejlorov razvoj funkcija $f(x_n)$ i $f'(x_n)$ u okolini korena α u široj formi, što se može prikazati na sledeći način

$$f(x_n) = \frac{f^{(m)}(\alpha)}{m!}e_n^m \cdot \big(1 + \sum_{i=1}^{8} c_i e_n^i + O(e_n^9)\big), \tag{3.2}$$

$$f'(x_n) = \frac{f^{(m)}(\alpha)}{(m-1)!} e_n^{m-1} \cdot \big(1 + \sum_{i=1}^{8} \frac{m+i}{m} c_i e_n^i + O(e_n^9)\big), \tag{3.3}$$

gde e_n predstavlja grešku n-te aproksimacije, a c_i je definisano sa (2.2) za $i \geq 1$. Označimo sa $\widehat{e}_n = y_n - \alpha$ i $\widetilde{e}_n = z_n - \alpha$ greške prvog i drugog koraka n-te iteracije. Iz (3.2) i (3.3), grešku prvog koraka $\widehat{e}_n$ možemo izraziti preko e_n kao

$$\begin{aligned}
\widehat{e}_n \;=\;& e_n^2 \Big[\frac{c_1}{m} + \big(2mc_2 - (1+m)c_1^2\big) \frac{e_n}{m^2} \\
&+ \big((1+m)^2 c_1^3 - m(4+3m)c_1c_2 + 3m^2 c_3\big) \frac{e_n^2}{m^3} \\
&+ \big(-(1+m)^3 c_1^4 + 2m(1+m)(3+2m)c_1^2 c_2 - 2m^2(2+m)c_2^2 \\
&- 2m^2(3+2m)c_1c_3 + 4m^3 c_4\big) \frac{e_n^3}{m^4} \\
&+ \big((1+m)^4 c_1^5 - m(1+m)^2(8+5m)c_1^3 c_2 + m^2(1+m)(9+5m)c_1^2 c_3 \\
&+ m^2 c_1((2+m)(6+5m)c_2^2 - m(8+5m)c_4) \\
&+ m^3(5mc_5 - (12+5m)c_2c_3)\big) \frac{e_n^4}{m^5} + \ldots \Big] + O(e_n^9).
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Jasno je da je

$$f'(y_n) = \frac{f^{(m)}(\alpha)}{(m-1)!} \widehat{e}_n^{m-1} \cdot \big(1 + \sum_{i=1}^{8} \frac{m+i}{m} c_i \widehat{e}_n^i + O(\widehat{e}_n^9)\big). \tag{3.5}$$

Sada, na osnovu (3.3) i (3.5), posle zamenjivanja (3.4) u (3.5), dobijamo

$$\begin{aligned}
w_n \;=\;& \sqrt[m-1]{f'(y_n)/f'(x_n)} \\
=\;& e_n \Big[\frac{c_1}{m} + \big(2(m-1)c_2 - (1+m)c_1^2\big) \frac{e_n}{m(m-1)} \\
&+ \big((-2 - m + 2m^2 + 3m^3 + 2m^4)c_1^3 - 2m^2(-4 + m + 3m^2)c_1c_2 \\
&+ 6(m-1)^2 m^2 c_3\big) \frac{e_n^2}{2m^3(m-1)^2} \\
&- \big((1+m)^2(6 - 16m + 7m^2 - m^3 + 6m^4)c_1^4 \\
&- 6m(4 - m - 8m^2 - 3m^3 + 4m^4 + 4m^5)c_1^2 c_2 \\
&+ 12(m-1)^2 m^3((2m+3)c_1c_3 + (2+m)c_2^2 - 2(m-1)c_4)\big) \frac{e_n^3}{6m^4(m-1)^3} \\
&+ \ldots \Big] + O(e_n^9).
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Ako funkcija $Q(\cdot)$ zadovoljava uslove (1.46), tada iz (3.2), (3.3), (3.6) i Tejlorovog razvoja funkcije $Q(w_n)$ u okolini 0, greška drugog koraka $\widetilde{e}_n$ se može izraziti kao

$$\begin{aligned}
\widetilde{e}_n \;=\; & \Big(6m^2(1-m)c_1c_2 + \big(3(2+m+8m^2+m^3) \\
& -(m-1)^2Q'''(0)\big)c_1^3\Big)\frac{e_n^4}{6m^3(m-1)^2} \\
& +\Big[-48m^3(m-1)^2c_2^2 - 48m^3(m-1)^2c_1c_3 \\
& +24m(m-1)\big(4+2m+24m^2+4m^3-(m-1)^2Q'''(0)\big)c_1^2c_2 \\
& +\big(4(1+m)(12+5m+9m^2-63m^3-7m^4) \\
& +4(m-1)^2(3m^2+4m-1)Q'''(0)-(m-1)^3Q^{(4)}(0)\big)c_1^4\Big]\frac{e_n^5}{24m^4(m-1)^3} \\
& +\ldots + O(e_n^9). \qquad (3.7)
\end{aligned}$$

Da bi izračunali $f'(z_n)$ zamenićemo sa $\widetilde{e}_n$ grešku e_n u formuli (3.3), pa koristeći Tejlorov razvoj $(m-1)$-og korena, dobijamo

$$\begin{aligned}
u_n \;=\; & \sqrt[m-1]{f'(z_n)/f'(y_n)} \\
=\; & \Big((6+3m+24m^2+3m^3-(m-1)^2Q'''(0))c_1^2 \\
& +6m^2(1-m)c_2\Big)\frac{e_n^2}{6m^2(m-1)^2} \\
& +\Big[16m(m-1)(3+3m+24m^2+3m^3-(m-1)^2Q'''(0))c_1c_2 \\
& +\Big(8(1+m)(3+4m-6m^2-21m^3-2m^4)+8m(2+m)(m-1)^2Q'''(0) \\
& -(m-1)^3Q^{(4)}(0)\Big)c_1^3 - 48m^3(m-1)^2c_3\Big]\frac{e_n^3}{24m^3(m-1)^3} \\
& +\ldots + O(e_n^6). \qquad (3.8)
\end{aligned}$$

Označimo sa $G_{ij} = \frac{\partial^{i+j}}{\partial w^i \partial u^j}Q(w,u)|_{(w=0,u=0)}$ za $i,j \in \{0,1,2,\ldots\}$. Pošto je $\widetilde{e}_n = z_n - \alpha = O(e_n^4)$ i $f(x_n)/f'(x_n) = O(e_n)$, iz trećeg koraka (3.1) jasno je da funkcija $G(w_n,u_n)$ treba da bude trećeg reda, tj. na osnovu (3.6) i (3.8), Tejlorov razvoj funkcije G u okolini $(0,0)$ treba da zadovoljava uslove

$$G_{00}=0,\ G_{10}=0,\ G_{20}=0 \ \text{ i } \ G_{01}=0. \qquad (3.9)$$

Međutim, da bi se postigao osmi red konvergencije, u jednačini greške $e_{n+1} = x_{n+1} - \alpha$ svi koeficijenti uz $e_n, e_n^2, \ldots, e_n^7$ treba da budu jednaki nuli. Zbog toga iz

trećeg koraka iterativne šeme (3.1), uzimajući u obzir (3.2), (3.3), (3.7) i Tejlorov razvoj funkcije $G(w_n, u_n)$, nakon izjednačavanja posmatranih koeficijenata sa nulom, dobijamo sledeće uslove koji obezbeđuju optimalnost postupka

$$\begin{gathered}
G_{00} = G_{k_1 0} = G_{0k_2} = 0 \text{ za } k_1 \in \{1,2,3,4,5,6\} \text{ i } k_2 \in \{1,2,3\} \\
G_{11} = 1, G_{21} = \frac{4m}{m-1}, G_{12} = 2, G_{22} = \frac{8(2m^2-1)}{m(m-1)}, G_{31} = 6\frac{m+1}{m-1} + Q'''(0), \\
G_{41} = \frac{-48(m+1)(2m^2+1)}{m(m-1)^2} + 8\frac{m+1}{m}Q'''(0) + Q^{(4)}(0), \\
|Q'''(0)| < \infty, \ |Q^{(4)}(0)| < \infty, \ |Q^{(5)}(0)| < \infty, \\
|G_{13}| < \infty, \ |G_{32}| < \infty, \ |G_{51}| < \infty \text{ i } |G_{70}| < \infty. \qquad (3.10)
\end{gathered}$$

Dakle, ako postupak zadovoljava uslove (3.10), imamo

$$x_{n+1} = z_n - mG(w_n, u_n)\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \alpha + O(e_n^8),$$

odnosno $e_{n+1} = x_{n+1} - \alpha = O(e_n^8)$.

Prethodna razmatranja mogu se uobličiti u formi naredne teoreme.

Teorema 3.1 *Neka je $\alpha \in D$ koren parne višestrukosti m nelinearne jednačine* (1.6). *Ako je početna aproksimacija x_0 izabrana dovoljno blizu α, i ako funkcije Q i G redom zadovoljavaju uslove* (1.46) *i* (3.10), *onda familija postupaka definisana iterativnom šemom* (3.1) *ima najmanje osmi red konvergencije.*

Napomena 3.1 Neki delovi izraza iz prethodne analize su namerno izostavljeni i umesto njih su stavljene tri tačke. Reč je o veoma robusnom zapisu koeficijenata uz greške e_n većeg stepena koji zavise od $m, c_1, ..., c_7$, pa su izostavljeni zbog jednostavnosti, a relativno lako se dobijaju korišćenjem mogućnosti simboličkog računanja programskog paketa *Mathematica*.

Primetimo da familija postupaka (3.1) zahteva četiri funkcijska izračunavanja po iteraciji ($f(x_n)$, $f'(x_n)$, $f'(y_n)$ i $f'(w_n)$) za dostizanje osmog reda konvergencije, pa je zato indeks efikasnosti ovih postupaka $8^{1/4} \approx 1.6818$, što je bolje od efikasnosti postupaka četvrtog reda koji iznosi $4^{1/3} \approx 1.5874$, i efikasnosti postupaka šestog reda koji je $6^{1/4} \approx 1.5651$. U daljem radu razmatra se šest postupaka iz familije (3.1) za potrebe numeričkog testiranja, zasnovanih na izboru dve odgovarajuće funkcije $Q(w_n)$ koje su predložene u izvornom radu [79],

i funkcije $G(w_n, u_n)$ jednostavne strukture polinomnog ili racionalnog tipa. Metodi su označeni sa **NMev** i odgovarajućim rednim brojem, i navedeni su u nastavku zajedno sa propratnim jednačinama greške.

• Metod **NMev1**

$$\begin{aligned}
y_n &= x_n - m\frac{f(x_n)}{f'(x_n)},\\
z_n &= y_n - m\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\Big(w_n + \frac{2m}{m-1}w_n^2\Big),\\
x_{n+1} &= z_n - m\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\Big(\frac{-2(m+1)(2m^2+1)}{m(m-1)^2}w_n^4u_n + \frac{2(2m^2-1)}{m(m-1)}w_n^2u_n^2\\
&\quad + \frac{m+1}{m-1}w_n^3u_n + \frac{2m}{m-1}w_n^2u_n + w_nu_n^2 + w_nu_n\Big),
\end{aligned}$$

a jednačina greške ima sledeći oblik

$$\begin{aligned}
e_{n+1} &= \frac{e_n^8}{24m^8(m-1)^6}\Big((2+m+8m^2+m^3)(24+80m-40m^2-125m^3\\
&\quad +48m^4+350m^5+88m^6+7m^7)c_1^7 - 24m^7(m-1)^3c_1c_2^3\\
&\quad -2m(m-1)(48+164m^2-226m^3-293m^4+216m^5+1094m^6\\
&\quad +274m^7+19m^8)c_1^5c_2 + 12m^3(m-1)^3(2+m+8m^2+m^3)c_1^4c_3\\
&\quad +12m^3(m-1)^2(8-8m-12m^2+5m^3+38m^4+5m^5)c_1^3c_2^2\\
&\quad -24m^5(m-1)^4(m+1)c_1^2c_2c_3\Big) + O(e_n^9).
\end{aligned}$$

• Metod **NMev2**

$$\begin{aligned}
y_n &= x_n - m\frac{f(x_n)}{f'(x_n)},\\
z_n &= y_n - m\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\Big(w_n + \frac{2m}{m-1}w_n^2\Big),\\
x_{n+1} &= z_n - m\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\cdot\frac{(w_n + \frac{2}{m(m-1)}w_n^2)u_n}{1 - \frac{2(m+1)}{m}w_n + \frac{3(m+1)}{m-1}w_n^2 - u_n},
\end{aligned}$$

gde je jednačina greške

$$\begin{aligned} e_{n+1} &= \frac{e_n^8}{6m^7(m-1)^5}\Big((m+1)(2+m+8m^2+m^3)(-8+4m+m^3+m^4)c_1^7 \\ &\quad -m(m-1)(24+14m+109m^2+104m^3+64m^4+32m^5+5m^6)c_1^5c_2 \\ &\quad +3m^2(m-1)^3(m+1)(2+m+8m^2+m^3)c_1^4c_3 \\ &\quad +6m^3(m-1)^2(4+3m+2m^2+m^3)c_1^3c_2^2 \\ &\quad -6m^4(m-1)^3(m+1)c_1^2c_2c_3\Big)+O(e_n^9). \end{aligned}$$

• Metod **NMev3**

$$\begin{aligned} y_n &= x_n - m\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \\ z_n &= y_n - m\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\Big(w_n+\frac{2m}{m-1}w_n^2\Big), \\ x_{n+1} &= z_n - m\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\cdot\frac{(w_n+\frac{2}{m(m-1)}w_n^2)u_n+w_nu_n^2}{1-\frac{2(m+1)}{m}w_n+\frac{3(m+1)}{m-1}w_n^2-\frac{2m}{m-1}w_nu_n}, \end{aligned}$$

a jednačina greške ima sledeći oblik

$$\begin{aligned} e_{n+1} &= \frac{e_n^8}{24m^7(m-1)^6}\Big((m+1)(2+m+8m^2+m^3)(32-42m+25m^2+23m^3 \\ &\quad +27m^4+7m^5)c_1^7-24m^6(m-1)^3c_1c_2^3 \\ &\quad -2m(m-1)(-48+32m-166m^2+139m^3+216m^4+362m^6 \\ &\quad +166m^6+19m^7)c_1^5c_2+12m^2(m-1)^3(2+m+8m^2+m^3)c_1^4c_3 \\ &\quad +12m^3(m-1)^2(-8+6m+5m^2+20m^3+5m^4)c_1^3c_2^2 \\ &\quad -24m^4(m-1)^4(m+1)c_1^2c_2c_3\Big)+O(e_n^9). \end{aligned}$$

• Metod **NMev4**

$$\begin{aligned} y_n &= x_n - m\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \\ z_n &= y_n - m\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\frac{(m-1)w_n}{m-1-2mw_n}, \\ x_{n+1} &= z_n - m\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\Big(\frac{2(6m^4-3m^2+1)}{m(m-1)^3}w_n^4u_n+\frac{2(2m^2-1)}{m(m-1)}w_n^2u_n^2 \\ &\quad +\frac{5m^2-1}{(m-1)^2}w_n^3u_n+\frac{2m}{m-1}w_n^2u_n+w_nu_n^2+w_nu_n\Big), \end{aligned}$$

gde je jednačina greške

$$\begin{aligned} e_{n+1} &= \frac{e_n^8}{24m^8(m-1)^6}\Big((1+m)(2-m+m^2)(24+80m-40m^2-173m^3 \\ &+24m^4+350m^5+64m^6+7m^7)c_1^7-24m^7(m-1)^3c_1c_2^3 \\ &-2m(m-1)(48-28m^2-34m^3-53m^4+72m^5+374m^6 \\ &+130m^7+19m^8)c_1^5c_2+12m^3(m-1)^3(2-m+m^2)c_1^4c_3 \\ &+12m^3(m-1)^2(8-8m-12m^2+5m^3+22m^4+5m^5)c_1^3c_2^2 \\ &-24m^5(m-1)^4(m+1)c_1^2c_2c_3\Big)+O(e_n^9). \end{aligned}$$

• Metod **NMev5**

$$\begin{aligned} y_n &= x_n - m\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \\ z_n &= y_n - m\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\cdot\frac{(m-1)w_n}{m-1-2mw_n}, \\ x_{n+1} &= z_n - m\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\cdot\frac{(w_n+\frac{2}{m(m-1)}w_n^2)u_n}{1-\frac{2(m+1)}{m}w_n+\frac{m^2+3}{(m-1)^2}w_n^2-u_n}, \end{aligned}$$

a jednačina greške ima sledeći oblik

$$\begin{aligned} e_{n+1} &= \frac{e_n^8}{6m^7(m-1)^6}\Big(3m^2(m-1)^3(2-m+m^2)c_1^4c_3 \\ &+(m+1)^3(2-m+m^2)(8-20m+12m^2-7m^3+m^4)c_1^7 \\ &+m(m-1)(m+1)^2(24-58m+91m^2-57m^3+29m^4-5m^5)c_1^5c_2 \\ &+6m^3(m-1)^2(-4+5m-4m^2+m^3)c_1^3c_2^2 \\ &-6m^4(m-1)^4(m+1)c_1^2c_2c_3\Big)+O(e_n^9). \end{aligned}$$

• Metod **NMev6**

$$\begin{aligned} y_n &= x_n - m\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \\ z_n &= y_n - m\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\cdot\frac{(m-1)w_n}{m-1-2mw_n}, \\ x_{n+1} &= z_n - m\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\cdot\frac{(w_n+\frac{2}{m(m-1)}w_n^2)u_n+w_nu_n^2}{1-\frac{2(m+1)}{m}w_n+\frac{3(m+1)}{m-1}w_n^2-\frac{2m}{m-1}w_nu_n}, \end{aligned}$$

a jednačina greške ima sledeći oblik

$$\begin{aligned} e_{n+1} &= \frac{e_n^8}{24m^7(m-1)^6}\Big(12m^2(m-1)^3(m+1)^2(2-m+m^2)c_1^4c_3 \\ &+(m+1)^3(2-m+m^2)(32-74m+51m^2-28m^3+7m^4)c_1^7 \\ &-2m(m-1)(m+1)^2(-48+128m-182m^2+135m^3-64m^4 \\ &+19m^5)c_1^5c_2+12m^3(m-1)^2(m+1)(-4+5m)(-2-m+m^2)c_1^3c_2^2 \\ &-24m^4(m-1)^4(m+1)c_1^2c_2c_3\Big)+O(e_n^9). \end{aligned}$$

3.2 Metod za neparnu višestrukost

Ako je α realan koren neparne višestrukosti, tada je Čou-Čen-Song familija postupaka (1.48) optimalnog četvrtog reda ako funkcija $Q(\cdot)$ zadovoljava uslove (1.49). U ovom odeljku razmatraće se trokoračna familija postupaka, gde se iterativna šema (1.48) koristi kao osnova, odnosno kao prva dva koraka u novoj iterativnoj šemi nadograđenoj trećim korakom koji uključuje dodatno funkcijsko izračunavanje i izračunavanje još jednog m-tog korena težinskog količnika. Novi metod definisan je na sledeći način

$$\begin{aligned} y_n &= x_n - m\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \\ z_n &= y_n - mQ(w_n)\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \\ x_{n+1} &= z_n - mF(w_n,u_n)\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \end{aligned} \tag{3.11}$$

gde je $w_n = \sqrt[m]{f(y_n)/f(x_n)}$, a $u_n = \sqrt[m]{f(z_n)/f(y_n)}$.

Da bi se razmotrila konvergencija ovog postupka, neki koncepti i jednakosti biće preuzeti iz prethodnog odeljka. Na primer, prvi korak iterativnih šema (3.1) i (3.11) su isti, pa možemo koristiti $\widehat{e}_n = y_n - \alpha$ iz (3.4) u daljoj analizi. Zamenjujući (3.4) umesto e_n u (3.2), dobijamo $f(y_n)$, pa iz Tejlorovog razvoja

$\sqrt[m]{f(y_n)/f(x_n)}$ u okolini nule, imamo

$$\begin{aligned} w_n &= e_n\Big[\frac{c_1}{m} + \big(2mc_2 - (2+m)c_1^2\big)\frac{e_n}{m^2} \\ &+\big((7+7m+2m^2)c_1^3 - 2m(7+3m)c_1c_2 + 6m^2c_3\big)\frac{e_n^2}{2m^3} \\ &-\big((34+51m+29m^2+6m^3)c_1^4 - 6m(17+16m+4m^2)c_1^2c_2 \\ &+12m^2(5+2m)c_1c_3 + 12m^2((3+m)c_2^2 - 2mc_4)\big)\frac{e_n^3}{6m^4} + ...\Big] \\ &+O(e_n^9). \end{aligned} \tag{3.12}$$

Na osnovu osobina (1.49) koje zadovoljava funkcija Q i njenog Tejlorovog razvoja, iz (3.2), (3.3) i (3.12), odgovarajuća jednačina greške drugog koraka $\widetilde{e}_n = z_n - \alpha$ data je sa

$$\begin{aligned} \widetilde{e}_n &= \big((27+3m-Q'''(0))c_1^3 - 6mc_1c_2\big)\frac{e_n^4}{6m^3} \\ &-\Big(48m^2c_2^2 + 48m^2c_1c_3 - 24m(28+4m-Q'''(0))c_1^2c_2 \\ &+\big(4(125+84m+7m^2) - 4(7+3m)Q'''(0) + Q^{(4)}(0)\big)c_1^4\Big)\frac{e_n^5}{24m^4} \\ &+... + O(e_n^9). \end{aligned} \tag{3.13}$$

Ako iskoristimo dobijeni izraz za $\widetilde{e}_n$ i zamenimo u (3.2) da bi izračunali vrednost $f(z_n)$, nakon deljenja $f(z_n)$ sa $f(x_n)$, iz Tejlorovog razvoja m-tog korena ovog količnika, imamo

$$\begin{aligned} u_n &= \sqrt[m]{f(z_n)/f(y_n)} \\ &= \big((27+3m-Q'''(0))c_1^2 - 6mc_2\big)\frac{e_n^2}{6m^2} \\ &-\Big(48m^2c_3 - 16m(27+3m-Q'''(0))c_1c_2 \\ &+\big(8(49+27m+2m^2) - 8(3+m)Q'''(0) + Q^{(4)}(0)\big)c_1^3\Big)\frac{e_n^3}{24m^3} \\ &+... + O(e_n^9). \end{aligned} \tag{3.14}$$

Iz trećeg iterativnog koraka, a na osnovu (3.2), (3.3), (3.14) i Tejlorovog razvoja $F(w_n, u_n)$ u okolini tačke $(0,0)$, na isti način kao i u slučaju metoda (3.1)

dobijamo sledeće uslove za funkciju $F(w_n, u_n)$

$$\begin{gathered} F_{00} = F_{k_1 0} = F_{0k_2} = 0 \text{ za } k_1 \in \{1,2,3,4,5,6\} \text{ i } k_2 \in \{1,2,3\}, \\ F_{11} = 1, \quad F_{21} = 4, \quad F_{12} = 2, \quad F_{22} = 16, \\ F_{31} = 6 + Q'''(0), \quad F_{41} = -96 + 8Q'''(0) + Q^{(4)}(0), \\ |Q'''(0)| < \infty, \quad |Q^{(4)}(0)| < \infty, \quad |Q^{(5)}(0)| < \infty, \\ |F_{13}| < \infty, \quad |F_{32}| < \infty, \quad |F_{51}| < \infty \text{ i } |F_{70}| < \infty, \end{gathered} \tag{3.15}$$

gde je F_{ij} za $i, j \in \{0, 1, 2, ...\}$ definisano kao u prethodnom odeljku. Dakle, ako su navedeni uslovi zadovoljeni, svi koeficijenti uz e_n, e_n^2,...,e_n^7 u jednačini greške iterativnog postupka postaju jednaki nuli, a sama jednačina greške ima oblik $e_{n+1} = x_{n+1} - \alpha = O(e_n^8)$. Prema tome, na osnovu prethodnog razmatranja, konvergencija familije postupaka (3.11) može se opisati sledećom teoremom.

