4. Predavanje

October 18, 2016

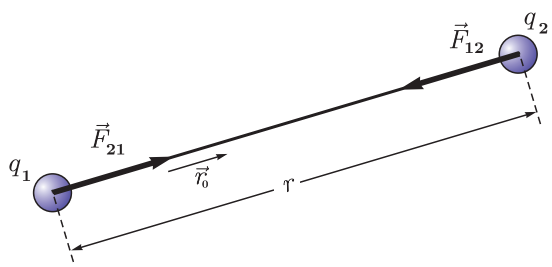
1 Osnovi elektrostatike

Kao što je rečeno na početku, elektromagnetna interakcija je do sada najbolje shvaćena. Ova interakcija doživela je i najširu primenu. Moderna civilazacija bitno zavisi od trenutno postojećih i buduće izmišljenih naprava koje se baziraju na manipulaciji naelektrisanih čestica. Međutim do samo pre nešto više od 200 godina, razumevanje električnih pojava bilo je na nivou razlikovanja dve vrste naelektrisanja, receptu za naelektrisavanje različitih materijala i konstatacije da usled naelektrisavanja tela, ona mogu da se privlače ili odbijaju. Formulisanjem zakona Kulona u matematičkoj formi (1784.), učinjen je bitan napredak i postavljena polazna osnova za razumevanje elektromagnetnih pojava.

1.1 Kulonov zakon

Kulonov zakon definiše silu između dva tačkasto naelektrisana tela:

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}\vec{r}_0 \qquad (1)$$

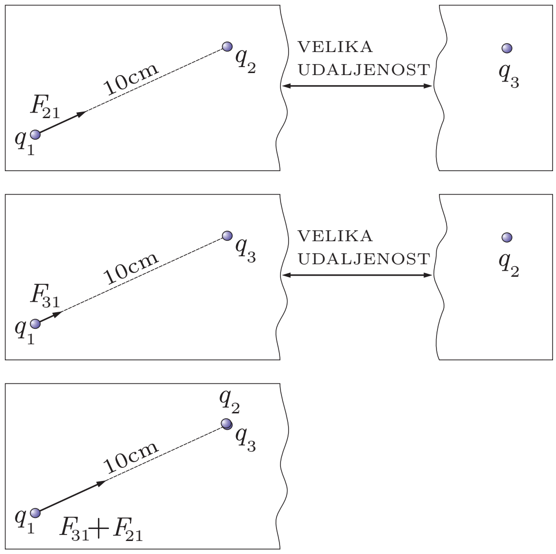


Slika 1 Uz definiciju Kulonovog zakona. Prikazan je primer kada su naelektrisanja raznoimena (npr. $q_1 > 0$ i $q_2 < 0$ ili $q_1 < 0$ i $q_2 > 0$.)

Dva tačkasta naelektrisanja koja miruju odbijaju se ili privlače silom koja je proporcionalna njihovim količinama naelektrisanja, a obrnuto proporcionalna kvadratu njihovog međusobnog rastojanja. U konstanti proporcionalnosti figuriše permitivnost vakuuma $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} F/m$. Poznato je da količina naelektrisanja može biti pozitivna ili negativna, shodno tome ispred količine naelektrisanja treba staviti odgovarajući predznak. S obzirom na ovu činjenicu, za razliku od gravitacione sile (Njutnov zakon gravitacije) koja je evek privlačna električna sila može biti i odbojna. Istoimena naelektrisanja (++ ili - -) se međusobno odbijaju, a raznoimena (+- ili -+) se privlače. Ukoliko želimo da izračunamo samo intenzitet Kulonove sile, treba izostaviti vektorske oznake i predznake naelektrisanja:

