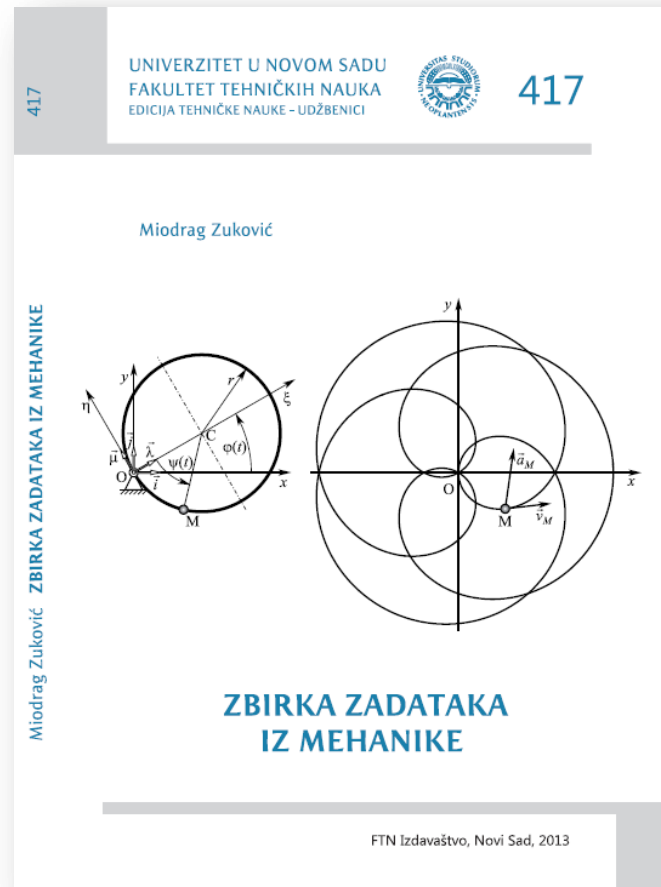
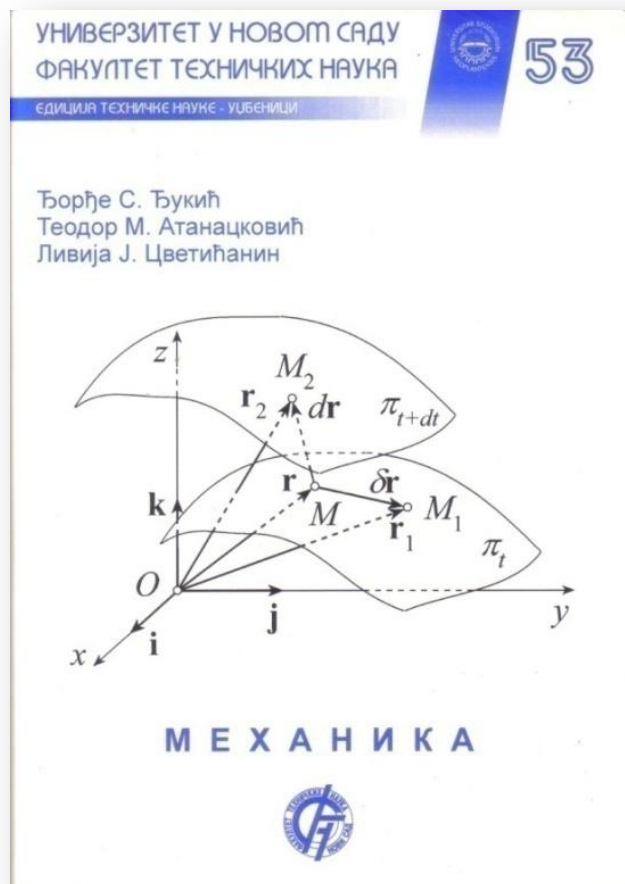


Mehanika 2 (Kinematika)