Teorema 3.2 *Neka je $\alpha \in D$ koren neparne višestrukosti m nelinearne jednačine* (1.6)*. Za početnu iteraciju x_0 izabranu dovoljno blizu α, i funkcije Q i F koje zadovoljavaju redom uslove* (1.49) *i* (3.15)*, red konvergencije familije postupaka* (3.11) *iznosi najmanje osam.*

Za potrebe daljeg istraživanja i numeričke analize, u daljem radu razmatraće se šest članova familije postupaka (3.11) u kojima se posmatraju dve varijante funkcije $Q(w_n)$ iz [80], i odgovarajuće funkcije $F(w_n, u_n)$ polinomnog i racionalnog tipa. Slično kao u prethodnom odeljku, ovi metodi označeni su sa **NMod** i rednim brojem.

• Metod **NMod1**

$$\begin{aligned} y_n &= x_n - m\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \\ z_n &= y_n - m\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}(2w_n^2 + w_n), \\ x_{n+1} &= z_n - m\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\big(- 4w_n^4 u_n + w_n^3 u_n + 4w_n^2 u_n^2 + 2w_n^2 u_n + w_n u_n^2 + w_n u_n\big), \end{aligned}$$

a jednačina greške ima sledeći oblik

$$\begin{aligned} e_{n+1} &= \frac{c_1 e_n^8}{24m^7}\big((9+m)c_1^2 - 2mc_2\big)\big((431 + 102m + 7m^2)c_1^4 \\ &\quad -12m(17+2m)c_1^2 c_2 + 12m^2 c_2^2 + 12m^2 c_1 c_3\big) + O(e_n^9). \end{aligned}$$

• Metod **NMod2**

$$\begin{aligned} y_n &= x_n - m\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \\ z_n &= y_n - m\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}(2w_n^2 + w_n), \\ x_{n+1} &= z_n - m\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \cdot \frac{w_n u_n}{1 - 2w_n + 3w_n^2 - u_n}, \end{aligned}$$

sa odgovarajućom jednačinom greške

$$\begin{aligned} e_{n+1} &= \frac{c_1^2 e_n^8}{6m^7}\big((9+m)c_1^2 - 2mc_2\big)\big((-1+3m+m^2)c_1^3 \\ &\quad -3m(2+m)c_1c_2 + 3m^2c_3\big) + O(e_n^9). \end{aligned}$$

• Metod **NMod3**

$$\begin{aligned} y_n &= x_n - m\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \\ z_n &= y_n - m\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}(2w_n^2 + w_n), \\ x_{n+1} &= z_n - m\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \cdot \frac{(w_n - 3w_n^3 - 6w_n^4)u_n}{1 - 2w_n - u_n}, \end{aligned}$$

sa odgovarajućom jednačinom greške

$$\begin{aligned} e_{n+1} &= \frac{c_1^2 e_n^8}{12m^7}\big((9+m)c_1^2 - 2mc_2\big)\big((-101-3m+2m^2)c_1^3 \\ &\quad -6m(-1+m)c_1c_2 + 6m^2c_3\big) + O(e_n^9). \end{aligned}$$

• Metod **NMod4**

$$\begin{aligned} y_n &= x_n - m\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \\ z_n &= y_n - m\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \cdot \frac{w_n}{(1-w_n)^2}, \\ x_{n+1} &= z_n - m\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\big(6w_n^4u_n + 4w_n^3u_n + 4w_n^2u_n^2 + 2w_n^2u_n + w_nu_n^2 + w_nu_n\big), \end{aligned}$$

sa odgovarajućom jednačinom greške

$$\begin{aligned} e_{n+1} &= \frac{c_1 e_n^8}{24m^7}\big((3+m)c_1^2 - 2mc_2\big)\big((281+84m+7m^2)c_1^4 \\ &\quad -24m(7+m)c_1^2c_2 + 12m^2c_2^2 + 12m^2c_1c_3\big) + O(e_n^9). \end{aligned}$$

• Metod **NMod5**

$$\begin{aligned} y_n &= x_n - m\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \\ z_n &= y_n - m\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \cdot \frac{w_n}{(1-w_n)^2}, \\ x_{n+1} &= z_n - m\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \cdot \frac{(w_n + w_n^3)u_n}{1 - 2w_n + w_n^2 - u_n}, \end{aligned}$$

sa odgovarajućom jednačinom greške

$$\begin{aligned} e_{n+1} &= \frac{c_1^2 e_n^8}{6m^7}\big((3+m)c_1^2 - 2mc_2\big)\big((-10+m^2)c_1^3 \\ &\quad -3m^2c_1c_2 + 3m^2c_3\big) + O(e_n^9). \end{aligned}$$

• Metod **NMod6**

$$\begin{aligned} y_n &= x_n - m\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \\ z_n &= y_n - m\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \cdot \frac{w_n}{(1-w_n)^2}, \\ x_{n+1} &= z_n - m\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \cdot \frac{(w_n - 2w_n^4)u_n}{1 - 2w_n - u_n}, \end{aligned}$$

sa odgovarajućom jednačinom greške

$$\begin{aligned} e_{n+1} &= \frac{c_1^2 e_n^8}{12m^7}\big((3+m)c_1^2 - 2mc_2\big)\big((-53-3m+2m^2)c_1^3 \\ &\quad -6m(m-1)c_1c_2 + 6m^2c_3\big) + O(e_n^9). \end{aligned}$$

Svaki postupak iz familije (3.11) zahteva tri izračunavanja funkcije i jednog prvog izvoda u okviru jedne iteracije, pa zbog osmog reda konvergencije koji se dostiže, indeks efikasnosti ovih postupaka iznosi $8^{1/4} \approx 1.682$. S obzirom na to da ovi postupci dostižu maksimalan red konvergencije za rešenja bilo koje neparne višestrukosti m, možemo ih primeniti i za određivanje jednostrukih rešenja, odnosno i u slučaju kada je $m = 1$. Zapravo, iterativna šema (3.11) može se posmatrati kao generalizovana verzija brojnih postojećih optimalnih familija osmog reda konvergencije za traženje jednostrukih rešenja. Tako se na primer, za specijalno izabrane funkcije $Q(w_n)$ i $F(w_n, u_n)$, dobijaju poznati optimalni metodi osmog reda konvergencije za proste nule, kao što su:

- Čun-Li metod [44, Metod 1], za

$$Q(w_n) = \frac{w_n}{(1-w_n)^2}, \quad F(w_n, u_n) = \frac{4w_n u_n}{(u_n - 2 + (2+u_n)w_n + w_n^2 - w_n^3)^2},$$

- Džunić-Petković-Petković metod [45, Metod(3)-p_2-q_3], za

$$Q(w_n) = \frac{w_n}{1 - 2w_n + 2w_n^2}, \quad F(w_n, u_n) = \frac{w_n u_n (1 + u_n - 4w_n)}{(1-3w_n)^2 + 2w_n u_n},$$

- Šarma-Arora metod [50, Metod 2], za

$$\begin{aligned} Q(w_n) &= \frac{w_n(1+w_n)}{1-w_n}, \\ F(w_n, u_n) &= \frac{w_n u_n (1+w_n^2)(1 - u_n + w_n u_n + w_n^2)}{(w_n - 1)(w_n - 1 - 2w_n^2 + u_n(2 - w_n + w_n^2))}, \end{aligned}$$

- Kordero-Toregrosa-Vasileva metod [85, Metod M8], za

$$Q(w_n) = \frac{w_n}{1-2w_n}, \quad F(w_n, u_n) = w_n u_n (1 + 3w_n u_n)\Big(\frac{1-w_n}{1-2w_n} + \frac{u_n}{2-4u_n}\Big).$$

3.3 Numerički rezultati

Kako bi što bolje ilustrovali numeričko ponašanje opisanih postupaka, testirali smo ih na nekoliko test funkcija uz odgovarajuće početne vrednosti x_0 i korene α prikazane u Tabeli 3.1.

Postupke upoređujemo odvojeno u zavisnosti od višestrukosti m. Naime, ako su u pitanju koreni parne višestrukosti poput funkcija $f_1 - f_4$, tada poređenje ne uključuje metode (1.48) i (3.11) zbog njihove neoptimalnosti u opštem slučaju. Slično tome, u slučaju kada je višestrukost neparna, kao kod funkcija $f_5 - f_8$, tada iz istog razloga ne upoređujemo metode (1.45) i (3.1). Svi ostali optimalni metodi četvrtog reda konvergencije navedeni u uvodnom poglavlju (od LLC do KBK2 postupka), upotrebljeni su za rešavanje svih datih test funkcija, ali su zbog jednostavnosti i bolje preglednosti, za tabelarni prikaz iz ove grupe izdvojeni samo oni metodi sa najboljim rezultatima. Sa druge strane, u testiranju su učestvovali svi prethodno predstavljeni postupci šestog reda konvergencije nezavisno od parnosti parametra m.

Tabela 3.1 Test funkcije

$f(x)$	α	m	x_0
$f_1(x) = (\log x + \sqrt{x}/x^2 - 1)^4$	1.7910672...	4	1.95
$f_2(x) = (\cos x^2 - x\log(1+x^2-\pi)+1)^3(x^2-\pi)$	1.7724538...	4	1.85
$f_3(x) = (\cos x - x)^2$	0.7390851...	2	2.5
$f_4(x) = (x^{10} - \sqrt{3}x^3\cos(\frac{x\pi}{6}) + \frac{1}{x^2+1})(x-1)^3$	1.0000000	4	1.08
$f_5(x) = (x^2 - e^x - 3x + 2)^5$	0.2575302...	5	1.8
$f_6(x) = (e^x + x - 20)^3$	2.8424389...	3	3
$f_7(x) = (x - \pi + \sin x \log x^2 + 1)^9$	3.8173523...	9	3
$f_8(x) = (2x + e^{-x} + \sin x^2 - 3)^5$	0.9244631...	5	0.75

Svi numerički razultati dobijeni su pomoću programskog paketa *Mathematica* korišćenjem *SetPrecision* funkcije sa 10000 sigurnih cifara. Da bi dobili realne vrednosti m-tog korena realnih brojeva, korišćenja je funkcija *Surd* istog programskog paketa. Zbog merenja brzine zadovoljavanja zaustavnog kriterijuma (CPU), značajno je navesti da su performanse računara na kojem je vršeno istraživanje procesor od 1.73 GHz i 32-bitni Windows Vista operativni sistem.

Tabela 3.2 Numerički rezultati za $f_1(x)$

Metod	it	$\lvert x_n - \alpha\rvert$	$\lvert f(x_n)\rvert$	CPU	COC
MNM	8	$4.0528 \cdot 10^{-82}$	$5.1415 \cdot 10^{-329}$	0.895	2.0000
LLC	5	$3.6018 \cdot 10^{-234}$	$3.2071 \cdot 10^{-937}$	0.870	4.0000
RK1	5	$2.6117 \cdot 10^{-242}$	$8.8665 \cdot 10^{-970}$	0.888	4.0000
RK2	5	$6.5009 \cdot 10^{-243}$	$3.4037 \cdot 10^{-972}$	0.915	4.0000
BKMT	5	$3.6818 \cdot 10^{-234}$	$3.5017 \cdot 10^{-937}$	0.878	4.0000
LZ1	5	$3.6449 \cdot 10^{-241}$	$3.3635 \cdot 10^{-965}$	0.913	4.0000
LZ2	4	$1.4446 \cdot 10^{-262}$	$8.2995 \cdot 10^{-1051}$	0.721	4.0000
GKN1a	4	$6.3423 \cdot 10^{-213}$	$3.0833 \cdot 10^{-852}$	0.967	6.0000
GKN2a	4	$7.2388 \cdot 10^{-212}$	$5.2327 \cdot 10^{-848}$	0.977	6.0000
GKN1b	4	$4.2507 \cdot 10^{-222}$	$6.2216 \cdot 10^{-889}$	1.20	6.0000
GKN2b	4	$3.0000 \cdot 10^{-222}$	$1.5436 \cdot 10^{-889}$	0.963	6.0000
NMev1	3	$3.5935 \cdot 10^{-416}$	$3.1777 \cdot 10^{-1665}$	0.776	8.0000
NMev2	3	$9.1151 \cdot 10^{-473}$	$1.3155 \cdot 10^{-1891}$	0.755	8.0000
NMev3	3	$1.0931 \cdot 10^{-434}$	$2.7203 \cdot 10^{-1739}$	0.763	8.0000
NMev4	3	$6.5720 \cdot 10^{-438}$	$3.5550 \cdot 10^{-1752}$	0.781	8.0000
NMev5	3	$1.1885 \cdot 10^{-545}$	$3.8022 \cdot 10^{-2183}$	0.762	8.0000
NMev6	3	$2.2010 \cdot 10^{-477}$	$4.4726 \cdot 10^{-1910}$	1.00	8.0000

Tabela 3.3 Numerički rezultati za $f_2(x)$

Metod	it	$\lvert x_n - \alpha \rvert$	$\lvert f(x_n) \rvert$	CPU	COC
MNM	9	$4.7978 \cdot 10^{-61}$	$4.6593 \cdot 10^{-239}$	4.00	2.0000
LLC	5	$2.3601 \cdot 10^{-203}$	$2.7281 \cdot 10^{-808}$	4.21	4.0000
BKMT	5	$2.6770 \cdot 10^{-203}$	$4.5157 \cdot 10^{-808}$	4.23	4.0000
KBK1	5	$3.4838 \cdot 10^{-222}$	$1.2953 \cdot 10^{-883}$	4.15	4.0000
KBK2	5	$8.8195 \cdot 10^{-222}$	$5.3200 \cdot 10^{-882}$	4.14	4.0000
LZ1	5	$3.6153 \cdot 10^{-149}$	$1.5021 \cdot 10^{-591}$	4.27	4.0000
LZ2	5	$4.0364 \cdot 10^{-229}$	$2.3342 \cdot 10^{-911}$	3.89	4.0000
GKN1a	6	$2.2742 \cdot 10^{-11}$	$2.3519 \cdot 10^{-40}$	7.00	3.0000
GKN2a	4	$2.1778 \cdot 10^{-48}$	$1.9779 \cdot 10^{-188}$	4.49	6.0000
GKN1b	7	$3.1773 \cdot 10^{-6}$	$8.9618 \cdot 10^{-20}$	6.07	1.3266
GKN2b	6	$2.1649 \cdot 10^{-6}$	$1.9315 \cdot 10^{-20}$	5.05	6.0000
NMev1	4	$1.2047 \cdot 10^{-225}$	$1.8523 \cdot 10^{-897}$	4.50	8.0000
NMev2	3	$1.8834 \cdot 10^{-348}$	$1.1064 \cdot 10^{-1388}$	4.06	8.0000
NMev3	3	$7.1723 \cdot 10^{-295}$	$2.3269 \cdot 10^{-1174}$	4.01	8.0000
NMev4	3	$3.5181 \cdot 10^{-295}$	$1.3471 \cdot 10^{-1175}$	4.32	8.0000
NMev5	3	$2.0193 \cdot 10^{-395}$	$1.4621 \cdot 10^{-1576}$	3.49	8.0000
NMev6	3	$6.6434 \cdot 10^{-413}$	$1.7128 \cdot 10^{-1646}$	3.47	8.0000

Tabela 3.4 Numerički rezultati za $f_3(x)$

Metod	it	$\lvert x_n - \alpha \rvert$	$\lvert f(x_n) \rvert$	CPU	COC
MNM	10	$1.5638 \cdot 10^{-35}$	$6.8497 \cdot 10^{-70}$	4.35	2.0000
LLC	6	$2.7437 \cdot 10^{-74}$	$2.1085 \cdot 10^{-147}$	4.37	4.0000
ShSh	6	$1.1843 \cdot 10^{-73}$	$3.9285 \cdot 10^{-146}$	4.48	4.0000
BKMT	6	$2.7437 \cdot 10^{-74}$	$2.1085 \cdot 10^{-147}$	4.60	4.0000
KBK1	6	$2.9138 \cdot 10^{-80}$	$2.3781 \cdot 10^{-159}$	4.84	4.0000
LZ1	6	$5.5677 \cdot 10^{-57}$	$8.6829 \cdot 10^{-113}$	4.46	4.0000
LZ2	6	$1.9508 \cdot 10^{-78}$	$1.0660 \cdot 10^{-155}$	4.46	4.0000
GKN1a	5	$1.0377 \cdot 10^{-41}$	$3.0162 \cdot 10^{-82}$	4.40	6.0000
GKN2a	5	$1.2131 \cdot 10^{-34}$	$4.1222 \cdot 10^{-68}$	4.40	6.0000
GKN1b	div.	–	–	–	–
GKN2b	div.	–	–	–	–
NMev1	4	$2.0114 \cdot 10^{-78}$	$1.1332 \cdot 10^{-155}$	4.18	8.0000
NMev2	4	$2.0904 \cdot 10^{-148}$	$1.2240 \cdot 10^{-295}$	4.15	8.0000
NMev3	4	$3.7989 \cdot 10^{-98}$	$4.0422 \cdot 10^{-195}$	4.15	8.0000
NMev4	4	$2.1156 \cdot 10^{-95}$	$1.2536 \cdot 10^{-189}$	4.18	8.0000
NMev5	4	$8.4648 \cdot 10^{-131}$	$2.0070 \cdot 10^{-260}$	4.16	8.0000
NMev6	4	$9.7597 \cdot 10^{-148}$	$2.6680 \cdot 10^{-294}$	4.18	8.0000

Tabela 3.5 Numerički rezultati za $f_4(x)$

Metod	it	$\lvert x_n - \alpha\rvert$	$\lvert f(x_n)\rvert$	CPU	COC
MNM	9	$1.1692 \cdot 10^{-56}$	$1.0193 \cdot 10^{-223}$	5.69	2.0000
LLC	5	$4.2361 \cdot 10^{-191}$	$1.7560 \cdot 10^{-761}$	5.48	4.0000
ShSh	5	$1.2446 \cdot 10^{-189}$	$1.3087 \cdot 10^{-755}$	5.51	4.0000
RK2	5	$4.3763 \cdot 10^{-191}$	$2.0003 \cdot 10^{-761}$	5.54	4.0000
BKMT	5	$4.8896 \cdot 10^{-191}$	$3.1172 \cdot 10^{-761}$	5.98	4.0000
LZ1	5	$7.1736 \cdot 10^{-157}$	$1.4442 \cdot 10^{-624}$	5.57	4.0000
LZ2	5	$9.8267 \cdot 10^{-203}$	$5.0851 \cdot 10^{-808}$	5.59	4.0000
GKN1a	4	$3.7871 \cdot 10^{-152}$	$1.1218 \cdot 10^{-605}$	5.63	6.0000
GKN2a	4	$2.8615 \cdot 10^{-152}$	$3.6564 \cdot 10^{-606}$	5.07	6.0000
GKN1b	4	$5.3204 \cdot 10^{-195}$	$4.3696 \cdot 10^{-777}$	3.79	6.0000
GKN2b	4	$1.0911 \cdot 10^{-191}$	$7.7293 \cdot 10^{-764}$	4.11	6.0000
NMev1	3	$2.1647 \cdot 10^{-261}$	$1.1974 \cdot 10^{-1042}$	4.97	8.0000
NMev2	3	$1.9692 \cdot 10^{-343}$	$8.2008 \cdot 10^{-1371}$	4.71	8.0000
NMev3	3	$1.8793 \cdot 10^{-294}$	$6.8022 \cdot 10^{-1175}$	4.96	8.0000
NMev4	3	$4.7877 \cdot 10^{-303}$	$2.8653 \cdot 10^{-1209}$	4.97	8.0000
NMev5	3	$1.9069 \cdot 10^{-372}$	$7.2111 \cdot 10^{-1487}$	5.05	8.0000
NMev6	3	$1.0094 \cdot 10^{-538}$	$5.6611 \cdot 10^{-2152}$	5.10	8.0000

Tabele 3.2-3.9 prikazuju broj iteracija (it) neophodnih da bi postupak zadovoljio zaustavni kriterijum $|f(x_n)| < 10^{-1000}$. Pored toga, predstavljene su i greške $|x_n - \alpha|$ i vrednosti funkcije $|f(x_n)|$ svakog postupka na istom nivou iterativnog procesa u pogledu broja funkcijskih izračunavanja. Pošto smo se opredelili da ukupan broj funkcijskih izračunavanja bude 12, to znači da su na primer za modifikovani Njutnov metod rezultati kolona $|x_n - \alpha|$ i $|f(x_n)|$ prikazani posle šeste iteracije, za sve postupke četvrtog reda posle četvrte, a za postupke osmog reda posle treće iteracije. CPU vrednosti dobijene su kao aritmetička sredina vremena nakon 25 propuštanja iste funkcije kroz isti iterativni algoritam. Računski red konvergencije COC dobijen je formulom (1.11), a nemogućnost postupka da zadovolji zaustavni kriterijum nakon 100 iteracija ili numerički singularitet označeni su sa "$-$". Simbolom "uk"označena je situacija kada postupak ne konvergira ka posmatranom najbližem korenu α, već ka nekom drugom, udaljenom korenu date funkcije $f(x)$, pa je tada uz broj iteracija navedena zvezdica.

