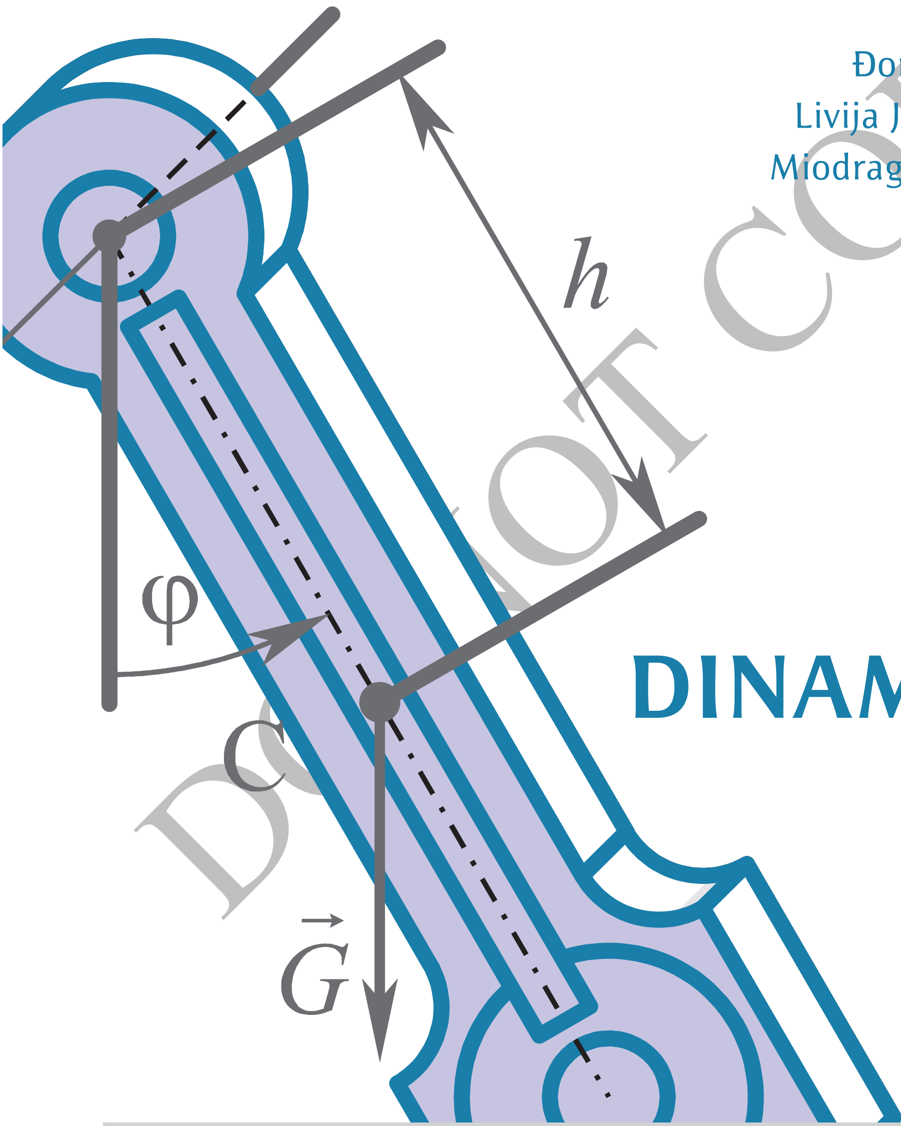
UNIVERZITET U NOVOM SADU
FAKULTET TEHNIČKIH NAUKA
EDICIJA TEHNIČKE NAUKE - UDŽBENICI

473

Đorđe S. Đukić
Livija J. Cvetićanin
Miodrag M. Zuković



DINAMIKA

FTN Izdavaštvo, Novi Sad, 2014

Uvod

Kretanje je jedna od osnovnih osobina materijalnog sveta koji nas okružuje. Materijalni objekti u prirodi kao što su galaksije, zvezde, planete i ostala nebeska tela kreću se jedna u odnosu na drugu. Ta kretanja su vrlo složena i raznovrsna. Čovekova čula u svakodnevnom životu najlakše zapažaju pojave u vezi sa kretanjem. "Dajte mi materiju i kretanje, pa ću vam konstruisati univerzum", rekao je Rene Dekart, francuski filozof osamnaestog veka.

Kretanje u širem smislu reči predstavlja oblik postojanja materije. Za potpunije shvatanje sveta oko nas, poznavanje osnovnih zakona kretanja, jedan je od osnovnih zahteva. Najjednostavniji način kretanja materije naziva se mehaničkim kretanjem. To je pomeranje materijalnih tela u prostoru tokom vremena. Znači, mehanika je deo fizike posvećen izučavanju mehaničkog kretanja materije.

Osnovni zadatak mehanike sastoji se u potpunom opisivanju kretanja i tendencija da se ono opiše na najjednostavniji način. Teorijska mehanika je logična posledica osnovnih zakona mehanike, dobijenih iz eksperimenata i brojnih posmatranja pojava u prirodi. Osnovne zakone mehanike pronašao je Isak Njutn. Zbog toga, mehanika zasnovana na ovim zakonima naziva se Njutnova mehanika. Saglasno sa Njutnovom mehanikom *promene* u kretanju nekog materijalnog sistema nastaju usled dejstva *sila* i *spregova* na elemente ovog sistema. Smatra se da razvoj i dostignuća Njutnove mehanike imaju centralnu ulogu u razvoju prirodnih nauka. Ovo prvenstveno zbog toga što Njutnova mehanika ima racionalan karakter. Ona jasno i precizno povezuje uzroke nastajanju kretanja, kao i oblik nastalog kretanja. Tu vezu Njutnova mehanika daje u jednoj vrlo efikasnoj matematičkoj šemi. Pre Njutna takva racionalna šema za opisivanje kretanja nije postojala. Zahvaljujući radovima velikih naučnika Galileja, Njutna, Ojlera, Lagranža, Hamiltona i drugih, Teorijska mehanika je postala jedna od osnovnih inženjersko fizičkih disciplina. Smatra se da dostignuća Teorijske mehanike predstavljaju jedno od najvećih trijumfa ljudskog uma. Istovremeno, Teorijska mehanika je i racionalna osnova ljudske materijalne civilizacije.

U mehanici se proučava kretanje materijalnih tela. Za potpuno razumevanje kretanja potrebne su tačne definicije prostora, vremena i materije. Kretanje u Njutnovoj mehanici se odvija u apsolutno nepokretnom prostoru koji je po svojoj strukturi Euklidov trodimenzionalni prostor. To je i naš čulni i opažajni prostor. Primetimo da je Euklidov prostor još i homogen i izotropan i da ne menja svoje osobine zbog kretanja tela u njemu. Pošto je ovakav Euklidov prostor "prazan" i bez uočljivih granica u njemu se ne može razlikovati jedna tačka prostora od druge. U tom prostoru se ne razlikuju ni dva različita položaja tela tokom njegovog kretanja. Znači, pomeranje tela moguće je konstatovati samo u odnosu na drugo telo, ili još bolje u odnosu na neki koordinatni sistem. Jasno je da je pomeranje u opštem slučaju relativna veličina jer se pomeranje ne može dati bez ukazivanja u odnosu na koje telo ili koordinatni sistem je ono određeno. Prema tome, i pored toga što je kretanje objektivna realnost ipak raznim posmatračima jedno kretanje izgleda različito, zavisno od mesta sa kog sude o kretanju i načina svog kretanja ili mirovanja.

Po dijalektičnom materijalizmu prostor je jedna od objektivnih formi postojanje materije. Pod prostorom se u fizici, pa i u mehanici, podrazumeva opšti oblik međusobnog odnosa materijalnih objekata i njihovih stanja. Drugim rečima, materijalni objekti koji čine jedan fizički sistem i svojim fizičkim stanjem utiču na osobine prostora u kome se nalaze.

Postavlja se važno pitanje kolika je širina primene mehanike, ili pitanje da li se svako kretanje materije pokorava Njutnovim zakonima kretanja?

Do kraja XIX veka vladalo je uverenje da je Njutnova mehanika sasvim dovoljna za potpuno opisivanje svih fenomena fizike. Bilo je i fizičara koji su tvrdili, da je fizika koja je bila bazirana na Njutnovim zakonima, kompletna. Ali, otkriće radioaktivnosti, elektrona, jezgra itd., ovakva gledišta su iz osnova promenila. Dakle, Njutnova mehanika, kao i svaka fizička teorija, ima svoja ograničenja primene. Proučavanje kretanja tela sa izuzetno velikim brzinama zahteva neke promene u skladu sa relativističkom mehanikom. Pri izuzetno malim kretanjima na atomskom ili sub-atomskom nivou potrebne su modifikacije koje uvodi kvantna mehanika.

I pored ovih ograničenja, sve ovo ni u kom slučaju ne umanjuje značaj Njutnove mehanike. Ona ima ogromnu širinu primene u opisivanju i predviđanju odvijanja mnogih fizičkih pojava. Klasična mehanika uspešno opisuje probleme tehnike u najširem smislu reči koji nisu ni suviše veliki ni suviše mali i u kojima se tela kreću umerenim brzinama. Ovde se prikazuju razne oblasti fizike u zavisnosti od brzine kretanja čestice u odnosu na brzinu svetlosti c ($c = 299\ 792\ 458[m/s]$ (približno 300 000 $[km/s]$), odnosno $c = 1\ 079\ 252848,8\ [km/h]$) i veličine same čestice.

Ako je brzina kretanja čestice između nule i $c/10$:

1. Za čestice veličine između $10^{-14}[m]$ i $10^{-10}[m]$ razvijena je kvantna mehanika;
2. Za čestice veličine između $10^{-10}[m]$ i $10^{20}[m]$ razvijena je klasična mehanika;

Ako je brzina kretanja čestice između $c/10$ i c :

1. Za čestice veće od $10^{20}[m]$ razvijena je kosmološka fizika.
2. Za čestice veličine između $10^{-14}[m]$ i $10^{-10}[m]$ razvijena je relativistička kvantna mehanika;
3. Za čestice veličine između $10^{-10}[m]$ i $10^{20}[m]$ razvijena je relativistička fizika;
4. Za čestice veće od $10^{20}[m]$ razvijena je relativistička kosmologija.

Međutim, naučni značaj klasične mehanike ne iscrpljuje se samo mogućnošću da u potpunosti predskaže tok izvesnog fizičkog procesa što je u osnovi njen glavni zadatak. Razvoj Njutnove mehanike vezan je za razvoj izvesnih matematičkih shema i metoda koje su dovele do mogućnosti da se prvobitni, u velikoj meri primitivni pojmovi, zamene daleko opštijim. Kasnije se pokazalo da ove nove matematičke metode (kao što su na primer metode analitičke mehanike) mogu biti primenjene za interpretaciju, takvih fizičkih pojmova, koji su sasvim različiti od njih, zbog kojih su se ovi matematički metodi razvili. Drugim rečima, ideje klasične mehanike mogu se uspešno primeniti i na procese fizičkog karaktera, koji tradicionalno izlaze iz okvira klasične mehanike, kao nauke o mehaničkom kretanju materije. Kao primer navodimo samo primenu Hamiltonove metode u kvantnoj mehanici i primenu varijacionih principa mehanike na provođenje toplote u čvrstim telima. Ukratko, mehanika obično i služi kao konceptualni obrazac gotovo svim savremenim oblastima fizike i tehnike.

U svim fazama proučavanja kretanja realnih fizičkih sistema stalno je prisutna potreba da se na osnovu proverenih eksperimentalnih činjenica izvrši tzv. matematičko modeliranje procesa, tj. da se osnovne fizičke karakteristike izraze adekvatnim matematičkim relacijama. Ovakav put koji ide od eksperimenata ka matematičkom modelu, obično se naziva induktivni za razliku od deduktivnog puta, koji ide od matematičkog modela i predviđanja, ka verifikaciji dobijenih rezultata. Savremeni razvoj čitavog niza primenjenih nauka, jako su uvećali važnost mehanike kao fundamentalnog inženjerskog predmeta. Od savremenog inženjera zahteva se da bude osposobljen za samostalnu stvaralačku aktivnost koju nameću sve složeniji tehnički sistemi. Ovaj zahtev sa svoje strane nameće zadatak da se kod studenata razvije sposobnost za samostalno analitičko rasuđivanje koje je široko bazirano na zakonima mehaničkih kretanja. Tako na primer, povećana upotreba brzohodnih mašina zahteva rešenje mnogih problema teorije oscilacija i uravnoteženja masa. Savremena raketna tehnika traži duboko poznavanje mehaničkih sistema kod kojih se masa menja sa vremenom, giroskopskih pojava itd. Proces automatskog upravljanja zahteva od inženjera da rasuđuje o stabilnosti kretanja i procesa koji se regulišu. Ovi i drugi problemi našli su mesto u ovom kursu.

U Novom Sadu, Novembar 2014. godine

Đorđe S. Đukić
Livija J. Cvetićanin
Miodrag M. Zuković

Poglavlje 1

Dinamika materijalne tačke

Pri proučavanju kretanja u kinematici uvode se osnovni pojmovi prostora i vremena. Pomoću tih pojmova proučavaju se geometrijski elementi kretanja i analiziraju osnovne karakteristike kretanja. Međutim, kinematika ne ukazuje na uzroke kretanja. Za potpunu analizu kretanja tela neophodno je posmatrati kretanje onako kako se ono odvija u prirodi. U prirodi mehanička kretanja nastaju usled međudejstva, ili interakcije, tela, koje se iskazuje merama mehaničkog dejstva, odnosno silama i spregovima. Tela u prirodi su materijalna. Pojam o materijalnosti tela, odnosno pojam mase, je treći osnovni pojam, pored prostora i vremena, koji karakteriše materijalni svet.

U dinamici materijalna tačka je ili materijalno telo zanemarljivih dimenzija ili izabrana tačka krutog tela u kojoj je skoncentrisana cela masa tela i čije se kretanje posmatra. Kada je od interesa samo nalaženje, recimo putanje centra mase planete oko sunca, onda se planeta posmatra kao materijalna tačka. Ako se proučava položaj neke tačke na planeti tokom kretanja planete oko sunca planeta se mora posmatrati kao telo konačnih dimenzija. Odavde je jasno da način kretanja tela, a ne njegove dimenzije, ima presudnu ulogu u zameni tela sa materijalnom tačkom. Ako neko telo vrši translatorno kretanje tada, kao što je poznato iz kinematike, sve tačke tela imaju iste brzine, ista ubrzanja i iste trajektorije. U ovom slučaju, očigledno je da se telo, bez ikakvog uprošćavanja može zameniti sa materijalnom tačkom čije kretanje opisuje kretanje čitavog sistema. Pri opštem, odnosno složenom, kretanju tela u prostoru izabere se jedna tačka tela u kome je skoncentrisana cela masa tela i čije se kretanje posmatra u prostoru. Kretanja svih ostalih tačaka tela se posmatra u odnosu na tako izabranu tačku tela.

U ovom delu mehanike, koji se zove dinamika, proučava se kretanje materijalnih tela pod dejstvom sila i spregova koji deluju na dato telo. I ovde, isto kao pri proučavanjima u statici i kinematici, pretpostavlja se da su tela kruta.

1.1 Vreme

Zbog nemogućnosti da se izabere neki jedinični vremenski uzorak i čuva negde kao uzorak za upoređivanje sa njim, definicija jedinice vremena je oduvek privlačila čovekovu pažnju. Tokom vekova za jedinicu merenja vremena je bila predlagana neka veličina vezana za kretanja zemlje oko sunca ili njeno obrtanje oko svoje ose. Takva definicija jedinice vremena može se zvati astronomska. Vreme je pokazalo da ove astronomske jedinice vremena nisu konstantne pa se tražila neka pojava u fizici koja ima konstantnost svog nekog periodičnog procesa. Na kraju, 1967. godine internacionalnim dogovorom uvedeno je, da se za jedinicu vremena usvoji sekunda koja je jednaka 9192631,770 perioda oscilacija atoma cezijuma 133. Zbog svoje prirode ovo se zove atomska jedinica vremena. Atomska jedinica vremena bi trebala da bude konstanta mnogo duže vremena od astronomske. Astronomske veličine se u principu menjaju. Prema hipotezi P. Diraka čak i univerzalna gravitaciona konstanta se sporo menja tokom vremena, gde je interval vremena reda starosti vasione, odnosno 10^{10} godina. Ako bi ova hipoteza bila tačna, posle vrlo dugog vremenskog intervala, došlo bi do različitog pokazivanja vremena astronomskih i atomskih časovnika.

1.2 Dužina

I istorija jedinice za dužinu je zanimljiva. U Francuskoj je krajem XVIII veka uvedena jedinica za merenje dužine jedan metar kao desetmilioniti (10^{-7}) deo razdaljine od Zemljinog pola do ekvatora, mereno duž meridijana. Međutim, nemogućnost stvaranja nekog standarda za ovu definiciju dužine dovela je do usvajanja da je jedan metar dužina jedne metalne šipke koja se čuva u Sevru.

Maksvel je predložio da se za jedinicu dužine jedan metar usvoji 1650763,73 talasnih dužina narandžastocrvene svetlosti kriptona 86. Ali i tu postoje teškoće zbog tehnike merenja preko svetlosnih uređaja.

1.3 Princip određenosti

Kretanje tela ili njihovo mirovanje u prirodi odvija se neprekidno tokom vremena. U nekom trenutku, počinje se proučavati kretanje tela i pokušava se prognozirati njegovo odvijanje u budućnosti. Trenutak, u kome počinje proučavanje kretanja zove se početni trenutak i, kao i u kinematici, obeležava se sa t_0.

Njutn-Laplasov[1] *princip određenosti klasične mehanike tvrdi da početno stanje mehaničkog sistema, tj. stanje u početnom trenutku vremena* t_0*, koje je određeno položajem i brzinama tačaka sistema, jednoznačno određuje njegovo dalje kretanje.*

Pre početnog trenutka vremena t_0 mehanički sistem ima neku svoju predistoriju. Njutn-Laplasov princip određenosti tvrdi da nijedan podatak iz predistorije kretanja, osim onih koji na njenom kraju u trenutku t_0 određuju položaj i brzine tačaka sistema, ne utiče na dalje kretanje sistema.

U stanje na početku posmatranja kretanja mehanički sistem može doći spontano, ali tada bi čovek bio samo puki posmatrač daljeg kretanja bez mogućnosti da na njega utiče. Čovek je vrlo rano uočio da na kretanje, koje se odvija posle početka našeg posmatranja, odnosno posle početnog trenutka vremena, može najlakše uticati ostvarivanjem određenog početnog stanja sistema u koje on ne dolazi spontano. Šta više, ostvarivanjem određenog početnog stanja sistema, on se može kretanjem dovesti u novo željeno stanje u nekom trenutku vremena t_1. Ova ideja je osnova za konstrukciju svih oružja proizvedenih od čoveka, od strele do rakete.

[1] *P. S. Laplace, 1749 – 1827.*

1.4 Njutnovi zakoni dinamike

U svom originalu Njutnovi zakoni mehanike su iskazani za kruto telo. Tek dosta kasnije od njihove pojave pokazano je da oni važe za kretanja materijalne tačke. Ovde se oni iskayuju u originalu.

1.4.1 Prvi Njutnov zakon

Dinamika je zasnovana na tri zakona[2], koje je Njutn formulisao 1686. godine u svom čuvenom delu *Matematički principi prirodne filozofije*[3]. Ovi zakoni se ne dokazuju. Najbolja potvrda ispravnosti ovih zakona je mogućnost da se na osnovu ovih principa prognozira kretanje svih tela u prirodi i napravi čitav niz tehničkih naprava, koje rade u skladu sa ovim zakonima. Prvi Njutnov zakon glasi:

Svako telo ostaje u stanju mirovanja ili jednolikog pravolinijskog kretanja, dok pod dejstvom sile ne bude prinuđeno da to svoje stanje promeni[4].

Iz prvog Njutnovog zakona, koji se uvek mora tumačiti zajedno sa principom određenosti, može se zaključiti nekoliko činjenica. Ovim zakonom se ukazuje na svojstvo materijalne tačke da ostane u miru ili da se kreće jednoliko i pravolinijski, ako od trenutka t_0, odnosno početka našeg posmatranja, na nju ne deluje nikakva sila. Tačka ostaje u miru ako je bila u miru pre tog trenutka. Ona se kreće jednoliko i pravolinijski konstantnom brzinom $\overrightarrow{v}_0$, koju je imala u početnom trenutku vremena. Ovim zakonom se ukazuje na svojstvo tačke da zadrži svoje stanje, mirovanja ili jednolikog pravolinijskog kretanja, ako nema nikakvog dejstva sile na nju. Ovo svojstvo materijalne tačke zove se inertnost tačke, odnosno inercija tačke. Indirektno, ovaj zakon ukazuje na uticaj početnog stanja na stanje tačke posle tog trenutka. Ovim zakonom se ukazuje da samo dejstvo sile može primorati tačku da promeni to stanje mirovanja ili jednolikog i pravolinijskog kretanja. Važan zaključak je da prvi Njutnov zakon ne pravi razliku između mirovanja i jednolikog i pravolinijskog kretanja tačke, što se kasnije znatno jasnije obrazlaže.

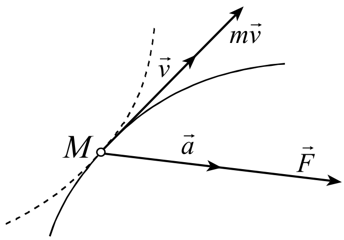
[2] *Axiomata sive leges Motus.*

[3] *Philosophiae Naturalis Principia Matematica*

[4] *Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus illud a viribus impressis cogitur statum suum mutare.*

1.4.2 Drugi Njutnov zakon

Promena kretanja proporcionalna je sili koja dejstvuje na materijalnu tačku i vrši se u pravcu sile[5].



Slika 1.1:

Njutn pod kreta-njem podrazumeva vektor koji se pridružuje pokretnoj materijalnoj tački M i koji je proizvod mase m materijalne tačke i vektora brzine $\overrightarrow{v}$ u datom trenutku vremena (Slika 1.1). Sada se taj vektor $m\overrightarrow{v}$ zove vektor količine kretanja materijalne tačke. Pod promenom kretanja podrazumeva se izvod po vremenu tog vektora. Zato drugi Njutnov zakon glasi

$$\frac{d}{dt}(m\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{F}, \tag{1.1}$$

gde je $\overrightarrow{F}$ sila koja dejstvuje na tačku. Ako se masa materijalne tačke ne menja tokom vremena, odnosno ako je konstantna, ovaj zakon postaje

$$m\overrightarrow{a} = \overrightarrow{F}, \tag{1.2}$$

gde je $\overrightarrow{a} = d\overrightarrow{v}/dt$ apsolutno ubrzanje materijalne tačke u datom trenutku vremena. Drugi Njutnov zakon u ovoj formi je osnovna jednačina dinamike. Ova verzija tog zakona glasi:

Vektor sile jednak je proizvodu mase i vektora ubrzanja materijalne tačke (Slika 1.1).

Poznato je da je vektor ubrzanja, koji je prema (1.2) kolinearan sa silom koja deluje na tačku, usmeren u izdubljenu stranu trajektorije tačke. Zato trajektorija tačke, pri poznatom pravcu i smeru sile, ne može imati oblik putanje dat isprekidanom linijom na slici 1.1 već samo onaj dat sa punom linijom. Prema relaciji (1.2) masa je, po Kirhofu[6], koeficijent proporcionalnosti između sile $\overrightarrow{F}$, koja je uzrok pojave ubrzanja tačke, i dobijenog ubrzanja. Materijalna tačka manje mase dobija veće ubrzanje nego tačka veće mase, ako na njih deluje ista sila. Zato je masa

[5] *Mutationem motus proportionalem esse vi motrici impressae, et fieri secundum lineam rectam qua vis illa imprimitur.*

[6] *R. Kirchoff,* 1824 – 1887.

i količinska mera inertnosti materijalne tačke. Jednačina (1.2) naziva se vektorska jednačina kretanja materijalne tačke. Iz ovog zakona sledi da je dejstvo sile na materijalnu tačku nezavisno od dejstva bilo koje druge sile koja dejstvuje na istu tačku. To dejstvo ne zavisi od kretanja koje materijalna tačka može da ima pre nego što sila počne da deluje. Na primer, konstantna sila datog pravca proizvodi konstantno ubrzanje u istom pravcu, nezavisno od toga da li je početno kretanje imalo taj pravac ili ne.

Ako materijalna tačka ima konstantnu masu i ako na nju ne deluje nikakva sila, odnosno ako je $\overrightarrow{F} = \overrightarrow{0}$, onda iz (1.2) sledi da je za vreme kretanja vektor brzine tačke $\overrightarrow{v}$ konstantan što tvrdi prvi Njutnov zakon. Takvo kretanje se naziva kretanje po inerciji.

Drugi Njutnov zakon važi za svaki trenutak vremena $t \geqslant t_0$, ako je brzina tačke diferencijabilna funkcija vremena u tom trenutku vremena. U trenucima vremena, ili u vrlo kratkim vremenskim intervalima, u kojima brzina tačke nije diferencijabilna funkcija, drugi Njutnov zakon ne važi. Takvi problemi kretanja se posebno proučavaju.

Početni uslovi kretanja.

Drugi Njutnov zakon se primenjuje zajedno sa principom određenosti. Zato je kretanje materijalne tačke određeno vektorskom jednačinom (1.2) i stanjem tačke na početku kretanja, koje se najjednostavnije može iskazati zadatim početnim uslovima kretanja

$$\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}_0, \quad \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}_0, \quad \text{za } t = t_0, \tag{1.3}$$

gde je $\overrightarrow{r}_0$ početni vektor položaja, a $\overrightarrow{v}_0$ početna brzina tačke.

Masa i jedinica za silu.

U MKS sistemu mernih jedinica, jedinica za masu je kilogram[7] $[kg]$.