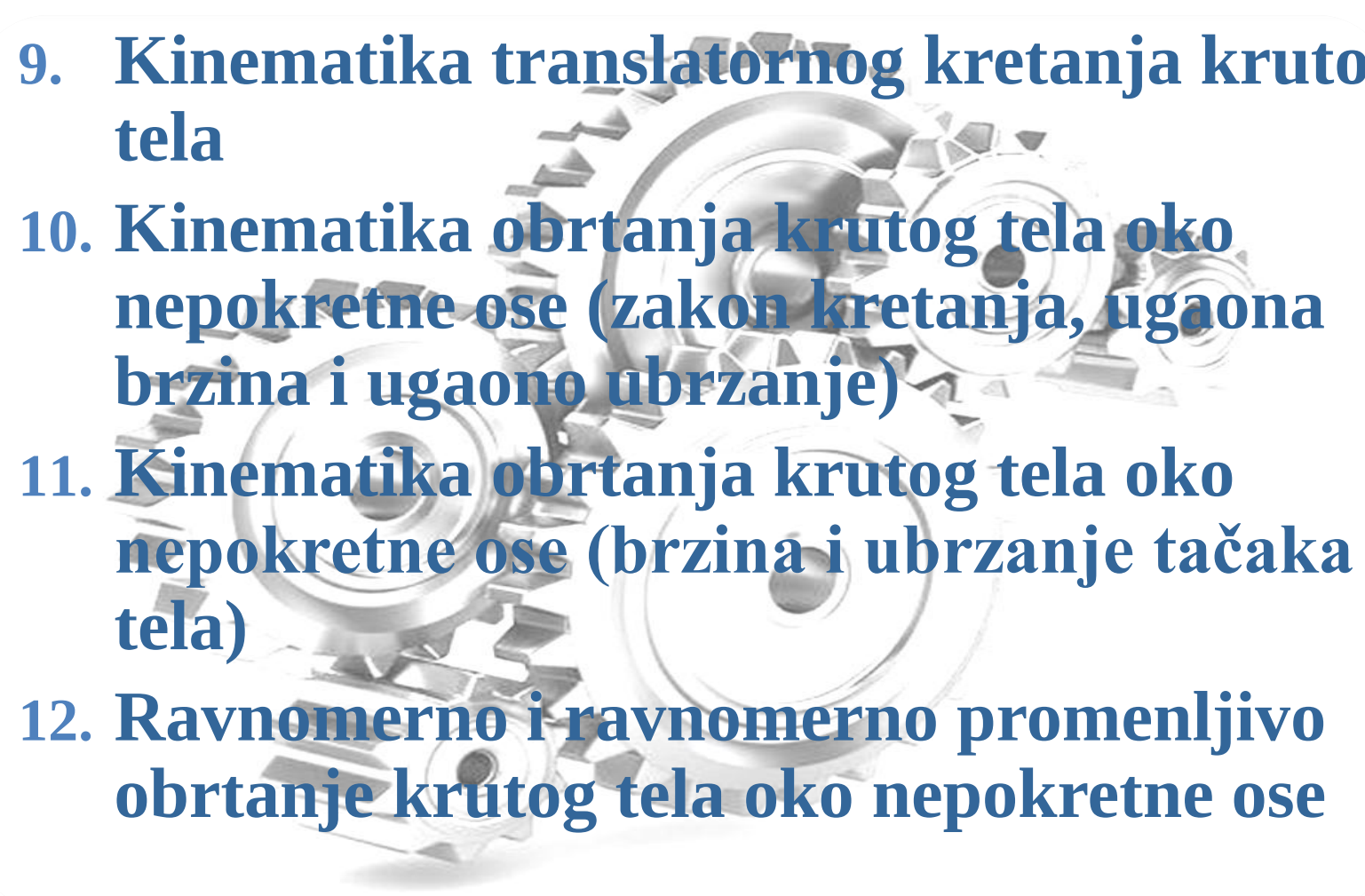
Vežbe 4

Miodrag Zuković
Novi Sad, 2023.

Literatura

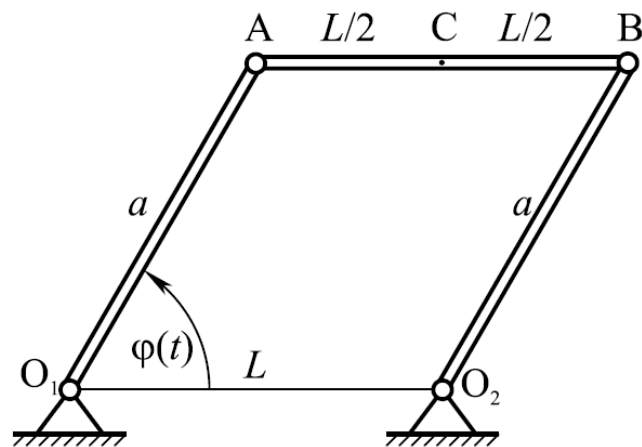


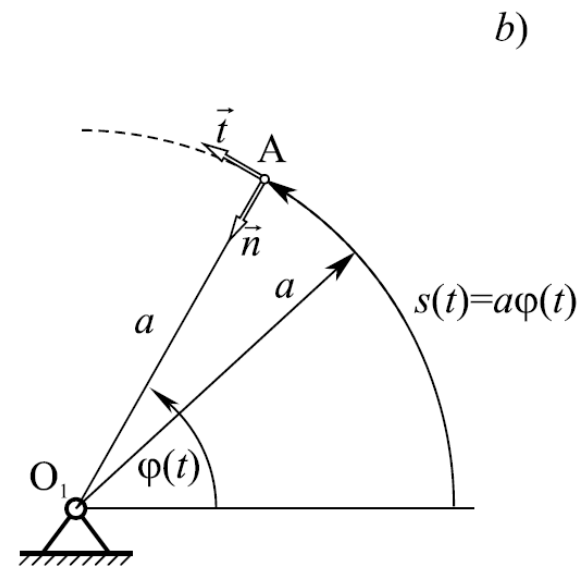
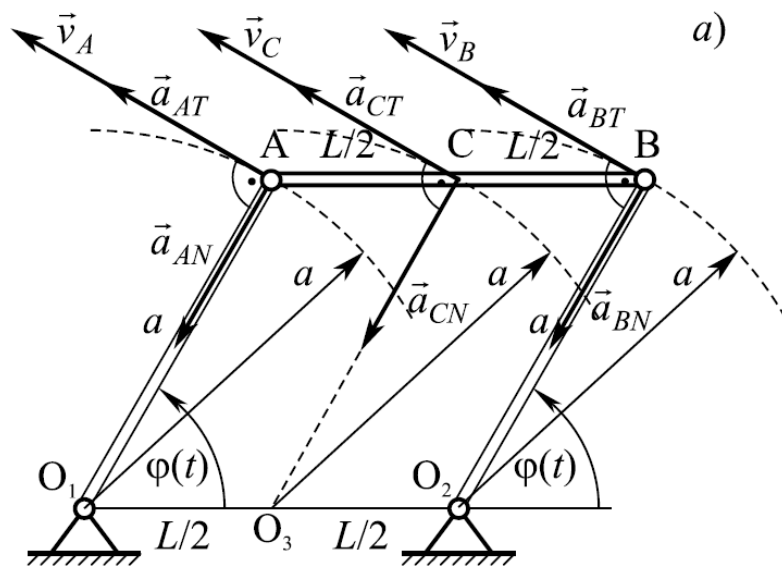
Šta ćemo naučiti?