Tabela 3.6 Numerički rezultati za $f_5(x)$

Metod	it	$\lvert x_n - \alpha \rvert$	$\lvert f(x_n) \rvert$	CPU	COC
MNM	8	$6.9370 \cdot 10^{-51}$	$1.2375 \cdot 10^{-248}$	1.41	2.0000
ShSh	5	$8.1331 \cdot 10^{-90}$	$2.7414 \cdot 10^{-443}$	1.25	4.0000
ZCS	5	$4.4861 \cdot 10^{-91}$	$1.3997 \cdot 10^{-449}$	1.48	4.0000
KBK1	5	$1.4423 \cdot 10^{-107}$	$4.8080 \cdot 10^{-532}$	1.25	3.9992
KBK2	5	$4.2343 \cdot 10^{-110}$	$1.0486 \cdot 10^{-544}$	1.25	3.9992
LZ1	4	$4.1138 \cdot 10^{-241}$	$9.0761 \cdot 10^{-1200}$	0.858	4.0000
LZ2	5	$7.9177 \cdot 10^{-128}$	$2.3972 \cdot 10^{-633}$	1.12	4.0000
GKN1a	4	$2.1013 \cdot 10^{-43}$	$3.1562 \cdot 10^{-211}$	1.31	7.5438
GKN2a	4	$1.1164 \cdot 10^{-42}$	$1.3360 \cdot 10^{-207}$	1.32	7.5434
GKN1b	4	$2.9635 \cdot 10^{-80}$	$1.7609 \cdot 10^{-395}$	1.63	6.0000
GKN2b	4	$3.3756 \cdot 10^{-78}$	$3.3761 \cdot 10^{-385}$	1.07	6.0000
NMod1	3	$3.4881 \cdot 10^{-324}$	$3.9779 \cdot 10^{-1615}$	0.866	8.0000
NMod2	3	$3.7230 \cdot 10^{-375}$	$5.5098 \cdot 10^{-1870}$	0.838	8.0000
NMod3	3	$3.2651 \cdot 10^{-425}$	$2.8589 \cdot 10^{-2120}$	0.848	8.0000
NMod4	3	$1.0955 \cdot 10^{-234}$	$1.2155 \cdot 10^{-1167}$	1.30	8.0000
NMod5	3	$1.2994 \cdot 10^{-239}$	$2.8540 \cdot 10^{-1192}$	0.983	8.0000
NMod6	3	$2.0455 \cdot 10^{-233}$	$2.7588 \cdot 10^{-1161}$	0.851	8.0000

Tabela 3.7 Numerički rezultati za $f_6(x)$

Metod	it	$\lvert x_n - \alpha \rvert$	$\lvert f(x_n) \rvert$	CPU	COC
MNM	9	$3.1031 \cdot 10^{-73}$	$1.7887 \cdot 10^{-214}$	1.53	2.0000
LLC	5	$1.3810 \cdot 10^{-289}$	$1.5769 \cdot 10^{-863}$	1.42	4.0000
ZCS	5	$9.8932 \cdot 10^{-277}$	$5.7967 \cdot 10^{-825}$	1.43	4.0000
RK1	4	$6.7149 \cdot 10^{-349}$	$1.8126 \cdot 10^{-1041}$	1.13	4.0000
RK2	4	$1.0781 \cdot 10^{-367}$	$7.5006 \cdot 10^{-1098}$	1.38	4.0000
LZ1	5	$1.7106 \cdot 10^{-242}$	$2.9966 \cdot 10^{-722}$	1.16	4.0000
LZ2	5	$9.6046 \cdot 10^{-283}$	$5.3040 \cdot 10^{-843}$	1.25	4.0000
GKN1a	4	$8.3703 \cdot 10^{-214}$	$3.5107 \cdot 10^{-636}$	1.54	6.0000
GKN2a	4	$9.8765 \cdot 10^{-214}$	$5.7674 \cdot 10^{-636}$	1.41	6.0000
GKN1b	4	$6.5300 \cdot 10^{-259}$	$1.6669 \cdot 10^{-771}$	1.45	6.0000
GKN2b	4	$7.1969 \cdot 10^{-270}$	$2.2316 \cdot 10^{-804}$	1.22	6.0000
NMod1	3	$2.7241 \cdot 10^{-439}$	$1.2102 \cdot 10^{-1312}$	0.900	8.0000
NMod2	3	$4.9662 \cdot 10^{-582}$	$7.3322 \cdot 10^{-1741}$	0.876	8.0000
NMod3	3	$1.8158 \cdot 10^{-457}$	$3.5840 \cdot 10^{-1367}$	1.12	8.0000
NMod4	3	$1.2250 \cdot 10^{-486}$	$1.1006 \cdot 10^{-1454}$	0.907	8.0000
NMod5	3	$1.3975 \cdot 10^{-540}$	$1.6340 \cdot 10^{-1616}$	0.887	8.0000
NMod6	3	$3.1832 \cdot 10^{-511}$	$1.9310 \cdot 10^{-1528}$	0.886	8.0000

Tabela 3.8 Numerički rezultati za $f_7(x)$

Metod	it	$\lvert x_n - \alpha \rvert$	$\lvert f(x_n) \rvert$	CPU	COC
MNM	8	$2.7414 \cdot 10^{-29}$	$2.0273 \cdot 10^{-256}$	5.92	2.0000
LLC	div.	–	–	–	–
BKMT	42∗	uk	uk	uk	uk
KBK1	5	$6.2256 \cdot 10^{-96}$	$3.2571 \cdot 10^{-856}$	6.49	4.0000
KBK2	5	$6.3777 \cdot 10^{-96}$	$4.0472 \cdot 10^{-856}$	6.73	4.0000
LZ1	5	$2.1531 \cdot 10^{-61}$	$2.3056 \cdot 10^{-545}$	4.86	4.0000
LZ2	5	$1.5966 \cdot 10^{-83}$	$1.5630 \cdot 10^{-744}$	4.88	4.0000
GKN1a	5∗	uk	uk	uk	uk
GKN2a	5	$8.4467 \cdot 10^{-11}$	$5.0742 \cdot 10^{-90}$	7.67	6.0000
GKN1b	4	$2.7406 \cdot 10^{-73}$	$2.0220 \cdot 10^{-652}$	4.56	6.0000
GKN2b	4	$1.5359 \cdot 10^{-73}$	$1.1030 \cdot 10^{-654}$	4.78	6.0000
NMod1	4	$2.2213 \cdot 10^{-88}$	$3.0527 \cdot 10^{-788}$	4.56	8.0000
NMod2	3	$5.3337 \cdot 10^{-175}$	$8.0998 \cdot 10^{-1568}$	3.24	8.0008
NMod3	3	$5.5968 \cdot 10^{-139}$	$1.2492 \cdot 10^{-1243}$	3.25	7.9942
NMod4	3	$4.3948 \cdot 10^{-113}$	$1.4180 \cdot 10^{-1010}$	3.28	8.0088
NMod5	3	$2.0530 \cdot 10^{-195}$	$1.5023 \cdot 10^{-1751}$	3.26	8.0082
NMod6	3	$8.1230 \cdot 10^{-160}$	$3.5697 \cdot 10^{-1431}$	3.26	7.9975

Tabela 3.9 Numerički rezultati za $f_8(x)$

Metod	it	$\lvert x_n - \alpha \rvert$	$\lvert f(x_n) \rvert$	CPU	COC
MNM	7	$3.8947 \cdot 10^{-110}$	$1.5898 \cdot 10^{-545}$	4.39	2.0000
LLC	4	$3.3680 \cdot 10^{-286}$	$7.6887 \cdot 10^{-1426}$	3.73	4.0000
ShSh	4	$3.2334 \cdot 10^{-286}$	$6.2701 \cdot 10^{-1426}$	3.98	4.0000
ZCS	4	$3.1081 \cdot 10^{-286}$	$5.1460 \cdot 10^{-1426}$	3.74	4.0000
BKMT	4	$3.3652 \cdot 10^{-286}$	$7.6563 \cdot 10^{-1426}$	3.74	4.0000
LZ1	4	$3.0703 \cdot 10^{-297}$	$4.8403 \cdot 10^{-1481}$	3.26	4.0000
LZ2	4	$9.4934 \cdot 10^{-299}$	$1.3680 \cdot 10^{-1488}$	3.28	4.0000
GKN1a	4	$2.1849 \cdot 10^{-64}$	$8.8328 \cdot 10^{-317}$	4.90	6.0000
GKN2a	4	$7.4937 \cdot 10^{-66}$	$4.1924 \cdot 10^{-324}$	5.14	6.0000
GKN1b	3	$3.1631 \cdot 10^{-227}$	$5.6177 \cdot 10^{-1131}$	2.83	6.0000
GKN2b	3	$3.0058 \cdot 10^{-227}$	$4.3529 \cdot 10^{-1131}$	2.83	6.0000
NMod1	3	$6.0320 \cdot 10^{-508}$	$1.4167 \cdot 10^{-2534}$	2.98	8.0000
NMod2	3	$3.3737 \cdot 10^{-586}$	$7.7537 \cdot 10^{-2926}$	3.14	8.0000
NMod3	3	$3.7787 \cdot 10^{-581}$	$1.3667 \cdot 10^{-2900}$	3.02	8.0000
NMod4	3	$4.8403 \cdot 10^{-510}$	$4.7135 \cdot 10^{-2545}$	2.99	8.0000
NMod5	3	$4.4093 \cdot 10^{-583}$	$2.9568 \cdot 10^{-2910}$	3.21	8.0000
NMod6	3	$7.1001 \cdot 10^{-582}$	$3.2013 \cdot 10^{-2904}$	2.98	8.0000

Kao što se može videti iz Tabela 3.2-3.9, na osnovu rezultata kolona $|x_n - \alpha|$ i $|f(x_n)|$, postupci obe familije metoda (3.1) i (3.11) u najvećem broju slučajeva su bolji od ostalih metoda s obzirom na to da približe niz aproksimacija bliže posmatranom rešenju nakon istog broja funkcijskih izračunavanja. Ovo je naročito primetno kod metoda NMev2 čije su greške najmanje vrednosti. Iz COC kolona se jasno vidi da rezultati nedvosmisleno potvrđuju osmi red konvergencije opisanih postupaka. Osim toga, i CPU vrednosti pokazuju da računanje m-tog korena ne utiče značajno na brzinu nalaženja rešenja. Štaviše, na primeru funkcija f_5 i f_7, ovi postupci imaju izrazito bolje CPU vrednosti. Zanimljivo je zapaziti da u slučaju funkcije f_7, postupak LLC ne pronalazi posmatrano rešenje nakon 100 iteracija (isto se dešava i sa neprikazanim postupcima ShSh, ZCS, RK1, RK2), dok postupci BKMT i GKN1a konveriraju ka nuli funkcije 5.1303... umesto ka najbližoj nuli $\alpha = 3.81735...$

Glava 4

Modifikovani metodi Njutnovog tipa

U okviru uvodnog poglavlja navedeni su pojedini nedostaci klasičnog Njutnovog postupka (1.16) za pronalaženje prostih nula funkcije $f(x)$. Pošto postupak značajno zavisi od izbora početne tačke x_0 i od osobina same funkcije f, na primer u slučajevima kada je x_0 izabrano daleko od korena funkcije, a prvi izvod je jednak nula ili vrlo blizu nule, ili ako se u intervalu pretrage nalazi još tačaka za koje je vrednost prvog izvoda bliska ili jednaka nuli, tada se često dešava neželjeno ponašanje postupka u vidu divergencije, usporene konvergencije ili konvergencije ka udaljenom rešenju. Isti nedostaci karakteristični su i za Šrederov postupak (1.35), koji predstavlja modifikovani Njutnov postupak (1.16) prilagođen za traženje višestrukih korena poznate višestrukosti m. Ovo za posledicu ima i probleme u konvergenciji svih višekoračnih metoda zasnovanih na postupku (1.35), ali i u konvergenciji višekoračnih metoda Džaratovog tipa, jer obe klase metoda zahtevaju izračunavanje količnika $f(x_n)/f'(x_n)$.

Da bi se ovi problemi prevazišli, 2013. godine Kanvar, Batia i Kansal [77] konstruišu optimalnu dvokoračnu familiju postupaka (1.44) četvrtog reda konvergencije za određivanje višestrukih rešenja (u prethodnim poglavljima predstavnici ove familije označeni su sa KBK). U prvom koraku ove iterativne šeme, umesto količnika $f(x_n)/f'(x_n)$, autori koriste $f(x_n)/(f'(x_n) - p_n f(x_n))$. Za originalnu ideju zaslužan je Vu[1] koji u [86] predlaže kvadratno konvergentni jednokoračni postupak

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n) + q_n f(x_n)}, \tag{4.1}$$

za određivanje jednostrukih rešenja, kao alternativu klasičnom Njutnovom po-

[1] Wu

stupku kada se suočavamo sa $f'(x) = 0$, gde je q_n realan parametar sa osobinom $0 < |q_n| < \infty$ biran tako da $f'(x_n)$ i $q_n f(x_n)$ budu istog znaka. KBK postupci opšteg oblika

$$\begin{aligned} y_n &= x_n - \frac{2m}{m+2} \cdot \frac{f(x_n)}{f'(x_n) - p_n f(x_n)}, \\ x_{n+1} &= x_n - Q\Big(\frac{f'(y_n) + k_1 f'(x_n)}{k_2 f'(x_n) - p_n f(x_n)}\Big) \frac{f(x_n)}{f'(x_n) - p_n f(x_n)}, \end{aligned}$$

su prvi koji primenjuju ideju Vua za traženje višestrukih rešenja funkcije. Primetimo da su KBK postupci Džaratovog tipa, odakle sledi da je prvi korak iterativne šeme linearan, a koeficijenti k_1 i k_2, kao i funkcija Q se određuju tako da obezbede optimalan četvrti red konvergencije. Realni parametar p_n se bira tako da obezbedi najveću apsolutnu vrednost izraza $f'(x_n) - p_n f(x_n)$.

U ovom poglavlju razmatraće se slični dvokoračni iterativni postupci, koji za razliku od KBK iterativne šeme, umesto Džaratovog koriste prvi iterativni korak Njutnovog tipa

$$y_n = x_n - m\frac{f(x_n)}{f'(x_n) - pf(x_n)}. \tag{4.2}$$

S obzirom na to da je ovaj korak kvadratno konvergentan (vidi dokaz Teoreme 4.1) i da je u tom pogledu sličan Šrederovom (1.35), konstrukcija narednog koraka koji ima za cilj povećanje reda konvergencije, oslanja se na izračunavanje m-tog i $(m-1)$-og korena težinskih funkcija (slično kao kod Liu-Čou i Čou-Čen-Song postupaka). Zato dalju analizu nastavljamo odovojeno za parnu i neparnu višestrukost, u skladu sa smernicama izvedenim u drugom poglavlju.

4.1 Metod za parnu višestrukost

4.1.1 Metod četvrtog reda konvergencije

Neka je $\alpha \in \mathbb{R}$ nula nelinearne funkcije $f(x)$ poznate parne višestrukosti m. Analiziraćemo u tom slučaju dvokoračnu familiju iterativnih metoda sledećeg oblika

$$\begin{aligned} y_n &= x_n - m\frac{f(x_n)}{f'(x_n) - pf(x_n)}, \\ x_{n+1} &= y_n - m\frac{f(x_n)}{f'(x_n) - pf(x_n)} H(w_n), \end{aligned} \tag{4.3}$$

gde je p realni parametar, a H realna funkcija čiji je argument

$$w_n = \Big(\frac{f'(y_n)}{f'(x_n) - p(m+1)f(x_n)}\Big)^{\frac{1}{m-1}}.$$

Uslovi navedeni u narednoj teoremi obezbeđuju četvrti red posmatranog postupka.

Teorema 4.1 *Neka je $\alpha \in D$ koren parne višestrukosti m nelinearne jednačine* (1.6). *Tada za dovoljno dobro izabranu početnu aproksimaciju x_0 i realnu funkciju H koja ispunjava uslove*

$$H(0) = 0, \quad H'(0) = 1, \quad H''(0) = 4m/(m-1) \quad i \quad |H'''(0)| < \infty, \tag{4.4}$$

familija iterativnih postupaka (4.3) *dostiže najmanje četvrti red konvergencije, a jednačina greške je oblika*

$$\begin{aligned} e_{n+1} &= \Big[3(p-c_1)\big((m^2-10m-3)mp + (m^3+8m^2+m+2)c_1\big) \\ &\quad +6(m-1)m^2c_2 + (m-1)^2(p-c_1)^2H'''(0)\Big]\frac{(p-c_1)e_n^4}{6m^3(m-1)^2} \\ &\quad +O(e_n^5), \end{aligned} \tag{4.5}$$

za koeficijente c_i definisane sa (2.2).

Dokaz: Tejlorov razvoj funkcija $f(x)$ i $f'(x)$ u okolini tačke α prikazan je redom formulama (2.3) i (2.4), pa koristeći ove formule dobijamo da je Vuov količnik $f(x_n)/(f'(x_n) - pf(x_n))$ za koren višestrukosti m, moguće zapisati u sledećem obliku

$$\begin{aligned} \frac{f(x_n)}{f'(x_n) - pf(x_n)} &= \frac{e_n}{m} + (p-c_1)\frac{e_n^2}{m^2} + (p^2 - 2pc_1 + (m+1)c_1^2 - 2mc_2)\frac{e_n^3}{m^3} \\ &\quad +\Big(p^3 + (2m+3)pc_1^2 - (m+1)^2c_1^3 - 4mpc_2 - 3m^2c_3 \\ &\quad +c_1(-3p^2 + m(3m+4)c_2)\Big)\frac{e_n^4}{m^4} + O(e_n^5). \end{aligned} \tag{4.6}$$

Ako sa e_y označimo udaljenost tačke y_n od tačnog rešenja α, na osnovu (4.6) imamo da je

$$\begin{aligned} e_y &= y_n - \alpha \\ &= (p-c_1)\frac{e_n^2}{m} + (p^2 - 2pc_1 + (m+1)c_1^2 - 2mc_2)\frac{e_n^3}{m^2} \\ &\quad + \Big(p^3 + (2m+3)pc_1^2 - (m+1)^2c_1^3 - 4mpc_2 - 3m^2c_3 \\ &\quad + c_1(-3p^2 + m(3m+4)c_2)\Big)\frac{e_n^4}{m^3} + O(e_n^5), \end{aligned} \tag{4.7}$$

što nedvosmisleno pokazuje kvadratnu konvergenciju prvog koraka iterativne šeme (4.3), odnosno postupka (4.2).

Zamenom vrednosti e_y umesto e_n u formuli (2.4), nakon sređivanja izraza dobijamo

$$f'(y_n) = \frac{f^{(m)}(\alpha)}{(m-1)!}\Big(\frac{c_1-p}{m}\Big)^{m-1} e^{2(m-1)}\big(1 + l_1e_n + l_2e_n^2 + O(e_n^3)\big), \tag{4.8}$$

gde su l_1 i l_2 definisani sa

$$\begin{aligned} l_1 &= \frac{m-1}{m(p-c_1)}(p^2 - 2pc_1 + (m+1)c_1^2 - 2mc_2), \\ l_2 &= \frac{1}{2m^2}\Big[2(m+1)c_1(c_1-p) + \frac{m(m-1)}{(p-c_1)^2}\Big(p^4 - 2(3m+2)pc_1^3 - 4mp^2c_2 \\ &\quad + (m+1)^2c_1^4 + 4m(m-2)c_2^2 + 2c_1^2((m+3)p^2 - m(2m+1)c_2\big) \\ &\quad - 6mpc_3 + c_1(-4p^3 + 14mpc_2 + 6mc_3)\Big)\Big]. \end{aligned}$$

Sada na osnovu (2.3), (2.4) i (4.8) imamo

$$\frac{f'(y_n)}{f'(x_n) - p(m+1)f(x_n)} = \Big(\frac{c_1-p}{m}\Big)^{m-1} e_n^{m-1}\big(1 + q_1e_n + q_2e_n^2 + O(e_n^3)\big), \tag{4.9}$$

gde su

$$
\begin{aligned}
q_1 &= \frac{1}{p-c_1}(-4pc_1+(m+1)c_1^2+2(p^2-(m-1)c_2)),\\
q_2 &= \frac{1}{2m^2(p-c_1)^2}\Big[-2(5m^3+6m^2+6m+3)pc_1^3\\
&\quad +(m^4+3m^3+3m^2+3m+2)c_1^4\\
&\quad +2c_1^2\big((2m^3+12m^2+9m+3)p^2-m^3(2m+1)c_2\big)\\
&\quad -2c_1\big((3m+1)^2p^3-(11m-5)m^2pc_2-3(m-1)m^2c_3\big)\\
&\quad +m\Big(-2(4m-1)mp^2c_2+4m(m^2-3m+2)c_2^2\\
&\quad +p\big((5m+3)p^3-6m(m-1)c_3\big)\Big)\Big].
\end{aligned}
$$

S obzirom na to da je m paran broj ($m-1$ je neparan), vrednost izraza w_n može se predstaviti pomoću Tejlorovog razvoja korene funkcije u okolini tačke nula na sledeći način

$$
\begin{aligned}
w_n &= \Big(\frac{f'(y_n)}{f'(x_n)-p(m+1)f(x_n)}\Big)^{\frac{1}{m-1}}\\
&= (c_1-p)\frac{e_n}{m}\\
&\quad +\big(4pc_1-(m+1)c_1^2-2(p^2-(m-1)c_2)\big)\frac{e_n^2}{m(m-1)}\\
&\quad +\Big[(-7m^3-14m^2+5m+4)pc_1^2+(2m^4+3m^3+2m^2-m-2)c_1^3\\
&\quad +c_1\big((m^3+20m^2-7m-2)p^2-2m^2(3m^2+m-4)c_2\big)\\
&\quad +m\big((-m^2-6m+3)p^3+14(m-1)mpc_2\\
&\quad +6(m-1)^2mc_3\big)\Big]\frac{e_n^3}{2m^3(m-1)^2}+O(e_n^4).
\end{aligned}
\tag{4.10}
$$

Pošto je Tejlorov razvoj funkcije H u okolini nule

$$
H(w_n)=H(0)+H'(0)w_n+\frac{1}{2}H''(0)w_n^2+\frac{1}{6}H'''(0)w_n^3+O(w_n^4), \tag{4.11}
$$

tada se zamenom vrednosti (4.6), (4.7), (4.10) i (4.11) u drugi korak iterativne

šeme (4.3) dobija

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n - \big(1+H(0)\big)e_n - (p-c_1)\big(1+H(0)-H'(0)\big)\frac{e_n^2}{m} \\ &\quad -\Big(2(1+H(0))\big(p^2-2pc_1+(m+1)c_1^2-2mc_2\big)-2(p-c_1)^2H'(0) \\ &\quad +\frac{2m}{m-1}\big(4pc_1-(m+1)c_1^2-2(p^2-(m-1)c_2)\big)H'(0) \\ &\quad +(p-c_1)^2H''(0)\Big)\frac{e_n^3}{2m^2}+O(e_n^4). \end{aligned} \tag{4.12}$$

Ukoliko funkcija H zadovoljava uslove (4.4), tada koeficijenti uz e_n, e_n^2 i e_n^3 iz izraza (4.12) postaju jednaki nuli. Koristeći uslove (4.4), ponovnim računanjem vrednosti x_{n+1} i sređivanjem izraza $e_{n+1} = x_{n+1} - \alpha$, dobijamo četvrti red konvergencije i jednačinu greške

$$\begin{aligned} e_{n+1} &= \Big[3(p-c_1)\big((m^2-10m-3)mp+(m^3+8m^2+m+2)c_1\big) \\ &\quad +6(m-1)m^2c_2+(m-1)^2(p-c_1)^2H'''(0)\Big]\frac{(p-c_1)e_n^4}{6m^3(m-1)^2}+O(e_n^5). \end{aligned} \qquad \square$$

Upravo dokazani četvrti red konvergencije uz tri funkcijska izračunavanja po iteraciji, predstavlja potvrdu optimalnosti posmatrane familije i indeksa efikasnosti $4^{1/3} \approx 1.5874$. Lako je zapaziti da su uslovi (4.4) koje treba da zadovolji funkcija H identični uslovima (1.46) koje treba da zadovolji funkcija Q da bi obezbedila optimalnost Liu-Čou familije postupka (1.45). Štaviše, Liu-Čou familija može se tretirati kao specijalan slučaj familije (4.3) kada se za vrednost parametra izabere $p = 0$. Uvrštavanjem vrednosti $p = 0$ u (4.5) jednostavno se potvrđuje jednačina greške uopštenog Liu-Čou metoda [79, str.147]. Drugim rečima, iterativna šema (4.3) predstavlja unapređenu verziju Liu-Čou metoda osmišljenu sa ciljem prevazilaženja problema standardnih postupaka Njutnovog i Džaratovog tipa. Zato ćemo za potrebe numeričkog testiranja i poređenja sa drugim postupcima koristiti dve funkcije H iste strukture kao kod LZ1 i LZ2 metoda, tj.

$$H(w_n) = \frac{2m}{m-1}w_n^2 + w_n \quad \text{i} \quad H(w_n) = \frac{(m-1)w_n}{m-1-2mw_n}.$$

Ovi postupci su u nastavku označeni sa **M(4)ev1** i **M(4)ev2**, a propratne

jednačine greške su redom

$$\begin{aligned} e_{n+1} &= \Big[(p-c_1)\big((m^2-10m-3)mp+(m^3+8m^2+m+2)c_1\big) \\ &\quad +2(m-1)m^2c_2\Big]\frac{(p-c_1)e_n^4}{2m^3(m-1)^2}+O(e_n^5), \end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned} e_{n+1} &= \Big[(p-c_1)\big((m^2-10m-3)mp+(m^3+8m^2+m+2)c_1\big) \\ &\quad +2(m-1)m^2c_2+8m^2(p-c_1)^2\Big]\frac{(p-c_1)e_n^4}{2m^3(m-1)^2}+O(e_n^5). \end{aligned}$$

Umesto konstantne vrednosti parametra p moguće je koristiti parametar p_n koji će se menjati iz iteracije u iteraciju, a da postupak (4.3) zadrži četvrti red konvergencije. Naime, ako za svako $n \in \mathbb{N}$ važi $|p_n| \leq M$ za neko $M > 0$, pošto je činilac uz e_n^4 u jednačini greške (4.7) polinomnog tipa i važi $|H'''(0)| < \infty$, tada je očigledno da postoji konstanta $C > 0$ za koju važi $|x_{n+1} - \alpha| \leq C|x_n - \alpha|^4$, odnosno da je postupak (4.3) četvrtog reda u smislu Definicije 1.2. Za potrebe numeričkog testiranja koristićemo ideju iz [77, 86], odnosno biraćemo $A > 0$ tako da je $|p_n| = A$ za svako n tako da je u prvom koraku iterativnog pravila (4.3) apsolutna vrednost imenioca najveća. Slično ćemo postupati i prilikom analize narednih postupaka koji zavise od parametra p_n, a indeks n izostavićemo zbog jednostavnosti.