Drugi Njutnov zakon omogućuje da se definiše masa materijalne tačke količnikom intenziteta sile koja deluje na tačku i intenziteta ubrzanja koje ona izaziva. Sila kojom Zemlja deluje na telo u blizini njene površine,

[7]Pod kilogramom podrazumeva se masa valjka visine 39 $[mm]$ i prečnika 39 $[mm]$, koji je izrađen od legure platine i iridujuma.

naziva se težinom tela G. Ogledima je utvrđeno da sva tela u bezvazdušnom prostoru pod dejstvom težine padaju na Zemlju istim ubrzanjem g, koje se naziva ubrzanje zemljine teže ili ubrzanje slobodnog pada. Znači, za ovo kretanje tela, prema drugom zakonu, važi da je $mg = G$. Kako Zemlja nema oblik kugle već sferoida to ubrzanje zemljine teže zavisi od položaja na Zemlji[8], ono je veće na polovima nego na ekvatoru. Neka srednja vrednost ubrzanja zemljine teže iznosi $g = 9.81\ [m/s^2]$.

U MKS sistemu mernih jedinica, gde je dužina izražena u metrima, vreme u sekundama i masa u kilogramima, jedinica za silu je izvedena veličina i naziva se njutn $[N]$. Jedan njutn je sila koja masi od jednog kilograma saopštava ubrzanje od jednog metra po sekundi na kvadrat.

Pri merenju težine nekog tereta uvek se njegova težina upoređuje sa odgovarajućom jedinicom težine. Naime, pošto su i težina tereta i jedinica za težinu deljive sa ubrzanjem zemljine teže, uvek se meri odnos mase tereta prema jediničnoj masi. Prema tome, izmerena težina tereta na nekoj vagi je brojčano jednaka masi tog tereta u kilogramima. Na primer, ako je izmerena masa $b\ [kg]$ tada je, prema $mg = G$, njegova težina $G = bg\ [N]$.

Napomene:

1. *Poznato je da se dejstvo sučeljnog sistema N sila $\overrightarrow{F}_i$, koje deluju na jednu tačku, može zameniti jednom silom, odnosno njihovom rezultantom*

$$\overrightarrow{F} = \sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{F}_i. \tag{1.4}$$

Zbog ove činjenice, pod silom $\overrightarrow{F}$ u drugom Njutnovom zakonu podrazumeva se rezultanta sistema sučeljnih sila koje deluju na tačku[9]*. U te sile se uključuju sve aktivne sile i sve reakcije veza koje ograničavaju kretanje tačke.*

[8]Prema ogledima vrednost ubrzanja zemljine teže iznosi: $g = 9.8315\ [m/s^2]$ na polovima; $g = 9.7807\ [m/s^2]$ na ekvatoru i $g = 9.8062\ [m/s^2]$ na geografskoj širini od 45^0.

[9]Uz drugi zakon Njutn je dao i Dodatak, odnosno Corollarium, koji govori o sabiranju sila: *Pri istovremenom dejstvu dve sile na telo ono prelazi dijagonalu paralelograma sila za vreme koje je zbir vremena potrebnih za prelazak stranica paralelograma pri dejstvu svake sile pojedinačno* (*Corpus viribus conjuctis diagonalem parallelogrammi eodem tempore describere quo latera separatis*).

2. *Pošto je drugi Njutnov zakon formulisan za slobodnu materijalnu tačku, u slučaju vezane materijalne tačke uvek se primenjuje aksioma statike o oslobađanju od veza. Tačka se oslobodi od veza i njihovo dejstvo se zameni reakcijama veza, koje ulazu u sumu svih sila (1.4), koje deluju na materijalnu tačku.*

Prva dva Njutnova zakona odnose se na kretanje jedne materijalne tačke i za proučavanje tog kretanja oni su dovoljni. Treći Njutnov zakon definiše uzajamno dejstvo tačaka materijalnog sistema i neophodan je za proučavanje kretanja i mirovanja materijalnih sistema.

1.4.3 Treći Njutnov zakon

Dejstvu (akciji) uvek je jednako protivdejstvo (reakcija), ili međusobna dejstva dvaju tela uvek su jednaka po pravcu i intenzitetu a suprotno usmerena[10].

Napomena:

Pošto sile i spregovi dejstva i protivdejstva, deluju na različita tela, oni nisu uravnoteženi.

Sile i spregovi mogu biti rezultat kontakta dva tela, ali i ne moraju. Ovaj zakon upotpunjuje naše znanje o sili i spregu. Za svaku silu ili spreg, koji deluju na jedno telo, mora postojati drugo telo, koje je njihov izvor, i na koje mora delovati sila ili spreg istog intenziteta i pravca, a suprotnog smera[11]. Sile i spregovi se uvek javljaju u prirodi po parovima. Na

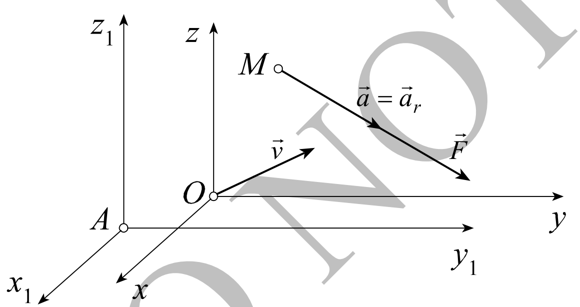
[10] *Actioni contrariam semper et aequalem esse reactionem: sive corporum duorum actiones in se mutuo semper esse aequales et in partes contrarias dirigi.*

[11] Tokom prve polovine 19. veka, kako se razvijala mehanika i povećavala tačnost posmatranja, ustanovljeno je da se planeta Uran ne kreće u skladu sa proračunima. Putanja Urana nije se mogla odrediti na osnovu poznatih planeta Sunčevog sistema. Znači da je na Uran delovala i neka sila koja se nije uzimala u obzir prilikom proračuna njegove putanje. Na osnovu trećeg Njutnovog zakona, u Sunčevom sistemu morala je postojati i neka druga planeta na koju deluje ista takva sila. 1845. godine engleski matematičar Adams (*J. C. Adams* 1819 – 1892) i 1846. godine francuski astronom Leverje (*U. J. Le Verrier* 1811 – 1877), nezavisno jedan od drugog, pretpostavili su postojanje nove planete određene mase, na putanji udaljenijoj od Sunca nego što je Uranova. Na osnovu toga, oni su proračunali položaj te nepoznate planete. Nemački astronom Gale (*J.G. Galle* 1812 – 1910) je u berlinskoj opservatoriji pronašao tu planetu i to na mestu koje se samo za jedan stepen razlikovalo od predviđenog. Ta nova planeta je dobila ime Neptun.

primer, kamen koji pada privlači Zemlju istom silom sa kojom i Zemlja privlači kamen. Treći Njutnov zakon definiše uzajamno dejstvo između tačaka materijalnog sistema i predstavlja osnovu u proučavanju dinamike sistema materijalnih tačaka i krutih tela. Prva dva zakona Njutna odnose samo na slobodnu materijalnu tačku.

Napomenimo da je posle osnovnih zakona kretanja, Njutn naveo u vidu dodatka (Corollarium) i zakon o paralelogramu sila koje neki autori nazivaju četvrtim zakonom mehanike. Ovaj zakon govori da se sile sabiraju kao vektori. Ako dve sile deluju na materijalnu tačku, onda se one u potpunosti mogu zameniti trećom silom koja je konstruisana kao dijagonala paralelograma koje ove sile grade. Zakon o paralelogramu sila uspostavlja aksiomatski nezavisnost dejstva više sila koje istovremeno dejstvuju na materijalnu tačku ili princip o superpoziciji sila.

1.5 Inercijalni koordinatni sistemi



Slika 1.2:

Posmatrajmo kretanje tačke M u odnosu na dva koordinatna sistema $Ax_1y_1z_1$ i $Oxyz$ (Slika 1.2) u trodimenzionalnom prostoru, pri čemu je sistem $Ax_1y_1z_1$ nepokretan, a sistem $Oxyz$ se kreće translatorno konstantnom brzinom $\overrightarrow{v}$. Prema koncepciji složenog kretanja tačke, koje se proučava u kinematici, kretanje koordinatnog sistema $Oxyz$ je prenosno kretanje, dok je kretanje tačke M u odnosu na taj koordinatni sistem relativno kretanje. Takođe je poznato, iz kinematike složenog kretanja tačke, da je apsolutno ubrzanje tačke M dato sa

$$\overrightarrow{a} = \overrightarrow{a}_r + \overrightarrow{a}_p + \overrightarrow{a}_c,$$

gde su $\overrightarrow{a}_r$, $\overrightarrow{a}_p$ i $\overrightarrow{a}_c$ vektori relativnog, prenosnog i Koriolisovog ubrzanja tačke. Pošto je prenosno kretanje translatorno konstantnom brzinom $\overrightarrow{v}$, to su prenosno i Koriolisovo ubrzanje tačke jednaki nuli. Sledi da je u takvom pokretnom koordinatnom sistemu $Oxyz$ relativno ubrzanje tačke jednako apsolutnom, tj. $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{a}_r$, pa drugi zakon dinamike u pokretnom sistemu $Oxyz$ glasi

$$m\overrightarrow{a}_r = \overrightarrow{F}.$$

Poređenjem ove jednačine sa izrazom (1.2), zaključujemo da je ona potpuno istovetna sa jednačinom kretanja u nepokretnom koordinatnom sistemu. Zato, drugi Njutnov zakon ima potpuno isti oblik u pokretnom koordinatnom sistemu, koji se kreće translatorno konstantnom brzinom, kao i u nepokretnom. Sledi vrlo dalekosežan zaključak: Sve mehaničke pojave i zakoni imaju isti oblik u nepokretnom koordinatnom sistemu i pokretnim koordinatnim sistemima, koji se kreću translatorno konstantnom brzinom $\overrightarrow{v}$. Ovaj zaključak se zove princip relativnosti klasične mehanike. Na njega je prvi ukazao Galilej[12].

Koordinatni sistemi koji se kreću translatorno konstantnom brzinom $\overrightarrow{v}$ u odnosu na apsolutno nepokretni sistem nazivaju se inercijalni koordinatni sistemi.

1.6 Vrste sila

Sve sile u prirodi zasnovana su na četiri osnovna međudejstva. Jake i slabe sile su nuklearne sile koje deluju samo na vrlo malim rastojanjima i koje ostvaruju dejstvo između delova atoma uključujući nukleone i protone. Elektromagnetna sila deluje između električnih naelektrisanja a gravitaciona sila između masa. Sva ova osnovna međudejstva su bezkontakna. Međutim u prirodi postoje i kontaktne sile koje su u osnovi posledica ova četiri osnovna međudejstva.

1.6.1 Gravitacione sile

Gravitacione sile imaju polje svog dejstva. Ove sile deluju između tela, koja ne moraju biti u kontaktu. Njihov uzrok su mase ovih tela. Gravitacione sile su privlačne, a rezultat su jednog univerzalnog fenomena prirode, koji je otkrio Njutn. Mnogobrojnim ogledima je potvrđena is-

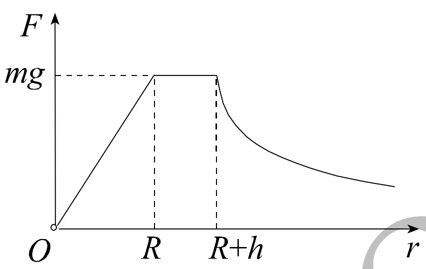
[12] *G. Galileo,* 1564 – 1642.

pravnost analitičkog oblika sile univerzalne gravitacije, koja glasi

$$F{=}k\frac{m_1m_2}{r^2},$$

gde je F intenzitet sile, k[13] je univerzalna gravitaciona konstanta, m_1 i m_2 su mase tela a r je rastojanje između težišta ovih materijalnih tela. Gravitaciona sila deluje na oba tela u pravcu koji spaja težišta dva tela i u smeru ka drugom telu. Vrednost univerzalne gravitacione konstante je prvi izmerio Kevendiš[14].

Kada se radi o telima uobičajenih dimenzija gravitaciona sila je jako mala[15].



Slika 1.3:

Po svojoj prirodi i sila delovanja Zemlje na tela u njenoj okolini je gravitaciona. Na velikoj udaljenosti od Zemlje to je sila univerzalne gravitacije $F = kmM/r^2$, gde je m masa tela, M masa zemlje a r rastojanje težišta Zemlje od težišta tela. U blizini Zemlje ova sila je težina tela ili sila zemljine teže čiji je intenzitet $F = mg$, gde je g ubrzanje zemljine teže[16]. Ako se zamisli telo u tunelu prema težištu Zemlje, tada privlačna sila zemlje na telo iznosi $F = cr$, gde je r rastojanje između težišta tela i težišta Zemlje a c konstanta. Ova sila je, bez obzira na svoj analitički oblik, uvek usmerena ka težištu Zemlje. Na slici 1.3 prikazan je dijagram sile delovanja Zemlje na tela u zavisnosti od njihovog rastojanja r od težišta Zemlje, gde je h malo rastojanje od površine Zemlje a R poluprečnik Zemlje.

Napomena:

Ova sila se uzima uvek samo u jednom od navedena tri moguća analitička oblika.

[13] $k = 6.67384 \times 10^{-11}$ $[m^3kg^{-1}s^{-2}]$.

[14] *H. Cavendish*, 1731 – 1810.

[15] Na primer, gravitaciona sila između dve kugle masa 0.0015 $[kg]$ i 1.5 $[kg]$ iznosi približno 6×10^{-10} $[N]$, a to je 10000 puta manje od težine jedne vlasi ljudske kose.

[16] Kako je poluprečnik zemlje 6378.1 $[km]$, masa zemlje 5.97219 $\times 10^{24}$ $[kg]$ sledi da je $g = kM/r^2 = 9.81$ $[ms^{-2}]$.

1.6.2 Elektromagnetne sile

Elektromagnetnim silama nazivaju se električne i magnetne sile. Električne sile se javljaju između naelektrisanih tela koja se kreću ili miruju. Magnetne sile se javljaju samo između naelektrisanih tela koja se kreću.

Električne sile.

Električne sile imaju polje svog dejstva. Osnovni oblik električne sile pronašao je Kulon. Ona se javlja između dve naelektrisane čestice sa naelektrisanjima q_1 i q_2. Ova sila je odbojna ako su naelektrisanja istog znaka, a privlačna ako su suprotnog. Ona uvek deluje u pravcu koji spaja težišta ovih čestica. Ako je r rastojanje između čestica, onda je intenzitet Kulonove sile

$$F = k_1 \frac{q_1 q_2}{r^2},$$

gde je k_1 konstanta[17]. Vidi se da ova sila ima istu analitičku formu kao i sila univerzalne gravitacije. Intenzitet Kulonove sile je daleko veći od intenziteta gravitacione sile.

U opštem slučaju, na svaku naelektrisanu česticu, sa naelektrisanjem q, koja se kreće ili miruje u električnom polju, deluje električna sila

$$\overrightarrow{F} = q\overrightarrow{E},$$

gde je $\overrightarrow{E}$ vektor električnog polja .

Električne sile imaju veliki značaj u svim pojavama u prirodi u kojima dolazi do naelektrisanja, bez obzira da li su te pojave biološke, elektrotehničke, hemijske ili drugačije prirode.

Magnetne sile.

Magnetne sile imaju polje svog dejstva. Na svaku pokretnu naelektrisanu česticu u magnetnom polju deluje magnetna sila

$$\overrightarrow{F} = q(\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{B}),$$

gde je q naelektrisanje čestice, $\overrightarrow{v}$ njena brzina i $\overrightarrow{B}$ vektor magnetne indukcije.

[17] $k_1 = 9 \times 10^9$ $[Nm^2/C^2]$, gde je C jedinica naelektrisanja kulon.

Ako se naelektrisana čestica istovremeno kreće u električnom i magnetnom polju, tada na nju deluje sila

$$\overrightarrow{F} = q\overrightarrow{E} + q(\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{B}),$$

koja se naziva Lorencova[18] sila.

1.6.3 Nuklearne sile jakog i slabog dejstva

Nuklearne sile nemaju veći značaj za klasičnu mehaniku, ali predstavljaju važan oblik dejstva u prirodi. One se javljaju između protona i neutrona u atomskom jezgru. One su jače od električnih sila, ali je njihovo dejstvo ograničeno na vrlo mala rastojanja. Na rastojanjima reda 10^{-12} od jednog metra, njihovo dejstvo je zanemarljivo malo, pa je njihov uticaj na kretanje tela zanemarljivo.

1.6.4 Kontaktne sile

U ovu grupu spadaju sile koje se ostvaruju kontaktom dva tela ili zbog deformacije tela. Kontaktne sile nemaju polje svog dejstva. U osnovi ovih sila je njihovo elektromagnetno poreklo, ali nedovoljno proučeno, pa se one uglavnom određuju ogledima. U ovu vrstu sila spadaju: sile trenja, sile fluidnog otpora i sile zavisne od deformacije.

Sile trenja.

Tri pojave trenja između tela u kontaktu, koje se mere silom trenja klizanja, spregom trenja kotrljanja i spregom trenja obrtanja detaljno su objašnjene u statici pa se ovde ne ponavljaju.

Sile fluidnog otpora.

Na svako telo ili materijalnu tačku koje se kreće u struji nekog fluida deluje otporna sila. Ako telo miruje, ta otporna sila ima pravac i smer strujanja fluida. Ako fluid miruje a telo se kreće ta otporna sila ima isti pravac a suprotan smer od brzine tela. Pri kretanju tela u pokretnom fluidu javlja se više ovakvih otpornih sila u različitim pravcima. Pri

[18] *H. Lorentz,* 1853 – 1928.

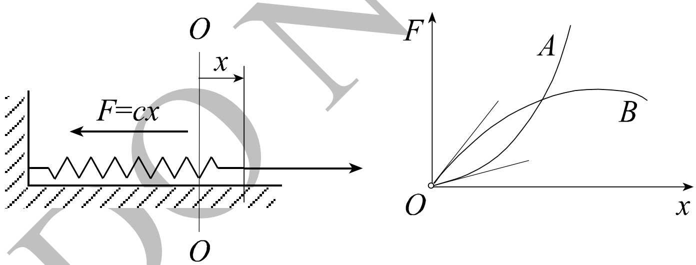
kretanju u nepokretnom fluidu osnosimetričnog tela brzinom v u pravcu ose simetrije, ili pri kretanju fluida brzinom intenziteta v u pravcu ose simetrije nepokretnog tela, najjednostavniji oblik ove sile glasi

$$F = c_1 v + c_2 v^2,$$

gde su c_1 i c_2 konstante koje zavise od oblika tela, gustine i viskoznosti fluida i načina njegovog strujanja. Prvi član $c_1 v$ u prethodnoj relaciji je dominantan pri sporijem, odnosno laminarnom strujanju, dok drugi član $c_2 v^2$ preovlađuje pri bržim kretanjima i pojavi turbulentnog strujanja. Konstante c_1 i c_2 određuju se ogledima. Prvi član u prethodnom izrazu naziva se sila otpora viskoznog trenja, a drugi sila otpora turbulentnog trenja.

Sile zavisne od deformacije. Sila u opruzi.

Pri izduženju linearne ili uvijanju torzione opruge, izduženju konca, savijanju, uvijanju ili izduženju grede, tj. pri deformaciji tela, javljaju se sila ili spreg, ili i sila i spreg, koji se protive toj deformaciji i čiji intenzitet zavisi od veličine deformacije. Tipična sila koja zavisi od deformacije, je sila u opruzi. Posmatra se elastična nenapregnuta opruga na glatkoj površini. Levi kraj opruge vezan je za zid a desni se povlači silom. Pri svakoj sili povlačenja, koja se može izmeriti, opruga se izduži za veličinu x u odnosu na njeno nenapregnuto stanje $0-0$ (Slika 1.4). U ravnotežnom stanju opruge, ta sila povlačenja je uravnotežena sa silom u deformisanoj opruzi. Na dijagramu (Slika 1.4) prikazana je zavisnost sile u opruzi od izduženja opruge. Sa A je obeležena tvrda opruga, gde sila sve više raste sa porastom deformacije. Tvrda opruga se pri velikom deformisanju lomi. Na istoj slici je sa B označena meka opruga, gde sila sve sporije raste sa porastom deformacije. Meka opruga se pri velikim deformacijama razvlači, tj. plastično



Slika 1.4:

deformiše gubeći svoja osnovna elastična svojstva. Zavisnost sile u opruzi od istezanja opruge je nelinearna. Za vrlo male deformacije i meke i tvrde opruge, kada važi Hukov zakon, nelinearne krive A i B mogu se dobro aproksimirati sa tangentama u koordinatnom početku, pa je sila u opruzi proporcionalna deformaciji, tj.

$$F = cx,$$

gde je c $[N/m]$ krutost opruge i zavisi od materijala opruge, njenih dimenzija, načina izrade itd.

1.6.5 Polje sila. Funkcija sile i potencijalna energija

Ako u svakoj geometrijskoj tački ograničenog ili neograničenog dela prostora na materijalnu tačku, koja se nađe u njoj, deluje sila, onda je taj prostor polje te sile.

U opštem slučaju, smatra se da svaka sila može zavisiti od vremena t, položaja $\overrightarrow{r}$ i brzine tačke $\overrightarrow{v}$, tj. da je[19]

$$\overrightarrow{F} = \overrightarrow{F}(t, \overrightarrow{r}, \overrightarrow{v}).$$

Pošto ovo polje zavisi od vremena ono je nestacionarno. Ako polje ne zavisi od vremena ono je stacionarno.

Neka sila bude funkcija samo položaja tačke. Tada su projekcije sile F_x, F_y i F_z na ose Dekartovog koordinatnog sistema neke jednoznačne funkcije položaja, odnosno

$$F_x = F_x(x, y, z), \quad F_y = F_y(x, y, z), \quad F_z = F_z(x, y, z). \tag{1.5}$$

Funkcija sile i potencijalna energija

Ako postoji funkcija koordinata $U(x, y, z)$ tako da se projekcije sile na koordinatne ose x, y i z izračunavaju pomoću relacija

$$F_x = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad F_y = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad F_z = \frac{\partial U}{\partial z}, \tag{1.6}$$

[19] Ako se u svakoj tački nekog prostora može pridružiti jednoznačna vrednost neke fizičke veličine onda se taj prostor zove polje. Ako je ta veličina skalar polje je skalarno a ako je vektor polje je vektorsko.

onda se ta funkcija U naziva funkcija sile $\overrightarrow{F}$. Vektor sile sada ima oblik

$$\overrightarrow{F} = \frac{\partial U}{\partial x}\overrightarrow{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\overrightarrow{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\overrightarrow{k} = grad\ U, \tag{1.7}$$

odnosno sila je gradijent funkcije sile. Ako se uvede vektorski operator nabla sa

$$\overrightarrow{\bigtriangledown} = \frac{\partial}{\partial x}\overrightarrow{i} + \frac{\partial}{\partial y}\overrightarrow{j} + \frac{\partial}{\partial z}\overrightarrow{k}, \tag{1.8}$$

onda se dobija da je

$$\overrightarrow{F} = \overrightarrow{\bigtriangledown}U = \frac{\partial U}{\partial x}\overrightarrow{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\overrightarrow{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\overrightarrow{k}. \tag{1.9}$$

Umesto funkcije sile U u dinamici se često koristi potencijalna energija. Potencijalna energija Π je povezana sa funkcijom sile U relacijom

$$d\Pi = -dU. \tag{1.10}$$

Jasno je da ako neka sila ima funkciju sile ona u tom slučaju ima i potencijalnu energiju. Uslovi (1.6) izraženi preko potencijalne energije glase

$$F_x = -\frac{\partial \Pi}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial \Pi}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial \Pi}{\partial z}. \tag{1.11}$$

Ove se jednačine koristite na dva načina:

1. Ako je potencijalna energija Π sile $\overrightarrow{F}$ poznata, onda se koristeći (1.11) izračunavaju projekcije te sile na koordinatne ose.

2. Ako su zadate projekcije F_x, F_y i F_z sile $\overrightarrow{F}$ na ose, onda se integracijom izraza (1.11) nalazi potencijalna energija te sile.

Uslovi potencijalnosti sile

Razmotrimo uslove koji obezbeđuju egzistenciju potencijalne energije sile, ili, što je potpuno isto, jednoznačno izračunavanje funckije sile bez poznavanja zakona kretanja tačke. Za to je neophodno da potencijalna energija ili funkcija sile budu totalni diferencijali

$$\begin{aligned} d\Pi &= \frac{\partial \Pi}{\partial x}dx + \frac{\partial \Pi}{\partial y}dy + \frac{\partial \Pi}{\partial z}dz, \\ dU &= \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz. \end{aligned} \tag{1.12}$$

da bi se integracija pri izračunavanju mogla izvršiti bez poznavanja zakona kretanja tačke. Mora se napomenuti da svaka sila koja zavisi samo od koordinata tačke ne mora imati potencijalnu energiju.

Ako sila $\overrightarrow{F}$ ima funkciju sile onda množenjem relacije (1.9) vektorski sa leve strane sa vektorom $\overrightarrow{\bigtriangledown}$ (1.9) dobija se

$$\overrightarrow{\bigtriangledown} \times \overrightarrow{F} = \overrightarrow{\bigtriangledown} \times \overrightarrow{\bigtriangledown} U = (\overrightarrow{\bigtriangledown} \times \overrightarrow{\bigtriangledown})U = 0,$$

jer je vektorski proizvod vektora samim sa sobom uvek jednak nuli. Znači ako sila $\overrightarrow{F}$ ima funkciju sile mora da bude

$$\overrightarrow{\bigtriangledown} \times \overrightarrow{F} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = 0.$$

Ovaj uslov je zadovoljen ako su ispunjena sledeća tri uslova za projekcije sile na koordinatne ose

$$\frac{\partial F_y}{\partial x} = \frac{\partial F_x}{\partial y}, \quad \frac{\partial F_z}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial z}, \quad \frac{\partial F_z}{\partial x} = \frac{\partial F_x}{\partial z}. \tag{1.13}$$

Sile, čije projekcije na ose zadovoljavaju uslove (1.13) su konzervativne ili potencijalne. Vrlo često, ovi uslovi se zovu uslovima konzervativnosti sile ili njene potencijalnosti. U trivijalnom slučaju, kada je sila konstantnog intenziteta, ti uslovi su identički zadovoljeni.