- 
9. **Kinematika translatornog kretanja krutog tela**
 10. **Kinematika obrtanja krutog tela oko nepokretne ose (zakon kretanja, ugaona brzina i ugaono ubrzanje)**
 11. **Kinematika obrtanja krutog tela oko nepokretne ose (brzina i ubrzanje tačaka tela)**
 12. **Ravnomerno i ravnomerno promenljivo obrtanje krutog tela oko nepokretne ose**

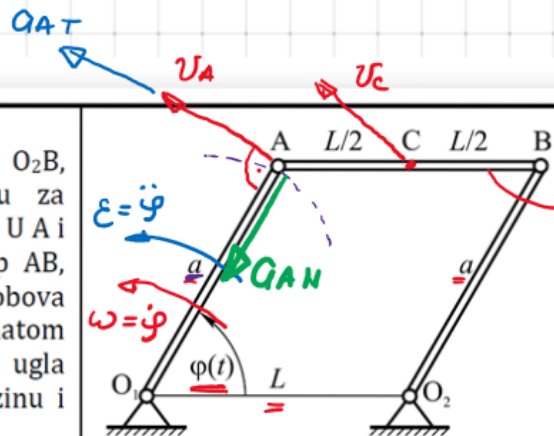
Zadatak 1

Zadatak 2.12 Štapovi O_1A i O_2B , jednakih dužina a , vezani su za podlogu cilindričnim zglobovima. U A i B za njih je zglobno vezan štap AB, dužine L . Rastojanje između zglobova O_1 i O_2 je L . Smatrajući poznatom funkcijom $\varphi(t)$, zakon promene ugla obrtanja štapa O_1A , odrediti brzinu i ubrzanje centra C štapa AB.





Zadatak 2.12 Štapovi O_1A i O_2B , jednakih dužina a , vezani su za podlogu cilindričnim zglobovima. U A i B za njih je zglobno vezan štap AB, dužine L . Rastojanje između zglobova O_1 i O_2 je L . Smatrajući poznatom funkcijom $\varphi(t)$, zakon promene ugla obrtanja štapa O_1A , odrediti brzinu i ubrzanje centra C štapa AB.



ТРАЖЕН.
КР.

$$\vec{v}_C = ? , \vec{a}_C = ?$$

$$\vec{v}_C = \vec{v}_B = \vec{v}_A$$

$$\vec{a}_C = \vec{a}_B = \vec{a}_A$$

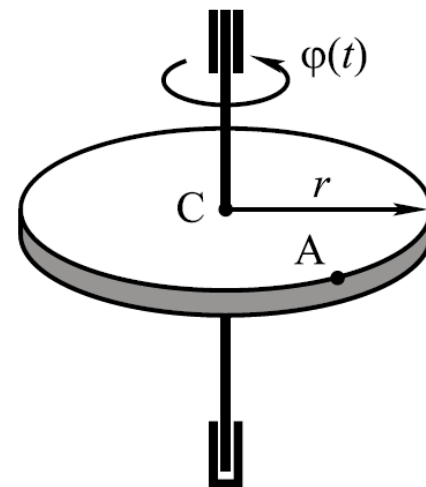
$$\vec{v}_A = \overline{O_1A} \cdot \omega = a \cdot \dot{\varphi}$$

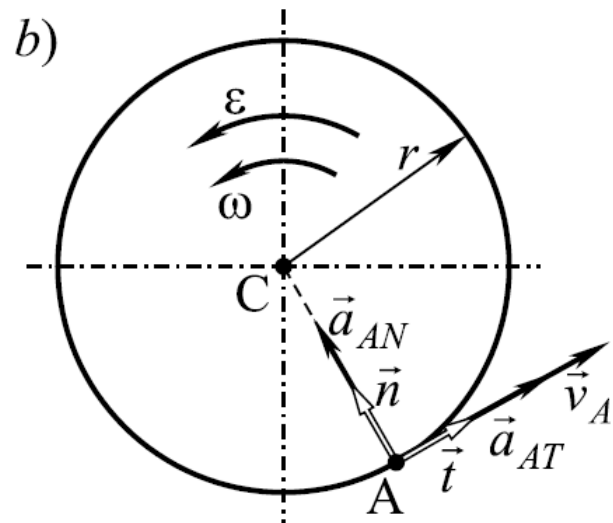
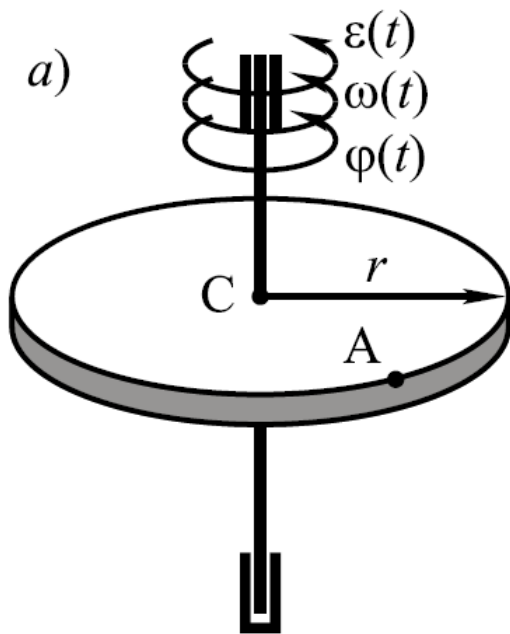
$$Q_{AT} = \overline{O_1A} \cdot \epsilon = a \cdot \ddot{\varphi}$$