4.1.2 Numerički rezultati

Za numeričko testiranje opisanih postupaka i poređenje rezultata sa postojećim metodima koristićemo test funkcije date u Tabeli 4.1. Tu su još prikazana i odgovarajuća rešenja funkcija i njihova višestrukost. Da bi se postigla visoka preciznost u računanju, pomoću funkcije *SetPrecision* tačnost izračunavanja postavljena je na 10000 decimala.

Tabela 4.1 Test funkcije

$f(x)$	α	m
$f_1(x) = \sin^2 x$	0	2
$f_2(x) = (\sin x + e^{-x})^2$	3.1830630119...	2
$f_3(x) = (x^3 - 2x - 5)^4$	2.0945514815...	4
$f_4(x) = (x + \sin x - 2)^2$	1.1060601577...	2

Tabela 4.2 Numerički rezultati za $f_1(x)$ i $x_0 = -1.51$

Metod	it	$\lvert x_n - \alpha \rvert$	$\lvert f(x_n) \rvert$	CPU	COC
MNM	8∗	uk	uk	uk	uk
LLC	7∗	uk	uk	uk	uk
ShSh	8∗	uk	uk	uk	uk
LZ1	8∗	uk	uk	uk	uk
LZ2	7∗	uk	uk	uk	uk
KBK1, $\lvert p \rvert = 1$	5	$1.1285 \cdot 10^{-159}$	$1.2736 \cdot 10^{-318}$	2.28	4.0000
KBK2, $\lvert p \rvert = 1$	5	$1.0372 \cdot 10^{-155}$	$1.0757 \cdot 10^{-310}$	2.32	4.0000
M(4)ev1, $\lvert p \rvert = 1$	6	$5.4668 \cdot 10^{-47}$	$2.9886 \cdot 10^{-93}$	2.79	4.0000
M(4)ev2, $\lvert p \rvert = 1$	6	$1.5194 \cdot 10^{-73}$	$2.3086 \cdot 10^{-146}$	2.54	4.0000
KBK1, $\lvert p \rvert = 3/5$	7	$8.8146 \cdot 10^{-12}$	$7.7697 \cdot 10^{-23}$	3.81	4.0000
KBK2, $\lvert p \rvert = 3/5$	7∗	uk	uk	uk	uk
M(4)ev1, $\lvert p \rvert = 3/5$	8∗	uk	uk	uk	uk
M(4)ev2, $\lvert p \rvert = 3/5$	6	$1.0137 \cdot 10^{-50}$	$1.0276 \cdot 10^{-100}$	2.78	4.0000
KBK1, $\lvert p \rvert = 5$	9∗	uk	uk	uk	uk
KBK2, $\lvert p \rvert = 5$	6	$6.6835 \cdot 10^{-38}$	$4.4669 \cdot 10^{-75}$	3.15	4.0000
M(4)ev1, $\lvert p \rvert = 5$	10	0.16400	0.026655	5.97	4.0000
M(4)ev2, $\lvert p \rvert = 5$	10	0.14182	0.019979	5.69	4.0000

Tabela 4.3 Numerički rezultati za $f_1(x)$ i $x_0 = 0.3$

Metod	it	$\lvert x_n - \alpha \rvert$	$\lvert f(x_n) \rvert$	CPU	COC
MNM	6	$1.0507 \cdot 10^{-551}$	$1.1039 \cdot 10^{-1102}$	1.55	3.0000
LLC	5	$1.3144 \cdot 10^{-480}$	$1.7277 \cdot 10^{-960}$	1.82	5.0000
ShSh	5	$3.4442 \cdot 10^{-480}$	$1.1862 \cdot 10^{-959}$	1.89	5.0000
LZ1	5	$1.9461 \cdot 10^{-447}$	$3.7875 \cdot 10^{-894}$	1.65	5.0000
LZ2	5	$2.8104 \cdot 10^{-470}$	$7.8986 \cdot 10^{-940}$	1.62	5.0000
KBK1, $\lvert p \rvert = 1$	5	$2.8620 \cdot 10^{-227}$	$8.1913 \cdot 10^{-454}$	2.03	4.0000
KBK2, $\lvert p \rvert = 1$	5	$3.1667 \cdot 10^{-224}$	$1.0028 \cdot 10^{-447}$	2.00	4.0000
M(4)ev1, $\lvert p \rvert = 1$	5	$1.6807 \cdot 10^{-140}$	$2.8248 \cdot 10^{-280}$	2.09	4.0000
M(4)ev2, $\lvert p \rvert = 1$	5	$8.0358 \cdot 10^{-180}$	$6.4574 \cdot 10^{-359}$	1.98	4.0000
KBK1, $\lvert p \rvert = 3/5$	5	$2.4907 \cdot 10^{-240}$	$6.2035 \cdot 10^{-480}$	1.97	4.0000
KBK2, $\lvert p \rvert = 3/5$	5	$1.2585 \cdot 10^{-239}$	$1.5837 \cdot 10^{-478}$	2.00	4.0000
M(4)ev1, $\lvert p \rvert = 3/5$	5	$5.1541 \cdot 10^{-193}$	$2.6564 \cdot 10^{-385}$	1.94	4.0000
M(4)ev2, $\lvert p \rvert = 3/5$	5	$4.5813 \cdot 10^{-223}$	$2.0988 \cdot 10^{-445}$	1.89	4.0000
KBK1, $\lvert p \rvert = 5$	5	$6.7861 \cdot 10^{-197}$	$4.6051 \cdot 10^{-393}$	2.07	4.0000
KBK2, $\lvert p \rvert = 5$	5	$1.1045 \cdot 10^{-146}$	$1.2200 \cdot 10^{-292}$	2.23	4.0000
M(4)ev1, $\lvert p \rvert = 5$	7	$1.5891 \cdot 10^{-25}$	$2.5253 \cdot 10^{-50}$	3.15	4.0000
M(4)ev2, $\lvert p \rvert = 5$	6	$3.6709 \cdot 10^{-39}$	$1.3476 \cdot 10^{-77}$	2.89	4.0000

Tabela 4.4 Numerički rezultati za $f_2(x)$ i $x_0 = 1.7$

Metod	it	$\lvert x_n - \alpha \rvert$	$\lvert f(x_n) \rvert$	CPU	COC
MNM	10∗	uk	uk	uk	uk
LLC	div.	–	–	–	–
ShSh	31	28.313	$6.7167 \cdot 10^{21}$	35.6	4.0000
LZ1	6∗	uk	uk	uk	uk
LZ2	7	$9.3365 \cdot 10^{-11}$	$9.4393 \cdot 10^{-21}$	7.52	4.0000
KBK1, $\lvert p \rvert = 1$	6	$1.8575 \cdot 10^{-104}$	$3.7360 \cdot 10^{-208}$	6.29	4.0000
KBK2, $\lvert p \rvert = 1$	6	$1.4263 \cdot 10^{-103}$	$2.2029 \cdot 10^{-206}$	6.30	4.0000
M(4)ev1, $\lvert p \rvert = 1$	6	$2.8316 \cdot 10^{-80}$	$8.6822 \cdot 10^{-160}$	6.30	4.0000
M(4)ev2, $\lvert p \rvert = 1$	6	$1.2220 \cdot 10^{-105}$	$1.6171 \cdot 10^{-210}$	6.27	4.0000
KBK1, $\lvert p \rvert = 0.3$	7∗	uk	uk	uk	uk
KBK2, $\lvert p \rvert = 0.3$	8	$1.0179 \cdot 10^{-5}$	$1.1219 \cdot 10^{-10}$	8.66	4.0000
M(4)ev1, $\lvert p \rvert = 0.3$	div.	–	–	–	–
M(4)ev2, $\lvert p \rvert = 0.3$	6	$5.1396 \cdot 10^{-52}$	$2.8604 \cdot 10^{-103}$	6.35	4.0000
KBK1, $\lvert p \rvert = 2$	6	$2.3940 \cdot 10^{-71}$	$6.2061 \cdot 10^{-142}$	6.35	4.0000
KBK2, $\lvert p \rvert = 2$	6	$1.0379 \cdot 10^{-71}$	$1.1664 \cdot 10^{-142}$	6.35	4.0000
M(4)ev1, $\lvert p \rvert = 2$	7	$1.1891 \cdot 10^{-11}$	$1.5310 \cdot 10^{-22}$	7.49	4.0000
M(4)ev2, $\lvert p \rvert = 2$	7	$4.1859 \cdot 10^{-19}$	$1.8973 \cdot 10^{-37}$	7.46	4.0000

Tabela 4.5 Numerički rezultati za $f_2(x)$ i $x_0 = 3.8$

Metod	it	$\lvert x_n - \alpha \rvert$	$\lvert f(x_n) \rvert$	CPU	COC
MNM	9	$2.2403 \cdot 10^{-87}$	$5.4347 \cdot 10^{-174}$	5.76	2.0000
LLC	5	$2.6708 \cdot 10^{-154}$	$7.7238 \cdot 10^{-308}$	5.18	4.0000
ShSh	5	$9.9561 \cdot 10^{-154}$	$1.0734 \cdot 10^{-306}$	5.19	4.0000
LZ1	6	$8.8675 \cdot 10^{-115}$	$8.5147 \cdot 10^{-229}$	6.32	4.0000
LZ2	5	$3.5809 \cdot 10^{-153}$	$1.3885 \cdot 10^{-305}$	5.18	4.0000
KBK1, $\lvert p \rvert = 1$	5	$1.2626 \cdot 10^{-180}$	$1.7262 \cdot 10^{-360}$	5.21	4.0000
KBK2, $\lvert p \rvert = 1$	5	$3.8011 \cdot 10^{-178}$	$1.5645 \cdot 10^{-355}$	5.23	4.0000
M(4)ev1, $\lvert p \rvert = 1$	6	$5.3117 \cdot 10^{-105}$	$3.0552 \cdot 10^{-209}$	6.29	4.0000
M(4)ev2, $\lvert p \rvert = 1$	5	$7.2052 \cdot 10^{-139}$	$5.6216 \cdot 10^{-277}$	5.18	4.0000
KBK1, $\lvert p \rvert = 0.3$	5	$6.6405 \cdot 10^{-192}$	$4.7750 \cdot 10^{-383}$	5.21	4.0000
KBK2, $\lvert p \rvert = 0.3$	5	$1.1226 \cdot 10^{-191}$	$1.3647 \cdot 10^{-382}$	5.21	4.0000
M(4)ev1, $\lvert p \rvert = 0.3$	5	$4.1836 \cdot 10^{-158}$	$1.8952 \cdot 10^{-315}$	5.16	4.0000
M(4)ev2, $\lvert p \rvert = 0.3$	5	$2.0394 \cdot 10^{-177}$	$4.5038 \cdot 10^{-354}$	5.18	4.0000
KBK1, $\lvert p \rvert = 2$	5	$1.7133 \cdot 10^{-155}$	$3.1786 \cdot 10^{-310}$	5.20	4.0000
KBK2, $\lvert p \rvert = 2$	5	$2.2637 \cdot 10^{-193}$	$5.5491 \cdot 10^{-386}$	5.19	4.0000
M(4)ev1, $\lvert p \rvert = 2$	6	$1.0416 \cdot 10^{-41}$	$1.1748 \cdot 10^{-82}$	6.38	4.0000
M(4)ev2, $\lvert p \rvert = 2$	6	$7.5897 \cdot 10^{-64}$	$6.2376 \cdot 10^{-127}$	6.36	4.0000

Tabela 4.6 Numerički rezultati za $f_3(x)$ i $x_0 = 0.82$

Metod	it	$\lvert x_n - \alpha \rvert$	$\lvert f(x_n) \rvert$	CPU	COC
MNM	23	44.641	$1.0817 \cdot 10^{20}$	0.297	2.0000
LLC	14	38.596	$5.5636 \cdot 10^{18}$	0.312	4.0000
ShSh	15	262.89	$1.1984 \cdot 10^{29}$	0.390	4.0000
LZ1	87	$6.4786 \cdot 10^{20}$	$5.4678 \cdot 10^{249}$	2.57	4.0000
LZ2	12	22.003	$3.7763 \cdot 10^{16}$	0.358	4.0000
KBK1, $\lvert p \rvert = 1$	28	126.13	$1.3252 \cdot 10^{25}$	0.734	4.0000
KBK2, $\lvert p \rvert = 1$	13	12.845	$1.1856 \cdot 10^{14}$	0.343	4.0000
M(4)ev1, $\lvert p \rvert = 1$	div.	–	–	–	–
M(4)ev2, $\lvert p \rvert = 1$	7	$2.6989 \cdot 10^{-14}$	$8.2345 \cdot 10^{-51}$	0.234	4.0000
KBK1, $\lvert p \rvert = 1/3$	20	3.4845	579.03	0.530	4.0000
KBK2, $\lvert p \rvert = 1/3$	18	4.6465	74393.	0.515	4.0000
M(4)ev1, $\lvert p \rvert = 1/3$	div.	–	–	–	–
M(4)ev2, $\lvert p \rvert = 1/3$	8	$1.4192 \cdot 10^{-2}$	$6.5009 \cdot 10^{-4}$	0.250	4.0000
KBK1, $\lvert p \rvert = 3$	6	$4.8232 \cdot 10^{-32}$	$8.3989 \cdot 10^{-122}$	0.140	4.0000
KBK2, $\lvert p \rvert = 3$	6	$8.3730 \cdot 10^{-32}$	$7.6280 \cdot 10^{-121}$	0.156	4.0000
M(4)ev1, $\lvert p \rvert = 3$	5	$7.9383 \cdot 10^{-103}$	$6.1629 \cdot 10^{-405}$	0.156	4.0000
M(4)ev2, $\lvert p \rvert = 3$	5	$1.7118 \cdot 10^{-103}$	$1.3325 \cdot 10^{-407}$	0.156	4.0000

Tabela 4.7 Numerički rezultati za $f_3(x)$ i $x_0 = 1.85$

Metod	it	$\lvert x_n - \alpha \rvert$	$\lvert f(x_n) \rvert$	CPU	COC
MNM	9	$8.8602 \cdot 10^{-53}$	$9.5642 \cdot 10^{-205}$	0.0930	2.0000
LLC	5	$1.6243 \cdot 10^{-172}$	$1.0803 \cdot 10^{-683}$	0.125	4.0000
ShSh	5	$3.3312 \cdot 10^{-171}$	$1.9110 \cdot 10^{-678}$	0.125	4.0000
LZ1	5	$1.0021 \cdot 10^{-111}$	$1.5653 \cdot 10^{-440}$	0.156	4.0000
LZ2	5	$3.5252 \cdot 10^{-195}$	$2.3968 \cdot 10^{-774}$	0.140	4.0000
KBK1, $\lvert p \rvert = 1$	4	$5.4621 \cdot 10^{-273}$	$1.3814 \cdot 10^{-1085}$	0.0780	4.0000
KBK2, $\lvert p \rvert = 1$	4	$4.4756 \cdot 10^{-274}$	$6.2270 \cdot 10^{-1090}$	0.0940	4.0000
M(4)ev1, $\lvert p \rvert = 1$	5	$4.4005 \cdot 10^{-159}$	$5.8194 \cdot 10^{-630}$	0.156	4.0000
M(4)ev2, $\lvert p \rvert = 1$	4	$3.0064 \cdot 10^{-253}$	$1.2679 \cdot 10^{-1006}$	0.109	4.0000
KBK1, $\lvert p \rvert = 1/3$	5	$2.1233 \cdot 10^{-189}$	$3.1547 \cdot 10^{-751}$	0.125	4.0000
KBK2, $\lvert p \rvert = 1/3$	5	$5.4786 \cdot 10^{-189}$	$1.3981 \cdot 10^{-749}$	0.140	4.0000
M(4)ev1, $\lvert p \rvert = 1/3$	5	$3.2794 \cdot 10^{-124}$	$1.7950 \cdot 10^{-490}$	0.140	4.0000
M(4)ev2, $\lvert p \rvert = 1/3$	5	$3.2601 \cdot 10^{-205}$	$1.7531 \cdot 10^{-814}$	0.156	4.0000
KBK1, $\lvert p \rvert = 3$	5	$1.0111 \cdot 10^{-170}$	$1.6220 \cdot 10^{-676}$	0.125	4.0000
KBK2, $\lvert p \rvert = 3$	5	$1.4405 \cdot 10^{-170}$	$6.6829 \cdot 10^{-676}$	0.140	4.0000
M(4)ev1, $\lvert p \rvert = 3$	5	$2.4389 \cdot 10^{-192}$	$5.4910 \cdot 10^{-763}$	0.141	4.0000
M(4)ev2, $\lvert p \rvert = 3$	5	$1.9656 \cdot 10^{-210}$	$2.3167 \cdot 10^{-835}$	0.156	4.0000

Tabela 4.8 Numerički rezultati za $f_4(x)$ i $x_0 = 3.14$

Metod	it	$\lvert x_n - \alpha \rvert$	$\lvert f(x_n) \rvert$	CPU	COC
MNM	div.	–	–	–	–
LLC	div.	–	–	–	–
ShSh	div.	–	–	–	–
LZ1	div.	–	–	–	–
LZ2	div.	–	–	–	–
KBK1, $\lvert p \rvert = 1$	6	$3.9677 \cdot 10^{-66}$	$3.3016 \cdot 10^{-131}$	4.98	4.0000
KBK2, $\lvert p \rvert = 1$	6	$3.2426 \cdot 10^{-65}$	$2.2051 \cdot 10^{-129}$	5.05	4.0000
M(4)ev1, $\lvert p \rvert = 1$	6	$1.7845 \cdot 10^{-66}$	$6.6785 \cdot 10^{-132}$	5.01	4.0000
M(4)ev2, $\lvert p \rvert = 1$	6	$2.0066 \cdot 10^{-78}$	$8.4443 \cdot 10^{-156}$	5.01	4.0000
KBK1, $\lvert p \rvert = 1/2$	div.	–	–	–	–
KBK2, $\lvert p \rvert = 1/2$	9	$2.1095 \cdot 10^{-2}$	$9.4541 \cdot 10^{-4}$	7.50	4.0000
M(4)ev1, $\lvert p \rvert = 1/2$	div.	–	–	–	–
M(4)ev2, $\lvert p \rvert = 1/2$	7	$5.8064 \cdot 10^{-17}$	$7.0707 \cdot 10^{-33}$	5.88	4.0000
KBK1, $\lvert p \rvert = 2$	div.	–	–	–	–
KBK2, $\lvert p \rvert = 2$	7	$3.8529 \cdot 10^{-11}$	$3.1133 \cdot 10^{-21}$	5.76	4.0000
M(4)ev1, $\lvert p \rvert = 2$	7	$3.4094 \cdot 10^{-12}$	$2.4378 \cdot 10^{-23}$	5.62	4.0000
M(4)ev2, $\lvert p \rvert = 2$	7	$2.8132 \cdot 10^{-22}$	$1.6598 \cdot 10^{-43}$	5.66	4.0000

Tabela 4.9 Numerički rezultati za $f_4(x)$ i $x_0 = 1.5$

Metod	it	$\lvert x_n - \alpha \rvert$	$\lvert f(x_n) \rvert$	CPU	COC
MNM	10	$7.6056 \cdot 10^{-54}$	$1.2132 \cdot 10^{-106}$	4.95	2.0000
LLC	5	$7.3262 \cdot 10^{-173}$	$1.1257 \cdot 10^{-344}$	3.98	4.0000
ShSh	5	$7.1760 \cdot 10^{-170}$	$1.0800 \cdot 10^{-338}$	6.24	4.0000
LZ1	6	$3.0851 \cdot 10^{-72}$	$1.9961 \cdot 10^{-143}$	7.91	4.0000
LZ2	5	$6.8264 \cdot 10^{-152}$	$9.7732 \cdot 10^{-303}$	8.86	4.0000
KBK1, $\lvert p \rvert = 1$	5	$1.7833 \cdot 10^{-240}$	$6.6694 \cdot 10^{-480}$	6.36	4.0000
KBK2, $\lvert p \rvert = 1$	5	$3.9687 \cdot 10^{-240}$	$3.3033 \cdot 10^{-479}$	3.98	4.0000
M(4)ev1, $\lvert p \rvert = 1$	5	$1.9442 \cdot 10^{-277}$	$7.9277 \cdot 10^{-554}$	3.93	4.0000
M(4)ev2, $\lvert p \rvert = 1$	5	$3.8620 \cdot 10^{-218}$	$3.1281 \cdot 10^{-435}$	3.95	4.0000
KBK1, $\lvert p \rvert = 1/2$	5	$2.1146 \cdot 10^{-353}$	$9.3780 \cdot 10^{-706}$	4.01	4.0000
KBK2, $\lvert p \rvert = 1/2$	5	$2.1178 \cdot 10^{-326}$	$9.4060 \cdot 10^{-652}$	3.96	4.0000
M(4)ev1, $\lvert p \rvert = 1/2$	5	$9.1055 \cdot 10^{-162}$	$1.7388 \cdot 10^{-322}$	4.02	4.0000
M(4)ev2, $\lvert p \rvert = 1/2$	5	$1.5213 \cdot 10^{-216}$	$4.8538 \cdot 10^{-432}$	3.98	4.0000
KBK1, $\lvert p \rvert = 2$	5	$1.3320 \cdot 10^{-145}$	$3.7212 \cdot 10^{-290}$	4.02	4.0000
KBK2, $\lvert p \rvert = 2$	5	$2.1393 \cdot 10^{-147}$	$9.5981 \cdot 10^{-294}$	4.01	4.0000
M(4)ev1, $\lvert p \rvert = 2$	6	$1.4371 \cdot 10^{-91}$	$4.3315 \cdot 10^{-182}$	4.76	4.0000
M(4)ev2, $\lvert p \rvert = 2$	5	$3.1583 \cdot 10^{-145}$	$2.0919 \cdot 10^{-289}$	3.96	4.0000

Imajući u vidu zaključke iz prethodnog odeljka, prirodno je nove metode M(4)ev1 i M(4)ev2 uporediti sa Liu-Čou metodima LZ1 i LZ2, i sa metodima članovima familije (1.44) KBK1 i KBK2. S obzirom na to da KBK i novi metodi zavise i od izbora parametra p, interesantno je ispitati i uticaj ovog parametra na numeričko ponašanje metoda. Tako su u svakoj tabeli predstavljeni rezultati ovih metoda za tri različita izbora p, gde je $|p| = 1$, $|p| > 1$ i $|p| < 1$ (isti izbor koristimo za obe početne vrednosti x_0). Od ostalih optimalnih postupaka četvrtog reda konvergecnije u komparaciji učestvuju još postupci LLC i ShSh, dok su rezultati kvadratno konvergentnog MNM metoda dati u prvoj vrsti.