1.7 Diferencijalne jednačine kretanja materijalne tačke

1.7.1 Diferencijalne jednačine kretanja tačke

Posmatra se kretanje materijalne tačke M mase m u trodimezionalnom prostoru pod dejstvom sile $\overrightarrow{F}$, koja može biti rezultanta sistema sučeljnih sila. Ako se položaj tačke M u prostoru određuje njenim vektorom položaja $\overrightarrow{r}$ u odnosu na neku nepomičnu tačku O, tada vektorska jednačina kretanja tačke glasi

$$m\overrightarrow{a}=\overrightarrow{F}(t,\overrightarrow{r},\overrightarrow{v}), \tag{1.14}$$

gde je

$$\overrightarrow{a}=\frac{d^2\overrightarrow{r}}{dt^2}=\ddot{\overrightarrow{r}}$$

apsolutno ubrzanje materijalne tačke.

Pri rešavanju konkretnih problema kretanja, ova jednačina se zamenjuje odgovarajućim brojem skalarnih diferencijalnih jednačina u odabranom koordinatnom sistemu. Tako dobijene diferencijalne jednačine kretanja su drugog reda.

Dekartov koordinatni sistem

Kretanje materijalne tačke u prostoru ima tri stepena slobode i može se posmatrati u Dekartovom pravouglom koordinatnom sistemu $Oxyz$ (Slika 1.5), gde su vektor položaja, vektor brzine i vektor ubrzanja tačke

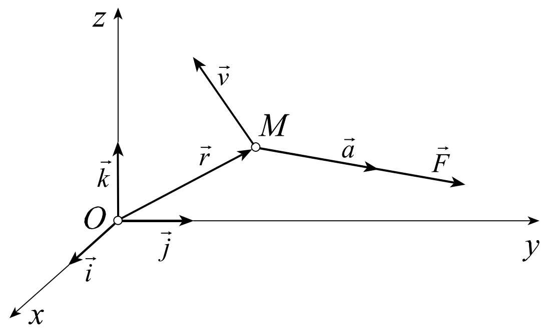
$$\begin{aligned}\overrightarrow{r} &= x\overrightarrow{i}+y\overrightarrow{j}+z\overrightarrow{k},\\ \overrightarrow{v} &= \dot{x}\overrightarrow{i}+\dot{y}\overrightarrow{j}+\dot{z}\overrightarrow{k},\\ \overrightarrow{a} &= \ddot{x}\overrightarrow{i}+\ddot{y}\overrightarrow{j}+\ddot{z}\overrightarrow{k},\end{aligned}$$

i gde su x, y i z koordinate tačke M. Projektovanjem vektorske jednačine (1.14) na koordinatne ose x, y i z dobijaju se skalarne diferencijalne jednačine kretanja

$$\begin{aligned}m\ddot{x} &= F_x(t,x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z}),\\ m\ddot{y} &= F_y(t,x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z}),\\ m\ddot{z} &= F_z(t,x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z}),\end{aligned} \tag{1.15}$$

gde su F_x, F_y i F_z projekcije rezultujuće sile $\overrightarrow{F}$ koja deluje na tačku na ove ose. Projektovanjem početnih uslova (1.20) na ose istog koordinatnog sistema dobija se šest početnih uslova

$$\begin{aligned}&x(t_0)=x_0,\quad y(t_0)=y_0,\quad z(t_0)=z_0,\\ &\dot{x}(t_0)=\dot{x}_0,\quad \dot{y}(t_0)=\dot{y}_0,\quad \dot{z}(t_0)=\dot{z}_0,\end{aligned} \tag{1.16}$$



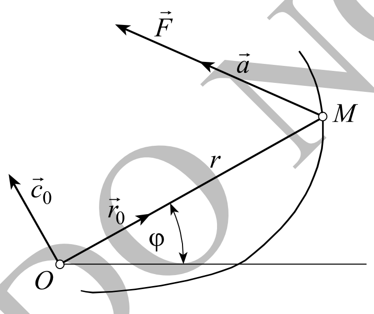
Slika 1.5:

gde su x_0, y_0, z_0, $\dot{x}_0$, $\dot{y}_0$ i $\dot{z}_0$ zadate konstante. Opšte rešenje tri diferencijalne jednačine drugog reda (1.15) sadrži šest integracionih konstanti C_1, $C_2, ...C_6$, koje se određuju iz šest početnih uslova (1.16).

U slučaju kretanja materijalne tačke u ravni, koje ima dva stepena slobode, izraz (1.15) se svodi na dve diferencijalne jednačine kretanja dok iz (1.16) slede četiri odgovarajuća početna uslova.

Pri kretanju materijalne tačke po liniji zadatog oblika, koje ima jedan stepen slobode, postoji samo jedna diferencijalna jednačina kretanja i dva početna uslova.

Polarni koordinatni sistem



Slika 1.6:

Posmatrajmo ravansko kretanje materijalne tačke, koje ima dva stepena slobode, u polarnom koordinatnom sistemu $Or\varphi$, gde su vektori brzine i ubrzanja tačke

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{v} &= \dot{r}\,\overrightarrow{r}_0 + r\dot{\varphi}\,\overrightarrow{c}_0,\\
\overrightarrow{a} &= (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\,\overrightarrow{r}_0 + (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})\,\overrightarrow{c}_0,
\end{aligned}
$$

i gde su $\overrightarrow{r}_0$ i $\overrightarrow{c}_0$ jedinični vektori ovog koordinatnog sistema (Slika 1.6). Projektovanjem vektorske jednačine (1.14) na pravce jediničnih vektora $\overrightarrow{r}_0$ i $\overrightarrow{c}_0$ dobijaju se dve skalarne jednačine kretanja

$$
\begin{aligned}
m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) &= F_r(t, r, \varphi, \dot{r}, \dot{\varphi}),\\
m(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}) &= F_c(t, r, \varphi, \dot{r}, \dot{\varphi}), \qquad (1.17)
\end{aligned}
$$

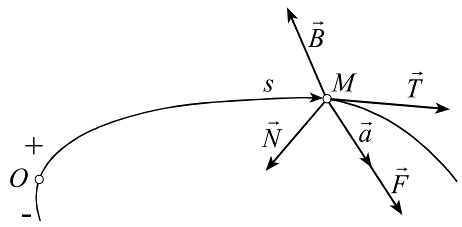
gde su F_r i F_c projekcije rezultujuće sile na radijalan i cirkularan pravac. Odgovarajući početni uslovi kretanja tačke u polarnim koordinatama glase

$$\begin{aligned} r(t_0) &= R_0, \quad & \varphi(t_0) &= \varphi_0, \\ v_r(t_0) &= v_{r0}, \quad & v_c(t_0) &= v_{c0}, \end{aligned} \tag{1.18}$$

gde su v_r i v_c radijalna i cirkularna projekcija vektora brzine tačke a R_0, φ_0, v_{r0} i v_{c0} zadate konstantne početne vrednosti.

Prirodni koordinatni sistem

Posmatrajmo kretanje materijalne tačke pomoću krivolinijske koordinate s, koja se meri duž trajektorije tačke, u prirodnom triedru jediničnih vektora tangente $\overrightarrow{T}$, glavne normale $\overrightarrow{N}$ i binormale $\overrightarrow{B}$ (Slika 1.7). Vektori brzine i ubrzanja tačke glase



Slika 1.7:

$$\overrightarrow{v} = \dot{s}\overrightarrow{T}, \quad \overrightarrow{a} = \ddot{s}\overrightarrow{T} + \frac{\dot{s}^2}{R_k}\overrightarrow{N},$$

gde je R_k poluprečnik krivine trajektorije tačke. Vektor ubrzanja tačke nalazi se u oskulatornoj ravni trajektorije tačke. Zbog toga, projektovanjem vektorske jednačine kretanja (1.14) na pravce jediničnih vektora $\overrightarrow{T}$, $\overrightarrow{N}$ i $\overrightarrow{B}$ dobijaju se jednačine kretanja u prirodnom koordinatnom sistemu

$$\begin{aligned} m\ddot{s} &= F_T(t, s, \dot{s}), \\ m\frac{\dot{s}^2}{R_k} &= F_N(t, s, \dot{s}), \\ 0 &= F_B(t, s, \dot{s}), \end{aligned} \tag{1.19}$$

gde su F_T, F_N i F_B projekcije rezultante svih sila koje deluju na tačku na pravce jediničnih vektora tangente $\overrightarrow{T}$, glavne normale $\overrightarrow{N}$ i binormale $\overrightarrow{B}$.

Upotreba krivolinijske koordinate s za opisivanje kretanja tačke opravdana je samo ako je trajektorija tačke poznata, tj. kada je poznat oblik krive linije po kojoj se tačka kreće. Tada tačka ima jedan stepen slobode kretanja i za nalaženje zavisnosti $s(t)$, tj. zakona kretanja tačke, služi samo prva jednačina (1.19), dok se iz druge i treće jednačine (1.19), koje su tada algebarske jednačine, određuju reakcija veza zbog vezanog kretanja tačke po zadatoj trajektoriji.

Pri rešavanju prve diferencijalne jednačine kretanja (1.19) odgovarajuće konstante integracije određuju se iz početnih uslova kretanja

$$s(t_0) = s_0, \quad \dot{s}(t_0) = \dot{s}_0,$$

gde su s_0 i $\dot{s}_0$ zadate konstante.

1.7.2 Dva zadatka dinamike

U principu, pomoću jednačine kretanja materijalne tačke (1.2) $m\vec{a} = \vec{F}$, u dinamici se rešavaju dve vrste zadataka.

Prvi zadatak dinamike

Neka je poznato kretanje materijalne tačke. Znači poznata je funkcija zavisnosti vektora položaja tačke od vremena, odnosno $\vec{r} = \vec{r}(t)$. Traži se sila koja ostvaruje to kretanje. Dvostrukim diferenciranjem zakona $\vec{r}(t)$ po vremenu dobija se ubrzanje tačke $\vec{a} = \ddot{\vec{r}}$. Tražena sila u funkciji od vremena je $\vec{F}(t) = m\ddot{\vec{r}}(t)$. Pošto se diferenciranje u principu uvek može izvršiti ovaj zadatak dinamike uvek ima rešenje.

Drugi zadatak dinamike

Neka je zadat analitički oblik sile koja deluje na materijalnu tačku, tj. poznat je oblik funkcije $\vec{F} = \vec{F}(t, \vec{r}, \vec{v})$. Traži se zakon kretanja tačke $\vec{r}(t)$. Jednačina kretanja se posmatra u obliku

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}(t, \vec{r}, \dot{\vec{r}}),$$

a to je sistem od najviše tri diferencijalne jednačine drugog reda. Te jednačine određuju kretanje tačke zajedno sa početnim uslovima kretanja (1.3)

$$\vec{r} = \vec{r}_0, \quad \dot{\vec{r}} = \vec{v}_0, \quad \text{za } t = t_0, \tag{1.20}$$

gde je $\vec{r}_0$ početni vektor položaja, a $\vec{v}_0$ početna brzina tačke. Ove veličine $\vec{r}_0$ i $\vec{v}_0$ su unapred zadate.

Znači, do zakona kretanja materijalne tačke dolazi se rešavanjem diferencijalnih jednačina sa odgovarajućim početnim uslovima. Takav matematički problem se naziva početni ili Košijev problem diferencijalnih jednačina. Ovaj drugi zadatak dinamike je daleko matematički složeniji od prvog zadatka dinamike. Mnoge diferencijalne jednačine kretanja ne mogu da se integrale analitički. Tada, ako je njihovo rešenje potrebno, problem se rešava numerički korišćenjem poznatih procedura za numeričko integraljenje diferencijalnih jednačina.

1.7.3 Prvi integrali

Analitičko rešavanje diferencijalnih jednačina kretanja povezano je sa problemima njihove integracije. Najčešće njihova integracija i ne može da se sprovede u analitičkom obliku. Poznavanjem prvih integrala jednačina kretanja, ovaj problem integracije se znatno pojednostavljuje. Prvi integrali u dinamici mogu biti skalarni ili vektorski, mada svakom vektorskom prvom integralu odgovara određen broj skalarnih prvih integrala.

Smisao prvog integrala jednačine kretanja objašnjava se posmatranjem kretanja tačke u prirodnom triedru. Kretanje je tada određeno prvom jednačinom (1.19)

$$m\ddot{s} = F_T(t, s, \dot{s}). \tag{A}$$

Pod prvim integralom ove diferencijalne jednačine podrazumeva se svaka veza oblika

$$\psi(t, s, \dot{s}) = C, \tag{B}$$

ako je njen izvod u smislu jednačine kretanja (A) identički jednak nuli, gde je ψ funkcija naznačenih promenljivih, a C proizvoljna konstanta, koja se određuje iz početnih uslova. U izrazu (B) vreme se pojavljuje eksplicitno i implicitno pošto su s i $\dot{s}$ takođe funkcije vremena. Zato izvod funkcije ψ po vremenu glasi

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial s}\dot{s} + \frac{\partial \psi}{\partial \dot{s}}\ddot{s} = 0.$$

Izvod u smislu jednačine kretanja znači da se u prethodnoj relaciji drugi izvod $\ddot{s}$ izračunava duž trajektorije tačke, odnosno u prethodnu relaciju $\ddot{s}$

se zameni iz jednačine kretanja (A). Znači, upotrebom izraza (A) dobija se sledeća jednačina

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{\partial\psi}{\partial s}\dot{s} + \frac{\partial\psi}{\partial\dot{s}}\frac{F_T(t,s,\dot{s})}{m} = 0. \qquad (C)$$

Ova parcijalna diferencijalna jednačina koristi se na dva načina:

1. Za proveru da li je neki izraz (B) prvi integral. Ako je (B) prvi integral jednačine kretanja (A), tada je uslov (C) identički zadovoljen.

2. Za nalaženje prvog integrala jednačine kretanja (A), jer svako rešenje parcijalne diferencijalne jednačine (C) u obliku $\psi(t,s,\dot{s}) = C$ predstavlja prvi integral jednačine kretanja (A).

Ako postoje dva međusobno nezavisna prva integrala $\psi_1(t,s,\dot{s}) = C_1$ i $\psi_2(t,s,\dot{s}) = C_2$ diferencijalne jednačine (A), tada je problem kretanja tačke sa jednim stepenom slobode potpuno rešen. Naime, rešavajući algebarski ove dve jednačine po s i $\dot{s}$, dobija se rešenje za kretanje $s(t, C_1, C_2)$. Ovo, potpuno jasno, ukazuje na veliki značaj prvih integrala u dinamici. Do prvih integrala u dinamici može se doći na sledeće načine:

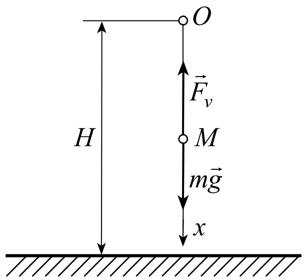
1. Jednom direktnom integracijom diferencijalnih jednačina kretanja,

2. Korišćenjem opštih zakona dinamike,

3. Primenom posebnih metoda za nalaženje prvih integrala.

Primer 1 *Materijalna tačka M mase m nalazi se na visini H od površine Zemlje (Slika 1.8). Tačka kreće prema Zemlji početnom brzinom v_0 vertikalno naniže. Na tačku deluje otpor vazduha, koji je za brzine kretanja manje od 250 $[m/s]$ proporcionalan kvadratu intenziteta brzine tačke. Proučiti kretanje tačke.*

Pošto je početna brzina tačke vertikalna, a istog pravca je i sila zemljine teže, i ako nema horizontalnog vetra, tačka se kreće pravolinijski prema Zemlji. U pravcu kretanja izabere se osa x u smeru prema Zemlji i sa početkom na visini H od Zemlje. U proizvoljnom položaju, za vreme kretanja, na tačku deluju dve kolinearne sile, sila zemljine teže $m\overrightarrow{g}$ i sila otpora vazduha intenziteta $F_v = kv^2$, gde je k koeficijent proporcionalnosti sile otpora sa kvadratom brzine. Pravolinijsko kretanje tačke je opisano samo jednom diferencijalnom jednačinom (1.15). Pri njenom formiranju mora se voditi računa o sledeće dve činjenice:



Slika 1.8:

1. Ubrzanje $\ddot{x}$ je uvek u istom smeru sa usvojenim smerom x ose.

2. Sile se projektuju na osu x kao u statici.

Prema tome, diferencijalna jednačina kretanja tačke glasi

$$m\ddot{x} = mg - k\dot{x}^2, \tag{A}$$

jer je sila otpora usmerena u negativnu stranu x ose a $v = \dot{x}$ je brzina tačke. Na osnovu uslova zadatka, početni uslovi problema glase

$$x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = v_0. \tag{B}$$

Deleći jednačinu (A) sa masom tačke i sređivanjem tako dobijenog rezultata dobija se

$$\ddot{x} = \alpha \left(c^2 - \dot{x}^2\right), \tag{C}$$

gde je $c^2 = mg/k$ i $\alpha = k/m$. Integracija jednačine (C) može se izvršiti na dva načina:

Ako se traži brzina tačke u funkciji od vremena t, direktnim razdvajanjem promenljivih u jednačini (C) dobija se relacija

$$\frac{d\dot{x}}{c^2 - \dot{x}^2} = \alpha dt,$$

i posle integracije

$$\frac{1}{2c} \ln \frac{c + \dot{x}}{c - \dot{x}} + C_1 = \alpha t,$$

gde je C_1 konstanta integracije. Koristeći početne uslove (B) nalazi se vrednost te integracione konstante

$$C_1 = -\frac{1}{2c} \ln \frac{c + v_0}{c - v_0}.$$

Zamenom ove vrednosti za konstantu C_1 u prethodni izraz, i rešavanjem tako dobijene relacije po $\dot{x}$, nalazi se brzina tačke u funkciji od vremena

$$\dot{x} = c\frac{(c+v_0)\exp(c\alpha t) - (c-v_0)\exp(-c\alpha t)}{(c+v_0)\exp(c\alpha t) + (c-v_0)\exp(-c\alpha t)}.$$

Pošto je $\dot{x} = dx/dt$, posle još jedne integracije ovog izraza, dolazi se do pomeranja x u funkciji od vremena

$$x = \frac{1}{\alpha}\ln\left[(c+v_0)\exp(c\alpha t) + (c-v_0)\exp(-c\alpha t)\right] + C_2,$$

gde je C_2 druga integraciona konstanta. Iz početnih uslova kretanja dobija se vrednost ove konstante $C_2 = -(1/\alpha)\ln 2c$, pa je konačan zakon kretanja

$$x = \frac{1}{\alpha}\ln\frac{(c+v_0)\exp(c\alpha t) + (c-v_0)\exp(-c\alpha t)}{2c}.$$

Iz izraza za brzinu tačke u funkciji od vremena sledi da $\dot{x} \to c$, kada $t \to \infty$ i to bez obzira na početnu brzinu v_0. Znači, materijalna tačka padajući u otpornoj sredini, posle dovoljno dugog kretanja, dostiže brzinu c, sa kojom se dalje kreće. Ta brzina tačke naziva se granična brzina tačke u otpornoj sredini. Iz diferencijalne jednačine kretanja uočava se:

Ako je početna brzina manja od granične, tj. $v_0 < c$, tada je u početnom trenutku $\ddot{x}$ pozitivno i tačka se ubrzava sve dok ne dostigne graničnu brzinu;

Ako je početna brzina veća od granične, tj. $v_0 > c$, tada je u početnom trenutku $\ddot{x}$ negativno i tačka se usporava, ponovo, dok ne dostigne graničnu brzinu.

Ako se traži zavisnost brzine tačke od pomeranja x, a ne od vremena t, tada se integracija diferencijalne jednačine kretanja (C) obavlja na poseban način. Šta više, neki problemi kretanja mogu se jedino integraliti na ovaj način, jer direktna integracija po vremenu kao nezavisno promenljivoj nije izvodljiva. Posmatrajmo $\dot{x}$ kao posrednu funkciju od vremena t preko pomeranja x, tj. $\dot{x}(x)$ i $x(t)$. Tada je

$$\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{d\dot{x}}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{d\dot{x}}{dx}\dot{x},$$

i diferencijalna jednačina (C) postaje

$$\frac{\dot{x}d\dot{x}}{c^2 - \dot{x}^2} = \alpha dx.$$

Posle integracije ove jednačine dobija se

$$-\frac{1}{2}\ln\left(c^2 - \dot{x}^2\right) = \alpha x + C_3,$$

gde je C_3 konstanta integracije. Posle njenog određivanja iz početnih uslova, dobija se zavisnost brzine tačke od koordinate x

$$\dot{x} = \sqrt{c^2 + (v_0^2 - c^2)\exp\left(-2\alpha x\right)}.$$

Ponovo iz ovog izraza zaključujemo da brzina tačke $\dot{x}$ teži ka graničnoj brzini c, ali sada kad $x \to \infty$.

Primer 2 *Posmatrajmo kretanje slobodne čestice u magnetnom polju. Naelektrisanje čestice je q, a masa m. Vektor magnetne indukcije je konstantan i pada u pravac ose z, tj. $\overrightarrow{B} = B\overrightarrow{k}$, gde je B konstanta. Početno stanje čestice za $t = 0$ je sledeće*

$$\begin{array}{lll} x(0) = x_0, & y(0) = y_0, & z(0) = 0, \\ \dot{x}(0) = 0, & \dot{y}(0) = v_{y0}, & \dot{z}(0) = v_{z0}. \end{array}$$

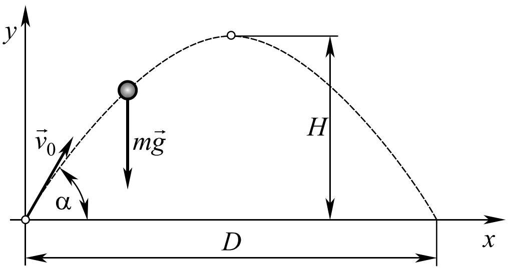
Primer 3 *Kosi hitac*

Posmatra se kretanje materijalne tačke mase m u bezvazdušnom prostoru pod dejstvom sile zemljine teže. U početnom trenutku kretanja tačka je krenula sa površine zemlje početnom brzinom $\overrightarrow{v}_0$ pod uglom α prema horizontalnom pravcu.
Ako ravan Oxy definišemo sa vektorom $\overrightarrow{v}_0$ i uslovom da ta ravan bude normalna na horiontalnu ravan, onda se mate-rijalna tačka kreće u toj ravni pa kretanje tačke ima dva stepena slobode kretanja. Neka je to ravan Oxy (Slika 1.14). Tačka kreće iz koordinatnog početka pa su početni uslovi kretanja

$$\begin{aligned} x(0) &= 0, \quad y(0) = 0, \\ \dot{x}(0) &= v_0\cos\alpha, \quad \dot{y}(0) = v_0\sin\alpha. \end{aligned}$$

Na materijalnu tačku deluje samo sila $\overrightarrow{F} = -mg\overrightarrow{j}$, gde je $\overrightarrow{j}$ jedinični vektor y pravca. Kretanje tačke je opisano diferencijalnim jednačinama (1.15)

$$m\ddot{x} = 0, \quad m\ddot{y} = -mg.$$



Slika 1.9:

Posle dvostruke integracije ovih jednačina dobija se

$$\begin{aligned} x &= C_1 t + C_2, \\ y &= -\frac{gt^2}{2} + C_3 t + C_4, \end{aligned}$$

gde su C_1, C_2, C_3 i C_4 integracione konstante. Iz početnih uslova dobijaju se njihove vrednosti

$$\begin{aligned} C_1 &= v_0 \cos\alpha, \\ C_2 &= 0, \\ C_3 &= v_0 \sin\alpha, \\ C_4 &= 0. \end{aligned}$$

Sada su zakoni kretanja materijalne tačke

$$\begin{aligned} x &= v_0 t \cos\alpha, \\ y &= -\frac{gt^2}{2} + v_0 t \sin\alpha. \end{aligned}$$

Eliminacijom vremena iz ovih jednačina dobija se trajektorija materijalne tačke

$$y = -\frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2\alpha} + x\tan\alpha.$$

Znači putanja kosog hica u bezvazdušnom prostoru je parabola. Domet kosog hica D je tamo gde je za $y = 0$ $x = D$. Domet hica i vreme leta do dometa iznose

$$\begin{aligned} D &= \frac{v_0^2}{g}\sin 2\alpha, \\ t_D &= \frac{2v_0 \sin\alpha}{g}. \end{aligned}$$

Vidi se da se najveći domet postiže za $\sin 2\alpha = 1$, odnosno za $\alpha = 45^0$. On iznosi

$$D_{\max} = \frac{v_0^2}{g}.$$

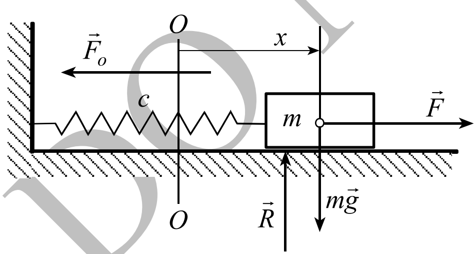
Najveća visina na koju se tokom kretanja kosi hitac penje je u temenu parabole, odnosno za $x_H = D/2 = (v_0^2/2g)\sin 2\alpha$. Ta visina je

$$H = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}.$$

Vidi se da je najveća visina penjanja kosog hica kada je $\alpha = 90^0$, odnosno kada se materijalna tačka baci vertikalno naviše.