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2} \qquad (2)$$

Za elektrostatičku silu važi princip superpozicije. U tom smislu razmotrimo jedan eksperiment koji je prikazan na Slici 2. Pretpostavimo da raspolažemo sa tri tačkasta naelektrisanja q_1, q_2 i q_3. Pretpostavimo da smo izmerili silu F_1 između q_1 i q_2 kada su se ona nalazila na rastojanju $r = 10cm$, a q_3 se nalazi jako daleko. Zatim smo umesto q_2 stavili q_3 pri čemu smo q_2 premestili na veliko rastojanje od q_1 i q_3, i izmerili silu F_2. U trećem eksperimentu, vratili smo q_2 odmah uz q_3 i izmerili silu F_3. Ispostavilo bi se da je ukupna sila sada jednaka zbiru prethodne dve $F_3 = F_1 + F_2$. Zaključak je da se sila kojom dva naelektrisanja deluju ne menja zbog prisustva trećeg naelektrisanja.



Slika 2 Eksperiment koji demonstrira princip superpozicije.

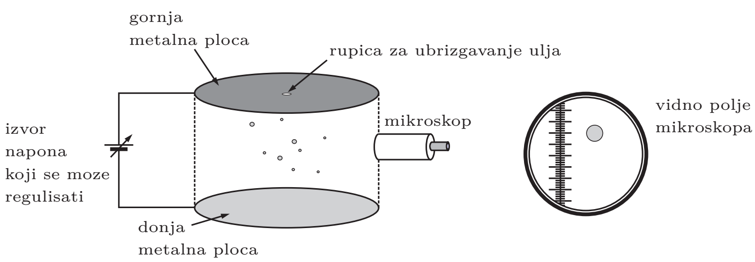
Dakle isto kao i kod gravitacione sile važi princip superpozicije. Odnosno ukoliko želimo da izračunamo ukupnu silu između naelektrisanja koje je nepravilno raspoređeno i tačkastog naelektrisanja, nepravilno telo se izdeli na mnogo tačkastih a zatim nađe vektorski zbir svih pojedinačnih sila.

$$\vec{F}_R = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \tag{3}$$

Ispravnost Kulonovog zakona ispitana je na vrlo malim rastojanjima, reda veličine $10^{-18}m$, ali i na rastojanjima reda veličine kilometara. Novija saznanja iz teorije kvantne elektrodinamike donose činjenicu da ukoliko Kulonov zakon nebi važio na velikim rastojanjima, tada bi foton morao imati masu mirovanja različitom od nule. Međutim ovo bi impliciralo da bi se u vakuumu crvena i plava svetlost prostirala različitim brzinama, što se neopaža. Robert Miliken, početkom prethodnog veka, eksperimentalno je utvrdio da je količina naelektrisanja uvek celobrojni umnožak jedne iste količine naelektrisanja koje se naziva elementarno naelektrisanje. Ovo se može izraziti u vidu formule:

$$q = Ne \tag{4}$$

$N = 0, \pm1, \pm2, \pm3, ...$ i $e = 1,602 \cdot 10^{-19}C$. Danas kada imamo jasnu sliku o strukturi materije i strukturi atoma, nije teško da se prihvati činjenica o kvantizaciji naelektrisanja. Jezgro se sastoji od neutralnih čestica neutrona i pozitivno naelektrisanih čestica protona. Svaki proton je naelektrisan jednim pozitivnim elementarnim naelektrisanjem. Omotač atoma čine elektroni koji su negativno naelektrisani takođe sa po jednim negativnim naelektrisanjem. Naelektrisavanje tela vrši se samo prelaskom elektrona sa jednog tela na drugo. S obzirom da je masa elektrona zanemarljiva u odnosu na masu atomskog jezgra, pri naelektrisavanju tela promena mase tela se ne opaža. Pozitivno naelektrisana tela imaju samo manjak elektrona, dok negativna imaju višak. S obzirom da u klasičnim demonstracijama naelektrisavanja tela ebonitnim i staklenim šipkama dolazi do premeštanja velikog broja elektrona, elementarnost naelektrisanja se tu ne opaža. Eksperiment kojim je Miliken dokazao da postoji najmanja količina naelektrisanja prikazan je na Slici 3.