Za svaku test funkciju prikazane su po dve tabele različite u odnosu na izbor početne aproksimacije x_0. U prvom slučaju, vrednosti x_0 su preuzete iz srodnih radova [77, 86] slične problematike (odakle su preuzete i test funkcije), gde su x_0 tačke relativno blizu nulama prvog izvoda, ili su x_0 vrednosti za koje uobičajeni Njutnovi postupci pokazuju loše numeričko ponašanje. U drugom slučaju, početna vrednost x_0 se bira u bližoj okolini posmatranog rešenja α. Napomenimo da su u oba slučaja navedena rešenja označena sa α najbliže nule funkcije $f(x)$ u odnosu na izabrane aproksimacije x_0.

Sve tabele sa numeričkim rezultatima prikazuju u kolonama broj iteracija neophodnih da se zadovolji zaustavni kriterijum $|f(x_n)| < 10^{-1000}$, vreme (CPU) potrebno da se to desi, kao i računski red konvergencije (COC). Osim toga dati su i udaljenost od rešenja $|x_n - \alpha|$ i apsolutna vrednost funkcije u toj tački $|f(x_n)|$ nakon jednakog broja funkcijskih izračunavanja, a pošto je izabrano da taj broj bude 12, to znači da su za metod MNM vrednosti $|x_n - \alpha|$ i $|f(x_n)|$ date nakon šeste, a za sve ostale postupke nakon četvrte iteracije. Znak "$-$"ukazuje da posmatrani postupak divergira, dok je sa "uk"i zvezdicom označen slučaj kada postupak konvergira ka nekom drugom korenu funkcije, a ne ka najbližem korenu α.

Na osnovu COC vrednosti iz Tabela 4.2-4.9 može se zapaziti da su M(4)ev1 i M(4)ev2 optimalnog četvrtog reda konvergencije za različite vrednosti realnog parametra p, što jasno potvrđuje teorijske rezultate dobijene u prethodnom odeljku. Uočljivo je da se ostali numerički rezultati značajno razlikuju u odnosu na vrednost početne tačke x_0.

Kao što je bilo i očekivano, primetno je da su postupci znatno nestabilniji pri prvom izboru x_0 (tabele sa parnim indeksom). Tada su KBK i M(4)ev postupci uglavnom bolji u odnosu na ostale. Primetimo da su tada ovi postupci osetljiviji na promenu vrednosti parametra p nego u slučaju kada je x_0 u bližoj okolini α. Na primer, za $f_3(x)$ i $x_0 = 0.82$, iz Tabele 4.6 se vidi da postupak M(4)ev1 ne pronalazi rešenje u zadatom broju iteracija za $|p| = 1$ i $|p| = 1/3$, dok za izbor

$|p| = 3$ ovaj postupak daje rezultate ubedljivo bolje od rezultata navedenih u koloni iznad njega. Primetimo da u ovom slučaju algoritam M(4)ev2 za sve odabrane vrednosti parametra p ima bolje rezultate od KBK metoda za iste vrednosti p. Drugi primer koji takođe ilustruje osetljivost postupaka na promenu parametra p, predstavljaju razultati za funkciju $f_1(x)$ i $x_0 = -1.51$, prikazani u Tabeli 4.2. Iako su tu KBK algoritmi najbolji za $|p| = 1$, ako je $|p| = 5$ postupak KBK1 konvergira ka daljem korenu π, a ka istom korenu ide i KBK2 za $|p| = 3/5$. Napomenimo da M(4)ev1 konvergira ka $-\pi$ za $|p| = 3/5$, dok postupci MNM, LLZ, ShSh, LZ1, LZ2, teže redom ka 5π, $-\pi$, 2π, -656870π i 3π. Slično, u slučaju funkcije $f_2(x)$ i $x_0 = 1.7$, postupci MNM i KBK1 za $|p| = 0.3$ konvergiraju ka rešenju 6.28131..., a LZ1 ka 37.69911..., umesto ka bližem $\alpha = 3.18306...$, dok za ostale vrednosti parametra p KBK i M(4)ev postupci teže ka α. Veliki broj iteracija potrebnih za zadovoljenje zaustavnog kriterijuma, poput vrednosti "it"kolone u Tabeli 4.6, ukazuju na nemonotono ponašanje postupka. Na primer, postupak KBK1 za $|p| = 1$ dostiže rešenje α nakon 28 iteracija, pri čemu vrednosti $|x_n - \alpha|$ i $|f(x_n)|$ ne opadaju monotono ka nuli, već tek nakon određenog broja iteracija. I ovde korigovanje vrednosti parametra p može dovesti do poboljšanja konvergencije jer isti postupak do rešenja stiže u šest iteracija ako je $|p| = 3$.

Nasuprot tome, algoritmi pokazuju mnogo ujednačenije rezultate kada je početna aproksimacija x_0 veoma blizu posmatranog rešenja α (tabele sa neparnim indeksom), a promena vrednosti parametra p ne utiče tako snažno na ponašanje postupaka. U oba slučaja možemo konstatovati da su za parno m postupci M(4)ev1 i M(4)ev2 dobra alternativa za KBK i Liu-Čou postupke, kao i za ostale ranije razvijene postupke četvrtog reda.

Iako su metodi definisani iterativnom šemom (4.3) konstruisani sa idejom da efikasno rešavaju jednačine sa korenima parne višestrukosti, ovi algoritmi mogu se primenjivati i na traženje rešenja neparne višestrukosti (za $m > 1$). Tako na primer, primenjeni na funkcije date u Tabeli 4.12 (funkcije sa neparnom višestrukošću korena), postupci M(4)ev1 i M(4)ev2 za zadato $|p| = 1$ dostižu optimalni četrvrti red u skoro svim ispitanim slučajevima. Međutim, ako je višestrukost korena neparna, optimalnost familije postupaka (4.3) nije garantovana čak ni kada su zadovoljeni svi uslovi Teoreme 4.1, odnosno čak ni kada funkcija H zadovoljava uslove (4.4), a početna aproksimacija x_0 leži veoma blizu posmatranog korena. Na primer, neka je

$$H(w_n) = kw_n^3 + \frac{2m}{m-1}w_n^2 + w_n,$$

gde je k proizvoljan realan broj. Lako je primetiti da ovako zadata funkcija H zadovoljava uslove (4.4). Posmatrajmo dalje test funkciju $f_5(x) = x^3(x-1)^2$. Koren $\alpha = 0$ je višestrukosti $m = 3$, a za početnu aproksimaciju izabraćemo $x_0 = -0.03$. S obzirom na to da postupak (4.3) sada zavisi od dva realna parametra p i k, interesantno je po iteracijama pratiti konvergenciju ka $\alpha = 0$ za različite vrednosti ovih parametara. Numerički rezultati su prikazani u Tabelama 4.10 i 4.11. Algoritmi se zaustavljaju kada se zadovolji uslov $|f(x_n)| < 10^{-1500}$.

Tabela 4.10 Numerički rezultati za $f_5(x)$ i različite vrednosti parametra p

	metod (4.3) za $\lvert p\rvert = 1$ i $k = 15$			metod (4.3) za $\lvert p\rvert = 3$ i $k = 15$	
i	$x_i - \alpha$	$\lvert f(x_i)\rvert$	i	$x_i - \alpha$	$\lvert f(x_i)\rvert$
1	$1.4016 \cdot 10^{-6}$	$2.7533 \cdot 10^{-18}$	1	$5.8058 \cdot 10^{-6}$	$1.9570 \cdot 10^{-16}$
2	$-1.3096 \cdot 10^{-12}$	$2.2462 \cdot 10^{-36}$	2	$-7.7849 \cdot 10^{-22}$	$4.7179 \cdot 10^{-64}$
3	$1.1277 \cdot 10^{-47}$	$1.4340 \cdot 10^{-141}$	3	$7.7878 \cdot 10^{-84}$	$4.7233 \cdot 10^{-250}$
4	$-8.4776 \cdot 10^{-95}$	$6.0929 \cdot 10^{-283}$	4	$-2.5204 \cdot 10^{-333}$	$1.6010 \cdot 10^{-998}$
5	$1.9800 \cdot 10^{-376}$	$7.7630 \cdot 10^{-1128}$	5	$8.5562 \cdot 10^{-1330}$	$6.2638 \cdot 10^{-3988}$
6	$-2.6137 \cdot 10^{-752}$	$1.7856 \cdot 10^{-2255}$			

Tabela 4.11 Numerički rezultati za $f_5(x)$ i različite vrednosti parametra k

	metod (4.3) za $\lvert p\rvert = 1$ i $k = 15$			metod (4.3) za $\lvert p\rvert = 1$ i $k = 0$	
i	$x_i - \alpha$	$\lvert f(x_i)\rvert$	i	$x_i - \alpha$	$\lvert f(x_i)\rvert$
1	$1.4016 \cdot 10^{-6}$	$2.7533 \cdot 10^{-18}$	1	$-7.1893 \cdot 10^{-6}$	$3.7159 \cdot 10^{-16}$
2	$-1.3096 \cdot 10^{-12}$	$2.2462 \cdot 10^{-36}$	2	$-2.9830 \cdot 10^{-20}$	$2.6543 \cdot 10^{-59}$
3	$1.1277 \cdot 10^{-47}$	$1.4340 \cdot 10^{-141}$	3	$-8.8413 \cdot 10^{-78}$	$6.9110 \cdot 10^{-232}$
4	$-8.4776 \cdot 10^{-95}$	$6.0929 \cdot 10^{-283}$	4	$-6.8231 \cdot 10^{-308}$	$3.1765 \cdot 10^{-922}$
5	$1.9800 \cdot 10^{-376}$	$7.7630 \cdot 10^{-1128}$	5	$-2.4202 \cdot 10^{-1228}$	$1.4176 \cdot 10^{-3683}$
6	$-2.6137 \cdot 10^{-752}$	$1.7856 \cdot 10^{-2255}$			

Još prilikom ispitivanja test funkcija $f_1 - f_4$ videli smo da promena vrednosti parametra p može uticati na brzinu konvergencije, međutim, kod funkcije f_5 taj uticaj je još očigledniji. Uvidom u rezultate prezentovane u Tabeli 4.10, preciznije, posmatranjem eksponenata broja 10, jasno je da je u slučaju prikazanom sa leve strane narušena optimalnost postupka jer se naizmenično smenjuju koraci reda 2 i reda 4. Nasuprot tome, kod metoda prikazanom sa desne strane, eksponenti broja 10 se iz iteracije u iteraciju povećavaju otprilike 4 puta, što sugeriše optimalni red konvergencije. Na sličan način su prikazani postupci u Tabeli 4.11 gde se algoritmi izvršavaju za različite vrednosti parametra k. Ovakvo ponašanje postupka (4.3) analogno je ponašanju LZ1 algoritma u slučajevima neparne višestrukosti detaljno objašnjenom u drugom poglavlju.

4.2 Metodi za neparnu višestrukost

U ovom delu ćemo razmotriti nekoliko dvokoračnih postupaka zasnovanih na prvom modifikovanom koraku Njutnovog tipa (4.2) gde je unapred poznata višetrukost m neparna. Preciznije, biće teorijski analizirane klase postupaka, a specijalni predstavnici ovih klasa služiće za poređenje sa poznatim metodima i numeričku verifikaciju teorijskih rezultata.

4.2.1 Metod trećeg reda konvergencije

U odeljku 4.1.1 videli smo da se Liu-Čou postupak (1.45) za traženje rešenja parne višestrukosti može generalizovati postupkom (4.3), gde se Njutnova težinska funkcija $f(x_n)/f'(x_n)$ zamenjuje količnikom oblika $f(x_n)/(f'(x_n)-pf(x_n))$. Ova generalizacija je omogućena činjenicom da odgovarajuće funkcije Q i H moraju da zadovolje iste uslove ((1.46) i (4.4) redom) da bi obezbedili četvrti red konvergencije. Tada se nameće sledeće pitanje: da li se na sličan način može uopštiti i postupak Čou-Čen-Songa (1.48)?

U tom cilju, posmatrajmo modifikaciju Čou-Čen-Song iterativne šeme sledećeg oblika

$$\begin{aligned} y_n &= x_n - m\frac{f(x_n)}{f'(x_n)-pf(x_n)}, \\ x_{n+1} &= y_n - m\frac{f(x_n)}{f'(x_n)-pf(x_n)}\cdot T(w_n), \end{aligned} \tag{4.13}$$

gde je $w_n = \sqrt[m]{f(y_n)/f(x_n)}$, a neka funkcija T zadovoljava iste uslove kao i funkcija G (1.49) u slučaju standardnog Čou-Čen-Song metoda, tj.

$$T(0)=0, \quad T'(0)=1, \quad T''(0)=4 \ \text{ i } \ |T'''(0)|<\infty. \tag{4.14}$$

U dokazu naredne teoreme ćemo videti da ovi uslovi nisu dovoljni da obezbede optimalan četvrti red konvergencije postupka (4.13), već da je u pitanju konvergencija trećeg reda u opštem slučaju.

Teorema 4.2 *Neka je $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dovoljno puta diferencijabilna funkcija na otvorenom intervalu D, i neka je $\alpha \in D$ nula neparne višestrukosti ove funkcije. Ako je T realna funkcija koja zadovoljava uslove* (4.14), *onda za dovoljno dobro izabranu početnu tačku x_0 postupak* (4.13) *dostiže treći red konvergencije.*

Dokaz: S obzirom na to da je prvi korak posmatranog metoda isti kao kod metoda (4.3), koristićemo deo rezultata dobijenog u dokazu Teoreme 4.1, pre svega formule (4.6) i (4.7), kao i rezultate dobijene ranije (2.3) i (2.4) za izraze $f(x_n)$ i $f'(x_n)$ redom. Tako uvrštavanjem izraza (4.7) za grešku prvog koraka e_y u (2.3) dobijamo

$$\begin{aligned} f(y_n) &= \frac{f^{(m)}(\alpha)}{m!}\Big(\frac{c_1-p}{m}\Big)^m e^{2m}\Big[1+\big(p^2-2pc_1+(m+1)c_1^2-2mc_2\big)\frac{e_n}{p-c_1} \\ &+\Big(\frac{1}{(p-c_1)^2}\big[(m-1)(p^2-2pc_1+(m+1)c_1^2-2mc_2)^2 \\ &+2(p-c_1)\big(p^3+(2m+3)pc_1^2-(m+1)^2c_1^3-4mpc_2 \\ &+c_1(-3p^2+m(3m+4)c_2)-3m^2c_3\big)\big]+2c_1(c_1-p)\Big)\frac{e_n^2}{2m} \\ &+O(e_n^3)\Big]. \end{aligned} \tag{4.15}$$

Sada na osnovu (2.3) i (4.15) možemo izračunati količnik

$$\begin{aligned} \frac{f(y_n)}{f(x_n)} &= \Big(\frac{c_1-p}{m}\Big)^m e^m\Big[1+\big(p^2-3pc_1+(m+2)c_1^2-2mc_2\big)\frac{e_n}{p-c_1} \\ &+\Big(p^4+mp^4-2(4m^2+9m+5)pc_1^3+(m+1)^2(m+3)c_1^4 \\ &+2c_1^2\big((m^2+8m+6)p^2-m(2m^2+5m+3)c_2\big) \\ &-6c_1\big((m+1)p^3-m(3m+2)pc_2-m^2c_3\big) \\ &-2m(2m+3)p^2c_2+4m^2(m-1)c_2^2-6m^2pc_3\Big)\frac{e_n^2}{2m(p-c_1)^2} \\ &+O(e_n^3)\Big], \end{aligned} \tag{4.16}$$

pa na osnovu Tejlorovog razvoja m-tog korena količnika (4.16) imamo da je

$$\begin{aligned} w_n &= \sqrt[m]{\frac{f(y_n)}{f(x_n)}} \\ &= \big(c_1-p\big)\frac{e_n}{m}-\big(p^2-3pc_1+(m+2)c_1^2-2mc_2\big)\frac{e_n^2}{m^2} \\ &+\Big(6m^2c_3-2p^3-5(m+3)pc_1^2+(2m^2+7m+7)c_1^3+10mpc_2 \\ &+2c_1(5p^2-m(3m+7)c_2)\Big)\frac{e_n^3}{2m^3}+O(e_n^4). \end{aligned} \tag{4.17}$$

Sa druge strane, Tejlorov razvoj funkcije T u okolini nule ima oblik

$$T(w_n) = T(0) + T'(0)w_n + \frac{1}{2!}T''(0)w_n^2 + \frac{1}{3!}T'''(0)w_n^3 + O(w_n^4), \tag{4.18}$$

pa zamenom vrednosti w_n u (4.18), iz drugog koraka posmatrane iterativne šeme, koristeći (4.6) i (4.15) imamo izraz za jednačinu greške

$$\begin{aligned} e_{n+1} &= x_{n+1} - \alpha \\ &= y_n - m\frac{f(x_n)}{f'(x_n) - pf(x_n)} \cdot T(w_n) - \alpha \\ &= -T(0)e_n - (p - c_1)\big(1 + T(0) - T'(0)\big)\frac{e_n^2}{m} \\ &\quad -\Big(2(p^2 - 2pc_1 + (m+1)c_1^2 - 2mc_2)(1 + T(0)) \\ &\quad -2(2p^2 - 5pc_1 + (m+3)c_1^2 - 2mc_2)T'(0) + (p - c_1)^2 T''(0)\Big)\frac{e_n^3}{2m^2} \\ &\quad +O(e_n^4). \end{aligned} \tag{4.19}$$

Ukoliko funkcija T zadovoljava uslove (4.14), lako je ustanoviti da se prethodna jednačina greške transformiše u

$$e_{n+1} = p(c_1 - p)\frac{e_n^3}{m^2} + O(e_n^4). \qquad \square$$

Dakle, na osnovu rezultata koji proizilaze iz dokaza prethodne teoreme, očigledno je da se optimalan četvrti red konvergencije može dostići samo za $p = 0$, a da je u opštem slučaju postupak (4.13) samo trećeg reda.

Sa druge strane, iz formule (4.19) vidimo da je posmatrani postupak trećeg reda konvergencije čak i kada funkcija T ne zadovoljava uslove (4.14) u potpunosti. Naime, ako važi da je $T(0) = 0$ i $T'(0) = 1$, zamenom ovih vrednosti u jednačinu greške (4.19) nestaju linearni i kvadratni član pa dobijamo da je

$$e_{n+1} = -(p - c_1)\big(p(T''(0) - 2) - c_1(T''(0) - 4)\big)\frac{e_n^3}{2m^2} + O(e_n^4). \tag{4.20}$$

Iz poslednjeg izraza jasno je da uslov $T''(0) = 4$ ne obezbeđuje četvrti red konvergencije, ali isto tako je lako primetiti da postupak ne dostiže optimalni četvrti red kada je $p \neq 0$ ni za jednu vrednost $T''(0)$ (ovde se podrazumeva da se vrednosti p i $T''(0)$ zadaju nezavisno od c_1).

Za specijalno izabrane funkcije T koje su identične izborima funkcije G (1.50) korišćenim za konstrukciju postupaka ZCS1 (za $k = 0$) i ZCS2, dobijamo dva

posebna člana posmatrane familije postupaka trećeg reda (4.13), koje ćemo u nastavku označavati sa **M(3)od1** i **M(3)od2**, čije su odgovarajuće jednačine greške redom oblika

$$\begin{aligned} e_{n+1} &= p(c_1-p)\frac{e_n^3}{m^2} + \big(6mpc_2 - 8p^3 - 3(m+9)pc_1^2 + (m+9)c_1^3 \\ &\quad + c_1(26p^2 - 2mc_2)\big)\frac{e_n^4}{2m^3} + O(e_n^5) \end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned} e_{n+1} &= p(c_1-p)\frac{e_n^3}{m^2} + \big(6mpc_2 - 2p^3 - 3(m+3)pc_1^2 + (m+3)c_1^3 \\ &\quad + c_1(8p^2 - 2mc_2)\big)\frac{e_n^4}{2m^3} + O(e_n^5). \end{aligned}$$

Jednostavno je utvrditi da se za $p = 0$ prethodne jednačine greške svode na jednačine greške [80, str. 6036] i [80, str. 6037] postupaka ZCS1 i ZCS2.