Primer 4 *Posmatrajmo materijalnu tačku mase m, koja se nalazi na glatkoj horizontalnoj ravni. Tačka je vezana za zid (Slika 1.10) oprugom krutosti c a na nju deluje i horizontalna periodična sila $F = F_1 \cos \Omega t$, gde je F_1 amplituda sile, a $T_\Omega = 2\pi/\Omega$ njen period. Proučiti kretanje tačke.*

U ravnotežnom stanju opruga je nenapregnuta, i taj položaj je označen na slici sa $0-0$. Pomeranje x se meri od tog položaja desno. Posle oslobađanja od veza, na tačku deluju sila $\overrightarrow{F}$, sila u opruzi $\overrightarrow{F}_0$, težina tela $m\overrightarrow{g}$ i reakcija podloge $\overrightarrow{R}$. Materijalna tačka se kreće pravolinijski, pa je diferencijalna jednačina kretanja u pravcu x ose



Slika 1.10:

$$m\ddot{x} = F - F_0,$$

ili, pošto je sila u deformisanoj opruzi $F_0 = cx$ i $F = F_1 \cos \Omega t$

$$m\ddot{x} = F_1 \cos \Omega t - cx.$$

Deleći ovu jednačinu sa masom m, dobija se diferencijalna jednačina kretanja u obliku

$$\ddot{x} + \omega^2 x = H \cos \Omega t, \qquad (A)$$

gde je $\omega^2 = c/m$ i $H = F_1/m$.

Slobodne harmonijske oscilacije

Slobodno oscilovanje tačke je kretanje, koje se odvija bez dejstva sile $\overrightarrow{F}$, a koje nastaje zbog izvođenja tačke iz ravnotežnog položaja ili zbog saopštenja tački neke početne brzine. Pošto je tada $F \equiv 0$, odnosno $F_1 = 0$ i $H = 0$, diferencijalna jednačina kretanja (A) postaje

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0, \tag{B}$$

čije rešenje glasi

$$x = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t, \tag{C}$$

ili

$$x = r \sin(\omega t + \alpha), \tag{D}$$

gde su C_1, C_2 ili r, α integracione konstante i međusobno povezane relacijama

$$C_1 = r \sin \alpha, \quad C_2 = r \cos \alpha.$$

Po obliku jednačina (C) ili (D) vidi se da je kretanje tačke periodično, odnosno oscilatorno, i da se ponavlja posle isteka perioda

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \; [s].$$

Ako su zadati početni uslovi

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0, \tag{E}$$

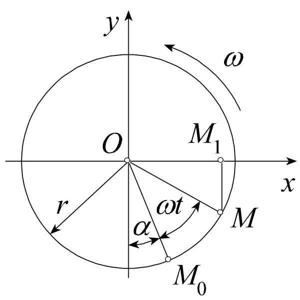
tada se iz (D) dobijaju jednačine

$$x_0 = r \sin \alpha, \quad \dot{x}_0 = r\omega \cos \alpha,$$

čije rešenje po r i α glasi

$$r = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega}\right)^2}, \quad \tan \alpha = \frac{x_0 \omega}{\dot{x}_0}.$$

Iz ovih izraza se vidi da kretanje tačke, opisano jednačinama (C) ili (D), postoji samo ako je $r \neq 0$.Ako su x_0 i $\dot{x}_0$ istovremeno jednaki nuli nema kretanja. Znači, slobodne oscilacije tačke postoje samo ako je tačka izvedena iz ravnotežnog položaja ili ako joj je saopštena početna brzina. To je i definicija slobodnih oscilacija. Zaključak, slobodne oscilacije su oscilacije tačke koje nastaju ili usled njenog izvođenja iz ravnotežnog položaja ili zbog saopštavanja početne brzine tački. Svaka oscilacija sa stalnim periodom i stalnom amplitudom naziva se harmonijskom oscilacijom.



Slika 1.11:

Radi definisanja još nekih veličina u kretanjima ili procesima, koji su opisani diferencijalnom jednačinom (B), posmatrajmo kretanje tačke M po krugu poluprečnika r (Slika 1.11) sa konstantnom ugaonom brzinom ω, koje je počelo iz položaja M_0 na krugu. U centru kruga O usvoji se koordinatni početak koordinatnog sistema Oxy. Projekcija tačke M na osu x, tačka M_1, kreće se po x osi prema zakonu $r\sin(\omega t+\alpha)$, koji se poklapa sa jednačinom oscilovanja tačke sa oprugom. Zbog ove, ekvivalencije oscilovanja tačke sa oprugom sa kretanjem projekcije na osu x tačke koja se kreće po krugu, kaže se da je ω, u jednačini (C) ili (D), kružna frekvencija oscilovanja. Najveće udaljenje tačke od ravnotežnog položaja, odnosno r, naziva se amplituda oscilovanja. Broj krugova, koje opiše tačka M u jednoj sekundi, je frekvencija oscilovanja. Ona iznosi

$$f=\frac{1}{T}=\frac{\omega}{2\pi}\ [Hz],$$

gde je jedinica za frekvenciju $[Hz]$ herc[20] broj ciklusa kretanja u jednoj sekundi. Ugao α, koji definiše položaj M_0 iz kog je tačka započela kretanje, naziva se početna faza oscilovanja. Ugao $(\omega t+\alpha)$ naziva se faza oscilovanja. Važan je zaključak da kružna frekvencija ω, period T i frekvencija f ne zavise od početnih uslova kretanja. Te veličine zavise samo od karakteristika sistema i one su svojstvo svakog mehaničkog, odnosno fizičkog sistema.

Prinudne oscilacije

Ako na materijalnu tačku deluje i sila $\overrightarrow{F}$, tada je diferencijalna jednačina kretanja data sa (A). To je nehomogena diferencijalna jednačina, zbog prisustva člana koji ne sadrži nepoznatu funkciju x ili njene izvode po nezavisno promenljivoj vremenu t. Rešenje nehomogene jednačine (A) je zbir opšteg integrala x_h homogenog dela jednačine

$$\ddot{x}_h+\omega^2 x_h=0,$$

i partikularnog integrala x_p celokupne jednačine (A)

$$\ddot{x}_p+\omega^2 x_p=H\cos\Omega t,$$

[20] *H. Hertz,* 1857 – 1894.

odnosno

$$x = x_h + x_p.$$

Opšte rešenje homogenog dela jednačine x_h, kao i kod slobodnih oscilacija, glasi

$$x_h = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t.$$

Partikularno rešenje celokupne jednačine (A) traži se u obliku

$$x_p = B \cos \Omega t,$$

gde je B nepoznata konstanta. Unošenjem ovog rešenja u jednačinu (A) dobija se

$$(-B\Omega^2 + B\omega^2 - H) \cos \Omega t = 0,$$

i pošto $\cos \Omega t$ nije nula za svaki trenutak vremena, a prethodna jednačina mora biti identički zadovoljena, sledi da je

$$B = \frac{H}{\omega^2 - \Omega^2}.$$

Prema tome, zakon kretanja materijalne tačke glasi

$$x = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t + \frac{H}{\omega^2 - \Omega^2} \cos \Omega t.$$

Unošenjem prethodnog izraza u početne uslove nalaze se vrednosti integracionih konstanti

$$C_1 = x_0 - \frac{H}{\omega^2 - \Omega^2}, \quad C_2 = \frac{\dot{x}_0}{\omega},$$

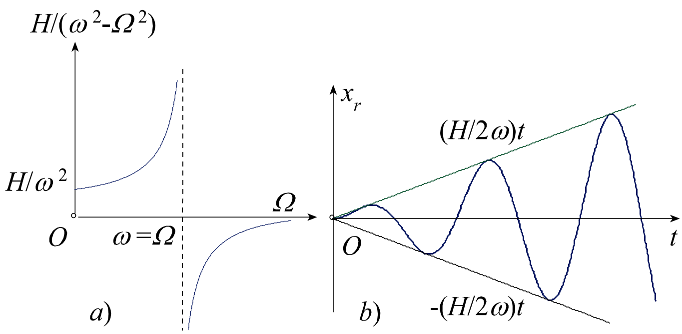
pa je krajnje rešenje problema

$$x = x_0 \cos \omega t + \frac{\dot{x}_0}{\omega} \sin \omega t + \frac{H}{\omega^2 - \Omega^2}(\cos \Omega t - \cos \omega t). \tag{F}$$

Odavde zaključujemo:

Ako je $H = 0$, odnosno ako sila $\overrightarrow{F}$ ne deluje na tačku, tačka se kreće u skladu sa prva dva člana na desnoj strani izraza (F). To su slobodne oscilacije tačke.

Ako su x_0 i $\dot{x}_0$ jednaki nuli, tačka se kreće u skladu sa trećim i četvrtim članom na desnoj strani jednačine (F). To znači, da kretanje nastaje, i pored toga što je tačka bila u ravnotežnom stanju i bez početne brzine, zbog delovanja sile $\overrightarrow{F}$. Tako nastalo kretanje mase m su prinudne oscilacije mase m. One su nastale zbog dejstva sile $\overrightarrow{F}$, pa se sila $\overrightarrow{F}$ naziva prinudna sila, jer primorava tačku da se kreće na određeni način.



Slika 1.12:

U opštem slučaju, kada su u rešenju (F) prisutni članovi različitih kružnih frekvencija ω i Ω, i ako te frekvencije nisu racionalan umnožak jedna druge, kretanje nije periodično. Dalje se detaljno analiziraju prinudne oscilacije nastale zbog dejstva samo prinudne sile

$$F = F_1 \cos \Omega t,$$

odnosno kretanje kada je $x_0 = 0$ i $\dot{x}_0 = 0$ u izrazu (F)

$$x = \frac{H}{\omega^2 - \Omega^2}(\cos \Omega t - \cos \omega t). \tag{G}$$

Amplituda ovog kretanja $H/(\omega^2 - \Omega^2)$ zavisi od odnosa kružnih frekvencija ω i Ω slobodnih oscilacija tačke i prinudne sile. Na slici 1.12a data je zavisnost te amplitude od kružne frekvencije prinudne sile Ω. Kada $\Omega \to \omega$ amplituda oscilovanja teži ka beskonačnosti. To je fenomen rezonancije u oscilatoru. Za dalju analizu kretanja opisanog jednačinom (G) uvodi se Δ, kao mera razlike kružnih frekvencija ω i Ω, odnosno

$$\omega - \Omega = 2\Delta.$$

Koristeći ovu vezu i poznatu relaciju trigonometrije

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2},$$

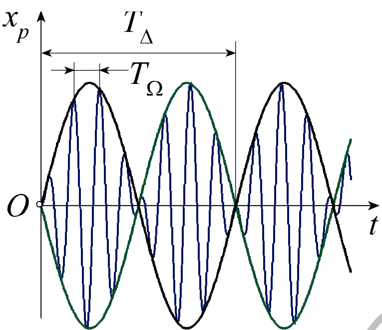
izraz (G) postaje

$$x = \frac{H}{2\Delta(\Omega + \Delta)} \sin(\Delta t) \sin(\Omega + \Delta)t. \tag{H}$$

U slučaju rezonancije, odnosno kada $\Omega \to \omega$ i $\Delta \to 0$, $\Omega + \Delta \to \omega$ i $\sin(\Delta t) \approx \Delta t$, pa se iz (H) dobija odgovarajući zakon kretanja

$$x_r = \frac{H}{2\omega} t \sin \omega t.$$

Znači, pri rezonanciji amplituda kretanja raste proporcionalno vremenu (Slika 1.12b) a kretanje se odvija po zakonu $\sin \omega t$ između graničnih kriva $Ht/(2\omega)$ i $-Ht/(2\omega)$. Iz ove analize i slike 1.12a sledi da pri rezonanciji amplituda kretanja dostiže beskonačnu vrednost ako su kružne frekvencije ω i Ω jednake dovoljno dugo vremena.



Slika 1.13:

Ako su kružne frekvencije Ω i ω bliske, ali nisu jednake, odnosno kada je Δ malo ali ne teži ka nuli (tada $\Omega + \Delta \approx \Omega$), izraz (H) postaje

$$x_p = \frac{H}{2\Delta\Omega} \sin(\Delta t) \sin(\Omega t),$$

jer je Δ malo pa se može zanemariti u odnosu na konačno Ω. Kretanje opisano ovim izrazom može se posmatrati kao kriva između granica

$$\pm \frac{H}{2\Delta\Omega} \sin(\Delta t)$$

čiji je period $T_\Delta = 2\pi/\Delta$ vrlo velik. Između ovih granica je upisana kriva $\sin(\Omega t)$, čiji je period $T_\Omega = 2\pi/\Omega$ konačan i daleko manji od T_Δ. Sa slike 1.13, vidi se da kod ovog kretanja amplituda naizmenično raste i opada. Ovakvo kretanje materijalne tačke, koje nastaje kada su kružne frekvencije Ω i ω vrlo bliske, naziva se podrhtavanje oscilatora.

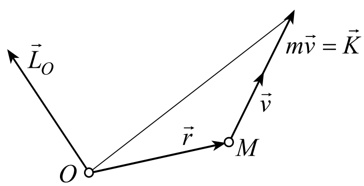
1.8 Mere mehaničkog kretanja

U drugom Njutnovom zakonu kao osnovna karakteristika kretanja pojavljuje se ubrzanje tačke. U opštim zakonima dinamike, koji su od posebnog značaja pri proučavanju kretanja sistema materijalnih tačaka, pojavljuju se i druge karakteristike kretanja, koje se zovu mere mehaničkog kretanja.

1.8.1 Količina kretanja i moment količine kretanja

Posmatrajmo kretanje tačke M mase m, koja u datom trenutku t ima brzinu $\overrightarrow{v}$ (Slika 1.14). Količina kretanja materijalne tačke je vektor $\overrightarrow{K}$, koji je proizvod mase tačke i vektora njene brzine, odnosno

$$\overrightarrow{K}=m\overrightarrow{v}. \tag{1.21}$$



Slika 1.14:

Jasno je da je taj vektor kolinearan sa vektorom brzine. Vektor količine kretanja može se izraziti u svim koordinatnim sistemima u kojima je dat vektor brzine.

Pri nekim kretanjima, umesto vektora količine kretanja materijalne tačke M povoljnije je koristiti moment tog vektora za neku tačku. Posmatrajmo moment vektora količine kretanja $\overrightarrow{K}$ kao "sile", za neku nepokretnu tačku O. Prema tome, ako je $\overrightarrow{r}$ vektor položaja tačke M u odnosu na tačku O, tada je moment količine kretanja materijalne tačke M za tačku O dat sa

$$\overrightarrow{L}_O = \overrightarrow{r}\times\overrightarrow{K}=\overrightarrow{r}\times m\overrightarrow{v}. \tag{1.22}$$

To je vektor, koji je upravan na ravan vektora $\overrightarrow{r}$ i $\overrightarrow{K}$, u smeru vektorskog proizvoda (Slika 1.14), odnosno taj vektor je usmeren u stranu sa koje se vidi da se prvi vektor $\overrightarrow{r}$ obrće suprotno od smera satne kazaljke do poklapanja sa drugim vektorom $\overrightarrow{K}$ tog vektorskog proizvoda (1.22). Kao i kod momenta sile za tačku, taj vektor zavisi od položaja izabrane tačke O, odnosno on se menja sa promenom položaja momentne tačke O.

1.8.2 Kinetička energija

Kinetička energija materijalne tačke mase m, čija je trenutna apsolutna brzina $\overrightarrow{v}$, definisana je sa

$$E_k = \frac{m}{2}\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{v}, \quad \text{ili} \quad E_k = \frac{m}{2}v^2, \tag{1.23}$$

i predstavlja skalarnu meru kretanja tačke. Jasno je da je uvek $E_k \geqslant 0$ i da kinetička energija ima apsolutni minimum za $v = 0$. Kinetička energija može da se izrazi na razne načine u zavisnosti od toga u kom je koordinatnom sistemu izražen vektor brzine tačke. Ti različiti izrazi za kinetičku energiju u prirodnom, Dekartovom i polarnom koordinatnom sistemu glase:

$$\begin{aligned} E_k &= \frac{m}{2}\dot{s}^2, \\ E_k &= \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2\right), \\ E_k &= \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2\right). \end{aligned} \tag{1.24}$$

1.9 Mere mehaničkog dejstva

U prvom poglavlju knjige, definisane su dve osnovne mere mehaničkog dejstva: sila i spreg. To su mere mehaničkog dejstva nezavisne od protoka vremena i promene položaja tačke. U dinamici, gde se posmatraju promene položaja tačke u prostoru tokom vremena, uvode se i nove mere mehaničkog dejstva. Te nove mere mehaničkog dejstva vezane su samo za silu. Pošto se prilikom kretanja tačke tokom vremena menja njen položaj u prostoru postoje dve mere mehaničkog dejstva sile. To su impuls sile i rad sile. Ove veličine, kao i mere kretanja materijalne tačke, igraju značajnu ulogu u opštim zakonima dinamike.

1.9.1 Impuls sile

Impuls sile je mera mehaničkog dejstva sile tokom protoka vremena. Neka na materijalnu tačku M deluje sila $\overrightarrow{F}$. Elementarnim impulsom sile $\overrightarrow{F}$ naziva se vektorska veličina $d\overrightarrow{I}$ koja je jednaka proizvodu vektora sile i elementarnog vremenskog intervala dt u kome sila deluje, tj.

$$d\overrightarrow{I}=\overrightarrow{F}dt. \tag{1.25}$$

Ova mera mehaničkog dejstva sile u toku elementarnog vremenskog intervala poklapa se sa pravcem i smerom sile.

Ako se tačka M pod dejstvom sile $\overrightarrow{F}$ pomeri iz položaja M_0 u položaj M_1 u vremenskom intervalu (t_0, t_1), tada je konačan impuls $\overrightarrow{I}_{01}$ sile $\overrightarrow{F}$

za vreme tog kretanja određen sa

$$\overrightarrow{I}_{01} = \int_{t_0}^{t_1} \overrightarrow{F} dt. \tag{1.26}$$

Konačan impuls $\overrightarrow{I}_{01}$ sile $\overrightarrow{F}$ u vremenskom intervalu (t_0, t_1), ne mora biti u pravcu sile $\overrightarrow{F}$ ni u jednom od trenutaka u intervalu (t_0, t_1).

Pošto je impuls sile vektor, može se predstaviti pomoću projekcija u različitim koordinatnim sistemima. Na primer, ako se kretanje posmatra u Dekartovom koordinatnom sistemu onda postoje tri projekcije impulsa sile $\overrightarrow{F}$ u vremenskom intervalu (t_0, t_1) na ose x, y i z

$$I_{01x} = \int_{t_0}^{t_1} F_x dt, \quad I_{01y} = \int_{t_0}^{t_1} F_y dt, \quad I_{01z} = \int_{t_0}^{t_1} F_z dt, \tag{1.27}$$

gde su F_x, F_y i F_z projekcije sile na te koordinatne ose. Intenzitet konačnog impulsa sile u vremenskom intervalu (t_0, t_1) ima vrednost

$$I_{01} = \sqrt{I_{01x}^2 + I_{01y}^2 + I_{01z}^2}, \tag{1.28}$$

dok su uglovi tog vektora sa koordinatnim osama x, y i z određeni relacijama

$$\cos\alpha_I = \frac{I_{01x}}{I_{01}}, \quad \cos\beta_I = \frac{I_{01y}}{I_{01}}, \quad \cos\gamma_I = \frac{I_{01z}}{I_{01}}. \tag{1.29}$$

Svaka od projekcija impulsa, na primer I_{01x}, može se izračunati bez poznavanja kretanja ako je $F_x dt$ totalni diferencijal neke funkcije. Taj uslov je sigurno ispunjen ako je F_x:

1. Konstantno,

$$F_x = const., \quad I_{01x} = F_x(t_1 - t_0),$$

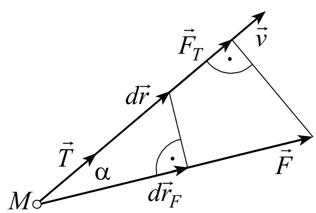
2. Neprekidna funkcija od vremena,

$$F_x = f(t), \quad I_{01x} = \int_{t_0}^{t_1} f(t) dt,$$

3. Linearna kombinacija sa konstantnim koeficijentima c_1, c_2 i c_3 Dekartovih projekcija brzine tačke

$$\begin{aligned} F_x &= c_1\dot{x} + c_2\dot{y} + c_3\dot{z}, \\ I_{01x} &= c_1(x_1 - x_0) + c_2(y_1 - y_0) + c_3(z_1 - z_0). \end{aligned}$$

1.9.2 Rad sile



Slika 1.15:

Posmatrajmo kretanje tačke M, na koju deluje sila $\overrightarrow{F}$, i koja se pomerila za $d\overrightarrow{r}$, gde je $\overrightarrow{r}$ vektor položaja tačke M u odnosu na neku nepokretnu tačku O (Slika 1.15). Elementarni rad sile $\overrightarrow{F}$ na pomeranju $d\overrightarrow{r}$ definisan je kao

$$dA = \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} \tag{1.30}$$

ili

$$dA = F dr \cos\alpha, \tag{1.31}$$

gde je α ugao između vektora $\overrightarrow{F}$ i $d\overrightarrow{r}$. Ako je ugao α oštar onda je elementarni rad pozitivan, dok je za tup ugao α rad negativan. Sila ne vrši elementarni rad ako je sila normalna na elementarno pomeranje. Elementarni rad može se izraziti na razne načine:

1. Sa slike 1.15 je projekcija pomeranja na pravac sile $dr_F = dr\cos\alpha$, pa je iz (1.31)

$$dA = F dr_F, \tag{1.32}$$

   tj. elementarni rad je proizvod intenziteta sile F i projekcije pomeranja dr_F na pravac sile;

2. Sa slike 1.15 je $F_T = F\cos\alpha$, gde je F_T projekcija sile na pravac pomeranja $d\overrightarrow{r}$, koje pada u pravac tangente $\overrightarrow{T}$ na trajektoriju tačke, pa se dobija

$$dA = F_T dr, \tag{1.33}$$

tj. elementarni rad je proizvod pomeranja i projekcije sile na pravac pomeranja. Pošto je $dr \approx ds$, gde je s krivolinijska prirodna koordinata merena duž trajektorije tačke, ovaj izraz postaje

$$dA = F_T ds. \tag{1.34}$$

3. Ako je vektor položaja tačke M dat u nepokretnom Dekartovom koordinatnom sistemu $Oxyz$, odnosno $\overrightarrow{r}=x\overrightarrow{i}+y\overrightarrow{j}+z\overrightarrow{k}$, tada je

$$d\overrightarrow{r}=dx\overrightarrow{i}+dy\overrightarrow{j}+dz\overrightarrow{k}, \tag{1.35}$$

i elementarni rad (1.30) postaje

$$dA = F_x dx + F_y dy + F_z dz, \tag{1.36}$$

gde su F_x, F_y i F_z projekcije sile na Dekartove ose, ili $\overrightarrow{F} = F_x\overrightarrow{i} + F_y\overrightarrow{j} + F_z\overrightarrow{k}$. Ako se tačka M pomeri iz položaja M_0 u neki drugi položaj M_1, tada sila $\overrightarrow{F}$ vrši konačan rad na tom pomeranju, koji je jednak integralu bilo kojeg od prethodnih izraza za elementarni rad na tom pomeranju. Na primer, on je

$$A_{01} = \int_{M_0}^{M_1} \left(F_x dx + F_y dy + F_z dz\right). \tag{1.37}$$

Konačan rad sile $\overrightarrow{F}$ izračunava se pomoću linijskog integrala i njegova vrednost zavisi od početnog M_0 i krajnjeg M_1 položaja tačke M na koju deluje sila pri pomeranju. Konačan rad ne zavisi od vremena proteklog za vreme pomeranja od M_0 do M_1. Jedinica za rad je džul[21] $[J]$, a to je rad koji izvrši sila od jednog njutna na pomeranju od jednog metra.

Ako je potreban rad koji sila $\overrightarrow{F}$ izvrši tokom kretanja u jedinici vremena, tada se dolazi do pojma snage sile $\overrightarrow{F}$. Ako se tačka M pomeri za $d\overrightarrow{r}$ tokom vremena dt, tada je snaga te sile

$$P = \frac{dA}{dt} = \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{v}=F_T\dot{s}, \tag{1.38}$$

[21] *J.P. Joule,* 1818 – 1889.

gde su upotrebljeni izrazi (1.30) i (1.34) za elementaran rad sile. Jedinica za snagu je vat[22] $[W]$. Vat je snaga koja odgovara radu od jednog džula koji se izvrši u jednoj sekundi. Vidi se da istoj snazi odgovaraju različite vrednosti brzine kretanja tačke $\dot{s}$ i projekcije sile na pravac tangente putanje tačke F_T. Manjoj vrednosti sile odgovara veća brzina i obrnuto.

1.9.3 Veza rada i potencijalne energije

Ako sila $\overrightarrow{F}$ ima funkciju sile onda se množenjem izraza (1.7) sa izrazom (1.35) dobija elementarni rad sile u obliku

$$dA = \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz = dU, \tag{1.39}$$

odnosno elementarni rad sile koja ima funkciju sile jednak je totalnom diferencijalu funkcije sile. Pošto je prema (1.10) $d\Pi = -dU$, a iz (1.39) $dA = dU$, sledi da je

$$d\Pi = -dA. \tag{1.40}$$

Ukoliko je moguća jednoznačna integracija izraza (1.40) bez poznavanja kretanja, u granicama između dva položaja M_0 i M_1 na trajektoriji tačke, dobija se rad na konačnom pomeranju

$$A_{01} = \Pi_0 - \Pi_1, \tag{1.41}$$

koji je razlika vrednosti potencijalne energije u početnom i krajnjem položaju tačke. Ovaj izraz jasno ukazuje da rad zavisi samo od razlike vrednosti potencijalne energije u graničnim položajima a ne od njene apsolutne vrednosti i oblika putanje po kojoj se tačka kreće. Apsolutna vrednost potencijalne energije nije od interesa u dinamici, pa se zbog toga ne propisuje položaj u kome ona ima neku zadatu vrednost. Prema tome, kada se iz $d\Pi = -dA$, znači pomoću elementarnog rada, nalazi oblik potencijalne energije, posle obavljene integracije ne mora se dodavati integraciona konstanta. Ta integraciona konstanta bi se, posle oduzimanja prema (1.41), potrla i ne bi imala nikakvog uticaja na krajnji rezultat izračunatog rada.

Ako je potencijalna energija jednoznačna funkcija, i ako se krajnja i početna tačka trajektorije poklapaju, odnosno kada je putanja tačke

[22] *J. Watt,* 1736 – 1819.

zatvorena kriva linija, tada je ukupni rad sile koja ima potencijalnu energiju pri tom kretanju jednak nuli.