$$Q_{AH} = \frac{v_A^2}{a} = \frac{a \omega^2}{a} = a \cdot \omega^2 = a \dot{\varphi}^2$$

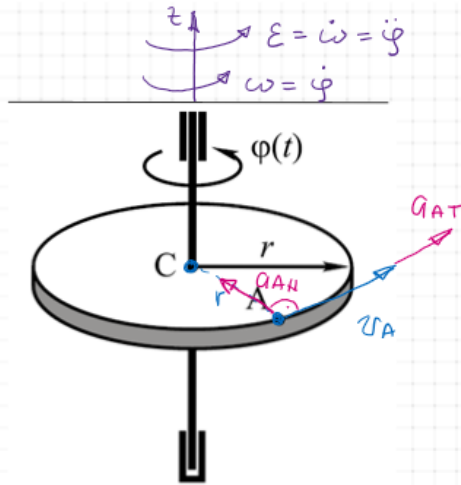
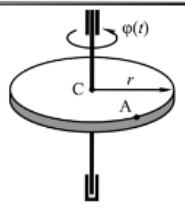
Zadatak 2

Zadatak 2.13 Disk, poluprečnika $r = 2\text{m}$, obrće se oko nepokretne ose po zakonu $\varphi(t) = t - \frac{t^2}{2} [\text{rad}]$. Odrediti ugaonu brzinu i ugaono ubrzanje diska u trenucima $t_0 = 0, t_1 = 1\text{s}$ i $t_2 = 2\text{s}$. Odrediti brzinu i ubrzanje tačke A na obodu diska u ovim trenucima.





Zadatak 2.13 Disk, poluprečnika $r = 2\text{m}$, obrće se oko nepokretne ose po zakonu $\varphi(t) = t - \frac{t^2}{2} [\text{rad}]$. Odrediti ugaonu brzinu i ugaono ubrzanje diska u trenucima $t_0 = 0, t_1 = 1\text{s}$ i $t_2 = 2\text{s}$. Odrediti brzinu i ubrzanje tačke A na obodu diska u ovim trenucima.



$$\varphi(t) = t - \frac{t^2}{2}$$

$$\omega(t) = \dot{\varphi}(t) = 1 - t$$

$$\epsilon(t) = \ddot{\varphi} = -1 = \text{const}$$

$$t_0 = 0$$

$$\omega(0) = 1$$

$$\epsilon(0) = -1$$

$$t_1 = 1$$

$$\omega(1) = 0$$

$$\epsilon(1) = -1$$

$$t_2 = 2$$

$$\omega(2) = -1$$

$$\epsilon(2) = -1$$

$$v_A = r\omega = 2(1-t)$$

$$a_{AT} = r\epsilon = 2 \cdot (-1) = -2 = \text{const}$$

$$a_{AN} = r\omega^2 = 2(1-t)^2$$

$$= \frac{v_A^2}{r}$$

$$t_0 = 0$$

$$v_A(0) = 2$$

$$a_{AT}(0) = -2$$

$$a_{AN}(0) = 2$$

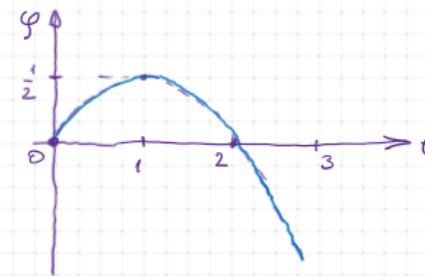
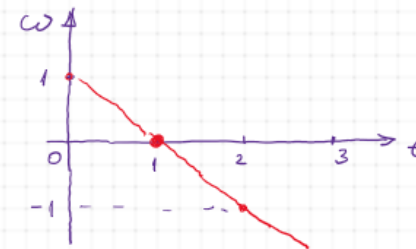
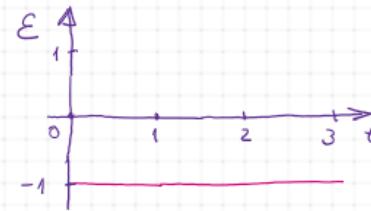
$$a_A(0) = \sqrt{a_{AT}^2(0) + a_{AN}^2(0)} = 2\sqrt{2}$$