Slika 3 Principijalna šema aparature koju je koristio Miliken za određivanje elementarnog naelektrisanja.

Dve metalne paralelne ploče jednakih dimenzija priključene su na izvor napona koji se može regulistai. Pomoću ovog izvora postiže se da ploče mogu biti naelektrisane istim količinama naelektrisanja ali suprotnog znaka. Polaritet ploča se takođe može menjati. Gornja može biti pozitivno naelektrisana, a donja negativno ili obrnuto. Takođe, ploče mogu biti i neutralne. Na gornjoj ploči nalazi se mikronska rupica kroz koju se ubrizgava ulje, koje se raspršuje na vrlo sitne kaplice. Prilikom raspršivanja, kapljice se naelektrišu usled trenja. Pojedinačne kapljice zatim se posmatraju mikroskopom koji ima mernu skalu za dužinu. Kada su ploče neutralne kapljica pod dejstvom gravitacione sile pada naniže ali zbog sile viskoznog trenja, koja deluje suprotno od smera kretanja, kapljica počne da se kreće stalnom brzinom. Odnosno gravitaciona sila i sila viskoznog trenja se izjednače:

$$mg = 6\pi\eta rv \tag{5}$$

gde je m masa uočene kapljice, g ubrzanje zemljine teže, η koeficijent viskoznosti, r poluprečnik kapljice i v brzina kretanja kapljice. Radi jednostavnosti, u ovom razmatranju zanemarena je sila potiska vazduha. Gustina kapljice, s obzirom da je ona sfernog oblika, data je izrazom:

$$\rho = \frac{3m}{4\pi r^3} \tag{6}$$

Ako pomoću (6) iz (5) eliminišemo poluprečnik kapljice r, nalazimo gravitacionu silu koja deluje na kapljicu:

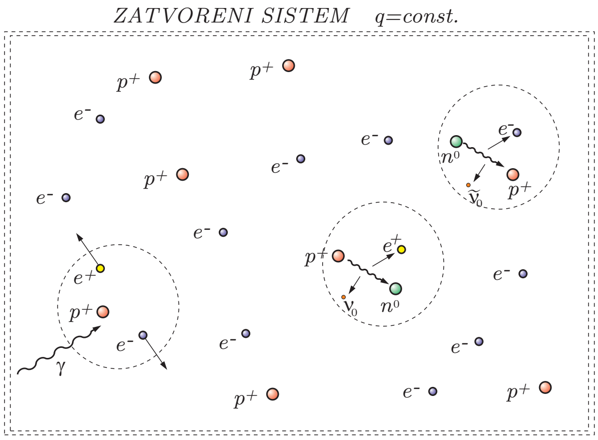
$$mg = \pi\sqrt{\frac{162\eta^3 v^3}{\rho g}} \tag{7}$$

Gustina kapljice jednaka je gustini ulja pa je prethodno merljiva veličina. Koeficijent viskoznosti vazduha takođe je poznata veličina u datim uslovima. Sledi da se gravitaciona sila mg može odrediti posmatranjem kretanja kapljice kroz mikroskop, odnosno mereći njenu brzinu kada ploče nisu naelektrisane. Sledeći korak u eksperimentu, podrazumeva uključivanje napona i zaustavljanje kapljice. Tada su električna sila i gravitaciona sila izjednačene:

$$q\frac{U}{d} = mg \tag{8}$$

gde je U napon, a d razmak između ploča. Iz ovih razmatranja može se zaključiti, da je za merenje količine naelektrisanja svake kapljice potrebno izmeriti njenu brzinu i napon pri kome se kapljica zaustavlja. Ponavljajući eksperiment više hiljada puta, Miliken je utvrdio da se količine naelektrisanja kojom se naelektrišu kapljice uvek razlikuju za celobrojni umnožak naelektrisanja koje iznosi $e = 1,59 \cdot 10^{-19}C$. Vrednost za elementarno naelektrisanje koje je dobijeno savremenim metodama iznosi $e = 1,602 \cdot 10^{19}C$. Njegova merenja definitivno su pokazala da postoji ne deljiva količina naelektrisanja i za ovo otkriće on je dobio Nobelovu nagradu 1923. godine.