Rad sile zemljine teže

Posmatrajmo materijalnu tačku M mase m u polju zemljine teže, pri kretanju od položaja M_0 do položaja M_1 (Slika 1.16), i za to se usvaja Dekartov koordinatni sistem $Oxyz$. Elementarni rad sile $-mg\,\overrightarrow{k}$, koja deluje na tačku, dobija se na više načina:

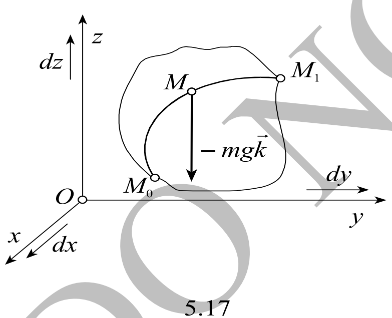
1. Projekcije sile na koordinatne ose su

$$F_x = 0, \quad F_y = 0, \quad F_z = -mg,$$

pa je prema (1.36)

$$dA = -mgdz, \tag{1.42}$$

2. Tačka M vrši elementarna pomeranja dx, dy i dz, koja su uvek u pozitivnom smeru odgovarajućih osa. Znači pomeranje dz se projektuje u suprotan pravac sile $-mg\,\overrightarrow{k}$. Zato je prema (1.33) elementarni rad dA dat sa (1.42).



Slika 1.16:

Integracijom izraza (1.42) u granicama od z_0 do z_1, koji odgovaraju položajima tačaka M_0 i M_1, dobija se

$$A_{01} = -mg(z_1 - z_0). \tag{1.43}$$

Vidi se da rad sile zemljine teže ne zavisi od oblika putanje (Slika 1.16) po kojoj se tačka pomera iz položaja M_0 u položaj M_1. Ako je $z_1 > z_0$, tj. ako se tačka pomera naviše, rad je negativan. Za $z_1 < z_0$, znači pri pomeranju na dole, rad je pozitivan. Ako je $z_1 = z_0$ sila zemljine teže ne vrši rad na pomeranju tačke. Naglasimo da ovaj znak rada sile zemljine teže ne zavisi od odabrane orijentacije ose z, već samo od smera pomeranja (naviše ili naniže) tačke u polju zemljine teže.

Prema (1.40) i (1.42), potencijalna energija sile zemljine teže glasi

$$\Pi = mgz, \tag{1.44}$$

za osu z koja je usmerena naviše.

Rad centralne sile

Pod centralnom silom podrazumeva se sila čiji pravac tokom kretanja tačke stalno prolazi kroz neku nepomičnu tačku prostora O (Slika 1.17). Neka intenzitet te sile f zavisi samo od dužine r rastojanja pokretne tačke od nepokretne tačke O, odnosno $f = f(r)$. Pošto je odnos $\overrightarrow{r}/r$ jedinični vektor u pravcu vektora $\overrightarrow{r}$ vektor centralne sile glasi

$$\overrightarrow{F} = f(r)\frac{\overrightarrow{r}}{r}.$$

Elementarni rad ove sile je

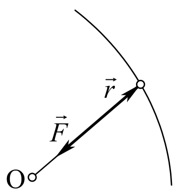
$$dA = \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = f(r)\frac{\overrightarrow{r} \cdot d\overrightarrow{r}}{r}.$$

Pošto je $\overrightarrow{r} \cdot \overrightarrow{r} = r^2$, diferenciranjem ovog izraza dobija se $\overrightarrow{r} \cdot d\overrightarrow{r} = rdr$ i prethodni izraz postaje

$$dA = f(r)dr, \tag{1.45}$$

pa je konačan rad centralne sile

$$A_{01} = \int_{r_0}^{r_1} f(r)dr. \tag{1.46}$$



Slika 1.17:

Vidi se da rad centralne sile ne zavisi od oblika putanje materijalne tačke. On zavisi samo od početnog i krajnjeg položaja materijalne tačke na njenoj trajektoriji.

Rad magnetne sile

Neka se naelektrisana čestica mase m i naelektrisanja q kreće u magnetnom polju vektora magnetne indukcije $\overrightarrow{B}$. Elementarni rad ove sile je

$$dA = q(\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{B}) \cdot d\overrightarrow{r}.$$

Kako je $\overrightarrow{v} = d\overrightarrow{r}/dt$, to su vektori $\overrightarrow{v}$ i $d\overrightarrow{r}$ kolinearni, pa je

$$dA = 0.$$

Znači, pri delovanju na naelektrisanu česticu magnetna sila ne vrši nikakav rad.

Potencijalna energija sile u opruzi

Ako na kraj opruge deluje sila $\overrightarrow{F}$ (Slika 1.10) opruga se izdužuje za veličinu x, i u njoj se javlja elastična sila opruge $\overrightarrow{F}_O$ u suprotnom smeru od sile $\overrightarrow{F}$. Za male deformacije opruge ta sila je intenziteta $F_O = cx$, gde je c krutost opruge. Pošto je pomeranje dx u suprotnom smeru od sile u opruzi elementarni rad ove sile iznosi

$$dA = -cxdx,$$

pa se iz (1.40) i integracijom dobija potencijalna energija sile u opruzi

$$\Pi = \frac{c}{2}x^2. \tag{1.47}$$

Ovaj izraz za potencijalnu energiju sile u opruzi može se koristiti i u slučaju kada se pravac deformisane opruge ne poklapa sa pravcem opruge u nedeformisanom stanju. U tom slučaju, deformacija opruge x je promena njene dužine Δl, koja je razlika dužina opruge u dva nekolinearna pravca, a to su pravci u deformisanom i nedeformisanom stanju opruge.

1.10 Opšti zakoni dinamike tačke

Opšti zakoni dinamike materijalne tačke uspostavljaju vezu pri kretanju između mera kretanja tačke i mera mehaničkog dejstva. Oni se izvode iz drugog Njutnovog zakona i mogu se koristiti umesto diferencijalnih jednačina kretanja. Šta više, nekad je njihova upotreba preporučljiva, jer brže dovodi do rešenja problema kretanja od rešavanja diferencijalnih jednačina kretanja.

1.10.1 Zakon o promeni količine kretanja

Množeći vektorsku jednačinu kretanja materijalne tačke (1.2) elementarnim priraštajem vremena dt, zbog konstantnosti mase tačke i činjenice da je ubrzanje $\overrightarrow{a} = d\overrightarrow{v}/dt$, sledi

$$d(m\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{F}dt,$$

odnosno

$$d\overrightarrow{K} = d\overrightarrow{I}, \tag{1.48}$$

gde je prema (1.21) $\overrightarrow{K}=m\overrightarrow{v}$ količina kretanja tačke, a prema (1.25) $d\overrightarrow{I}=\overrightarrow{F}dt$ elementarni impuls sile $\overrightarrow{F}$. Znači, elementarna promena količine kretanja materijalne tačke jednaka je elementarnom impulsu sile $\overrightarrow{F}$. Integracijom jednačine (1.48), od jednog trenutka vremena t_0 do nekog drugog t_1, dobija se

$$\int_{t_0}^{t_1} d\overrightarrow{K}=\int_{t_0}^{t_1} d\overrightarrow{I},$$

odnosno

$$\overrightarrow{K}_1-\overrightarrow{K}_0=\overrightarrow{I}_{01}. \tag{1.49}$$

Ovo je zakon o promeni količine kretanja:

Svaka promena količine kretanja materijalne tačke, za konačan vremenski interval, jednaka je impulsu sile za to vreme.

Ovo je vektorski zakon koji se može iskazati u raznim koordinatnim sistemima. Na primer, u Dekartovom pravouglom koordinatnom sistemu $Oxyz$ ovaj zakon je ekvivalentan sa tri zakona o promeni količine kretanja tačke u pravcu osa x, y i z

$$\begin{aligned} K_{1x}-K_{0x} &= I_{01x}, \\ K_{1y}-K_{0y} &= I_{01y}, \\ K_{1z}-K_{0z} &= I_{01z}, \end{aligned}$$

gde su K_{1x}, K_{1y}, K_{1z}, K_{0x}, K_{0y}, K_{0z}, I_{01x}, I_{01y} i I_{01z} projekcije količine kretanja i impulsa sile na ove ose.

Pošto je količina kretanja materijalne tačke definisana brzinom tačke, to su prvi izvodi koordinata po vremenu najviši red izvoda koji se pojavljuje u zakonu o promeni količine kretanja. Zato je ovaj zakon prvi integral jednačine kretanja (1.2). Uostalom, do zakona (1.49) se dolazi posle jedne formalne integracije vektorske jednačine kretanja. Ovaj zakon je pogodan za rešavanje zadataka u kojima su sile takve da se mogu izračunati njihovi impulsi bez poznavanja kretanja. Ako brzina tačke nije diferencijabilna funkcija u nekom vremenskom intervalu, kao u teoriji udara, tada se ovaj zakon primenjuje za trenutke početka i kraja tog intervala kretanja. Primetimo da se u tom slučaju, u navedenom intervalu, drugi Njutnov zakon ne može primeniti.

1.10.2 Zakon o promeni momenta količine kretanja

Pomnoži se vektorski jednačina kretanja materijalne tačke M (1.2) sa leve strane vektorom položaja $\overrightarrow{r}$ te tačke u odnosu na neku nepokretnu tačku O. Tako se dobija

$$\overrightarrow{r} \times m\overrightarrow{a} = \overrightarrow{r} \times \overrightarrow{F}.$$

Dodavanjem levoj strani ovog izraza nule u obliku $\overrightarrow{v} \times m\overrightarrow{v}$, jer su vektori $\overrightarrow{v}$ i $m\overrightarrow{v}$ kolinearni, on postaje

$$\frac{d}{dt}(\overrightarrow{r} \times m\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{r} \times \overrightarrow{F}.$$

Pošto je prema (1.22) $\overrightarrow{L}_O = \overrightarrow{r} \times m\overrightarrow{v}$ moment količine kretanja materijalne tačke M za tačku O, a $\overrightarrow{M}_O^{\overrightarrow{F}} = \overrightarrow{r} \times \overrightarrow{F}$ moment sile $\overrightarrow{F}$ za istu momentnu tačku, dobija se

$$\dot{\overrightarrow{L}}_O = \overrightarrow{M}_O^{\overrightarrow{F}}, \tag{1.50}$$

odnosno zakon o promeni momenta količine kretanja materijalne tačke:

Brzina promene momenta količine kretanja materijalne tačke za nepokretnu tačku O jednaka je momentu sile za istu momentnu tačku.

Napomena: Ovaj zakon nije prvi integral jednačine kretanja tačke.

1.10.3 Zakoni o promeni kinetičke energije i održanju ukupne mehaničke energije

Jednačinu kretanja materijalne tačke (1.2) projektujemo na pravac tangente trajektorije tačke. U pravcu tangente se nalazi vektor brzine tačke $\overrightarrow{v} = d\overrightarrow{r}/dt$, pa i vektor $d\overrightarrow{r}$. Zato se, projekcija vektorske jednačine kretanja (1.2) na pravac tangente, dobija njenim skalarnim množenjem jediničnim vektorom $d\overrightarrow{r}/dr$ pravca tangente. Time se dobija

$$m\overrightarrow{a} \cdot d\overrightarrow{r} = \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r}.$$

Ovaj izraz, zbog poznatih relacija

$$\overrightarrow{a} = \frac{d\overrightarrow{v}}{dt}, \quad d\overrightarrow{r} = \overrightarrow{v}\,dt,$$

postaje

$$m\overrightarrow{v}\cdot d\overrightarrow{v}=\overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{r}.$$

Pošto je masa tačke konstantna prethodni izraz se svodi na

$$d(m\frac{\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{v}}{2}) = \overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{r},$$

ili

$$dE_k = dA, \tag{1.51}$$

gde je prema (1.23) $E_k = m\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{v}/2$ kinetička energija materijalne tačke a prema (1.30) $dA = \overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{r}$ elementarni rad sile $\overrightarrow{F}$ ili ukupan rad svih sila koje deluju na materijalnu tačku. Ova relacija pokazuje da je, za vreme kretanja tačke, elementarna promena kinetičke energije jednaka je sumi elementarnih radova sila koje deluju na tačku na odgovarajućem pomeranju[23].

Ako se tačka pomeri, za vreme kretanja, iz položaja M_0 u položaj M_1 na putanji, tada se integracijom izraza (1.51) u tim granicama, dobija

$$E_{k1} - E_{k0} = A_{01}, \tag{1.52}$$

tj. zakon o konačnoj promeni kinetičke energije materijalne tačke:

Svaka konačna promena kinetičke energije materijalne tačke jednaka je zbiru radova svih sila, koje deluju na tu tačku, na pomeranju iz početnog u krajnji položaj tačke.

Pošto se u kinetičkoj energiji pojavljuju samo prvi izvodi po vremenu bilo kojih koordinata tačke, ovaj, treći opšti zakon dinamike tačke je prvi integral jednačine kretanja. Ovaj zakon je pogodan za primenu, umesto jednačina kretanja, kad god se može izračunati rad svih sila koje deluju na tačku bez poznavanja kretanja.

Zakon o promeni kinetičke energije materijalne tačke može dobiti i drugi oblik, ako se umesto rada kao mera dejstva sile pri kretanju upotrebi potencijalna energija. Tada se iz (1.40) i (1.51) dobija

$$d(E_k + \Pi) = 0,$$

[23] Istorijski razvoj mehanike pokazuje da je ovo fundamentalna relacija koja može da posluži kao polazna tačka za formiranje jednog posebnog pravca dinamike. Šta više, ova činjenica, koja uspostavlja jednakost između elementarnog priraštaja kinetičke energije i elementarnog rada, koristi se kao polazna činjenica i u drugim oblastima fizike i tehnike za uspostavljanje energijskih jednačina.

odnosno

$$E_k + \Pi = E, \tag{1.53}$$

gde je E konstanta koja se izračunava iz početnih uslova kretanja. Ovo je zakon o održanju, ili konzervaciji, totalne mehaničke energije, odnosno zbira kinetičke energije tačke i potencijalne energije sila koje deluju na tačku:

Za vreme kretanja materijalne tačke pod dejstvom potencijalnih sila održava se ili konzervira njena totalna, ili ukupna, mehanička energija.

Kao i zakon o promeni kinetičke energije i ovaj zakon je prvi integral jednačine kretanja. Pošto ovaj zakon, zakon o konzervaciji totalne mehaničke energije, važi samo za potencijalne sile to se ranije dobijeni uslov (1.13) potencijalnosti sile naziva i uslov konzervativnosti sile. Šta više, i sve sile se mogu podeliti na one koje imaju potencijalnu energiju, koje se zovu konzervativne sile, i one za koje ne postoji potencijalna energija, takozvane nekonzervativne sile. Ako se tačka kreće pod dejstvom samo potencijalnih sila onda je upotreba ovog zakona potpuno ekvivalentna sa korišćenjem zakona o promeni kinetičke energije. U tom slučaju, u određenom problemu, može se koristiti samo jedan od ova dva zakona.

Zakon o održanju totalne mehaničke energije govori o neprekidnoj promeni energije tokom kretanja, odnosno promeni kinetičke energije tačke u potencijalnu energiju sila koje deluju na tačku, ili obrnuto. Pošto je kinetička energija tačke uvek pozitivna veličina, u položaju gde je ona maksimalna potencijalna energija sila koje deluju na tačku je minimalna, i obrnuto[24].

Primer 5 *Kretanje tačke po hrapavoj strmoj ravni (Slika 1.18). Telo mase m i težine P kreće uz strmu hrapavu ravan nagiba α prema horizontali početnom brzinom v_0. Koeficijent trenja klizanja između površine i tačke je μ. Treba odrediti pređeni put do zaustavljanja tačke.*
Na materijalnu tačku deluju sledeće sile: sila težine P vertikalno na dole, normalna reakcija podloge normalno na strmu ravan i sila trenja kli-

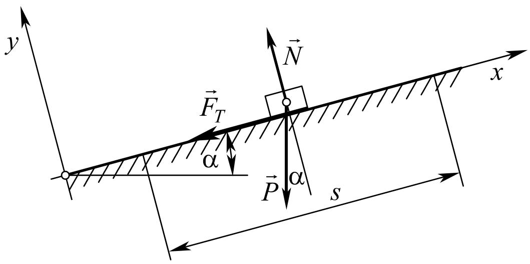
[24] Na primer, voda na vrhu vodopada ima potencijalnu energiju sile zemljine teže, koja se pri padu pretvara u kinetičku energiju. Kinetička energija vode koja pada može se u hidrocentrali pretvoriti u kinetičku energiju obrtanja turbine, inače se ona u podnožju vodopada pretvara u toplotnu energiju.

zanja u ravni podloge usmerena na dole. Diferencijalna jednačina kretanja tačke u pravcu y ose glasi

$$m\ddot{y} = 0 = N - P\cos\alpha,$$

pa je $N = P\cos\alpha$. Zato sila trenja klizanja ima vrednost

$$F_T = \mu N = \mu P \cos\alpha.$$



Slika 1.18:

Pošto su sve sile u problemu konstantne moguće je za sve sile izračunati njihov rad. Ako je s pređeni put duž strme ravni, koji se meri od početka kretanja, onda zakon o promeni kinetičke energija glasi

$$\begin{aligned}\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} &= -\mu P s\cos\alpha \\ &\quad -Ps\sin\alpha.\end{aligned}$$

U tački zaustavljanja je $v_1 = 0$ pa se dobija odgovarajući pređeni put

$$s_1 = \frac{v_0^2}{2g(\mu\cos\alpha + \sin\alpha)},$$

jer je $P = mg$, gde je g ubrzanje zemljine teze.

1.10.4 Dijagram potencijalne energije

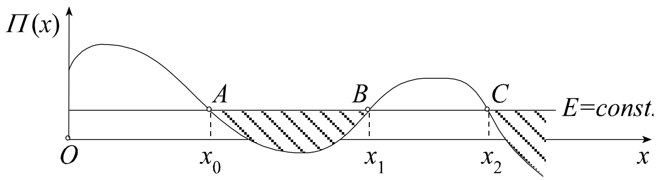
Ako se kretanje tačke posmatra u Dekartovom koordinatnom sistemu $Oxyz$, onda je potencijalna energija sila koje deluju na tačku funkcija samo Dekartovih koordinata. Tada, zakon (1.53) o održanju totalne mehaničke energije glasi

$$\frac{mv^2}{2} + \Pi(x, y, z) = E,$$

pa pošto je uvek $mv^2/2 \geqslant 0$, materijalna tačka može da se kreće samo u delu prostora koji je definisan nejednačinom

$$\Pi(x, y, z) \leqslant E.$$

Granica ove oblasti je određena površinom $\Pi(x, y, z) = E$, na kojoj je brzina materijalne tačke jednaka nuli.



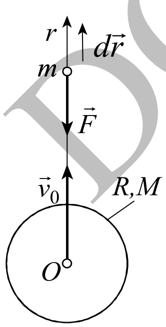
Slika 1.19:

Za kretanje tačke sa jednim stepenom slobode kretanja je $\Pi = \Pi(x)$. Oblast mogućeg kretanja je određena nejednačinom

$$\Pi(x) \leqslant E.$$

Na slici 1.19 je nacrtana zavisnost potencijalne energije od promenljive x i povučena prava linija $E = const.$, koja odgovara poznatoj totalnoj mehaničkoj energiji tačke. Vidi se da je prethodna nejednačina zadovoljena u oblastima $x \in [x_0, x_1]$ i $x \geqslant x_2$, u kojima je moguće kretanje tačke. Ove oblasti se nazivaju potencijalnim jamama dijagrama potencijalne energije. Kretanje u oblasti $x \in [x_0, x_1]$ naziva se konačno a u oblasti $x \geqslant x_2$ beskonačno. Iz ovog dijagrama vidi se da je kretanje tačke moguće u više oblasti. Oblast u kojoj će se tačka kretati određena je, prema principu određenosti, početnim uslovima kretanja.

Primer 6 *Sa površine Zemlje kreće početnom brzinom v_0 materijalna tačka mase m vertikalno naviše. Odrediti potrebnu početnu brzinu tačke v_0 da ona napusti polje zemljine teže krećući se u sredini bez otpora.*



Slika 1.20:

Po pretpostavci materijalna tačka se kreće pravolinijski naviše i njen položaj je određen koordinatom r, koja se meri (Slika 1.20) od središta Zemlje. Pošto se tačka može kretati i na velikim udaljenostima od Zemlje, dejstvo Zemljine privlačne gravitacione sile je dato sa $F = kmM/r^2$, gde je k univerzalna gravitaciona konstanta, m masa tačke i M masa Zemlje. Tačka kreće sa površine Zemlje, gde je ova sila jednaka sili Zemljine teže. Znači za $r = R$, gde je R poluprečnik Zemlje, važi da je $F = mg$, pa se dobija $kM = gR^2$, i konačno

$$F = \frac{mgR^2}{r^2}. \qquad (A)$$

Dalje, ovaj problem se može rešiti na dva načina:

Prvi način. Koristi se zakon o promeni kinetičke energije u proizvoljnom i početnom položaju tačke

$$\frac{mv_r^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = A_{Rr}, \tag{B}$$

gde je A_{Rr} rad sile F na pomeranju od površine Zemlje do proizvoljnog položaja r i v_r brzina u tom proizvoljnom položaju. Pošto je elementarno pomeranje dr u pozitivnom smeru r ose, elementarni rad sile F je

$$dA = -F dr = -\frac{mgR^2}{r^2} dr. \tag{C}$$

Integracijom ovog izraza u granicama od R do r dobija se

$$A_{Rr} = mgR^2 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right), \tag{D}$$

pa se iz (B) nalazi brzina tačke u funkciji rastojanja r tačke od središta Zemlje

$$v_r^2 = v_0^2 + 2gR^2 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right).$$

Pošto je $r \geqslant R$, brzina tačke se stalno smanjuje. Tačka napušta polje Zemljine teže ako je $v_r \geqslant 0$ kada $r \to \infty$. Ovo dovodi do potrebne početne brzine tačke

$$v_0 \geqslant \sqrt{2gR}, \tag{E}$$

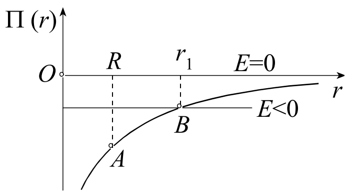
što za $g \approx 9,80665$ $[m/s^2]$ i $R \approx 6378$ $[km]$ ova brzina iznosi $v_0 \geqslant 11.18453$ $[km/s]$. Najmanja vrednost ove brzine $v_0 \approx 11.18453$ $[km/s]$, pri kojoj tačka napušta polje Zemljine teže, naziva se druga kosmička brzina.

Drugi način. Koristeći vezu (1.40), tj. činjenicu da je $d\Pi = -dA$, i (C) dobija se

$$d\Pi = \frac{mgR^2}{r^2} dr,$$

a posle integracije i potencijalna energija gravitacione sile

$$\Pi = -\frac{mgR^2}{r}.$$



Slika 1.21:

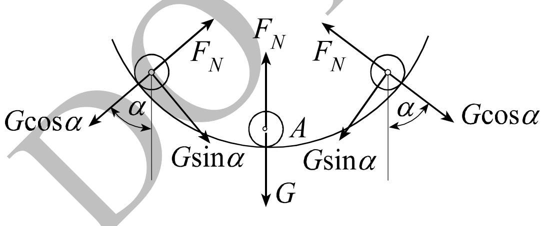
Na slici 1.21 dat je dijagram potencijalne energije u zavisnosti od r. Sa E je obeležena totalna početna mehanička energija ($E = E_k + \Pi$), koja zbog početnih uslova iznosi

$$E = \frac{mv_0^2}{2} - mgR.$$

Tačka kreće sa površine Zemlje, pa je kretanje moguće za $r \geqslant R$, tj. od tačke A na dijagramu. Ako je $E < 0$, tada je potencijalna energija manja od E samo do tačke B, pa je kretanje moguće samo u potencijalnoj jami $r \in [R, r_1]$, gde je r_1 najveće udaljenje tačke od središta Zemlje. Ako je $E \geqslant 0$, kriva $\Pi(r)$ je uvek ispod prave $E \geqslant 0$, jer je ona uvek ispod r ose. Tada tačka odlazi u beskonačnost. Iz uslova da je $E \geqslant 0$, dobija se ista potrebna početna brzina za napuštanje polja Zemljine teže (E).

1.10.5 Stabilnost ravnotežnog položaja

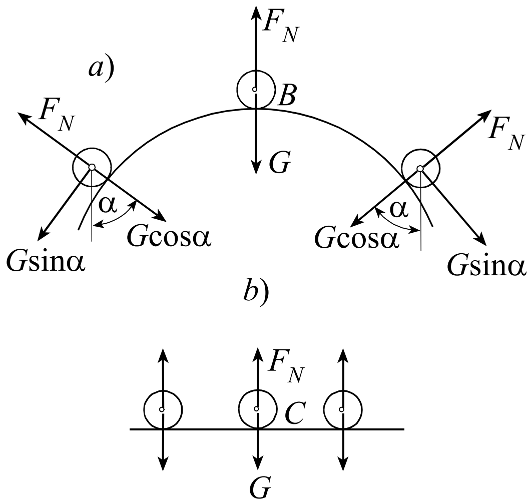
Ako se prilikom proizvoljnog izvođenja materijalne tačke iz ravnotežnog položaja, koji je određen statičkim uslovima rav-noteže, javljaju sile koje tačku vraćaju nazad ka ravnotežnom položaju, tada je to položaj stabilne ravnoteže. Ako se javljaju sile koje tačku udaljavaju od položaja ravnoteže, onda je to položaj nestabilne ravnoteže. Ako se prilikom proizvoljnog izvođenja tačke iz ravnotežnog položaja ne javljaju nikakve sile, onda je to položaj indiferentne ili labilne ravnoteže.



Slika 1.22:

Posmatrajmo tačku težine $\overrightarrow{G}$ koja je u položaju A (Slika 1.22) i u položajima B i C (Slika 1.23) u ravnoteži na glatkoj površini, jer je u sva tri slučaja aktivna sila težine G uravnotežena reakcijom glatke veze $\overrightarrow{F}_N$. Neka se tačka malo pomeri, levo ili desno, iz ravnotežnog položaja A (Slika 1.22). Tačka više nije u ravnoteži.