$$t_1 = 1$$

$$v_A(1) = 0$$

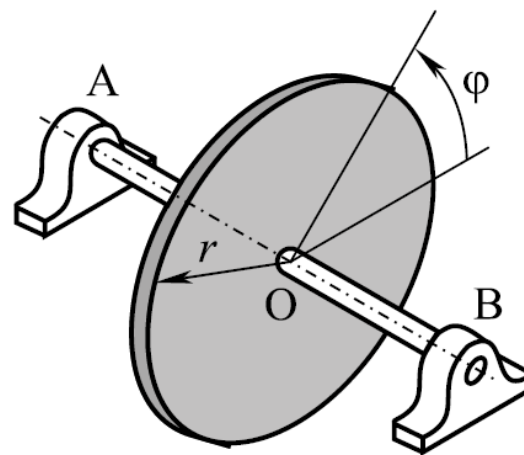
$$a_{AT}(1) = -2$$

$$a_{AN}(1) = 0$$

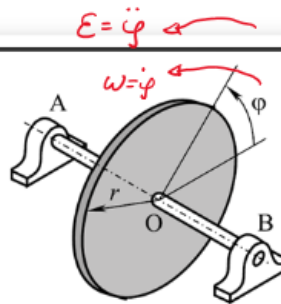


Zadatak 3

Zadatak 2.14 Zamajac započinje kretanje iz stanja mirovanja i kreće se jednoliko ubrzano. Nakon 10 minuta ima ugaonu brzinu koja odgovara $120 \frac{\text{obrt}}{\text{min}}$. Koliko obrtaja je načinio zamajac u ovih 10 minuta. Usvojiti da je $\varphi(0) = 0$.



Zadatak 2.14 Zamajac započinje kretanje iz stanja mirovanja i kreće se jednoliko ubrzano. Nakon 10 minuta ima ugaonu brzinu koja odgovara $120 \frac{\text{obrt}}{\text{min}}$. Koliko obrtaja je načinio zamajac u ovih 10 minuta. Usvojiti da je $\varphi(0) = 0$.



$$\omega(0) = 0 ; \quad \epsilon = \text{const} = \epsilon_0$$

$$\text{posle } 10 \text{ min} \quad \rightarrow \quad n = 120 \frac{\text{obrt}}{\text{min}}$$

$$\varphi(0) = 0$$

$$\epsilon = \boxed{\epsilon_0 = \ddot{\varphi}}$$

$$\boxed{\ddot{\varphi} = \epsilon_0}$$

$$\frac{d\dot{\varphi}}{dt} = \epsilon_0 \rightarrow \int d\dot{\varphi} = \epsilon_0 \int dt$$

$$(a) \quad \boxed{\dot{\varphi} = \epsilon_0 t + c_1} \quad \rightarrow \quad \frac{d\varphi}{dt} = \epsilon_0 t + c_1 \quad | \cdot dt$$

$$\int d\varphi = \epsilon_0 \int t dt + c_1 \int dt \rightarrow (b) \quad \boxed{\varphi = \epsilon_0 \cdot \frac{t^2}{2} + c_1 t + c_2}$$

$$\omega = \frac{n \cdot 2\pi}{60} \quad \left[\frac{\text{rad}}{\text{s}} \right]$$

$$\omega = \frac{n \hat{11}}{30} \quad \left[\frac{\text{rad}}{\text{s}} \right]$$

$$n \left[\frac{\sigma}{\text{min}} \right]$$

$$t=0 \quad \varphi(0)=0$$

$$\omega(0)=0$$

$$t=10 \text{ min} = 600 \text{ s}$$

$$n = 120 \frac{\text{obrt}}{\text{min}}$$

$$\omega(600) = \frac{420 \cdot \pi}{20} = 4\pi$$

$$\varphi(0) \stackrel{b}{=} \underline{C_2 = 0}$$

$$\omega(600) = \varepsilon_0 \cdot 600 + \cancel{C_1} = 4\pi$$

$$\omega(0) \stackrel{a}{=} \underline{C_1 = 0}$$

$$\varepsilon_0 = \frac{4\pi}{600} = \frac{\pi}{150}$$

$$\varepsilon_{(t)} = \frac{\pi}{150} = \text{const}$$

$$\omega(t) = \dot{\varphi}(t) \stackrel{a}{=} \frac{\pi}{150} t$$

$$\varphi(t) \stackrel{b}{=} \frac{\pi}{300} t^2$$

$$10 \text{ min}$$

$$\varphi(600) = \frac{\pi}{300} 600^2$$

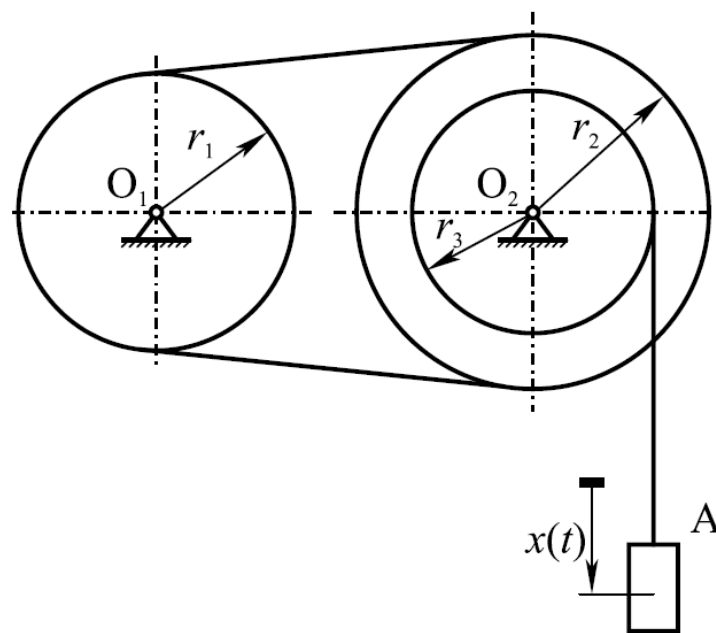
$$= \frac{\pi}{\cancel{300}} \frac{1200}{\cancel{360000}}$$