Na osnovu dosadašnje analize, postupak Čou-Čen-Songa (1.48) se može posmatrati kao specijalan slučaj novoformiranog postupka (4.13) ako je $p = 0$ i ako su zadovoljeni uslovi (4.14). Međutim, osnovni nedostatak postupka (4.13) je njegova neoptimalnost za $p \neq 0$. Ali čak i tada je njegov indeks efikasnosti $3^{1/3} \approx 1.4422$, što je veće od indeksa efikasnosti Šrederovog postupka (1.35) ili postupka (4.2) koji iznose $2^{1/2} \approx 1.4142$.

4.2.2 Metod četvrtog reda konvergencije

Metod trećeg reda predstavljen u prethodnom odeljku se relativno jednostavno može unaprediti u cilju povećanja reda konvergencije bez dodatnog funkcijskog izračunavanja. Tako uvođenje nove funkcije S sa istim argumentom $w_n = \sqrt[m]{f(y_n)/f(x_n)}$ kao i kod funkcije T nam omogućava konstrukciju nove iterativne šeme

$$\begin{aligned} y_n &= x_n - m\frac{f(x_n)}{f'(x_n) - pf(x_n)}, \\ x_{n+1} &= y_n - m\frac{f(x_n)}{f'(x_n) - pf(x_n)}\Big(T(w_n) + \frac{f(x_n)}{f'(x_n) - pf(x_n)}S(w_n)\Big). \end{aligned} \tag{4.21}$$

Uslovi koji obezbeđuju konvergenciju optimalnog četvrtog reda definisani su u narednoj teoremi.

Teorema 4.3 *Neka je $\alpha \in D$ nula neparne višestrukosti dovoljno puta diferencijabilne funkcije $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, gde je D otvoreni interval, i neka je x_0 početna iteracija izabrana dovoljno blizu korena α. Ako je T realna funkcija koja zadovoljava uslove* (4.14), *a realna funkcija S zadovoljava uslove*

$$S(0) = 0, \quad S'(0) = p \quad i \quad |S''(0)| < \infty, \tag{4.22}$$

onda je postupak definisan iterativnom šemom (4.21) *najmanje četvrtog reda konvergencije.*

Dokaz: Oslanjajući se na rezultate (4.15-4.18) dobijene u dokazu Teoreme 4.2, uslove (4.14) nametnute na T i Tejlorov razvoj funkcije S u okolini nule, koristeći mogućnosti simboličkog računanja programskog paketa *Mathematica*, iz drugog koraka iterativne šeme (4.21) dobijamo

$$\begin{aligned}
e_{n+1} &= x_{n+1} - \alpha \\
&= -S(0)\frac{e_n^2}{m} - (p - c_1)\big(p + 2S(0) - S'(0)\big)\frac{e_n^3}{m^2} \\
&\quad + \Big[c_1\big(- 6mc_2 + 3p\big(2(6S(0) - 7S'(0) + S''(0)) - p(T'''(0) - 26)\big)\big) \\
&\quad -3c_1^2\big((4m+6)S(0) - 2S'(0)(m+4) + S''(0) + p(3m + 27 - T'''(0))\big) \\
&\quad +p^2\big(p(T'''(0) - 24) - 3(6S(0) - 6S'(0) + S''(0))\big) \\
&\quad +6mc_2(3p + 4S(0) - 2S'(0)) + c_1^3\big(3m + 27 - T'''(0)\big)\Big]\frac{e_n^4}{6m^3} + O(e_n^5).
\end{aligned}$$

Da bi se dobio četvrti red konvergencije, neophodno je koeficijente uz e_n^2 i e_n^3 izjednačiti sa nulom, odakle se lako dobijaju uslovi koje treba da zadovolji funkcija S, tj. dobijamo da je $S(0) = 0$ i $S'(0) = p$. Za ovako izabranu funkciju S prethodna jednačina greške se svodi na

$$\begin{aligned}
e_{n+1} &= \Big[c_1\big(3S''(0) - 2p(T'''(0) - 15)\big) + p\big(p(T'''(0) - 6) - 3S''(0)\big) \\
&\quad +6mc_2 + c_1^2\big(T'''(0) - 3m - 27\big)\Big]\frac{p - c_1}{6m^3}e_n^4 + O(e_n^5),
\end{aligned} \tag{4.23}$$

odakle se vidi da je za $|T'''(0)| < \infty$ i $|S''(0)| < \infty$ postupak (4.21) četvrtog reda konvergencije. □

Najjednostavniji oblik funkcije S koja zadovoljava uslove (4.22) i samim tim obezbeđuje optimalnost posmatranog postupka je $S(w_n) = p \cdot w_n$. Zato ćemo u nastavku razmatrati samo postupke gde je funkcija S ovog oblika, a za funkciju

T biramo kao i ranije $T(w_n) = 2w_n^2 + w_n$ i $T(w_n) = w_n/(1-w_n)^2$. Takvi postupci redom su označeni sa **M(4)od1** i **M(4)od2**, a odgovarajuće jednačine greške su

$$e_{n+1} = -\Big((m+9)c_1^2 - 10pc_1 + 2(p^2 - mc_2)\Big)\frac{p-c_1}{2m^3}e_n^4 + O(e_n^5), \tag{4.24}$$

za postupak M(4)od1, i

$$e_{n+1} = \Big(4p^2 - 2pc_1 - (m+3)c_1^2 + 2mc_2\Big)\frac{p-c_1}{2m^3}e_n^4 + O(e_n^5), \tag{4.25}$$

za postupak M(4)od2. Ako je $p = 0$, lako je utvrditi da se (4.24) i (4.25) svode na jednačine greške ZCS1 i ZCS2 postupaka. Slično kao i u slučaju metoda trećeg reda razmatranog u prethodnom odeljku, i postupak (4.21) se svodi na Čou-Čen-Song metod kada je $p = 0$, ali je razlika u odnosu na (4.13) u tome što metod (4.21) zadržava optimalan četrvrti red (i indeks efikasnosti $4^{1/3} = 1.5874$) i u slučaju kada je $p \neq 0$.

Posmatrajmo sada dvokoračnu iterativnu šemu sledećeg oblika

$$\begin{aligned} y_n &= x_n - mu_n, \\ x_{n+1} &= y_n - mu_n \cdot F(w_n, u_n), \end{aligned} \tag{4.26}$$

gde je $u_n = f(x_n)/(f'(x_n) - pf(x_n))$, a $w_n = \sqrt[m]{f(y_n)/f(x_n)}$. Treba pronaći odgovarajuću funkciju $F(w_n, u_n)$ koja će obezbediti četvrti red konvergencije metoda (4.26). Pošto su u_n i w_n dati redom formulama (4.6) i (4.17), odatle imamo da važi $u_n = O(e_n)$ i $w_n = O(e_n)$, a odatle sledi da je dovoljno odrediti Tejlorov razvoj funkcije $F(w, u)$ do e_n^3. Zbog jednostavnijeg zapisa uvedimo oznaku

$$F_{ij} = \frac{\partial^{i+j} F}{\partial w^i \partial w^j}(0,0).$$

Tada Tejlorov razvoj funkcije F u okolini tačke $(0,0)$ ima sledeću formu

$$\begin{aligned} F(w,u) &= F_{00} + F_{10}w + F_{01}u + \frac{1}{2}\big(F_{20}w^2 + 2F_{11}wu + F_{02}u^2\big) \\ &\quad + \frac{1}{6}\big(F_{30}w^3 + 3F_{21}w^2u + 3F_{12}wu^2 + F_{03}u^3\big) + ... \end{aligned}$$

Uvrštavanjem izraza (4.6) i (4.17) u Tejlorov razvoj funkcije F, pa zamenom u drugi korak postupka (4.26) dobijamo

$$x_{n+1} - \alpha = y_n - \alpha - mu_n \cdot F(w_n, u_n) = A_1 e_n + A_2 e_n^2 + A_3 e_n^3 + A_4 e_n^4 + O(e_n^5), \tag{4.27}$$

gde su A_i koeficijenti sledećeg oblika

$$
\begin{aligned}
A_1 &= -F_{00},\\
A_2 &= -\frac{1}{m}\big(F_{01}+(p-c_1)(1+F_{00}-F_{10})\big),\\
A_3 &= -\frac{1}{2m^2}\Big(2p^2+2p^2F_{00}+4pF_{01}+F_{02}-4mc_2(1+F_{00}-F_{10})\\
&\quad -4p^2F_{10}+c_1^2\big(2+2F_{00}+2m(1+F_{00}-F10)-6F_{10}+F_{20}\big)\\
&\quad -2c_1\big(2F_{01}-F_{11}+p(2+2F_{00}-5F_{10}+F_{20})\big)-2pF_{11}+p^2F_{20}\Big),\\
A_4 &= \frac{1}{6m^3}\Big[-6(1+F_{00})(p^3-3m^2c_3)-18p^2F_{01}-9pF_{02}-F_{03}+18p^3F_{10}\\
&\quad -18m^2c_3F_{10}+18p^2F_{11}+3pF_{12}-9p^3F_{20}-3p^2F_{21}\\
&\quad +6mc_2\big(4F_{01}-2F_{11}+p(4+4F_{00}-9F_{10}+2F_{20})\big)\\
&\quad +3c_1\Big(3F_{02}-F_{12}-2mc_2(4+4F_{00}+3m(1+F_{00}-F_{10})-11F_{10}+2F_{20})\\
&\quad +2p(6F_{01}-7F_{11}+F_{21})+p^2(6+6F_{00}-24F_{10}+11F_{20}-F_{30})\Big)\\
&\quad -3c_1^2\Big((4m+6)F_{01}-8F_{11}-2mF_{11}+F_{21}\\
&\quad +p\big(6+6F_{00}-31F_{10}+13F_{20}+m(4+4F_{00}-9F_{10}+2F_{20})-F_{30}\big)\Big)\\
&\quad +c_1^3\Big(6(1+F_{00})+6(1+F_{00}-F_{10})+3m(4+4F_{00}-11F_{10}+2F_{20})\\
&\quad -39F_{10}+15F_{20}-F_{30}\Big)+p^3F_{30}\Big].
\end{aligned}
$$

Da bi dobili postupak četvrtog reda konvergencije, koeficijenti A_1, A_2 i A_3 treba da budu jednaki nuli. To se može postići sukcesivnim rešavanjem jednačina $A_1 = 0$, $A_2 = 0$ i $A_3 = 0$. Očigledno je da je $A_1 = 0$ za $F_{00} = 0$, pa posle uvrštavanja F_{00} u A_2 dobijamo

$$F_{01} - (p - c_1)(F_{10} - 1) = 0.$$

Rešavanjem prethodne jednačine imamo da je $F_{01} = 0$ i $F_{10} = 1$. Zamenom F_{00}, F_{10} i F_{01} u A_3 i posle sređivanja izraza dobijamo novu jednačinu

$$F_{02} - 2pF_{11} + p^2(F_{20} - 2) + 2(F_{11} - p(F_{20} - 3))c_1 + (F_{20} - 4)c_1^2 = 0$$

S obzirom na to da jednačina greške ne treba da zavisi od c_1, za $F_{20} = 4$ eliminiše se c_1^2, a nakon toga za $F_{11} = p$ i c_1. Za vrednost $F_{02} = 0$ koeficijent A_3 takođe

postaje nula, a jednačina greške (4.27) dobija sledeću formu

$$\begin{aligned} e_{n+1} &= \Big[6p(mc_2 - p^2) + 3pF_{12} - 3p^2F_{21} - 3c_1^2(F_{21} + p(19 + m - F_{30})) \\ &\quad -3c_1\big(2mc_2 + F_{12} - 2pF_{21} + p^2(F_{30} - 12)\big) + c_1^3(27 + 3m - F_{30}) \\ &\quad -F_{03} + p^3F_{30}\Big]\frac{e_n^4}{6m^3} + O(e_n^5). \end{aligned} \tag{4.28}$$

Prethodna diskusija može se uobličiti u formi naredne teoreme.

Teorema 4.4 *Neka je $m \in \mathbb{N}$ neparan broj koji predstavlja višestrukost nule α nelinearne funkcije $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, gde je f dovoljno puta diferencijabilna funkcija na otvorenom intervalu D. Za dovoljno dobro izabranu početnu tačku x_0 iterativna šema* (4.26) *je najmanje četvrtog reda konvergencije ako funkcija F zadovoljava naredne uslove*

$$F_{00} = F_{01} = F_{02} = 0,\ F_{10} = 1,\ F_{20} = 4,\ F_{11} = p \tag{4.29}$$

i $|F_{30}| < \infty$, $|F_{21}| < \infty$, $|F_{12}| < \infty$, $|F_{03}| < \infty$. Odgovarujuća jednačina greške data je sa (4.28).

Ako funkciju F definišemo kao

$$F(w, u) = T(w) + u \cdot S(w),$$

i ako su pri tome zadovoljeni uslovi (4.29), određivanjem parcijalnih izvoda funkcije F lako možemo ustanoviti da funkcija T zadovoljava uslove (4.14), a funkcija S uslove (4.22), što jasno govori da je iterativni postupak (4.21) samo specijalan slučaj postupka (4.26). S obzirom na to da za ovako definisano F važi $F_{12} = 0$, $F_{03} = 0$, $F_{21} = S''(0)$ i $F_{30} = T'''(0)$, uvrštavanjem ovih vrednosti u jednačinu greške (4.28), posle sređivanja izraza dobijamo jednačinu greške (4.23), što je potvrda činjenice da je (4.26) generalizovana verzija postupka (4.21). Iako je postupak (4.21) relativno jednostavnog oblika, što je čest zahtev pri razvoju numeričkih algoritama, generalizovana verzija (4.26) omogućava konstrukciju novih metoda dobrih numeričkih performansi. U literaturi je poznato da su se funkcije poput F u slučajevima kada je ona racionalnog tipa dobro pokazale pri numeričkim testovima [81, 82]. Rukovodeći se ovom idejom, u nastavku ćemo razmotriti funkciju $F(w, u)$ oblika razlomka, i to kvadratnu po promenljivama w i u u brojiocu, a linearnu u imenicu. Dakle, ako je F dato sa

$$F(w, u) = \frac{a_1 + a_2w + a_3w^2 + a_4u + a_5u^2 + a_6wu}{b_1 + b_2w + b_3u},$$

onda funckija F zadovoljava uslove (4.29) ako važi $a_1 = 0$, $a_2 = b_1$, $a_3 = 2b_1 + b_2$, $a_4 = 0$, $a_5 = 0$ i $a_6 = pb_1 + b_3$, gde su b_1, b_2 i b_3 proizvoljni realni brojevi ($b_1 \neq 0$), odnosno F se svodi na

$$F(w,u) = \frac{b_1 w + (2b_1 + b_2)w^2 + (pb_1 + b_3)wu}{b_1 + b_2 w + b_3 u}. \tag{4.30}$$

Za potrebe dalje analize posmatraćemo dva nova postupka dobijena u skladu sa odgovarajućim izborom slobodnih parametara b_1, b_2 i b_3.

Prvi takav postupak dobijamo za $b_1 = 1$, $b_2 = -2$ i $b_3 = -p$, pa zamenom ovih vrednosti u (4.30), iterativna šema ima oblik

$$\begin{aligned} y_n &= x_n - mu_n, \\ x_{n+1} &= y_n - mu_n \frac{w_n}{1 - 2w_n - pu_n}. \end{aligned}$$

Postupak ćemo označiti sa **M(4)od3**, a odgovarajuća jednačina greške je

$$e_{n+1} = \Big(2pc_1 - (m+1)c_1^2 + 2mc_2\Big)\frac{p - c_1}{2m^3} e_n^4 + O(e_n^5).$$

Drugi postupak u oznaci **M(4)od4** dobijen je za $b_1 = 1$, $b_2 = -2$ i $b_3 = 0$, i ima oblik

$$\begin{aligned} y_n &= x_n - mu_n, \\ x_{n+1} &= y_n - mu_n \frac{w_n + pw_n u_n}{1 - 2w_n}, \end{aligned}$$

a odgovarajuća jednačina greške

$$e_{n+1} = -\Big(2pc_1 + (m+1)c_1^2 - 2(p^2 + mc_2)\Big)\frac{p - c_1}{2m^3} e_n^4 + O(e_n^5).$$

Primetimo da se za izbor parametara $b_1 = 1$, $b_2 = 0$ i $b_3 = 0$, postupak (4.26) svodi na M(4)od1.

4.2.3 Numerički rezultati

Teorijski ispitane karakteristike opisanih postupaka trećeg i četvrtog reda numerički su proverene na test funkcijama prikazanim u Tabeli 4.12.

Tabela 4.12 Test funkcije

$f(x)$	α	m
$f_1(x) = (x + \sin x - 2)^3$	1.1060601577...	3
$f_2(x) = (e^{x^2+7x-30} - 1)^3$	3	3
$f_3(x) = (\cos x - x)^3$	0.7390851332...	3
$f_4(x) = \arctan^5(x - 2)$	2	5

Tabela 4.13 Numerički rezultati za $f_1(x)$ i $x_0 = 3.14$

Metod	it	$\lvert x_n - \alpha \rvert$	$\lvert f(x_n) \rvert$	CPU	COC
MNM	div.	–	–	–	–
LLC	div.	–	–	–	–
ShSh	div.	–	–	–	–
ZCS1	29	$2.4443 \cdot 10^{13}$	$1.4603 \cdot 10^{40}$	21.8	4.0000
ZCS2	46	6728.0	$3.0441 \cdot 10^{11}$	35.6	4.0000
M(3)od1	8	$1.2932 \cdot 10^{-6}$	$6.5687 \cdot 10^{-18}$	5.16	3.0123
M(3)od2	7	$3.9121 \cdot 10^{-32}$	$1.8185 \cdot 10^{-94}$	4.63	3.0073
KBK1	6	$4.4927 \cdot 10^{-38}$	$2.7543 \cdot 10^{-112}$	4.84	4.0000
KBK2	6	$7.5819 \cdot 10^{-40}$	$1.3237 \cdot 10^{-117}$	4.82	4.0000
M(4)od1	9	0.26031	0.041259	5.98	4.0000
M(4)od2	div.	–	–	–	–
M(4)od3	5	$1.8842 \cdot 10^{-94}$	$2.0318 \cdot 10^{-281}$	3.21	4.0000
M(4)od4	6	$2.9437 \cdot 10^{-45}$	$7.7476 \cdot 10^{-134}$	3.81	4.0000

Tabela 4.14 Numerički rezultati za $f_1(x)$ i $x_0 = 1.5$

Metod	it	$\lvert x_n - \alpha \rvert$	$\lvert f(x_n) \rvert$	CPU	COC
MNM	9	$7.6056 \cdot 10^{-54}$	$1.3362 \cdot 10^{-159}$	4.57	2.0000
LLC	5	$3.9343 \cdot 10^{-162}$	$1.8495 \cdot 10^{-484}$	4.45	4.0000
ShSh	5	$8.8739 \cdot 10^{-161}$	$2.1223 \cdot 10^{-480}$	4.32	4.0000
ZCS1	5	$4.8092 \cdot 10^{-136}$	$3.3782 \cdot 10^{-406}$	3.43	4.0000
ZCS2	5	$6.9077 \cdot 10^{-178}$	$1.0011 \cdot 10^{-531}$	3.42	4.0000
M(3)od1	6	$7.1545 \cdot 10^{-105}$	$1.1123 \cdot 10^{-312}$	4.13	3.0068
M(3)od2	6	$1.1407 \cdot 10^{-104}$	$4.5083 \cdot 10^{-312}$	4.06	3.0068
KBK1	5	$2.0094 \cdot 10^{-253}$	$2.4642 \cdot 10^{-758}$	4.16	4.0000
KBK2	5	$1.9542 \cdot 10^{-253}$	$2.2666 \cdot 10^{-758}$	4.20	4.0000
M(4)od1	5	$2.3444 \cdot 10^{-225}$	$3.9138 \cdot 10^{-674}$	3.24	4.0000
M(4)od2	5	$5.1610 \cdot 10^{-257}$	$4.1751 \cdot 10^{-769}$	3.40	4.0000
M(4)od3	5	$2.1955 \cdot 10^{-286}$	$3.2144 \cdot 10^{-857}$	3.12	4.0000
M(4)od4	5	$1.2363 \cdot 10^{-264}$	$5.7397 \cdot 10^{-792}$	3.12	4.0000

Tabela 4.15 Numerički rezultati za $f_2(x)$ i $x_0 = 0$

Metod	it	$\lvert x_n - \alpha \rvert$	$\lvert f(x_n) \rvert$	CPU	COC
MNM	div.	–	–	–	–
LLC	div.	–	–	–	–
ShSh	div.	–	–	–	–
ZCS1	div.	–	–	–	–
ZCS2	div.	–	–	–	–
M(3)od1	5	$9.8272 \cdot 10^{-257}$	$2.0851 \cdot 10^{-765}$	0.639	3.0000
M(3)od2	5	$9.8272 \cdot 10^{-257}$	$2.0851 \cdot 10^{-765}$	0.656	3.0000
KBK1	div.	–	–	–	–
KBK2	div.	–	–	–	–
M(4)od1	4	$4.5786 \cdot 10^{-655}$	$2.1087 \cdot 10^{-1960}$	0.546	4.0000
M(4)od2	4	$2.0256 \cdot 10^{-665}$	$1.8259 \cdot 10^{-1991}$	0.499	4.0000
M(4)od3	4	$3.0646 \cdot 10^{-595}$	$6.3234 \cdot 10^{-1781}$	0.562	4.0000
M(4)od4	4	$8.5736 \cdot 10^{-678}$	$1.3846 \cdot 10^{-2028}$	0.530	4.0000

Tabela 4.16 Numerički rezultati za $f_2(x)$ i $x_0 = 3.15$

Metod	it	$\lvert x_n - \alpha \rvert$	$\lvert f(x_n) \rvert$	CPU	COC
MNM	11	$1.8924 \cdot 10^{-12}$	$1.4889 \cdot 10^{-32}$	1.42	2.0000
LLC	6	$1.9959 \cdot 10^{-45}$	$1.7467 \cdot 10^{-131}$	1.25	4.0000
ShSh	6	$6.5698 \cdot 10^{-42}$	$6.2300 \cdot 10^{-121}$	1.33	4.0000
ZCS1	6	$1.0808 \cdot 10^{-26}$	$2.7735 \cdot 10^{-75}$	1.09	4.0000
ZCS2	6	$5.8661 \cdot 10^{-41}$	$4.4349 \cdot 10^{-118}$	1.03	4.0000
M(3)od1	7	$8.1721 \cdot 10^{-23}$	$1.1990 \cdot 10^{-63}$	1.25	3.0000
M(3)od2	7	$9.0997 \cdot 10^{-30}$	$1.6554 \cdot 10^{-84}$	1.19	3.0000
KBK1	6	$3.4834 \cdot 10^{-42}$	$9.2860 \cdot 10^{-122}$	1.31	4.0000
KBK2	6	$5.9049 \cdot 10^{-41}$	$4.5235 \cdot 10^{-118}$	1.33	4.0000
M(4)od1	6	$1.5483 \cdot 10^{-25}$	$8.1548 \cdot 10^{-72}$	1.14	4.0000
M(4)od2	6	$1.0628 \cdot 10^{-40}$	$2.6378 \cdot 10^{-117}$	1.09	4.0000
M(4)od3	6	$3.9528 \cdot 10^{-63}$	$1.3569 \cdot 10^{-184}$	0.951	4.0000
M(4)od4	6	$2.6989 \cdot 10^{-69}$	$4.3193 \cdot 10^{-203}$	0.936	4.0000

Numerički rezultati izloženi su u Tabelama 4.13-4.20, a organizaciona struktura slična je onoj u Tabelama 4.2-4.10. To znači da za svaku test funkciju ispitujemo ponašanje za dve početne vrednosti x_0, od kojih je jedna dalje, a jedna bliže posmatranom rešenju α. Prikazan je broj iteracija neophodan da se zadovolji zaustavni kriterijum $|f(x_n)| < 10^{-1000}$, a vrednosti $|x_n - \alpha|$ i $|f(x_n)|$ su date nakon 12 funkcijskih izračunavanja za sve postupke. Zbog potrebe testiranja većeg broja novoformiranih postupaka, za vrednost parametra p svuda je postavljeno $|p| = 1$ koje se najčešće koristi u literaturi.