Analizom sila se vidi da se komponenta sile $G\cos\alpha$ uravnotežava sa silom F_N, a sila $G\sin\alpha$ je usmerena tako da vraća tačku u prvobitno ravnotežno stanje. Prema tome, položaj ravnoteže A je stabilan.

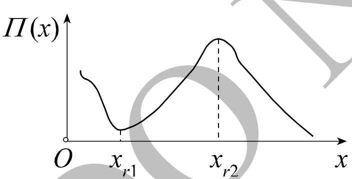


Slika 1.23:

Ako se tačka malo pomeri, levo ili desno, iz ravnotežnog položaja B (Slika 1.23a) na nju deluju sile $G\sin\alpha$, $G\cos\alpha$ i normalna reakcija F_N. Neuravnotežena sila $G\sin\alpha$ je usmerena tako da udaljava tačku od ravnotežnog položaja. Ravnotežni položaj B tela je nestabilan. Ako se tačka malo pomeri, levo ili desno, iz ravnotežnog položaja C (Slika 1.23b) na nju i dalje deluju sile G i normalna reakcija F_N, koje su u ravnoteži, pa je to položaj indiferentne ravnoteže.

Posmatrajmo materijalnu tačku na koju, pri izvođenju iz ravnotežnog položaja, deluje sila čija je potencijalna energija funkcija samo jedne promenljive, tj. $\Pi = \Pi(x)$. Prema (1.11), na tačku u proizvoljnom položaju deluje sila

$$F_x(x) = -\frac{\partial \Pi}{\partial x}. \tag{1.54}$$



Slika 1.24:

Prema uslovima ravnoteže, u položaju ravnoteže ova sila je jednaka nuli. Znači, ako je položaj ravnoteže određen sa $x = x_r$, gde je $r = 1, 2$, tada je $F_x(x_r) = 0$, odnosno

$$F_x(x_r) = -\left(\frac{\partial \Pi}{\partial x}\right)_{x_r} = 0, \tag{1.55}$$

pa potencijalna energija ima ekstremalne vrednosti u tim tačkama. Neka se materijalna tačka pomeri iz ravnotežnog položaja za Δx, gde je $|\Delta x|$ mala veličina. Tada na nju deluje sila $F_x(x_r + \Delta x)$. Razvijanjem ove funkcije u red u okolini tačke $x = x_r$ i zanemarivanjem malih veličina višeg reda dobija se

$$F_x(x_r + \Delta x) \approx F_x(x_r) + \left(\frac{\partial F_x}{\partial x}\right)_{x_r} \Delta x + O(\Delta x)^2$$

odnosno, korišćenjem izraza (1.54) i (1.55) i zanemarivanjem malih članova višeg reda, odnosno $O(\Delta x)^2 \approx 0$, dobija se

$$F_x(x_r + \Delta x) \approx -\left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2}\right)_{x_r} \Delta x. \tag{1.56}$$

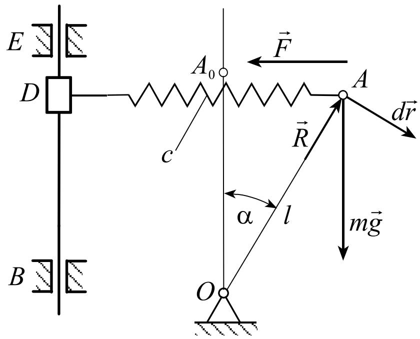
Na dijagramu potencijalne energije (Slika 1.24) potencijalna energija ima minimum i maksimum u tačkama x_{r1} i x_{r2}. Iz izraza (1.56) vidi se da za $(\partial^2\Pi/\partial x^2) > 0$ u tački $x = x_{r1}$, odnosno u tački minimuma potencijalne energije, pri izvođenju tačke iz ravnotežnog položaja u desno ($\Delta x > 0$) dolazi do pojave sile koja deluje u levo ($F_x(x_r+\Delta x) < 0$), a pri izvođenju tačke iz ravnotežnog položaja u levo ($\Delta x < 0$) javlja se sila u desno ($F_x(x_r + \Delta x) > 0$). Znači, pri izvođenju tačke iz ravnotežnog položaja u kome je potencijalna energija u minimumu, uvek se javlja sila koja tačku vraća u ravnotežni položaj, i zato je taj položaj ravnoteže položaj stabilne ravnoteže. Sličnom analizom pri pomeranju tačke iz ravnotežnog položaja u kome je potencijalna energija u maksimumu ($x = x_{r2}$), sledi da se tada uvek javlja sila koja tačku udaljava od položaja ravnoteže. Prema tome, to je položaj nestabilne ravnoteže. Analiza slučaja kada je u položaju ravnoteže drugi izvod potencijalne energije jednak nuli, tj. kada kriva $\Pi(x)$ ima prevojnu tačku u položaju ravnoteže, zahteva i članove višeg reda u razvoju (1.56) pa se to ovde ne sprovodi.

Dobijeni rezultati iskazuju se u obliku Ležen Dirihleove[25] teoreme koja važi i za ravnotežu drugih konzervativnih sistema:

Položaj ravnoteže konzervativnog mehaničkog sistema je stabilan ako u njemu potencijalna energija sila koje deluju na sistem ima minimum, a nestabilan ako ona ima maksimum.

Primer 7 *Materijalna tačka mase m nalazi se na kraju lakog štapa OA dužine l, koji je u tački O vezan za cilindričan zglob. Tačka A je vezana oprugom krutosti c za laki klizač D, koji se kreće bez trenja po vertikalnoj žici EB. Za vreme kretanja, štap i žica se nalaze u vertikalnoj ravni a opruga je uvek horizontalna. Kada je štap vertikalan opruga je nenapregnuta. Naći položaje ravnoteže tačke i ispitati njihovu stabilnost.Položaj mase i štapa je određen uglom α (Slika 1.25).*

[25] *L. Dirichlet,* 1805 – 1859.



Slika 1.25:

Na materijalnu tačku deluju tri sile. To su sila zemljine teže $m\overrightarrow{g}$, sila u opruzi intenziteta $F = c(\Lambda l)$, i sila u lakom štapu $\overrightarrow{R}$, koja pada u pravac štapa. Pošto je elementarno pomeranje $d\overrightarrow{r}$ tačke A uvek normalno na pravac štapa, odnosno na silu u štapu, ova sila $\overrightarrow{R}$ ne vrši pri pomeranju nikakav rad pa nema ni potencijalnu energiju. Potencijalna energija opruge je $\Pi_0 = (c/2)(\Delta l)^2$, a pošto je deformacija opruge $\Delta l = l \sin\alpha$, to je $\Pi_0 = (c/2)l^2 \sin^2\alpha$. Potencijalna energija sile zemljine teže $m\overrightarrow{g}$ jednaka je negativnom radu na pomeranju tačke iz početnog položaja A_0 u proizvoljan položaj A, pri čemu je vertikalno pomeranje naniže za $l - l\cos\alpha$. Zato je potencijalna energija sile zemljine teže $\Pi_{mg} = -mgl(1-\cos\alpha)$. Ukupna potencijalna energija svih sila koje deluju na tačku A je $\Pi = \Pi_0 + \Pi_{mg}$, odnosno

$$\Pi = \frac{cl^2}{2}\sin^2\alpha - mgl(1-\cos\alpha). \tag{A}$$

Prvi i drugi izvodi funkcije $\Pi(\alpha)$ po nezavisno promenljivoj α iznose

$$\frac{d\Pi}{d\alpha} = l(lc\cos\alpha - mg)\sin\alpha, \tag{B}$$

$$\frac{d^2\Pi}{d\alpha^2} = cl^2(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) - mgl\cos\alpha. \tag{C}$$

Ravnoteža postoji za one vrednosti ugla α za koje postoje ekstremne vrednosti funkcije $\Pi(\alpha)$, odnosno kada je prvi izvod (B) jednak nuli

$$l(lc\cos\alpha - mg)\sin\alpha = 0. \tag{D}$$

Jednačina (D) daje tri položaja ravnoteže:

$\alpha_1 = 0$; U ovom položaju ravnoteže je

$$\left(\frac{d^2\Pi}{d\alpha^2}\right)_1 = cl^2 - mgl,$$

pa je potencijalna energija u minimumu, a položaj ravnoteže stabilan, ako je $c > mg/l$. Za $c < mg/l$ ovaj položaj je položaj nestabilne ravnoteže.

$\alpha_2 = \pi$; Sada je

$$\left(\frac{d^2\Pi}{d\alpha^2}\right)_2 = cl^2 + mgl,$$

pa je u tom položaju ravnoteže potencijalna energija uvek u minimumu, a položaj ravnoteže uvek stabilan.

$\cos\alpha_3 = mg/cl$; Ovaj položaj ravnoteže je moguć i različit od prvog položaja ravnoteže $\alpha_1 = 0$ ako je $c > mg/l$. U trećem položaju ravnoteže je

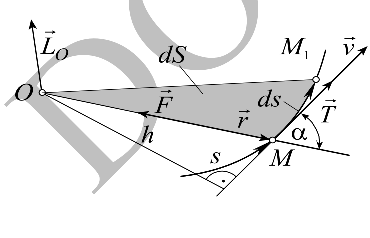
$$\left(\frac{d^2\Pi}{d\alpha^2}\right)_3 = -\frac{l^2}{c}\left[c^2 - \left(\frac{mg}{l}\right)^2\right].$$

Pošto ovaj položaj ravnoteže postoji ako je $c > mg/l$ sledi da je u tom položaju $(d^2\Pi/d\alpha^2)_3 < 0$ i u njemu potencijalna energija ima maksimum. Znači, kada postoji, taj položaj ravnoteže je položaj nestabilne ravnoteže.

1.11 Primeri kretanja materijalne tačke

1.11.1 Kretanje tačke u polju centralne sile. Kretanje planeta

Sila koja deluje na materijalnu tačku M naziva se centralna sila ako njena napadna linija stalno tokom kretanja prolazi kroz neku tačku O (Slika 1.26). Ta tačka, koja može biti pokretna ili nepokretna, zove se centar sile. Vektor položaja tačke M meri se od centra O.



Slika 1.26:

Centralna sila može biti privlačna, ako je usmerena ka centru, ili odbojna ako je usmerena od centra. Deo prostora u kome deluje centralna sila je polje centralne sile. Primeri takvih sila su univerzalna gravitaciona sila i Kulonova električna sila između naelektrisanih čestica. Na slici 1.26 je s krivolinijska koordinata merena duž putanje tačke i $\overrightarrow{T}$ jedinični vektor tangencijalnog pravca.

Posmatrajmo kretanje materijalne tačke u polju centralne sile $\overrightarrow{F}$, pri čemu je centar O nepokretna tačka. Za proučavanje osnovnih svojstava kretanja tačke pod dejstvom centralne sile koristi se zakon o promeni momenta količine kretanja tačke u odnosu na centar O, koji glasi

$$\dot{\overrightarrow{L}}_O = \overrightarrow{M}_O^{\overrightarrow{F}}.$$

Pošto napadna linija sile prolazi kroz tačku O moment centralne sile za tu tačku jednak je nuli, pa sledi da je $\dot{\overrightarrow{L}}_O = \overrightarrow{0}$, odnosno da je vektor momenta količine kretanja $\overrightarrow{L}_O$ konstantan tokom kretanja, tj. $\overrightarrow{L}_O = const$. Znači da vektor momenta količine kretanja ima konstantan intenzitet, pravac i smer. Kako samo brzina u cirkularnom pravcu ima moment količine kretanja za

$$\overrightarrow{L}_O = \overrightarrow{r} \times m\overrightarrow{v} = \overrightarrow{r}_0 \times m\overrightarrow{v}_0, \tag{1.57}$$

gde su $\overrightarrow{r}_0$ i $\overrightarrow{v}_0$ početni vektori položaja i brzine tačke M. Brzina tačke ima dve komponente radijalnu i cirkularnu. Količina kretanja u cirkularnom pravcu ima moment količine kretanja za tačku O

$$\overrightarrow{L}_O = \overrightarrow{r}_0 \times m\overrightarrow{v}_{c0},$$

dok količina kretanja u radijalnom pravcu nema moment za tačku O. Zbog konstantnosti vektora $\overrightarrow{L}_O$ kretanje tačke pod dejstvom centralne sile ima sledeće tri osobine:

1. Skalarni proizvod $\overrightarrow{L}_O \cdot \overrightarrow{r}$ jednak je nuli, pa je vektor položaja tačke $\overrightarrow{r}$ tokom kretanja u ravni čija je normala vektor $\overrightarrow{L}_O$. To znači da se materijalna tačka pod dejstvom centralne sile kreće u jednoj ravni, koju određuju početni vektori položaja i brzine tačke. Ovo svojstvo kretanja je posledica konstantnosti pravca vektora $\overrightarrow{L}_O$.

2. Smer vektora $\overrightarrow{L}_O$ takođe je konstantan, pa smer kretanja tačke na trajektoriji, koji je određen smerom vektora brzine tačke $\overrightarrow{v}$, je uvek isti. Tačka se pod dejstvom centralne sile kreće uvek u istom smeru na trajektoriji, koji je određen smerom početne brzine.

3. Intenzitet vektora momenta količine kretanja iznosi

$$L_O = rmv \sin\alpha = const.,$$

gde je α ugao između vektora $\overrightarrow{r}$ i vektora brzine $\overrightarrow{v}$. Sa slike 1.26 je $r \sin \alpha = h$, gde je h normala na brzinu tačke povučena iz centra O, pa sledi $L_O = mvh$, odnosno pošto je u početnom trenutku vremena $L_O = mv_{c0}r_0$

$$mv_{c0}r_0 = mvh. \tag{1.58}$$

Uoči se na trajektoriji tačka M_1, koja je na lučnom rastojanju ds od tačke M i u koju se pokretna tačka pomeri za vreme dt. Površina OMM_1 može se aproksimirati površinom trougla osnove ds i visine h. Veličina površine ovog trougla je $dS = (h/2)ds$, a brzina njene promene $dS/dt = \dot{s}h/2$, odnosno pošto je $\dot{s} = v$ brzina tačke, $dS/dt = vh/2$. Kombinovanjem ovog rezultata sa izrazom (1.58) dobija se

$$\frac{dS}{dt} = \frac{v_{c0}r_0}{2}. \tag{1.59}$$

Veličina dS/dt, koja određuje brzinu promene površine koju za vreme kretanja prebriše vektor položaja tačke M, naziva se sektorska brzina tačke M. Prethodna relacija pokazuje da je sektorska brzina tačke, pri njenom kretanju u polju centralne sile, konstantna. Integracijom jednačine (1.59) u granicama od S_0 do S, odnosno od t_0 do t, dobija se

$$S - S_0 = \frac{v_{c0}r_0}{2}(t - t_0). \tag{1.60}$$

Odavde sledi činjenica, vektor položaja tačke u istim vremenskim intervalima prebriše iste površine, a to je jedan od Keplerovih[26] zakona, tzv. Zakon površina.

Bineova jednačina

Pošto je kretanje tačke M u polju centralne sile u ravni, iskustvo pokazuje da je nalaženje trajektorije tačke najjednostavnije u polarnom koordinatnom sistemu. Koordinatni početak bira se u centru O. Odgovarajuće diferencijalne jednačine kretanja su

$$m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = F, \quad m(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}) = 0, \tag{1.61}$$

[26] *J. Kepler,* 1571 – 1630.

gde je u prvoj jednačini F pozitivno ako je centralna sila F odbojna, a ako je sila F privlačna onda je F negativno. Množenjem druge jednačine sa r dobija se

$$\frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}) = 0,$$

odnosno posle integracije

$$r^2\dot{\varphi} = C, \tag{1.62}$$

gde je C integraciona konstanta. Može se pokazati da je ova konstanta povezana sa sektorskom brzinom tačke (1.59) relacijom $C = 2dS/dt$. Jednačina trajektorije tačke $r(\varphi)$ može se dobiti integracijom prve jednačine (1.61) i jednačine (1.62) i eliminacijom vremena iz tako dobijenih zakona kretanja. Eliminacija vremena može se obaviti i pre integracije ovih jednačina. U tu svrhu, smatra se da r zavisi od vremena posredno preko φ, tj. da je $r(\varphi)$ i $\varphi(t)$. Posrednim diferenciranjem po vremenu dobija se

$$\begin{aligned}\dot{r} &= \frac{dr}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = \frac{C}{r^2}\frac{dr}{d\varphi} = -C\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{r}\right),\\ \ddot{r} &= -\frac{C^2}{r^2}\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right),\end{aligned}$$

gde je izvod $\dot{\varphi}$ eliminisan pomoću (1.62). Unošenjem ovog izraza u prvu jednačinu (1.61) i ponovnim korišćenjem (1.62) dolazi se do diferencijalne jednačine trajektorije tačke u polju centralne sile

$$-\frac{mC^2}{r^2}\left[\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \left(\frac{1}{r}\right)\right] = F, \tag{1.63}$$

koja se naziva Bineova[27] jednačina. Ova jednačina može se integraliti ako je centralna sila funkcija samo od polarnih koordinata r i φ, tj. ako je $F = F(r,\varphi)$. Opšte rešenje ove jednačine glasi $r = f(\varphi, C_1, C_2)$, gde su C_1 i C_2 integracione konstante. Zavisnost položaja tačke na trajektoriji od vremena dobija se unošenjem ovog rešenja u (1.62) i integracijom rezultata te zamene u granicama od φ_0 do φ, odnosno od t_0 do t, gde ugao φ_0 odgovara početku kretanja t_0 . Tako se dobija

$$t = t_0 + \frac{1}{C}\int_{\varphi_0}^{\varphi}[f(\varphi)]^2 d\varphi.$$

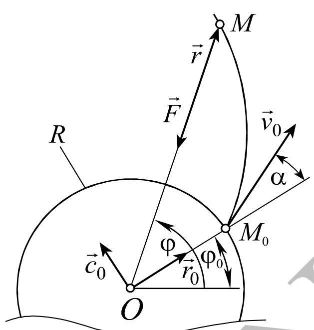
[27] *J.P.M. Binet*, 1786 – 1856.

Za vreme kretanja materijalne tačke u polju centralne sile $\overrightarrow{F} = F\overrightarrow{r}_0$, koja pada u radijalan pravac, i gde je elementarno pomeranje $d\overrightarrow{r}=dr\overrightarrow{r}_0+rd\varphi\overrightarrow{c}_0$ a jedinični vektori $\overrightarrow{r}_0$ i $\overrightarrow{c}_0$ su međusobno normalni, elementarni rad te sile iznosi

$$dA = \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = F\overrightarrow{r}_0 \cdot (dr\overrightarrow{r}_0 + rd\varphi\overrightarrow{c}_0) = Fdr, \tag{1.64}$$

Ako je moguće izračunati konačan rad, odnosno naći potencijalnu energiju centralne sile, onda važi i zakon o održanju totalne mehaničke energije za ovo kretanje tačke.

Kretanje tačke u polju univerzalne gravitacione sile



Slika 1.27:

Neka materijalna tačka M mase m kreće sa površine Zemlje početnom brzinom $\overrightarrow{v}_0$, koja je pod uglom α prema radijalnom pravcu (Slika 1.27). Centar polarnog koordinatnog sistema bira se u centru Zemlje, gde je i centar sile $\overrightarrow{F}$ univerzalne gravitacije. Neka je u početnom trenutku vremena tačka u položaju M_0. Zato su početni uslovi kretanja

$$\begin{aligned} r(0) &= R, \quad v_{r0} = v_0 \cos\alpha, \\ \varphi(0) &= \varphi_0, \quad v_{c0} = v_0 \sin\alpha, \end{aligned} \tag{A}$$

gde je R poluprečnik Zemlje. Na materijalnu tačku M, koja se nalazi u proizvoljnom položaju na trajektoriji, deluje centralna privlačna sila intenziteta $F = kmM_z/r^2$, gde je M_z masa Zemlje i k univerzalna gravitaciona konstanta. Zbog polaska tačke sa površine Zemlje važi da je za $r = R$ ta sila jednaka sili zemljine teže tačke, odnosno $F = mg$. To dovodi do

$$F = \frac{mgR^2}{r^2}. \tag{B}$$

Konstanta (1.62) se izračunava iz početnih uslova (A)

$$C = r(r\dot{\varphi}) = rv_c = r_0v_{c0} = Rv_{c0}. \tag{C}$$

Ako se (B) i (C) zameni u Bineovu jednačinu (1.63), i pošto je sila F privlačna, dobija se sledeća diferencijalna jednačina

$$\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right)+\left(\frac{1}{r}\right)=\gamma, \tag{D}$$

gde je

$$\gamma=\frac{g}{(v_{c0})^2}=const. \tag{E}$$

Opšte rešenje ove linearne nehomogene diferencijalne jednačine drugog reda glasi

$$\frac{1}{r}=\gamma+C_1\cos(\varphi-\varphi_0),$$

gde su C_1 i φ_0 integracione konstante. Iz početnih uslova (A), i korišćenjem (E), dobija se

$$C_1=\frac{1}{R}-\gamma, \qquad \frac{v_0\cos\alpha}{(r_0)^2}=0.$$

Odavde sledi da mora da bude $\alpha=\pi/2$, odnosno da materijalna tačka počinje kretanje pod pravim uglom prema radijalnom pravcu. Jednačina trajektorije tačke glasi

$$r=\frac{p}{1+e\cos(\varphi-\varphi_0)}, \tag{F}$$

gde je

$$e=\frac{(v_0\sin\alpha)^2}{Rg}-1, \quad p=\frac{(v_0\sin\alpha)^2}{g}, \tag{G}$$

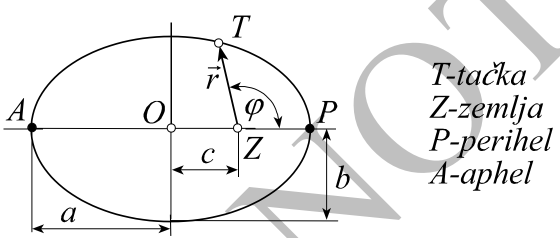
Odnosno zbog $\alpha=\pi/2$

$$e=\frac{(v_0)^2}{Rg}-1, \quad p=\frac{(v_0)^2}{g}, \quad v_{r0}=0, \quad v_{c0}=v_0.$$

Jednačina trajektorije materijalne tačke (F), u polarnim koordinatama, predstavlja jednačinu konusnog preseka, gde je e ekscentricitet a p fokalni parametar konusnog preseka. Za vrednosti $R=6378$ $[km]$ i $g=9.80665$ $[m/s^2]$, u zavisnosti od vrednosti ekscentriciteta e, odnosno u zavisnosti od početne brzine v_0 tačke, ova kriva je:

1. Za $e = 0$, odnosno za $v_{c0} = v_0 \approx 7908.65791$ $[m/s]$, krug,
2. Za $e < 1$, odnosno za $v_{c0} = v_0 < 11184.53$ $[m/s]$, elipsa,
3. Za $e = 1$, odnosno za $v_{c0} = v_0 \approx 11184.53$ $[m/s]$, parabola,
4. Za $e > 1$, odnosno za $v_{c0} = v_0 > 11184.53$ $[m/s]$, hiperbola.

Početna brzina tačke $v_0 \approx 7908.65791$ $[m/s]$, pri kojoj se ona kreće oko Zemlje po krugu, naziva se prva kosmička brzina. Početna cirkularna brzina tačke $v_0 \approx 11184.53$ $[m/s]$, pri kojoj ona napušta polje zemljine gravitacione sile naziva se, kao što je već ranije rečeno, druga kosmička brzina. Kada tačka napusti polje zemljine gravitacione sile ona postaje Sunčev satelit. Ako je početna cirkularna brzina tačke $v_0 \approx 16700$ $[m/s]$, koja se naziva treća kosmička brzina, tačka napušta i gravitaciono polje Sunca. Naravno, svi ovi rezultati važe pri zanemarivanju otpora vazduha za vreme kretanja materijalne tačke kroz prostor oko Zemlje.



Slika 1.28:

Četvrta kosmička brzina je minimalna brzina koju je potrebno dati materijalnoj tački da bi napustila galaksiju Mlečni Put. Četvrta kosmička brzina nije jednaka za sve tačke u galaksiji i zavisi od daljine do centra mase galaksije. Četvrta kosmička brzina je oko $350[km/s]$. Ali pošto se sunce kreće oko centra galaksije brzinom od $220[km/s]$ dovoljno je da se telo izbaci u pravcu kretanja sunca sa brzinom od $130[km/s]$.

Pri kretanju tačke oko Zemlje po elipsi, teme elipse P najbliže centru privlačenja naziva se perihel a ono najdalje A aphel. Poluose te elipse (Slika 1.28 za $\varphi_0 = 0$) a i b i udaljenje c Zemlje od centra elipse iznose

$$a = \frac{R}{1-e}, \quad b = R\sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \quad c = R\frac{e}{1-e}.$$

Pri kretanju tačke oko Zemlje po elipsi ona za vreme T jednom obiđe oko nje i pri tom njen vektor položaja prebriše celu površinu elipse, koja je $S = \pi ab$. Koristeći (1.60) i (G), za $S_0 = 0$, $t_0 = 0$ i $r_0 = R$, dobija se vreme T obilaska tačke oko Zemlje, odnosno period ovog kretanja

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}(1-e)^{-3/2}.$$

1.11.2 Pojam o vezama. Klasifikacija veza

Ako kretanje tačke nije ničim ograničeno tačka se kreće slobodno. Međutim, kretanje tačke je ograničeno dejstvom drugih materijalnih tela, koja se nazivaju vezama. Tada kretanje tačke nazivamo vezanim ili neslobodnim. Zbog direktnog kontakta tačke sa vezom javlja se sila uzajamnog dejstva. Sila kojom veza deluje na tačku zove se reakcija veze. Sila sa kojom materijalna tačka deluje na vezu zove se pritisak na vezu. Reakcija veze, ili pritisak na vezu, je sila koja je unapred nepoznata tokom kretanja i moraju se vršiti razne hipoteze u vezi sa njenom strukturom. Ako ovu silu označimo sa $\overrightarrow{R}$, tada je diferencijalna jednačina kretanja materijalne tačke

$$m\ddot{\overrightarrow{r}} = \overrightarrow{F} + \overrightarrow{R}, \tag{1.65}$$

gde je $\overrightarrow{F}$ rezultanta svih aktivnih sila koje deluju na tačku.