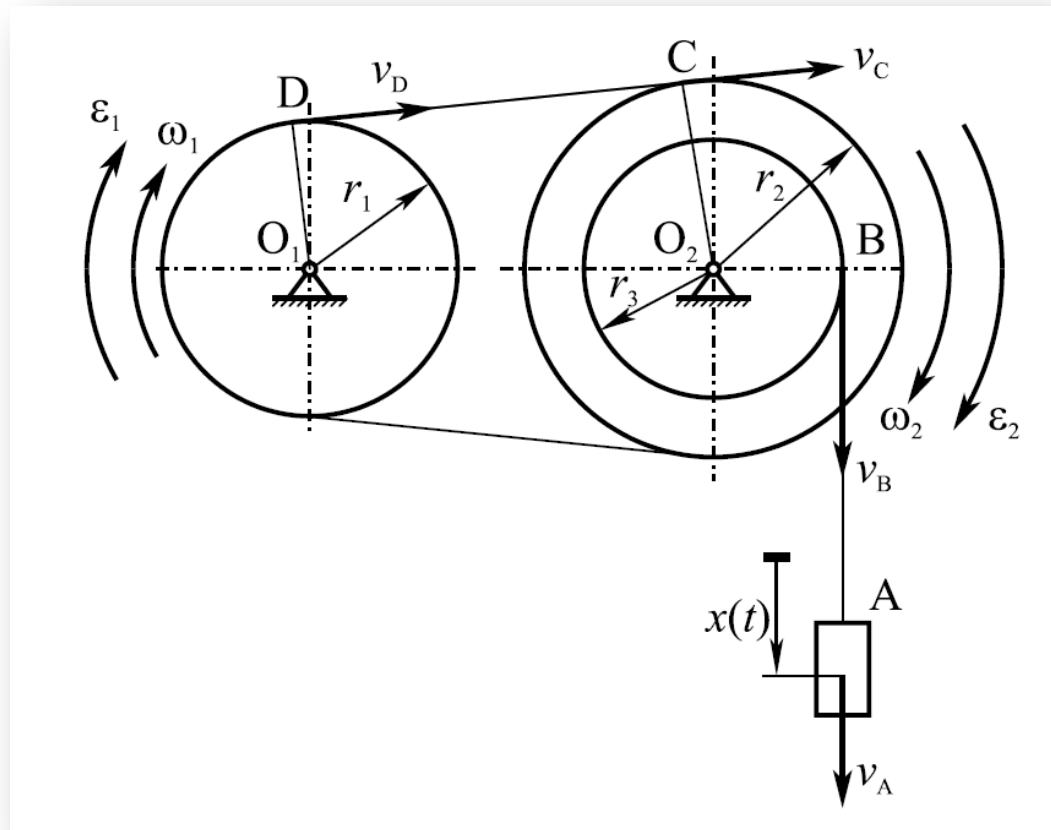
$$\varphi(600) = 1200 \pi$$

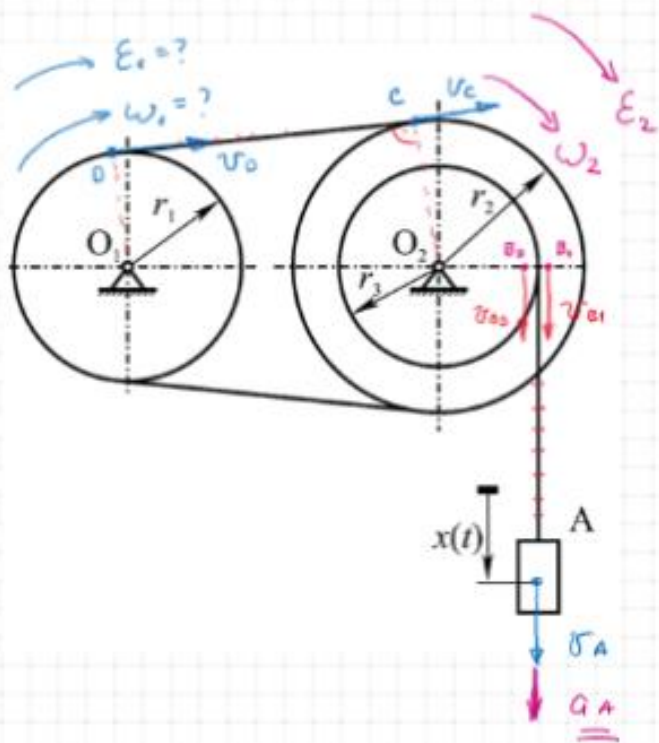
$$\frac{1200 \cancel{\pi}}{2 \cancel{\pi}} = 600 \text{ obrt.}$$

Zadatak 4

Zadatak 2.17 Disk, poluprečnika r_1 , obrće se oko nepokretne ose. Oko njega je omotano idealno uže koje je prebačeno preko većeg cilindra, poluprečnika r_2 , doboša koji se obrće oko nepokretne ose. Oko manjeg cilindra doboša, poluprečnika r_3 , prebačeno je idealno uže na čijem kraju se nalazi prizma A. Prizma se kreće pravolinijski po zakonu $x(t) = a \frac{t^2}{2} + v_0 t$. Odrediti ugaonu brzinu i ugaono ubrzanje diska. Užad ne proklizavaju.