Tabela 4.17 Numerički rezultati za $f_3(x)$ i $x_0 = -1.57$

Metod	it	$\lvert x_n - \alpha \rvert$	$\lvert f(x_n) \rvert$	CPU	COC
MNM	div.	–	–	–	–
LLC	div.	–	–	–	–
ShSh	div.	–	–	–	–
ZCS1	35	$2.9891 \cdot 10^{23}$	$2.6706 \cdot 10^{70}$	30.9	4.0000
ZCS2	21	2365.7	$1.3214 \cdot 10^{10}$	14.3	4.0000
M(3)od1	7	$6.2232 \cdot 10^{-14}$	$1.1298 \cdot 10^{-39}$	4.49	3.0084
M(3)od2	6	$2.8925 \cdot 10^{-52}$	$1.1345 \cdot 10^{-154}$	3.79	3.0067
KBK1	6	$1.2815 \cdot 10^{-52}$	$9.8659 \cdot 10^{-156}$	4.68	4.0000
KBK2	6	$1.7105 \cdot 10^{-53}$	$2.3459 \cdot 10^{-158}$	4.81	4.0000
M(4)od1	8	0.020406	0.000040373	5.24	4.0000
M(4)od2	6	$1.6574 \cdot 10^{-30}$	$2.1343 \cdot 10^{-89}$	3.81	4.0000
M(4)od3	5	$6.9304 \cdot 10^{-139}$	$1.5604 \cdot 10^{-414}$	3.09	4.0000
M(4)od4	6	$3.3841 \cdot 10^{-51}$	$1.8167 \cdot 10^{-151}$	3.74	4.0000

Tabela 4.18 Numerički rezultati za $f_3(x)$ i $x_0 = 0.5$

Metod	it	$\lvert x_n - \alpha \rvert$	$\lvert f(x_n) \rvert$	CPU	COC
MNM	9	$1.5731 \cdot 10^{-78}$	$1.8250 \cdot 10^{-233}$	4.26	2.0000
LLC	5	$3.6179 \cdot 10^{-253}$	$2.2198 \cdot 10^{-757}$	3.85	4.0000
ShSh	5	$6.1997 \cdot 10^{-252}$	$1.1171 \cdot 10^{-753}$	3.90	4.0000
ZCS1	5	$1.5559 \cdot 10^{-239}$	$1.7656 \cdot 10^{-716}$	3.06	4.0000
ZCS2	5	$2.7749 \cdot 10^{-269}$	$1.0016 \cdot 10^{-805}$	3.06	4.0000
M(3)od1	6	$1.8058 \cdot 10^{-107}$	$2.7604 \cdot 10^{-320}$	3.71	2.9968
M(3)od2	6	$2.5209 \cdot 10^{-107}$	$7.5101 \cdot 10^{-320}$	3.81	2.9968
KBK1	4	$2.9285 \cdot 10^{-350}$	$1.1773 \cdot 10^{-1048}$	3.06	4.0000
KBK2	4	$4.7241 \cdot 10^{-350}$	$4.9421 \cdot 10^{-1048}$	3.00	4.0000
M(4)od1	4	$2.5370 \cdot 10^{-353}$	$7.6545 \cdot 10^{-1058}$	3.23	4.0000
M(4)od2	4	$2.3713 \cdot 10^{-371}$	$6.2506 \cdot 10^{-1112}$	3.99	4.0000
M(4)od3	4	$2.0310 \cdot 10^{-372}$	$3.9271 \cdot 10^{-1115}$	3.95	4.0000
M(4)od4	4	$6.4128 \cdot 10^{-341}$	$1.2362 \cdot 10^{-1020}$	3.76	4.0000

Rezultati prikazani u Tabelama 4.13-4.20 mogu se interpretirati slično kao u slučaju postupaka M(4)ev1 i M(4)ev2. Teorijski izveden red konvergencije za sve nove postupke je potvrđen numeričkim rezultatima za sve ispitane test funkcije. Analizom vrednosti u kolonama $|x_n - \alpha|$ i $|f(x_n)|$ može se uočiti da su rezultati metoda M(4)od3 uglavnom bolji od ostalih. Opravdanost uvođenja novih postupaka trećeg i četvrtog reda naročito je vidljiva iz tabela gde je x_0 udaljenije od rešenja α. Tada čak i postupci trećeg reda M(3)od1 i M(3)od2 pokazuju bolje ponašanje u odnosu na postupke četvrtog reda ZCS1 i ZCS2

(vidi npr. Tabele 4.17 i 4.19). Ovakvo ponašanje naročito je vidljivo u Tabeli 4.15 gde do rešenja funkcije uspevaju da dođu samo novoformirani postupci, a čak i oba KBK postupka padaju. U slučajevima kada je početna aproksimacija x_0 bliža rešenju, različitost rezultata je manja, uključujući i CPU vrednosti koja ne pokazuju značajnija odstupanja.

Tabela 4.19 Numerički rezultati za $f_4(x)$ i $x_0 = 5$

Metod	it	$\lvert x_n - \alpha \rvert$	$\lvert f(x_n) \rvert$	CPU	COC
MNM	div.	–	–	–	–
LLC	div.	–	–	–	–
ShSh	div.	–	–	–	–
ZCS1	div.	–	–	–	–
ZCS2	div.	–	–	–	–
M(3)od1	6	$1.3782 \cdot 10^{-49}$	$4.9716 \cdot 10^{-245}$	2.27	3.0000
M(3)od2	6	$4.5532 \cdot 10^{-44}$	$1.9569 \cdot 10^{-217}$	2.26	3.0000
KBK1	6	$7.8785 \cdot 10^{-14}$	$3.0354 \cdot 10^{-66}$	3.14	4.0000
KBK2	6	$7.0869 \cdot 10^{-14}$	$1.7877 \cdot 10^{-66}$	3.10	4.0000
M(4)od1	6	$3.2340 \cdot 10^{-13}$	$3.5376 \cdot 10^{-63}$	3.01	4.0000
M(4)od2	6	$3.4452 \cdot 10^{-29}$	$4.8534 \cdot 10^{-143}$	2.67	4.0000
M(4)od3	5	$8.4294 \cdot 10^{-149}$	$4.2257 \cdot 10^{-741}$	1.76	4.0000
M(4)od4	5	$4.7123 \cdot 10^{-81}$	$2.3235 \cdot 10^{-402}$	1.97	4.0000

Tabela 4.20 Numerički rezultati za $f_4(x)$ i $x_0 = 2.5$

Metod	it	$\lvert x_n - \alpha \rvert$	$\lvert f(x_n) \rvert$	CPU	COC
MNM	6	$3.2862 \cdot 10^{-289}$	$3.8326 \cdot 10^{-1443}$	1.61	3.0000
LLC	4	$5.6667 \cdot 10^{-250}$	$5.8432 \cdot 10^{-1247}$	1.75	5.0000
ShSh	4	$1.1865 \cdot 10^{-249}$	$2.3516 \cdot 10^{-1245}$	1.75	5.0000
ZCS1	4	$1.5818 \cdot 10^{-251}$	$9.9021 \cdot 10^{-1255}$	1.61	5.0000
ZCS2	4	$1.0865 \cdot 10^{-288}$	$1.5142 \cdot 10^{-1440}$	1.53	5.0000
M(3)od1	5	$9.7414 \cdot 10^{-108}$	$8.7723 \cdot 10^{-536}$	1.73	3.0000
M(3)od2	5	$1.6454 \cdot 10^{-105}$	$1.2061 \cdot 10^{-524}$	1.75	3.0000
KBK1	5	$4.1705 \cdot 10^{-151}$	$1.2617 \cdot 10^{-752}$	1.93	4.0000
KBK2	5	$4.1621 \cdot 10^{-151}$	$1.2490 \cdot 10^{-752}$	1.95	4.0000
M(4)od1	4	$4.5083 \cdot 10^{-201}$	$1.8624 \cdot 10^{-1002}$	1.54	4.0000
M(4)od2	4	$2.3870 \cdot 10^{-206}$	$7.7495 \cdot 10^{-1029}$	1.59	4.0000
M(4)od3	4	$7.4789 \cdot 10^{-215}$	$2.3399 \cdot 10^{-1071}$	1.54	4.0000
M(4)od4	4	$9.3817 \cdot 10^{-209}$	$7.2679 \cdot 10^{-1041}$	1.58	4.0000

Postupke analizirane u ovom delu rada možemo primeniti i na traženje rešenja parne višestrukosti, ali tada optimalnost nije zagarantovana. Ovu činjenicu

ilustrovaćemo ranije korišćenim primerom $f(x) = x^3(x-1)^2$, gde posmatramo rešenje $\alpha = 1$ višestrukosti $m = 2$. Na datu funkciju primenićemo postupak definisan iterativnom šemom (4.21) gde je funkcija $S(w_n) = pw_n$, a funkcija T zavisi od realnog parametra k i ima oblik

$$T(w_n) = kw_n^3 + 2w_n^2 + w_n.$$

Na primer, ako uzmemo da je $|p| = 1$, onda za različite vrednosti parametra k dobijamo postupke različitog ponašanja u smislu konvergencije, iako su zadovoljeni uslovi (4.22) i (4.14) nametnuti na funkcije S i T, redom. Za $k = 7$ dobijamo neoptimalan postupak gde je količnik uzastopnih eksponenata broja 10 naizmenično menja u vrednosti približno jednake 2 i 4. Za $k = 0$ ovaj količnik je uvek približno jednak 4, pa je postupak u ovom slučaju optimalnog četvrtog reda. Testirani algoritmi se zaustavljaju kada se zadovolji uslov $|f(x_i)| < 10^{-1000}$. Rezultati su prikazani u Tabeli 4.21.

Tabela 4.21 Numerički rezultati za $f(x) = x^3(x-1)^2$, $\alpha = 1$, $x_0 = 1.1$ i $m = 2$

metod M(4)od1 za $\lvert p\rvert = 1$ i $k = 7$			metod M(4)od1 za $\lvert p\rvert = 1$ i $k = 0$		
i	$x_i - \alpha$	$\lvert f(x_i)\rvert$	i	$x_i - \alpha$	$\lvert f(x_i)\rvert$
1	$-4.1761 \cdot 10^{-4}$	$1.7418 \cdot 10^{-7}$	1	$1.1801 \cdot 10^{-3}$	$1.3976 \cdot 10^{-6}$
2	$3.4945 \cdot 10^{-7}$	$1.2212 \cdot 10^{-13}$	2	$5.6979 \cdot 10^{-11}$	$3.2466 \cdot 10^{-21}$
3	$-3.9145 \cdot 10^{-25}$	$1.5323 \cdot 10^{-49}$	3	$3.1358 \cdot 10^{-40}$	$9.8330 \cdot 10^{-80}$
4	$3.0647 \cdot 10^{-49}$	$9.3921 \cdot 10^{-98}$	4	$2.8764 \cdot 10^{-157}$	$8.2739 \cdot 10^{-314}$
5	$-2.3156 \cdot 10^{-193}$	$5.3618 \cdot 10^{-386}$	5	$2.0366 \cdot 10^{-625}$	$4.1478 \cdot 10^{-1250}$
6	$1.0724 \cdot 10^{-385}$	$1.1500 \cdot 10^{-770}$			
7	$-3.4713 \cdot 10^{-1539}$	$1.2050 \cdot 10^{-3077}$			

Glava 5

Zaključna razmatranja i pravci daljeg istraživanja

U prethodnim poglavljima predstavljeno je nekoliko poznatih metoda za traženje višestrukih nula realne nelinearne funkcije $f(x)$, gde je višestrukost unapred poznati prirodan broj označen sa m. Konstatovano je da se neke familije postupaka poput Lui-Čou i Čou-Čen-Song familije ne ponašaju uvek optimalno, već da je brzina njihove konvergencije često zavisna od parnosti m. Ova činjenica je teorijski razmatrana i numerički potvrđena na nekoliko test primera. Na ovaj način su korigovani i upotpunjeni teorijski rezultati iz originalnih radova navedenih autora.

U diserataciji je dalje prikazana konstrukcija i razvoj nekoliko klasa optimalnih postupaka. Uvažavajući bitnu ulogu parnosti višestrukosti rešenja, dalja analiza postupaka odvijala se zasebno za parnu i neparnu višestrukost. Razvijeni su optimalni postupci unapređenih performansi. S jedne strane to su postupci osmog reda konvergencije sa visokim indeksom efikasnosti, a sa druge uvođenje realnog parametra p omogućava konstrukciju modifikovanih Njutnovih postupaka četvrtog reda koji često mogu da reše probleme gde klasični postupci Njutnovog tipa padaju.

Posmatrajući istorijski razvoj iterativnih metoda, jednostavno je zapaziti da su se skoro redovno prvo pojavljivali metodi za određivanje jednostrukih rešenja, a da su se postupci za višestruka rešenja javljali uglavnom kao uopštene verzije postupaka za prosta rešenja. Najveći broj metoda za prosta rešenja zasnovan je ili na Njutnovom prvom koraku $x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n)$, ili na Džaratovom koraku $x_{n+1} = x_n - \frac{2}{3}f(x_n)/f'(x_n)$. Međutim, u literaturi nisu poznati optimalni postupci osmog ili nekog većeg reda zasnovani na Džaratovom koraku, već su ta-

kvi postupci najviše četvrtog reda, dok su na Njutnovom koraku sazdani mnogi optimalni postupci osmog i šesnaestog reda za traženje prostih rešenja. Imajući u vidu čvrstu povezanost između postupaka za nalaženje prostih i višestrukih rešenja, prirodno je pretpostaviti da će se dalji razvoj optimalnih metoda osmog reda za višestruke korene zasnivati na Njutnovom kvadratno konvergentnom koraku $x_{n+1} = x_n - mf(x_n)/f'(x_n)$, ili na nekoj sličnoj kvadratno konvergentnoj modifikaciji Njutnovog koraka. Stoga, jedan od pravaca budućih istraživanja mogao bi da bude razvoj trokoračnih postupaka većeg reda zasnovanih na postupcima četvrtog reda opisanih u četvrtom poglavlju, jer ovi postupci kao prvi korak imaju modifikovani Njutnov korak oblika

$$x_{n+1} = x_n - m\frac{f(x_n)}{f'(x_n) - pf(x_n)}.$$

Takođe, opširnije istraživanje u vezi sa uticajem realnog parametra p na brzinu konvergencije moglo bi doprineti napretku pri konstrukciji postupaka. U ovom radu je kroz nekoliko primera samo ukazano na činjenicu da vrednost parametra p snažnije utiče na ponašanje postupaka kada je x_0 udaljenije od traženog rešenja.

Savremene tendencije u ovoj oblasti između ostalog obuhvataju ispitivanje i implementaciju opisanih iterativnih metoda u slučajevima kada se traže koreni kompleksne funkcije. Pojedini postojeći postupci razvijeni sa prvobitnom namenom za rešavanje realnih nelinearnih jednačina, mogu se uspešno primeniti na traženje korena funkcije $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Napomenimo da su tada uslovi teorema prilagođeni činjenici da je f kompleksna funckija neke kompleksne promenljive x, pa se na primer u teoremama zahteva da f i ostale funkcije budu analitičke [87, 88].

Analiza postojećih postupaka primenjenih u kompleksnoj ravni omogućila je bolje sagledavanje dinamičkog ponašanja algoritama. Naime, upoređivanje postupaka najčešće se radi tabelarno, kao što je prikazano u prethodnom delu disertacije, gde se biranjem odgovarajuće početne aproksimacije x_0 posmatra broj iteracija, brzina konvergencije u odnosu na zadati broj funkcijskih izračunavanja, CPU vreme, itd. Međutim, pošto je broj mogućih izbora x_0 neograničen, javlja se potreba za drugačijim načinom upoređivanja postupaka gde se za x_0 može uzeti veliki broj vrednosti. Jedan ovakav pristup 2001. godine primenjuje Stjuart[1] u svom radu [89]. Ovaj autor razmatra neke iterativne postupke na polinomnim funkcijama sa više nula u kompleksnoj ravni, analizirajući basene privlačenja (*basins of attraction*) na kvadratnoj mreži kompleksnih brojeva koja

[1] Stewart

obuhvata sve nule posmatrane funkcije. Jedan basen ili oblast privlačenja nekog iterativnog postupka primenjenog na određivanje nula neke kompleksne funkcije $f(x)$, čine sve početne tačke $x_0 \in \mathbb{C}$ koje primenom posmatranog iterativnog postupka konvergiraju ka istoj nuli funkcije. Na primer, ako posmatramo funkciju $f(x) = x^2-1$, s obzirom na to da su njena rešenja $\alpha_1 = 1$ i $\alpha_2 = -1$, imaćemo dva basena privlačenja za proizvoljni iterativni postupak. U idealnom slučaju granice između različitih basena privlačenja treba da budu prave, a postupak takav da za svaku početnu tačku x_0 konvergira ka najbližoj nuli funkcije. Međutim, granice basena su znatno složenije i zavise od numeričkog postupka koji se primenjuje. Baseni privlačenja se najčešće grafički predstavljaju različitim bojama, a pošto se često dešava da postupak ne konvergira ka najbližem rešenju, to utiče na prošaranost grafičkog prikaza i na fraktalnu strukturu basena.

Nakon Stjuartovog rada, prvo je u brojnim radovima ovakav način ispitivanja primenjen na postupke za traženje jednostrukih korena polinomnih funkcija $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, na primer u [90, 91, 92, 93, 94, 95, 96]. Istraživanja u kojima se upoređuju baseni privlačenja postupaka namenjenih traženju višestrukih korena mogu se naći u [78, 82, 97, 98].

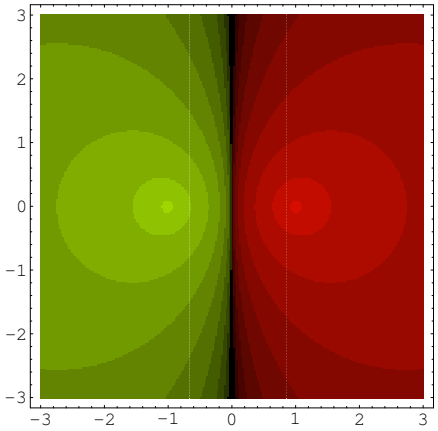
Da bi ilustrovali prethodno opisani dinamički pristup, u narednim primerima prikazaćemo basene privlačenja nekoliko postupaka detaljnije razmatranih i numerički testiranih u prethodnim poglavljima. S obzirom na to da većina ovih postupaka zahteva izračunavanje m-tog ili $(m-1)$-og korena, neophodno je istaći da su to viševrednosne (višegranske) funkcije u skupu kompleksnih brojeva. Konvencija je da se kao vrednost m-tog korena računa samo glavna grana, što je inače implementirano u programskom paketu *Mathematica.* Tako na primer, korišćenjem uobičajene *Mathematica* komande za izračunavanje izraza $\sqrt[3]{-1}$, kao rešenje dobijamo glavnu vrednost $\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, a ne -1 koje se dobija pomoću do sada korišćene funkcije *Surd.* Zamenjujući *Surd* standardnom korenom funkcijom, na primeru izračunavanja izraza $w_n = \sqrt[m]{f(y_n)/f(x_n)}$ iz (1.48), dobijamo da je ovaj m-ti koren generisan formulom

$$w_n = \sqrt[m]{f(y_n)/f(x_n)} = \left|\frac{f(y_n)}{f(x_n)}\right| \cdot \exp\Big(\frac{i}{m}\mathrm{Arg}\Big(\frac{f(y_n)}{f(x_n)}\Big)\Big),$$

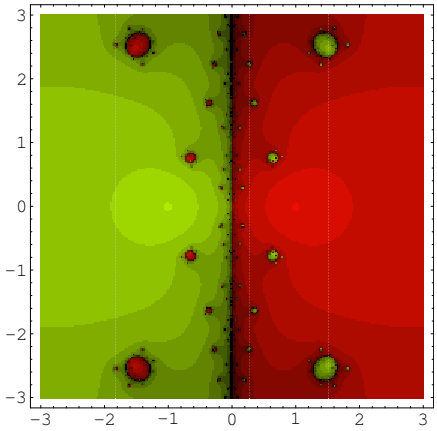
gde je $-\pi < \mathrm{Arg}\Big(\frac{f(y_n)}{f(x_n)}\Big) \leq \pi$.

Za ispitivanje basena privlačenja najčešće se uzimaju jednostavne polinomne funkcije. Na Slikama 5.1-5.4 prikazani su baseni privlačenja metoda MNM, LZ2, NMev1 i NMev5, koji su korišćeni za rešavanje polinoma $P_1(x) = (x^2-1)^2$. Koreni ovog polinoma su $\alpha_1 = 1$ i $\alpha_2 = -1$, a njihova višestrukost $m = 2$. Rezultati metoda MNM, ZCS2, NMod2 i NMod5, generisali su izgled basena

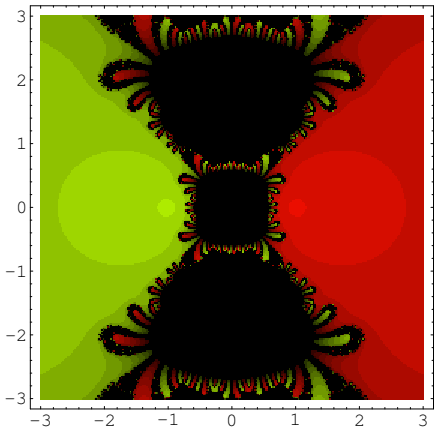
privlačenja na Slikama 5.5-5.8, a polinom je $P_2(x) = (x^4 - 1)^3$ čiji su koreni $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = -1$, $\alpha_3 = i$ i $\alpha_4 = -i$, višestrukosti $m = 3$. Svaki postupak testiran je na kvadratnoj mreži 256×256, tj. za 65536 različitih početnih aproksimacija x_0. Baseni privlačenja razlikuju se po boji, dok drugačije nijanse boja govore o broju iteracija neophodnih da se zadovolji zaustavni kriterijum (što je boja svetlija, broj iteracija je manji, i obrnuto). Ako se postupak ne približi bilo kojem rešenju u okviru 10 iteracija tako da važi $|x_i - \alpha| < 10^{-5}$, takvo polje x_0 je prikazano crnom bojom. Postupci se smatraju za bolje i stabilnije ukoliko imaju malo crnih površina i ako su manje prošarani.