Veze koje ograničavaju slobodu kretanja tačke mogu biti površine i krive linije koje se mogu izraziti matematički. Tako na primer ako je tačka prinuđena da se kreće po površini pokretnoj u prostoru, jednačina ove površine glasi

$$f(x,y,z,t) = 0. \tag{1.66}$$

Ovakva jednačina veze koja zavisi od vremena naziva se *nestacionarna* ili *reonomna* za razliku od veze oblika

$$f(x,y,z) = 0 \tag{1.67}$$

koja predstavlja nepokretnu površinu u prostoru i koja se naziva *stacionarna* ili *skleronomna* veza.

Neka je materijalna tačka primorana da se kreće po krivoj liniji koja je definisana kao presek dve površine oblika

$$f_1(x,y,z,t) = 0, \qquad f_2(x,y,z,t) = 0. \tag{1.68}$$

Očigledno, ove jednačine su jednačine reonomnih veza. Ako je kriva linija nepokretna u prostoru veze su oblika

$$f_1(x, y, z) = 0, \qquad f_2(x, y, z) = 0, \tag{1.69}$$

odnosno te veze su stacionarne ili skleronomne. Kao što se videlo do sada kretanje slobodne materijalne tačke opisuje se preko tri nezavisne koordinate x, y i z u funkciji vremena. Očigledno je da je ako je tačka primorana da se kreće po vezi stepen njene pokretljivosti smanjen. U vezi sa pokretljivošću tačke uvodi se pojam broja stepeni slobode kretanja kao razlika broja koordinata tačke i broja jednačina veza koje deluju na tačku.

Tako tačka koja se kreće po površini ima

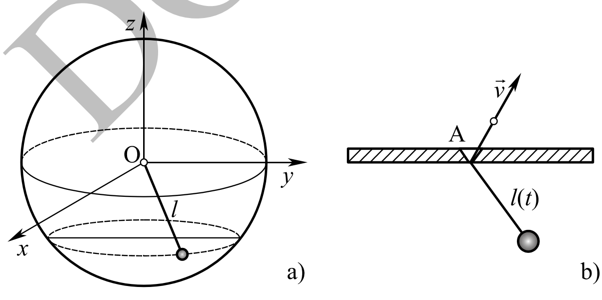
$$\sigma = 3 - 1 = 2,$$

odnosno dva stepena slobode kretanja. Ovo zbog toga što pri kretanju tačke po površini nisu sve tri koordinate x, y i z nezavisne već između njih postoji jedna veza (1.66) ili (1.67). To znači da se iz relacije (1.66) ili (1.67) može ma koja Dekartova koordinata izraziti preko preostale dve nezavisne Dekartove koordinate. Vidi se da broj stepeni slobode kretanja odgovara broju nezavisnih koordinata upotrebljenih za određivanje položaja tačke u prostoru tokom kretanja.

Tačka koja se kreće po krivoj liniji ima

$$\sigma = 3 - 2 = 1$$

odnosno jedan stepen slobode kretanja.



Slika 1.29:

Ako je reakcija veze u pravcu normale na vezu kaže se da je veza idealna. Ako je površina ili kriva linija po kojoj se tačka kreće hrapava, pa reakcija veze ne pada u pravac normale na površinu ili liniju veza je neidealna.

Navodi se nekoliko primera veza.

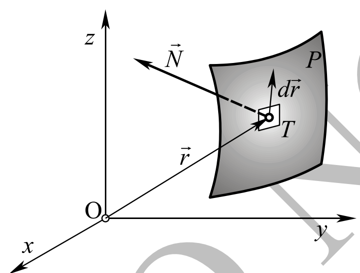
Ako je materijalna tačka vezana za jedan kraj lakog štapa koji je drugim krajem vezan za sferni nepokretan zglob O onda štap predstavlja stacionarnu vezu za štap (Slika 1.29a). Ako je štap dužine l jednačina veze glasi

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - l^2 = 0.$$

Ako je materijalna tačka vezana za uže čija se dužina menja tokom vremena (Slika 1.29b)Kao primer nestacionarne veze može se posmatrati klatno pro-menljive dužine. Ovo klatno je izvedeno tako što se teška materijalna tačka veže za nerastegljivi konac koji se uvlači kroz nepokretan otvor A. Pri tome je dužina klatna promenljiva tokom vremena $l = l\,(t)$. Sada je jednačina veze (Slika 1.29b) nestacionarna

$$f(x, y, z, t) = x^2 + y^2 + z^2 - l^2(t) = 0.$$

1.11.3 Kretanje materijalne tačke po glatkoj nepokretnoj površini. Prvi integrali



Slika 1.30:

Neka se materijalna tačka mase m kreće po glatkoj nepokretnoj površini (Slika 1.30). čija je jednačina. Pri ovom kretanju važi zakon (1.51) o elementarnoj promeni kinetičke energije, odnosno $dE_k = dA$. Ako je veza idealna reakcija veze pada u pravac normale na površinu pa je elementarni rad te sile jednak nuli. Ako je sila potencijalna elementarni rad je $dA = -d\Pi$, gde je Π potencijalna energija sile $\overrightarrow{F}$ pa se iz (1.40) i (1.51) dobija

$$dE_k = -d\Pi,$$

odnosno

$$d(E_k + \Pi) = 0.$$

Pa je

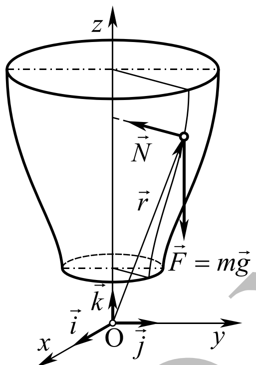
$$E_k + \Pi = E = const. \tag{1.70}$$

Ovde je E zbir kinetičke energije E_k materijalne tačke i potencijalne energije Π sila koje deluju na materijalnu tačku. Vrednost konstante E se izračunava iz početnih uslova kretanja. Znači, ako je sila $\overrightarrow{F}$ potencijalna i površina po kojoj se tačka kreće glatka onda važi zakon o održanju totalne mehaničke energije materijalne tačke.

1.11.4 Kretanje materijalne tačke po obrtnoj površini

Pretpostavimo da je površina (Slika 1.31) po kojoj se materijalna tačka kreće obrtna površina oko ose z. Neka na tačku deluje aktivna sila $\overrightarrow{F}$ i reakcija idealno glatke površine $\overrightarrow{N}$. Ovde se primenjuje zakon o promeni momenta količine kretanja za tačku O. Prema (1.50) taj zakon glasi

$$\dot{\overrightarrow{L}}_O = \overrightarrow{M}_O^{\overrightarrow{F}} + \overrightarrow{M}_O^{\overrightarrow{N}}, \tag{1.71}$$



Slika 1.31:

odnosno izvod po vremenu momenta količine kretanja materijalne tačke za nepomičnu tačku O jednak je momentu svih sila za istu momentnu tačku. Ovde su

$$\overrightarrow{M}_O^{\overrightarrow{F}} = \overrightarrow{r} \times \overrightarrow{F}, \quad \overrightarrow{M}_O^{\overrightarrow{N}} = \overrightarrow{r} \times \overrightarrow{N},$$

$\overrightarrow{M}_O^{\overrightarrow{F}}$ momenti svih aktivnih sila $\overrightarrow{F}$ i $\overrightarrow{M}_O^{\overrightarrow{N}}$ moment reakcije veze $\overrightarrow{N}$ za tačku O.

Skalarnim množenjem ove jednačine jediničnim vektorom $\overrightarrow{k}$ dobija se njena projekcija na osu z pa je

$$\dot{\overrightarrow{L}}_O \cdot \overrightarrow{k} = \overrightarrow{M}_O^{\overrightarrow{F}} \cdot \overrightarrow{k} + \overrightarrow{M}_O^{\overrightarrow{N}} \cdot \overrightarrow{k},$$

odnosno

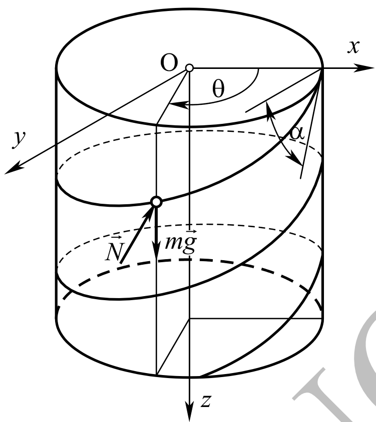
$$\dot{L}_z = M_z^{\overrightarrow{F}} + M_z^{\overrightarrow{N}}.$$

Ako se tačka kreće pod dejstvom sile zemljine teže onda je $\overrightarrow{F} = -mg\overrightarrow{k}$, odnosno ta sila je paralelna sa osom z. Reakcija $\overrightarrow{N}$ seče osu z. Znači ove dve sile nemaju momente za osu z, odnosno $M_z^{\overrightarrow{F}} = 0$ i $M_z^{\overrightarrow{N}} = 0$, pa sledi da je

$$L_z = L_{z0} = const., \tag{1.72}$$

Znači ako se teška tačka kreće po obrtnoj glatkoj površini kojoj je vertikalna osa z osa simetrije onda je moment količine kretanja materijalne tačke za osu z konstantan. Jednačina (1.72) je takođe prvi integral jednačine (1.65).

Primer 8 *Po glatkoj unutrašnjoj površini omotača vertikalnog kružnog cilindra poluprečnika R, kreće se pod dejstvom sile zemljine teže materijalna tačka mase m. Intenzitet početne brzine zaklapa sa horizontom ugao α. Odrediti kretanje tačke i reakciju veze.*



Slika 1.32:

Zadatak se rešava u dve etape. Prvo se nalazi kretanje tačke po površini, a zatim određuje reakcija veze. Pošto je površina glatka i obrtna oko ose z i pošto je sila koja izaziva kretanje sila zemljine teže, za vreme kretanja važe prvi integrali (1.70) i (1.72). Pošto kretanje tačke po površini ima dva stepena slobode kretanja ova dva prva integrala su dovoljna za rešavanje zadatka i nije potrebno u ovom delu zadatka koristiti diferencijalne jednačine kretanja tačke.

Pošto se tačka kreće po cilindričnoj površini, za nalaženje kretanja, zgodno je koristiti cilindrične koordinate θ i z. Ako je položaj tačke određen Dekartovim koordinatama x, y i z.Veza Dekartovih i cilindričnih koordinata je data sa (vidi sliku 1.32)

$$x = R\cos\theta, \qquad y = R\sin\theta, \tag{1.73}$$

Diferenciranjem po vremenu ovih izraza dobija se

$$\dot{x} = -R\dot{\theta}\sin\theta, \qquad \dot{y} = R\dot{\theta}\cos\theta, \tag{1.74}$$

pa je kvadrat brzine materijalne tačke u cilindričnim koordinatama

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = R^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2.$$

i kinetička energija

$$E_k = \frac{m}{2}\left(R^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2\right).$$

Potencijalna energija sile zemljine teže je

$$\Pi = -mgz,$$

pa je totalna mehanička energija

$$E = \frac{m}{2}\left(R^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2\right) - mgz.$$

Totalna mehanička energija se ne menja tokom kretanja tačke. Njena vrednost u početnom trenutku kretanja za $z = 0$ iznosi

$$E = \frac{mv_0^2}{2},$$

pa je prvi integral kretanja tačke

$$\frac{m}{2}\left(R^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2\right) - mgz = \frac{mv_0^2}{2}. \tag{1.75}$$

Drugi prvi integral ovog kretanja tačke je moment količine kretanja tačke za z osu. Po definiciji je

$$\overrightarrow{L}_0 = \overrightarrow{r} \times m\overrightarrow{v} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ x & y & z \\ m\dot{x} & m\dot{y} & m\dot{z} \end{vmatrix}.$$

Projekcija momenta količine kretanja na osu z je moment količine kretanja za tu osu, pa je vrednost za L_z jednaka subdeterminanti uz ort $\overrightarrow{k}$

$$L_z = mx\dot{y} - my\dot{x}.$$

Zamenom (1.73) i (1.74) u ovaj izraz dobija se prvi integral u obliku

$$L_z = mR^2\dot{\theta} = const.$$

Pošto je ovaj izraz konstantan to je njegova vrednost u početku kretanja

$$L_{z0} = mR^2\dot{\theta}_0 = mR(R\dot{\theta}_0) = mRv_{c0} = mRv_0 \cos\alpha,$$

gde je v_{c0} cirkularna brzina tačke u početnom trenutku kretanja. Odavde se dobija

$$\dot{\theta} = \frac{v_0}{R}\cos\alpha, \tag{1.76}$$

odnosno posle integracije

$$\theta = \frac{v_0}{R} t\cos\alpha + C,$$

gde je C konstanta integracije. Kako je u početnom trenutku $t = 0$ i $\theta = 0$ sledi da je $C = 0$ pa se dobija

$$\theta = \frac{v_0}{R} t\cos\alpha. \tag{1.77}$$

Zamenom (1.76) u (1.75) dobija se

$$v_0^2\cos^2\alpha + \dot{z}^2 - 2gz = v_0^2,$$

$$\dot{z} = \sqrt{v_0^2\sin^2\alpha + 2gz},$$

odnosno posle razdvajanja promenljivih

$$\frac{dz}{\sqrt{v_0^2\sin^2\alpha + 2gz}} = dt.$$

Integracija ovog izraza dovodi do

$$\sqrt{v_0^2\sin^2\alpha + 2gz} = gt + C_1.$$

Pošto je za $t = 0$ i $z = 0$ sledi da je

$$C_1 = v_0\sin\alpha$$

pa je konačno

$$z = \frac{gt^2}{2} + tv_0\sin\alpha. \tag{1.78}$$

Zamenom (1.77) u (1.73) dobijaju se jednačine kretanja materijalne tačke po cilindru

$$\begin{aligned} x &= R\cos\left(\frac{v_0}{R} t\cos\alpha\right), \\ y &= R\sin\left(\frac{v_0}{R} t\cos\alpha\right), \\ z &= \frac{gt^2}{2} + tv_0\sin\alpha. \end{aligned} \tag{1.79}$$

Konačne jednačine kretanja (1.79) su parametarske jednačine zavojnice koja je prikazana na slici 1.32. Ovim je prvi deo zadatka rešen.

Drugi deo zadatka, odnosno pronalaženje reakcije veze, vrši se pomoću osnovne diferencijalne jednačine kretanja

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} + \vec{N}.$$

Odavde je

$$\vec{N} = m\ddot{\vec{r}} - \vec{F}. \tag{1.80}$$

Pošto je $\vec{r} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$, gde su $\vec{i}$, $\vec{j}$ i $\vec{k}$ konstantni jedinični vektori koordinatnog sistema $Oxyz$, dobija se

$$\begin{aligned}
\ddot{x} &= -\left(\frac{v_0^2}{R}\cos^2\alpha\right)\cos(\frac{v_0}{R}t\cos\alpha),\\
\ddot{y} &= -\left(\frac{v_0^2}{R}\cos^2\alpha\right)\sin(\frac{v_0}{R}t\cos\alpha),\\
\ddot{z} &= g.
\end{aligned}$$

Sada je

$$\ddot{\vec{r}} = -\left(\frac{v_0^2}{R}\cos^2\alpha\right)\left[\vec{i}\cos(\frac{v_0}{R}t\cos\alpha) + \vec{j}\sin(\frac{v_0}{R}t\cos\alpha)\right] - g\,\vec{k},$$

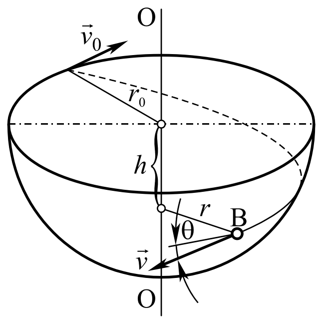
a iz (1.80) i $\vec{F} = mg\,\vec{k}$ sledi

$$\vec{N} = -\left(\frac{mv_0^2}{R}\cos^2\alpha\right)\left[\vec{i}\cos(\frac{v_0}{R}t\cos\alpha) + \vec{j}\sin(\frac{v_0}{R}t\cos\alpha)\right].$$

Intenzitet ove reakcije veze iznosi

$$N = \sqrt{N_x^2 + N_y^2} = \frac{mv_0^2}{R}\cos^2\alpha.$$

Primer 9 *Materijalnoj tački mase m data je početna brzina v_0 koja ima pravac horizontalne tangente u tački A, glatke polusferične čaše. U početnom trenutku rastojanje tačke od vertikalne ose simetrije je r_0. Tokom kretanja tačka prođe kroz tačku B koja se nalazi na rastojanju h ispod tačke A, mereno po vertikali, a odgovarajuće rastojanje od ose simetrije je r. U tom položaju vektor brzine tačke gradi ugao θ sa horizontalnom ravni (vidi sliku 1.33). Odrediti ugao θ.*



Slika 1.33:

Sile koje deluju na tačku su sila zemljine teže i normalna reakcija polusferične čaše. Pošto ni jedna od ovih sila nema moment u odnosu na osu $O-O$, moment količine kretanja za ovu osu je konstantan. To znači da je

$$mv_0r_0 = mvr\cos\theta. \tag{1.81}$$

Pošto je i totalna mehanička energija konstantna dobija se i

$$\frac{mv^2}{2} - mgh = \frac{mv_0^2}{2}.$$

Odavde je

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2gh}. \tag{1.82}$$

Zamenom (1.82) u (1.81) i vodeći računa da je $r^2 = r_0^2 - h^2$ dobija se

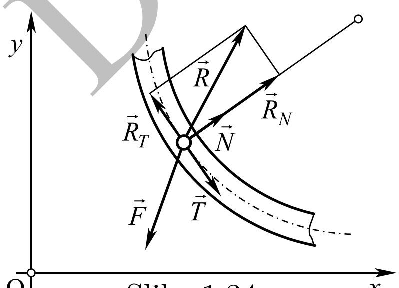
$$v_0r_0 = \sqrt{v_0^2 + 2gh}\sqrt{r_0^2 - h^2}\cos\theta.$$

Konačno je

$$\theta = \arccos\frac{1}{\sqrt{1+\frac{2gh}{v_0^2}}\sqrt{1-\left(\frac{h}{r_0}\right)^2}}.$$

1.11.5 Kretanje tačke po krivoj liniji

Posmatra se kretanje materijalne tačka u jednoj ravni po nepokretnoj krivoj liniji. Primer takvog kretanja je kretanje tačke u krivolinijskoj cevi, koja se nalazi recimo u ravni Oxy (Slika 1.34).



Slika 1.34:

Za proučavanje ovog kretanja najpodesnije su jednačine kretanja projektovane na ose prirodnog koordinatnog sistema jediničnog vektora tangente $\overrightarrow{T}$ i glavne normale $\overrightarrow{N}$. Neka na materijalnu tačku M deluje zadata sila $\overrightarrow{F}$ koja leži u ravni Oxy.

Saglasno principu oslobađanja od veza zameni se dejstvo veze njenom reakcijom $\overrightarrow{R}$ pa se primenom jednačina (1.19) dobija

$$\begin{aligned} m\ddot{s} &= F_T + R_T, \\ \frac{m\dot{s}^2}{\rho} &= F_N + R_N, \end{aligned} \tag{1.83}$$

gde su F_T, F_N, R_T i R_N projekcije aktivnih sila i sila reakcije veze na pravac tangente i glavne normale trajektorije pokretne tačke. Kao što je ranije naglašeno reakcija veze $\overrightarrow{R}$ u opštem slučaju je nepoznata te se moraju vršiti izvesne dopunske pretpostavke o njenom karakteru. U slučaju kada je linija glatka, odnosno kada nema nikakvih sila trenja između pokretne tačke i linije, ukupna reakcija veza pada u pravac glavne normale krive linije, pa je tada $R_T = 0$. gde je R_N ukupna reakcija veze ($R_T = 0$).

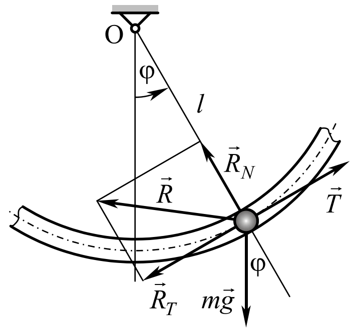
Pošto tačka koja se kreće po krivoj liniji u jednoj ravni ima jedan stepen slobode kretanja za određivanje njenog kretanja dovoljan je samo jedan parametar u funkciji vremena, na primer luk s. Drugim rečima kretanje tačke po ravanskoj krivoj liniji potpuno je određeno ako je poznat zakon $s(t)$.

Jasno je da je za određivanje kretanja dovoljna prva jednačina (1.83), gde je $R_T = 0$, a da druga jednačina, posle integracije prve, služi za određivanje reakcije veze R_N.

Ako je veza idealna i ako je sila F potencijalna za ovaj problem kretanja važi integral energije (1.70). Znači, ako je veza idealna i ako su aktivne sile potencijalne ne mora se koristiti prva jednačina (1.83) već njen prvi integral (1.70).

Primer 10 *Kretanje matematičkog klatna kroz sredinu sa otporom*

Kao primer kretanja materijalne tačke po neidealnoj vezi, proučavaju se male oscilacije matematičkog klatna kroz sredinu sa otporom. Primer ovakvog kretanja je kretanje teške materijalne tačke kroz viskoznu tečnost u kružnoj cevi (slika 1.35). Pod matematičkim klatnom podrazumeva se teret malih dimenzija obešen o nerastegljiv konac ili lak štap dužine l vezan za nepokretan oslonac O i koji vrši oscilovanje u vertikalnoj ravni.



Slika 1.35:

Neka se usvoji da je tangencijalna komponenta reakcije veze linearna funkcija brzine, odnosno

$$R_T = 2kv = 2kl\dot{\varphi}, \tag{1.84}$$

gde je koeficijent viskoznog trenja k pozitivna konstanta. Sada je diferencijalna jednačina kretanja, prema (1.70)

$$m\ddot{s} = -mg\sin\varphi - 2kl\dot{\varphi}$$

pošto je $s = l\varphi$. Uvođenjem oznaka

$$\frac{g}{l} = \omega^2, \quad \frac{k}{m} = \delta,$$

dobija se

$$\ddot{\varphi} + 2\delta\dot{\varphi} + \omega^2 \sin\varphi = 0.$$

Ako se zadrži na malim oscilacijama, kada je $\sin\varphi \approx \varphi$, konačno se dolazi do jednačine

$$\ddot{\varphi} + 2\delta\dot{\varphi} + \omega^2\varphi = 0. \tag{1.85}$$

Za integraciju ove jednačine uvodi se smena

$$\varphi(t) = z(t)e^{-\delta t}, \tag{1.86}$$

gde je $z(t)$ nova nepoznata funkcija vremena. Ako se prvi i drugi izvod ovog izraza zamene u jednačinu (1.85) i tako dobijena jednačina podeli sa $e^{-\delta t}$ dobija se

$$\ddot{z} + (\omega^2 - \delta^2)z = 0. \tag{1.87}$$

U daljem razmatranju razlikuju se dva slučaja:

1. $\omega^2 - \delta^2 > 0$ slabo prigušivanje,

2. $\omega^2 - \delta^2 < 0$ jako prigušivanje.

Slučaj kada je $\omega^2 - \delta^2 = 0$ je teško ostvarljiv pa se ne razmatra.

1. Neka je $\omega^2 - \delta^2 = p^2 > 0$ tada jednačina (1.87) postaje

$$\ddot{z} + p^2 z = 0. \qquad (1.88)$$

Opšte rešenje ove jednačine glasi

$$z = C_1 \cos pt + C_2 \sin pt,$$

pa se zamenom ovog izraza u (1.86) dobija

$$\varphi = e^{-\delta t}(C_1 \cos pt + C_2 \sin pt), \qquad (1.89)$$

gde su C_1 i C_2 integracione konstante. Ovo kretanje se odvija između graničnih krivih $+e^{-\delta t}$ i $-e^{-\delta t}$. Iz ovog izraza se vidi da se zbog člana $e^{-\delta t}$ ovo kretanje vrlo brzo gubi i da su amplitude ovog oscilovanja tokom vremena sve manje i manje. Kretanje (1.89) nije periodično ali se ipak maksimalna rastojanja matematičkog klatna od vertikalnog položaja događaju posle svakog protoka vremena $T = 2\pi/p$. Ovakvo kretanje se naziva kvaziperiodično a vreme $T = 2\pi/p$ je kvaziperiod ovog kretanja.

2. Neka je $\omega^2 - \delta^2 = -q^2 < 0$, tada je

$$\ddot{z} - q^2 z = 0.$$

Opšte rešenje ove jednačine je

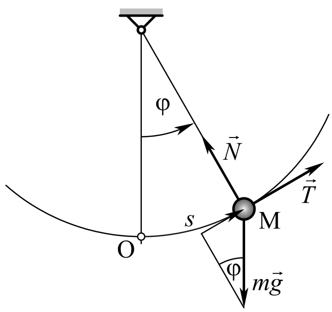
$$z = D_1 e^{qt} + D_2 e^{-qt},$$

i kretanje oblika

$$\varphi = e^{-\delta t}(D_1 e^{qt} + D_2 e^{-qt}),$$

gde su D_1 i D_2 integracione konstante. Pošto je $-\delta + q < 0$ i $-\delta - q < 0$ ovo kretanje brzo iščezava a kretanje nema nikakve periodične osobine. Kretanje se asimptotski približava ravnotežnom položaju bez presecanja vremenske ose.