$$x(t) = a \frac{t^2}{2} + v_0 t$$

$$v_A = \dot{x} = a t + v_0$$

$$a_A = \ddot{x} = a = \text{const}$$

$$v_{B3} = v_{B1} = v_A = a t + v_0$$

$$v_{B3} = r_3 \omega_2$$

$$r_3 \omega_2 = a t + v_0$$

$$\omega_2 = \frac{a t + v_0}{r_3} \quad \left/ \frac{d}{dt} \rightarrow \varepsilon_2 = \frac{a}{r_3} \right.$$

$$v_c = r_2 \omega_2 = r_2 \frac{a t + v_0}{r_3}$$

$$v_0 = v_c = r_2 \frac{a t + v_0}{r_3}$$

$$v_D = r_1 \omega_1$$

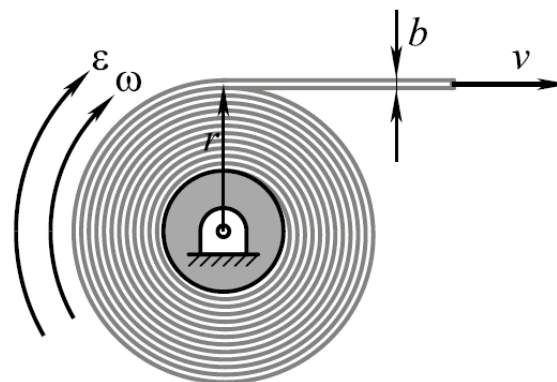
$$r_1 \omega_1 = r_2 \frac{a t + v_0}{r_3}$$

$$\omega_1 = \frac{r_2}{r_1} \frac{a t + v_0}{r_3} \quad \left/ \frac{d}{dt} \right.$$

$$\varepsilon_1 = \frac{r_2}{r_1} \frac{a}{r_3}$$

Zadatak 5

Zadatak 2.15 U procesu neprekidne štampe papir se uvlači u presu konstantnom brzinom v . Ako je r trenutni poluprečnik rolne papira, a b debljina papira, odrediti kako se menjaju ugaona brzina i ugaono ubrzanje rolne papira u funkciji od r . Kako se ove veličine menjaju tokom vremena.



Posmatrajmo tačku A u kojoj se traka papira odvaja od rolne, Slika 2.21. Brzina ove tačke je $v_A = r\omega$, ako se posmatra kao tačka koja pripada rolnoj papiga, gde je $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$ ugaona brzina rolne. Sa druge strane brzina ove tačke je jednaka brzini kojom se papir uvlači u presu, $v_A = v$. Prema tome, važi

$$v_A = r\omega = v$$

odakle sledi

$$\omega = \frac{v}{r}$$

Što je prečnik rolne papira manji ugaona brzina je veća. Kako se tokom vremena prečnik rolne smanjuje to će tokom vremena ugaona brzina rasti, ugaono ubrzanje je pozitivno.

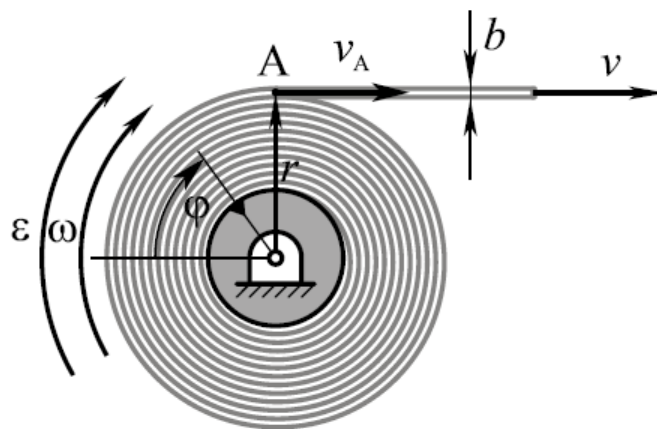
Diferenciranjem ugaone brzine dobija se ugaono ubrzanje

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} \frac{dr}{d\varphi} \frac{d\omega}{dr} = \omega \frac{dr}{d\varphi} \left(-\frac{v}{r^2} \right) = \frac{v}{r} \left(-\frac{b}{2\pi} \right) \left(-\frac{v}{r^2} \right) = \frac{bv^2}{2\pi r^3}$$

Pri izvođenju poslednjeg izraza korišćeno je posredno diferenciranje. Potrebno je još objasniti kako se došlo do veličine $\frac{dr}{d\varphi} = -\frac{b}{2\pi}$. Za jedan obrtaj rolne papira ugao obrtanja se poveća za 2π , a poluprečnik se smanji za širinu papira b . Ako se rolna obrne za ugao $\Delta\varphi$ poluprečnik će se promeniti za Δr . Iz proporcije

$$\frac{\Delta r}{\Delta\varphi} = \frac{-b}{2\pi}$$

prelaskom na granični proces, kada $\Delta\varphi \rightarrow 0$, dobija se da je $\frac{dr}{d\varphi} = -\frac{b}{2\pi}$.