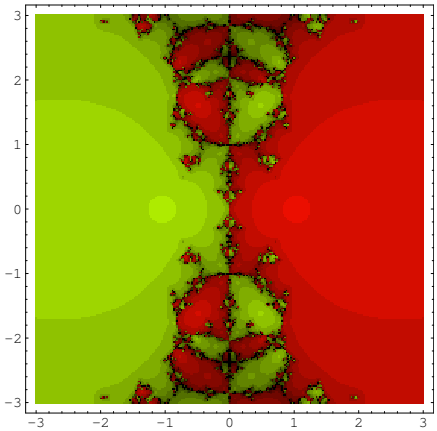
Slika 5.1: MNM za $P_1(x)$



Slika 5.2: LZ2 za $P_1(x)$

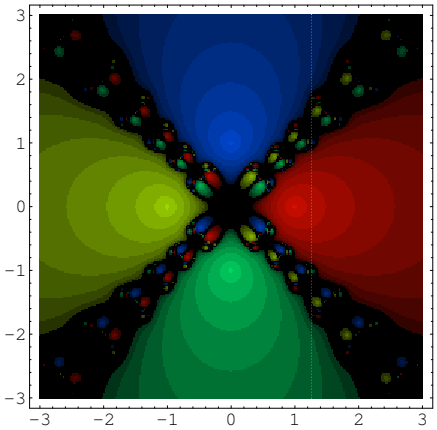


Slika 5.3: NMev1 za $P_1(x)$

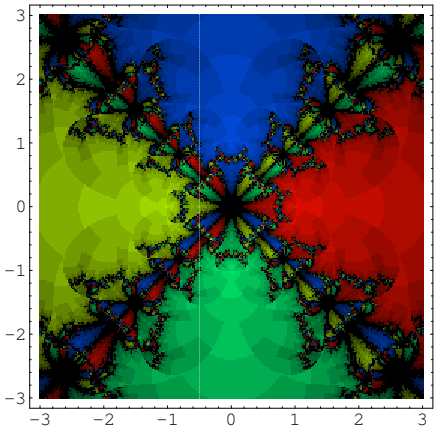


Slika 5.4: NMev5 za $P_1(x)$

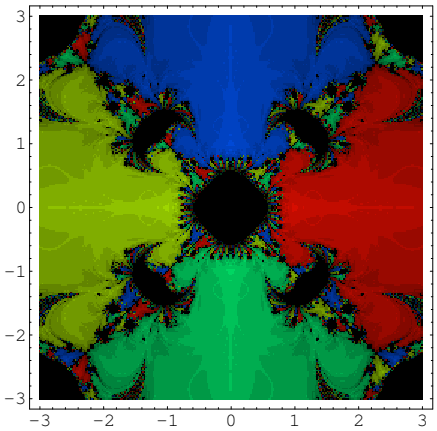
Na osnovu dobijenih slika vidimo da povećanje složenosti algoritama za posledicu može imati zanimljivije fraktalne strukture basena privlačenja.



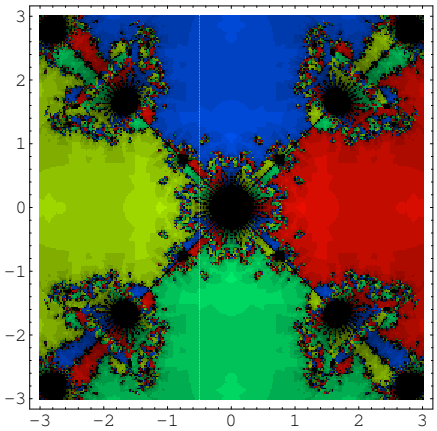
Slika 5.5: MNM za $P_2(x)$



Slika 5.6: ZCS2 za $P_2(x)$



Slika 5.7: NMod2 za $P_2(x)$



Slika 5.8: NMod5 za $P_2(x)$

U Tabelama 5.1 i 5.2 prikazani su statistički podaci vezani za ispitane basene privlačenja. Vrednosti iz prve vrste predstavljaju procenat crnih polja na slici u odnosu na ukupan broj testiranih slučajeva, dok je u drugoj vrsti dat prosečan broj iteracija potreban za zadovoljenje zaustavnog kriterijuma $|x_i - \alpha| < 10^{-5}$ koji uključuje sve slučajeve gde je ovaj uslov zadovoljen u okviru 100 iteracija. Primetimo da su rezultati metoda osmog reda konvergencije NMev1 i NMod2,

koji su zasnovani na polinomnoj strukturi trećeg koraka, daleko slabiji od rezultata postupaka NMev5 i NMod5 gde je struktura trećeg koraka racionalnog tipa.

Tabela 5.1 Statistički podaci za polinom $P_1(x)$

	MNM	LZ2	NMev1	NMev5
crni (%)	0.74	0.64	36.57	1.49
prosek	5.333	4.163	14.046	3.568

Tabela 5.2 Statistički podaci za polinom $P_2(x)$

	MNM	ZCS2	NMod2	NMod5
crni (%)	26.76	17.02	16.5	11.01
prosek	9.584	7.144	8.825	5.799

S obzirom na to da se ovaj rad bavi uglavnom rešavanjem realnih nelinearnih jednačina, prethodni primeri služe samo kao ilustracija vizuelnih načina predstavljanja i upoređivanja postupaka. Dalja istraživanja u ovom pravcu su poželjna kako bi se utvrdilo dinamičko ponašanje algoritama na većem broju test funkcija.

Osim toga, kada je funkcija kompleksna, značajno je detaljnije razmotriti metode koji zavise od parametra p, i da li je red konvergencije zagarantovan za proizvoljan izbor $p \in \mathbb{C}$. Kod optimalnih postupaka koji zahtevaju računanje m-tog korena u svakoj iteraciji, otvoreno pitanje vredno proučavanja je da li je izbor glavne grane ove viševrednosne operacije opcija koja garantuje optimalnost postupka.

Bibliografija

[1] T. J. Ypma, Historical development of the Newton–Raphson method, SIAM review 37 (4) (1995) 531–551.

[2] H. H. Goldstine, A History of Numerical Analysis from the 16th through the 19th Century, Vol. 2, Springer Science & Business Media, New York, 2012.

[3] A. M. Ostrowski, Solution of Equations and Systems of Equations, Vol. 2, Academic Press, New York, 1960.

[4] J. Traub, Iterative Methods for the Solution of Equations, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1964.

[5] M. Petković, B. Neta, L. Petković, J. Džunić, Multipoint Methods for Solving Nonlinear Equations, Academic Press, Elsevier, Amsterdam, 2012.

[6] M. S. Petković, B. Neta, L. D. Petković, J. Džunić, Multipoint methods for solving nonlinear equations: A survey, Applied Mathematics and Computation 226 (2014) 635–660.

[7] J. Džunić, Višekoračni metodi za rešavanje nelinearnih jednačina, doktorska disertacija, Univerzitet u Nišu, Prirodno-matematički fakultet, 2012.

[8] D. Herceg, N. Krejić, Numerička Analiza, Prirodno-matematički fakultet, Novi Sad, 1997.

[9] A. Y. Özban, Some new variants of Newton's method, Applied Mathematics Letters 17 (6) (2004) 677–682.

[10] M. Grau, J. L. Díaz-Barrero, An improvement to Ostrowski root-finding method, Applied Mathematics and Computation 173 (1) (2006) 450–456.

[11] R. Wait, The Numerical Solution of Algebraic Equations, John Wiley and Sons, New York, 1979.

[12] S. Weerakoon, T. Fernando, A variant of Newton's method with accelerated third-order convergence, Applied Mathematics Letters 13 (8) (2000) 87–93.

[13] M. Grau-Sánchez, M. Noguera, J. M. Gutiérrez, On some computational orders of convergence, Applied Mathematics Letters 23 (4) (2010) 472–478.

[14] H. Kung, J. F. Traub, Optimal order of one-point and multipoint iteration, Journal of the ACM (JACM) 21 (4) (1974) 643–651.

[15] J. Steffensen, Remarks on iteration, Scandinavian Actuarial Journal 1933 (1) (1933) 64–72.

[16] A. Cordero, J. R. Torregrosa, A class of Steffensen type methods with optimal order of convergence, Applied Mathematics and Computation 217 (19) (2011) 7653–7659.

[17] A. Cordero, J. L. Hueso, E. Martínez, J. R. Torregrosa, Steffensen type methods for solving nonlinear equations, Journal of Computational and Applied Mathematics 236 (12) (2012) 3058–3064.

[18] Y. H. Geum, Y. I. Kim, An optimal family of fast 16th-order derivative-free multipoint simple-root finders for nonlinear equations, Journal of Optimization Theory and Applications 160 (2) (2014) 608–622.

[19] P. Jain, Steffensen type methods for solving non-linear equations, Applied Mathematics and Computation 194 (2) (2007) 527–533.

[20] J. Sharma, A composite third order Newton–Steffensen method for solving nonlinear equations, Applied Mathematics and Computation 169 (1) (2005) 242–246.

[21] Q. Zheng, J. Wang, P. Zhao, L. Zhang, A Steffensen-like method and its higher-order variants, Applied Mathematics and Computation 214 (1) (2009) 10–16.

[22] Q. Zheng, J. Li, F. Huang, An optimal Steffensen-type family for solving nonlinear equations, Applied Mathematics and Computation 217 (23) (2011) 9592–9597.

[23] P. Teodorescu, N.-D. Stanescu, N. Pandrea, Numerical Analysis with Applications in Mechanics and Engineering, John Wiley & Sons, Hoboken, New Jersey, 2013.

[24] D. Babajee, V. Jaunky, Applications of higher-order optimal Newton secant iterative methods in ocean acidification and investigation of long-run implications of emissions on alkalinity of seawater, ISRN Applied Mathematics 2013. doi:10.1155/2013/785287.

[25] A. B. Kasturiarachi, Leap-frogging Newton's method, International Journal of Mathematical Education in Science and Technology 33 (4) (2002) 521–527.

[26] H. Bateman, Haley's methods for solving equations, The American Mathematical Monthly 45 (1) (1938) 11–17.

[27] E. Hansen, M. Patrick, A family of root finding methods, Numerische Mathematik 27 (3) (1976) 257–269.

[28] M. Petković, D. Herceg, On rediscovered iteration methods for solving equations, Journal of Computational and Applied Mathematics 107 (2) (1999) 275–284.

[29] L. D. Petković, M. S. Petković, A note on some recent methods for solving nonlinear equations, Applied Mathematics and Computation 185 (1) (2007) 368–374.

[30] D. Herceg, Đ. Herceg, Means based modifications of Newton's method for solving nonlinear equations, Applied Mathematics and Computation 219 (11) (2013) 6126–6133.

[31] Đ. Herceg, D. Herceg, Third-order modifications of Newton's method based on Stolarsky and Gini means, Journal of Computational and Applied Mathematics 245 (2013) 53–61.

[32] Đ. Herceg, D. Herceg, Sixth-order modifications of Newton's method based on Stolarsky and Gini means, Journal of Computational and Applied Mathematics 267 (2014) 244–253.

[33] T. Lukić, N. M. Ralević, Geometric mean Newton's method for simple and multiple roots, Applied Mathematics Letters 21 (1) (2008) 30–36.

[34] M. K. Singh, S. Singh, A six-order modification of Newton's method for solving nonlinear equations, International Journal of Computational Cognition 9 (2) (2011) 66–71.

[35] R. F. King, A family of fourth order methods for nonlinear equations, SIAM Journal on Numerical Analysis 10 (5) (1973) 876–879.

[36] J. Kou, Y. Li, X. Wang, A composite fourth-order iterative method for solving non-linear equations, Applied Mathematics and Computation 184 (2) (2007) 471–475.

[37] C. Chun, Some fourth-order iterative methods for solving nonlinear equations, Applied Mathematics and Computation 195 (2) (2008) 454–459.

[38] C. Chun, Y. Ham, Some fourth-order modifications of Newton's method, Applied Mathematics and Computation 197 (2) (2008) 654–658.

[39] C. Chun, A family of composite fourth-order iterative methods for solving nonlinear equations, Applied Mathematics and Computation 187 (2) (2007) 951–956.

[40] C. Chun, Some variants of King's fourth-order family of methods for nonlinear equations, Applied Mathematics and Computation 190 (1) (2007) 57–62.

[41] J. Kou, Y. Li, X. Wang, A family of fourth-order methods for solving nonlinear equations, Applied Mathematics and Computation 188 (1) (2007) 1031–1036.

[42] P. Jarratt, Some fourth order multipoint iterative methods for solving equations, Mathematics of Computation 20 (95) (1966) 434–437.

[43] P. Jarratt, Some efficient fourth-order multipoint methods for solving equations, BIT. 9 (1969) 119–124.

[44] C. Chun, M. Y. Lee, A new optimal eighth-order family of iterative methods for the solution of nonlinear equations, Applied Mathematics and Computation 223 (2013) 506–519.

[45] J. Džunić, M. S. Petković, L. D. Petković, A family of optimal three-point methods for solving nonlinear equations using two parametric functions, Applied Mathematics and Computation 217 (19) (2011) 7612–7619.

[46] S. D. Lee, Y. I. Kim, B. Neta, An optimal family of eighth-order simple-root finders with weight functions dependent on function-to-function ratios and their dynamics underlying extraneous fixed points, Journal of Computational and Applied Mathematics 317 (2017) 31–54.

[47] L. Liu, X. Wang, Eighth-order methods with high efficiency index for solving nonlinear equations, Applied Mathematics and Computation 215 (9) (2010) 3449–3454.

[48] T. Lotfi, S. Sharifi, M. Salimi, S. Siegmund, A new class of three-point methods with optimal convergence order eight and its dynamics, Numerical Algorithms 68 (2) (2015) 261–288.

[49] G. Matthies, M. Salimi, S. Sharifi, J. L. Varona, An optimal three-point eighth-order iterative method without memory for solving nonlinear equations with its dynamics, Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics 33 (3) (2016) 751–766.

[50] J. R. Sharma, H. Arora, An efficient family of weighted-Newton methods with optimal eighth order convergence, Applied Mathematics Letters 29 (2014) 1–6.

[51] N. M. Ralević, D. Ćebić, A new optimal family of three-step methods for efficient finding of a simple root of a nonlinear equation, Mathematical Communications 21 (2) (2016) 187–197.

[52] C. Chun, Some improvements of Jarratt's method with sixth-order convergence, Applied Mathematics and Computation 190 (2) (2007) 1432–1437.

[53] J. Kou, Y. Li, An improvement of the Jarratt method, Applied Mathematics and Computation 189 (2) (2007) 1816–1821.

[54] H. Ren, Q. Wu, W. Bi, New variants of Jarratt's method with sixth-order convergence, Numerical Algorithms 52 (4) (2009) 585–603.

[55] X. Wang, J. Kou, Y. Li, A variant of Jarratt method with sixth-order convergence, Applied Mathematics and Computation 204 (1) (2008) 14–19.

[56] Y.-I. Kim, C. Chun, New twelfth-order modifications of Jarratt's method for solving nonlinear equations, Studies in Nonlinear Sciences 1 (1) (2010) 14–18.

[57] F. Soleymani, D. Babajee, M. Sharifi, Modified Jarratt method without memory with twelfth-order convergence, Annals of the University of Craiova-Mathematics and Computer Science Series 39 (1) (2012) 21–34.

[58] E. Schröder, Über unendlich viele algorithmen zur auflösung der gleichungen, Mathematische Annalen 2 (2) (1870) 317–365.

[59] H. Van de Vel, A method for computing a root of a single nonlinear equation, including its multiplicity, Computing 14 (1-2) (1975) 167–171.

[60] V. Candela, R. Peris, The rate of multiplicity of the roots of nonlinear equations and its application to iterative methods, Applied Mathematics and Computation 264 (2015) 417–430.

[61] L. B. Rall, Convergence of the Newton process to multiple solutions, Numerische Mathematik 9 (1) (1966) 23–37.

[62] L. D. Petković, M. S. Petković, D. Živković, Hansen–Patrick's family is of Laguerre's type, Novi Sad J. Math 33 (1) (2003) 109–115.

[63] B. Neta, C. Chun, On a family of Laguerre methods to find multiple roots of nonlinear equations, Applied Mathematics and Computation 219 (23) (2013) 10987–11004.

[64] N. Osada, Asymptotic error constants of cubically convergent zero finding methods, Journal of Computational and Applied Mathematics 196 (2) (2006) 347–357.

[65] N. Osada, An optimal multiple root-finding method of order three, Journal of Computational and Applied Mathematics 51 (1) (1994) 131–133.

[66] M. Petković, L. Petković, J. Džunić, Accelerating generators of iterative methods for finding multiple roots of nonlinear equations, Computers and Mathematics with Applications 59 (8) (2010) 2784–2793.

[67] S. Li, L. Cheng, B. Neta, Some fourth-order nonlinear solvers with closed formulae for multiple roots, Computers and Mathematics with Applications 59 (1) (2010) 126–135.

[68] B. Neta, A. N. Johnson, High-order nonlinear solver for multiple roots, Computers and Mathematics with Applications 55 (9) (2008) 2012–2017.

[69] B. Neta, New third order nonlinear solvers for multiple roots, Applied Mathematics and Computation 202 (1) (2008) 162–170.

[70] B. Neta, Extension of Murakami's high-order non-linear solver to multiple roots, International Journal of Computer Mathematics 87 (5) (2010) 1023–1031.

[71] H. Victory Jr, B. Neta, A higher order method for multiple zeros of nonlinear functions, International Journal of Computer Mathematics 12 (3-4) (1983) 329–335.

[72] L. Shengguo, L. Xiangke, C. Lizhi, A new fourth-order iterative method for finding multiple roots of nonlinear equations, Applied Mathematics and Computation 215 (3) (2009) 1288–1292.

[73] J. R. Sharma, R. Sharma, Modified Jarratt method for computing multiple roots, Applied Mathematics and Computation 217 (2) (2010) 878–881.

[74] X. Zhou, X. Chen, Y. Song, Constructing higher-order methods for obtaining the multiple roots of nonlinear equations, Journal of Computational and Applied Mathematics 235 (14) (2011) 4199–4206.

[75] M. S. Rhee, Y. I. Kim, A general class of optimal fourth-order multiple-root finders without memory for nonlinear equations, Applied Mathematical Sciences 7 (111) (2013) 5537–5551.

[76] R. Behl, A. Cordero, S. S. Motsa, J. R. Torregrosa, On developing fourth-order optimal families of methods for multiple roots and their dynamics, Applied Mathematics and Computation 265 (2015) 520–532.

[77] V. Kanwar, S. Bhatia, M. Kansal, New optimal class of higher-order methods for multiple roots, permitting $f'(x_n) = 0$, Applied Mathematics and Computation 222 (2013) 564–574.

[78] C. Chun, B. Neta, Comparing the basins of attraction for Kanwar–Bhatia–Kansal family to the best fourth order method, Applied Mathematics and Computation 266 (2015) 277–292.

[79] B. Liu, X. Zhou, A new family of fourth-order methods for multiple roots of nonlinear equations, Nonlinear Analysis: Modelling and Control 18 (2) (2013) 143–152.

[80] X. Zhou, X. Chen, Y. Song, Families of third and fourth order methods for multiple roots of nonlinear equations, Applied Mathematics and Computation 219 (11) (2013) 6030–6038.

[81] Y. H. Geum, Y. I. Kim, B. Neta, A class of two-point sixth-order multiple-zero finders of modified double-Newton type and their dynamics, Applied Mathematics and Computation 270 (2015) 387–400.

[82] Y. H. Geum, Y. I. Kim, B. Neta, A sixth-order family of three-point modified Newton-like multiple-root finders and the dynamics behind their extraneous fixed points, Applied Mathematics and Computation 283 (2016) 120–140.

[83] B. Neta, C. Chun, M. Scott, On the development of iterative methods for multiple roots, Applied Mathematics and Computation 224 (2013) 358–361.

[84] N. M. Ralević, D. Ćebić, On the optimality of some multi-point methods for finding multiple roots of nonlinear equation, Nonlinear Analsis: Modelling and Control 21 (1) (2016) 121–134.

[85] A. Cordero, J. R. Torregrosa, M. P. Vassileva, Three-step iterative methods with optimal eighth-order convergence, Journal of Computational and Applied Mathematics 235 (10) (2011) 3189–3194.

[86] X.-Y. Wu, A new continuation Newton-like method and its deformation, Applied Mathematics and Computation 112 (1) (2000) 75–78.

[87] L. V. Ahlfors, Complex Analysis: An Introduction to the Theory of Analytic Functions of One Complex Variable, McGrew-Hill, New York, London, 1953.

[88] M. Stojaković, Matematička Analiza 2, Fakultet tehničkih nauka, Novi Sad, 2010.

[89] B. D. Stewart, Attractor basins of various root-finding methods, Tech. rep., Naval Postgraduate School, Monterey CA (2001).

[90] S. Amat, S. Busquier, S. Plaza, Dynamics of a family of third-order iterative methods that do not require using second derivatives, Applied Mathematics and Computation 154 (3) (2004) 735–746.

[91] S. Amat, S. Busquier, S. Plaza, Dynamics of the King and Jarratt iterations, Aequationes Mathematicae 69 (3) (2005) 212–223.

[92] I. K. Argyros, Á. A. Magreñán, On the convergence of an optimal fourth-order family of methods and its dynamics, Applied Mathematics and Computation 252 (2015) 336–346.

[93] R. Behl, P. Maroju, S. S. Motsa, A family of second derivative free fourth order continuation method for solving nonlinear equations, Journal of Computational and Applied Mathematics 318 (2017) 38–46.

[94] F. Chicharro, A. Cordero, J. M. Gutiérrez, J. R. Torregrosa, Complex dynamics of derivative-free methods for nonlinear equations, Applied Mathematics and Computation 219 (12) (2013) 7023–7035.

[95] A. Cordero, M. Fardi, M. Ghasemi, J. Torregrosa, Accelerated iterative methods for finding solutions of nonlinear equations and their dynamical behavior, Calcolo 51 (1) (2014) 17–30.

[96] B. Neta, C. Chun, Basins of attraction for several optimal fourth order methods for multiple roots, Mathematics and Computers in Simulation 103 (2014) 39–59.

[97] C. Chun, B. Neta, Basins of attraction for Zhou–Chen–Song fourth order family of methods for multiple roots, Mathematics and Computers in Simulation 109 (2015) 74–91.

[98] B. Neta, M. Scott, C. Chun, Basin attractors for various methods for multiple roots, Applied Mathematics and Computation 218 (9) (2012) 5043–5066.