Primer 11 *Matematičko klatno bez otporne sile*



Slika 1.36:

Razmatra se posebno oscilovanje matematičkog klatna bez sile otpora. Kada se tačka izvede iz ravnotežnog položaja i kada joj se saopšti početna brzina u vertikalnoj ravni ona počinje da se kreće u toj ravni po delu kruga poluprečnika l. Pošto je sa slike 1.36 $s = l\varphi$ i za male vrednosti ugla φ, odnosno kada je $|\varphi| \ll 1$, važi aproksimacija $\sin\varphi \approx \varphi$, pa ta jednačina (1.88) glasi

$$\ddot{\varphi} + \omega^2\varphi = 0,$$

gde je

$$\omega^2 = \frac{g}{l}. \tag{1.90}$$

Iz teorije diferencijalnih jednačina poznato je da je opšte rešenje ove diferencijalne jednačine drugog reda

$$\varphi = C_1 \cos\omega t + C_2 \sin\omega t,$$

gde su C_1 i C_2 integracione konstante. Neka je klatno u početnom trenutku vremena $t = 0$ bilo zaokrenuto za ugao $\varphi = \varphi_0$ i pušteno da se kreće bez početne brzine, odnosno za $t = 0$ je $\dot{\varphi}_0 = 0$ pa integracione konstante imaju vrednosti

$$C_1 = \varphi_0, \quad C_2 = 0,$$

a kretanje klatna je određeno izrazom

$$\varphi = \varphi_0 \cos\omega t. \tag{1.91}$$

Veličina ω naziva se kružna frekvencija oscilovanja. Ugao φ_0 je amplituda oscilovanja a veličina

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}, \tag{1.92}$$

je period oscilovanja matematičkog klatna. I matematičko klatno vrši slobodne harmonijske oscilacije.

1.11.6 Cikloidno klatno

Proučava se kretanje teške materijalne tačke po glatkoj cikloidi u vertikalnoj ravni Oxy čije su parametarske jednačine oblika

$$\begin{aligned} x &= R(\varphi + \sin\varphi), \\ y &= R(1 - \cos\varphi). \end{aligned} \tag{1.93}$$

Cikloida je trajektorija tačke na obodu točka poluprečnika R koji se kotrlja bez klizanja po horizontalnoj ravni koja je na slici 1.37 izvučena isprekidano. Parametar φ je ugao obrtanja ovog točka. Iz jednačina (1.93) se vidi da je za $\varphi = 0$, $x = 0$ i $y = 0$.

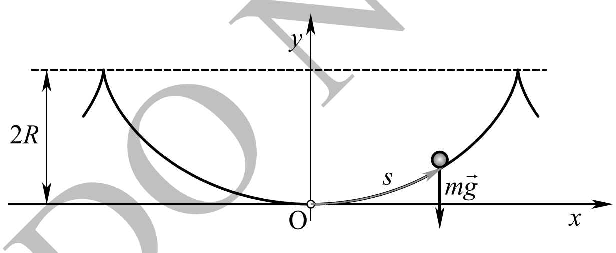
Problem se rešava u prirodnom koordinatnom sistemu pa se luk cikloide s izražava u funkciji parametra φ. Iz (1.93) sledi

$$dx = R(1 + \cos\varphi)d\varphi, \quad dy = R\sin\varphi d\varphi,$$

pa je

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = 2R^2(1 + \cos\varphi)d\varphi^2 = 4R^2\cos^2\frac{\varphi}{2}d\varphi^2,$$

$$ds = 2R\cos\frac{\varphi}{2}d\varphi.$$



Slika 1.37:

Odavde se posle integracije dobija

$$s = 4R\sin\frac{\varphi}{2} + C,$$

gde je C konstanta integracije. Pošto je za $\varphi = 0$ i $s = 0$ sledi da je $C = 0$ i

$$s = 4R\sin\frac{\varphi}{2}. \tag{1.94}$$

Za rešavanje ovog problema ne koristi se diferencijalna jednačina kretanja več njen prvi integral, integral energije (1.70), pa je

$$\frac{m\dot{s}^2}{2} + mgy = E = const. \tag{1.95}$$

Ako se koristi (1.94) i parametarska vrednost za y napisana u obliku $y = 2R\sin^2(\varphi/2)$ dobija se

$$\frac{m\dot{s}^2}{2} + \frac{mgs^2}{8R} = E.$$

Brojna vrednost integracione konstante E određuje se iz početnih uslova. Neka je u trenutku $t = 0$ tačka bila na rastojanju $s = s_0$ mereno od temena cikloide i neka je njena početna brzina $\dot{s} = 0$ tada je

$$E = \frac{mgs_0^2}{8R},$$

i prvi integral postaje

$$\frac{m\dot{s}^2}{2} + \frac{mgs^2}{8R} = \frac{mgs_0^2}{8R}.$$

Odavde je

$$\dot{s} = \omega\sqrt{s_0^2 - s^2}, \tag{1.96}$$

gde je

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{4R}}. \tag{1.97}$$

Pošto je $\dot{s} = ds/dt$, razdvajanjem promenljivih u (1.96) dobija se

$$\frac{ds}{\sqrt{s_0^2 - s^2}} = \omega dt$$

i posle integracije

$$\arcsin\frac{s}{s_0} = \omega t + C_1,$$

gde je C_1 integraciona konstanta. Iz početnog uslova da je za $t = 0$ $s = s_0$ sledi da je $C_1 = \pi/2$ pa je konačno

$$s = s_0 \cos\omega t. \tag{1.98}$$

Znači materijalna tačka se kreće po cikloidi po zakonu harmonijskog oscilovanja sa periodom

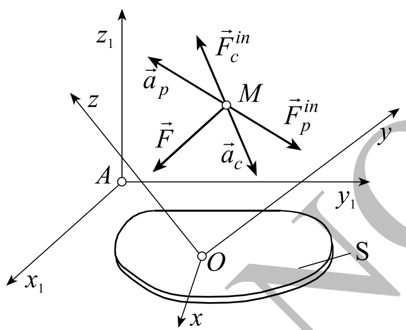
$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{4R}{g}}, \tag{1.99}$$

i kružnom frekvencijom (1.97).

Interesantno je da se podvuče, da period oscilovanja (1.99) ne zavisi od početne amplitude s_0. To znači da tačka puštena niz cikloidu iz ma koje njene tačke ima isti period oscilovanja. Ova osobina oscilovanja se zove *izohronost*. Napominje se da ovu važnu osobinu matematičko klatno nema. Može se reći da period oscilovanja matematičkog klatna poseduje osobinu izohronosti samo ako su oscilacije izrazito male dok osobina izohronosti cikloidnog klatna nije uopšte zasnovana na linearizaciji problema kretanja.

1.12 Relativno kretanje materijalne tačke

1.12.1 Zadatak dinamike relativnog kretanja



Slika 1.38:

Prilikom izučavanja kretanja materijalne tačke do sada stalna pretpostavka je bila da se tačka kreće u odnosu na apsolutno nepokretni prostor, odnosno u odnosu na apsolutno nepokretan koordinatni sistem $Ax_1y_1z_1$.

Proučimo kretanje materijalne tačke M mase m u odnosu na koordinatni sistem $Oxyz$, koji je vezan za telo S, koje se kreće na proizvoljan način u prostoru u nepokretnom koordinatnom sistemu $Ax_1y_1z_1$ (Slika 1.38). Kretanje materijalne tačke u odnosu na nepokretan koordinatni $Ax_1y_1z_1$ sistem je apsolutno dok je njeno kretanje u odnosu na pokretan koordinatni sistem $Oxyz$ relativno. Znači, proučava se relativno kretanje tačke u odnosu na pokretan koordinatni sistem $Oxyz$. Kretanje ploče, odnosno koordinatnog sistema $Oxyz$ u odnosu na koordinatni sistem $Ax_1y_1z_1$ zove se prenosno kretanje. Problem je da se, znajući prenosno kretanje i sve aktivne sile koje deluju na materijalnu tačku, odredi relativno kretanje tačke i sve reakcije veza koje deluju na tačku, ako je kretanje tačke ograničeno vezama. Ako je $\overrightarrow{F}$ rezultanta svih sila koje deluju na tačku i ako je $\overrightarrow{a}$ apsolutno ubrzanje tačke, onda se kretanje tačke u nepokretnom koordinatnom sistemu $Ax_1y_1z_1$ odvija u skladu sa drugim Njutnovim zakonom

$$m\overrightarrow{a} = \overrightarrow{F}.$$

Iz kinematike je poznato da je apsolutno ubrzanje tačke vektorski zbir prenosnog, relativnog i Koriolisovog ubrzanja, tj. važi

$$\overrightarrow{a}=\overrightarrow{a}_p+\overrightarrow{a}_r+\overrightarrow{a}_c.$$

Posle zamene ovog izraza u drugi Njutnov zakon, izdvaja se proizvod mase tačke i njenog relativnog ubrzanja. Time se dobija

$$m\overrightarrow{a}_r = \overrightarrow{F} - m\overrightarrow{a}_p - m\overrightarrow{a}_c,$$

ili

$$m\overrightarrow{a}_r = \overrightarrow{F} + \overrightarrow{F}_p^{in} + \overrightarrow{F}_c^{in}, \tag{1.100}$$

gde su

$$\overrightarrow{F}_p^{in} = -m\overrightarrow{a}_p, \quad \overrightarrow{F}_c^{in} = -m\overrightarrow{a}_c, \tag{1.101}$$

prenosna i Koriolisova sila inercije. Ove veličine se nazivaju silama samo zato što one imaju dimenziju sile. Poznato je da je sila rezultat mehaničkog dejstva dva tela, a na osnovu trećeg Njutnovog zakona, ako sila deluje na materijalnu tačku onda mora postojati i drugo telo, izvor te sile, na koje deluje sila istog intenziteta i pravca a suprotnog smera. Za ove sile (1.101) ne postoji takvo telo. U tom smislu ovo nisu prave sile. Sile inercije $\overrightarrow{F}_p^{in}$ i $\overrightarrow{F}_c^{in}$ se javljaju kao posledica posmatranja kretanja tačke u pokretnom neinercijalnom koordinatnom sistemu $Oxyz$. Postavlja se pitanje s kojim razlogom se vektori $\overrightarrow{F}_p^{in}$ i $\overrightarrow{F}_c^{in}$ zovu silama. Zovemo ih silama zbog fizičkih dimenzija koje imaju i neposrednoj mogućnosti merenja ovih veličina. Ovo su međutim samo *potrebni* ali ne i *dovoljni* uslovi da bi se neka veličina nazvala silom. Kao što je ranije rečeno svaku stvarnu silu koja deluje na telo moguće je okarakterisati njenim izvorom, odnosno ukazivanjem na telo (ili tela) koja su izvori te sile, kao sile uzajamnog dejstva. U tom smislu $\overrightarrow{F}_p^{in}$ i $\overrightarrow{F}_c^{in}$ nisi prave sile, ali je njihovo uvođenje opravdano jer pomaže da se problem relativnog kretanja jednostavnije prouči. Naime, u svakom problemu odredi se prenosno i Koriolisovo ubrzanje tačke i, prema (1.101), u suprotnom smeru od tih ubrzanja dejstvu svih ostalih sila dodaju se ove dve "sile" (Slika 1.38). Zatim se jednačina kretanja (1.100) projektuje na ose pokretnog koordinatnog sistema, koji je uslovno Dekartov, ali može biti i neki drugi. Tim projektovanjem dobijaju se diferencijalne jednačine relativnog kretanja. Da bi se odredilo relativno kretanje, integrali se onoliko jednačina koliko stepeni slobode ima relativno kretanje tačke. Iz ostalih jednačina određuju se nepoznate reakcije veza.

Pored svih ranije definisanih reakcija veza, koje se javljaju pri vezanom kretanju tačke, pri vezanom relativnom kretanju tačke na nju deluje uvek još i jedna reakcija veze u suprotnom smeru od Koriolisove sile inercije.

Ako se relativno kretanje posmatra u Dekartovom pokretnom koordinatnom sistemu $Oxyz$ onda se razlaganjem jednačine (1.100) na ose x, y i z, uzimajući da su relativna ubrzanja tačke

$$a_{rx} = \ddot{x}, \quad a_{ry} = \ddot{y}, \quad a_{rz} = \ddot{z},$$

dobijaju diferencijalne jednačine relativnog kretanja u skalarnom obliku

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= F_x + F_{px}^{in} + F_{cx}^{in}, \\ m\ddot{y} &= F_y + F_{py}^{in} + F_{cy}^{in}, \\ m\ddot{z} &= F_z + F_{pz}^{in} + F_{cz}^{in}. \end{aligned} \tag{1.102}$$

Znači diferencijalne jednačine relativnog kretanja materijalne tačke imaju oblik kao i diferencijalne jednačine kretanja u odnosu na nepokretni koordinatni sistem, ali se dejstvu svih aktivnih sila i reakcija veza dodaju i dejstva prenosne sile i Koriolisove sile inercije.

Specijalni slučajevi relativnog kretanja su:

1. Neka se pokretni koordinatni sistem kreće translatorno. Pošto je tada ugaona brzina prenosnog kretanja $\vec{\omega}_p$ koordinatnog sistema $Oxyz$ jednaka nuli to je Koriolisovo ubrzanje $\vec{a}_c = 2(\vec{\omega}_p \times \vec{v}_r)$ jednako nuli pa je odgovarajuća inercijalna sila $\vec{F}_c^{in}$ jednaka nuli. Prema tome diferencijalna jednačina relativnog kretanja glasi

$$m\vec{a}_r = \vec{F} + \vec{F}_p^{in}. \tag{1.103}$$

2. Neka se koordinatni sistem $Oxyz$ kreće translatorno pravolinijski i ravnomerno. Tada je i $\vec{a}_p = 0$, odnosno i $\vec{F}_p^{in} = 0$ pa je konačno jednačina kretanja

$$m\vec{a}_r = \vec{F}. \tag{1.104}$$

Jednostavnim poređenjem ove jednačine sa jednačinom kretanja u nepokretnom koordinatnom sistemu (1.65) vidi se da su te jednačine potpuno iste. Prema tome, u pokretnom koordinatnom sistemu koji se kreće u odnosu na nepokretni koordinatni sistem, translatorno i jednakom brzinom, drugi Njutnov zakon ima isti oblik kao i u nepokretnom koordinatnom sistemu. Odavde sledi da sve mehaničke pojave, i zakoni, imaju isti oblik kako u jednom tako i u drugom koordinatnom sistemu. Kao što je mnogo ranije rečeno, koordinatni sistemi koji se kreću jedan u odnosu na drugi translatorno, pravolinijski i jednakom brzinom nazivaju se inercijalni koordinatni sistemi. Na ovaj važan rezultat ukazao je još Galilej i nazvao ga *princip relativnosti klasične mehanike*.

3. Slučaj relativne ravnoteže.

   Pretpostavimo da je tačka pod dejstvom sila koje na nju deluju u relativnom miru u odnosu na pokretni koordinatni sistem $Oxyz$. Tada je $\overrightarrow{v}_r = \overrightarrow{0}$ i $\overrightarrow{a}_r = \overrightarrow{0}$, pa je i $\overrightarrow{a}_c = \overrightarrow{0}$. Sada osnovna diferencijalna jednačina relativnog kretanja postaje

$$\overrightarrow{F} + \overrightarrow{F}_p^{in} = \overrightarrow{0}.$$

U slučaju relativne ravnoteže materijalne tačke, zadate sile, sile reakcije veza i prenosna sila inercije su u ravnoteži.

Za kretanje tačke koja se nalazi u relativnoj ravnoteži kaže se, da se kreće stacionarno ili ustaljeno.

Primer 12 *U glatkoj cevi dužine b kreće se materijalna tačka M mase m (Slika 1.39). Cev zaklapa ugao α sa vertikalnom osom oko koje se obrće konstantnom ugaonom brzinom ω. Ako tačka kreće iz tačke O bez početne brzine odrediti u kom trenutku ona napušta cev. Odrediti i reakcije cevi.*

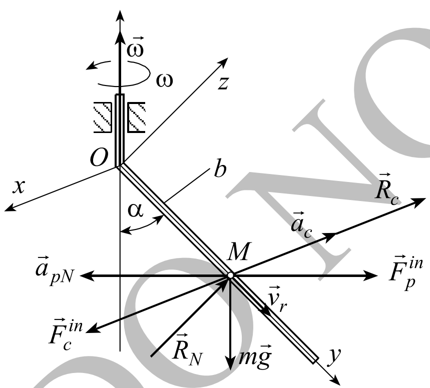
U ovom problemu, prenosno kretanje je obrtanje cevi a relativno kretanje je pravolinijsko kretanje tačke u odnosu na cev. Uoči se ravan cevi i vertikalne ose i neka je to ravan crteža. U ravni crteža u pravcu cevi usvoji se osa y a normalno na cev osa z. Treća osa x je normalna na ravan crteža. Koordinatni početak je u tački O. Prenosno kretanje je obrtanje cevi oko nepomične ose konstantnom ugaonom brzinom ω, pa postoji samo prenosno normalno ubrzanje i odgovarajuća prenosna sila inercije

$$a_p = a_{pN} = (y \sin\alpha)\omega^2, \quad F_p^{in} = m(y\sin\alpha)\omega^2. \tag{A}$$

Prenosno normalno ubrzanje je usmereno prema osi obrtanja, a prema (1.101), prenosna sila inercije je u suprotnom smeru. Relativna brzina tačke je $v_r = \dot{y}$ i pada u pravac y ose. Koriolisovo ubrzanje i odgovarajuća Koriolisova sila inercije glase

$$\begin{aligned} a_c &= 2\omega v_r \sin(\pi - \alpha), \\ F_c^{in} &= 2m\omega\dot{y}\sin\alpha. \end{aligned} \tag{B}$$

Po pravilu Žukovskog, Koriolisovo ubrzanje je normalno na ravan crteža u negativnom smeru x ose, a prema (1.101) Koriolisova sila inercije je u pozitivnom smeru ose x. Na materijalnu tačku još deluju: sila zemljine teže $m\overrightarrow{g}$, uobičajena reakcija glatke cevi $\overrightarrow{R}_N$ i reakcija cevi $\overrightarrow{R}_c$ u pravcu Koriolisove sile inercije.



Slika 1.39:

Pošto je relativno ubrzanje pravolinijskog relativnog kretanja tačke u cevi $\overrightarrow{a}_r = \ddot{y}\,\overrightarrow{j}$, projektovanjem jednačine (1.100) na ose koordinatnog sistema $Oxyz$ dobija se

$$\begin{aligned} 0 &= F_c^{in} - R_c, \\ m\ddot{y} &= mg\cos\alpha + F_{pN}^{in}\sin\alpha, \\ 0 &= -mg\sin\alpha + R_N + F_{pN}^{in}\cos\alpha. \end{aligned} \tag{C}$$

Relativno kretanje ima samo jedan stepen slobode, pa se ono određuje integracijom druge jednačine (C). Koristeći (A) ta jednačina postaje

$$\ddot{y} - y(\omega\sin\alpha)^2 = g\cos\alpha,$$

čije opšte rešenje glasi

$$y = C_1 \exp(\omega t \sin\alpha) + C_2 \exp(-\omega t\sin\alpha) - \frac{g\cos\alpha}{\omega^2\sin^2\alpha},$$

gde su C_1 i C_2 integracione konstante. Koristeći početne uslove, tj. da je $y(0) = 0$ i $\dot{y}(0) = 0$, dobijaju se vrednosti ovih konstanti

$$C_1 = C_2 = \frac{g\cos\alpha}{2\omega^2\sin^2\alpha},$$

odnosno zakon relativnog kretanja tačke M u cevi

$$y = \frac{g\cos\alpha}{\omega^2\sin^2\alpha}\left[\cosh(\omega t\sin\alpha) - 1\right]. \qquad (D)$$

Koristeći (A), (B), (D) i preostale dve jednačine (C), nalaze se reakcije cevi

$$\begin{aligned} R_c &= 2mg(\cos\alpha)\sinh(\omega t\sin\alpha), \\ R_N &= mg\sin\alpha - mg\cos\alpha\cot\alpha\left[\cosh(\omega t\sin\alpha) - 1\right]. \end{aligned}$$

Reakcija cevi R_c je posledica kretanja tačke i ona ne postoji pri relativnom mirovanju tačke u cevi. Deo $mg\sin\alpha$ reakcije R_N postoji i pri mirovanju sistema, dok je drugi deo i tu posledica kretanja. U trenutku t_1 kada tačka izlazi iz cevi $(y = b)$, iz (D) se dobija sledeća jednačina

$$b = \frac{g\cos\alpha}{\omega^2\sin^2\alpha}\left[\cosh(\omega t_1\sin\alpha) - 1\right],$$

čije rešenje po t_1 glasi

$$t_1 = \frac{1}{\omega\sin\alpha}\text{arccosh}\left(1 + \frac{b\omega^2\sin^2\alpha}{g\cos\alpha}\right).$$

1.12.2 Zakon o promeni kinetičke energije materijalne tačke pri relativnom kretanju

Diferencijalne jednačine kretanja materijalne tačke pri relativnom kretanju imaju isti oblik kao i diferencijalne jednačine apsolutnog kretanja s tom razlikom, što u jednačinama za relativno kretanje osim zadatih sila i sila reakcije veza ulaze i prenosna i Koriolisova sila inercije.

S druge strane poznato je da sve opšte teoreme dinamike (teorema o promeni količine kretanja, teorema o promeni momenta količine kretanja, teorema o promeni kinetičke energije), su posledice osnovnog zakona dinamike, odnosno drugog Njutnovog zakona.

Odavde sledi da se sve teoreme dinamike mogu primeniti i na relativno kretanje, ali je jasno, da se prilikom primene ovih teorema na relativno kretanje, moraju uzeti u obzir i prenosna i Koriolisova sila inercije.

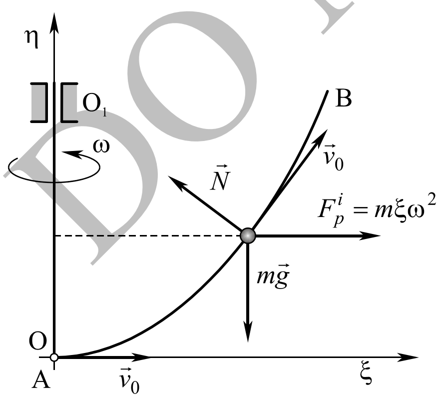
Prilikom sastavljanja zakona o promeni kinetičke energije pri relativnom kretanju neophodno je uzeti i radove prenosne i Koriolisove sile inercije pri relativnom pomeranju materijalne tačke.

Pošto je Koriolisovo ubrzanje uvek normalno na vektoru relativne brzine, odnosno $\overrightarrow{F}_c^{in} \perp \overrightarrow{v}_r$, što znači i na relativno pomeranje tačke $\overrightarrow{dr}$, to je rad $dA = \overrightarrow{F}_c^{in} \cdot \overrightarrow{dr}$ Koriolisove sile inercije pri relativnom kretanju jednak nuli, pa ova sila ne ulazi u jednačinu za promenu kinetičke energije. Prema tome, zakon o promeni kinetičke energije relativnog kretanja glasi

$$\frac{mv_r^2}{2} - \frac{mv_{r0}^2}{2} = A_r^{\overrightarrow{F}} + A_r^{\overrightarrow{F}_p^{in}}, \tag{1.105}$$

gde su v_r i v_{r0} relativna brzina u proizvoljnom i početnom trenutku vremena, $A_r^{\overrightarrow{F}}$ je rad svih aktivnih sila i reakcija veza na relativnom pomeranju a $A_r^{\overrightarrow{F}_p^{in}}$ rad prenosne sile inercije na relativnom pomeranju.

Primer 13 *Za vertikalni štap OO_1 koji se obrće konstantnom brzinom ω učvršćena je žica AB koja leži u vertikalnoj ravni. Na žici se nalazi gladak prsten C mase m. Ako se prsten C u početnom trenutku nalazi u tački A i ako mu je početna brzina v_0 duž žice, odrediti kakav oblik treba da ima žica (jednačinu krive AB), pa da se prsten za sve vreme kreće u odnosu na žicu sa konstantnom brzinom (Slika 1.40).*



Slika 1.40:

Pošto je kriva glatka, reakcija veze ne vrši rad. Na tačku osim ove sile deluje težina mg. Rad ove sile ne zavisi od oblika krive AB pošto je sila potencijalna

$$A^{mg} = -mg\eta.$$

Rad inercijalne sile $F_p^{in} = m\xi\omega^2$ iznosi

$$A(F_p^{in}) = \int_0^{\xi} m\xi\omega^2 d\xi = \frac{m\xi^2\omega^2}{2}.$$

Primenom jednačine (1.105) dobija se

$$\frac{mv_0^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = -mg\eta + \frac{m\xi^2\omega^2}{2}.$$

Odavde se dobija jednačina krive AB u obliku

$$\eta = \frac{\omega^2}{2g}\xi^2,$$

odnosno to je jednačina parabole.

1.12.3 Dalamberov princip za kretanje materijalne tačke

Vrlo je značajna uloga Dalamberovog principa u dinamici jer on jednačine dinamičkog kretanja formira kao jednačine ravnoteže slično jednačinama statike.

Bez obzira što ova razmatranja imaju krajnje formalan karakter, ipak pri rešavanju konkretnih zadataka Dalamberov princip ima veliku primenu zbog svoje logike, jednostavnosti i razumljivosti.

Gleda se kretanje jedne slobodne materijalne tačke mase m na koju deluju sile čija je rezultanta sila $\overrightarrow{F}$. Osnovna jednačina kretanja materijalne tačke glasi

$$m\overrightarrow{a} = \overrightarrow{F}, \tag{1.106}$$

gde je $\overrightarrow{a}$ vektor ubrzanja tačke. Ova jednačina se može napisati u obliku

$$\overrightarrow{F} + \overrightarrow{F}^{(in)} = \overrightarrow{0},$$

gde je

$$\overrightarrow{F}^{(in)} = -m\overrightarrow{a}, \tag{1.107}$$

i gde se $\overrightarrow{F}^{(in)}$ naziva inercijalna sila. Znači slobodna materijalna tačka kreće se tako da su u svakom trenutku vremena rezultanta zadatih sila i sila inercije u ravnoteži.

Ako bi tačka bila neslobodna, onda bi u sve sile bila uključena i reakcija veze $\overrightarrow{R}$, odnosno Dalamberov princip bi glasio

$$\overrightarrow{F} + \overrightarrow{F}^{(in)} + \overrightarrow{R} = \overrightarrow{0}. \tag{1.108}$$