Slika 2.21

Iz izraza za ugaonu brzinu, $\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{v}{r}$, dobija se

$$\frac{d\varphi}{dr} \frac{dr}{dt} = -\frac{2\pi}{b} \frac{dr}{dt} = \frac{v}{r}$$

odnosno

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{bv}{2\pi r}$$

Integracijom poslednje jednačine

$$\int_{r_0}^r r dr = -\frac{bv}{2\pi} \int_0^t dt$$

dobija se promena poluprečnika rolne papira u funkciji vremena

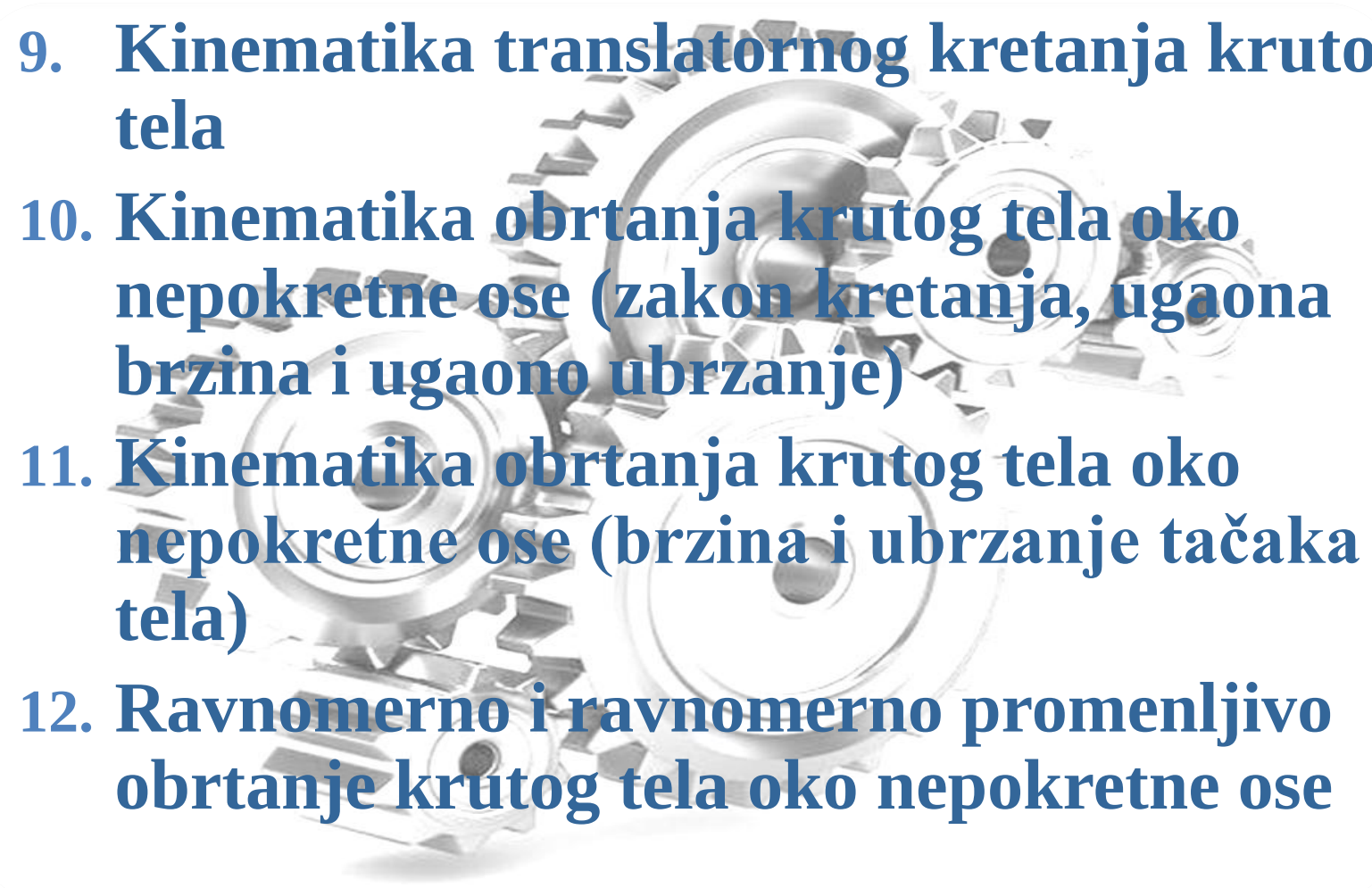
$$r = \sqrt{r_0^2 - \frac{bv}{\pi} t}$$

gde je r_0 poluprečnik rolne u početnom trenutku.

Zamenom poslednjeg izraza u izraze za ugaonu brzinu i ugaono ubrzanje dobijaju se promene ovih veličina u funkciji vremena

$$\omega = \frac{v}{\sqrt{r_0^2 - \frac{bv}{\pi} t}}, \quad \varepsilon = \frac{bv^2}{2\pi \left(r_0^2 - \frac{bv}{\pi} t\right)^{\frac{3}{2}}}$$

Šta smo naučili?

- 
9. **Kinematika translatornog kretanja krutog tela**
 10. **Kinematika obrtanja krutog tela oko nepokretne ose (zakon kretanja, ugaona brzina i ugaono ubrzanje)**
 11. **Kinematika obrtanja krutog tela oko nepokretne ose (brzina i ubrzanje tačaka tela)**
 12. **Ravnomerno i ravnomerno promenljivo obrtanje krutog tela oko nepokretne ose**

Mehanika 2 (Kinematika)

Vežbe 4

Miodrag Zuković
Novi Sad, 2023.