Važna činjenica je da se u zatvorenom sistemu ukupna količina naelektrisanja održava. Nemoguće je da se neki zatvoreni sistem spontano naelektriše ili neutrališe. Proton može da se transformiše u jezgru atoma na neutron, ali raspad je praćen i emisijom čestice pozitrona koje upravo nosi isto naelektrisanje kao i proton. Neutron se opet može transformisati u proton, pri čemu dobijamo višak pozitivnog naelektrisanja, ali se u istom procesu stvara i elektron, pa je opet zadovoljen zakon održanja ukupne količine naelektrisanja. Ukoliko foton dovoljne energije prođe u blizini atomskog jezgra, moguć je proces stvaranja pozitron-elektron para. Međutim i ovde se ukupno naelektrisanje ne menja. U prirodi nije nađen proces koji narušava zakon održanja naelektrisanja. Zatvoreni sistem i neki od opisanih procesa ilustrovani su na Slici 4.

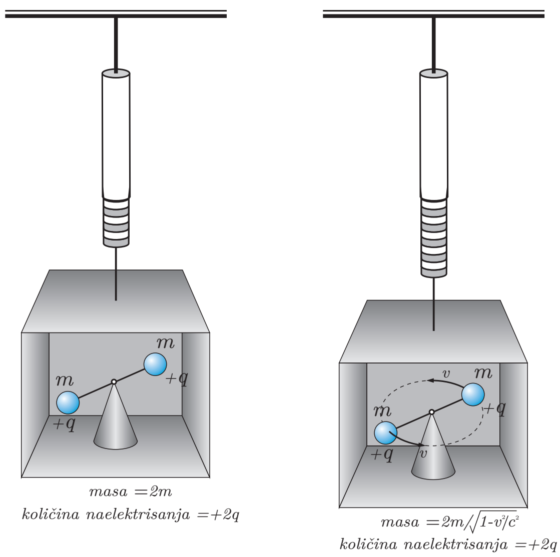


Slika 4 Zatvoreni sistem u kome se ukupna količina naelektrisanja održava. U crtkanim kružnicama prikazani su procesi koji ne narušavaju zakon održanja ukupne količine naelektrisanja.

S obzirom na sličnost Njutnovog zakona i Kulonovog zakona: "umesto masa u Kulonovom zakonu figurišu količine naelektrisanja", moglo bi se zaključiti da u naelektrisanju i masi ima neke sličnosti. Na primer, prema specijalnoj teoriji relativnosti, ukoliko se brzina objekta povećava, raste i njegova masa. Dakle po analogiji imamo opravdanja da pretpostavimo da važi relacija $q = q_0/\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$. Međutim eksperimenti pokazuju da to nije tako. Količina naelektrisanja nekog objekta nezavisna je od sistema referencije u kome se posmatra. Odnosno količina naelektrisanja nekog objekta ne zavisi od brzine njegovog kretanja. Ova zakonitost naziva se invarijantnost naelektrisanja, i može se zapisati u vidu formule:

$$q = inv. \tag{9}$$

Na primer u atomu vodonika, proton miruje, a elektron se kreće velikom brzinom oko protona. Ukoliko naelektrisanje nebi bilo invarijantno, atom nebi bio u potpunosti neutralan. Ni jedan eksperiment i sa drugim atomima nije pokazao odstupanje od invarijantnosti naelektrisanja. Na Slici 5 je prikazan zamišljen eksperiment koji dokazuje ovo pravilo.



Slika 5 Misaoni eksperiment koji pokazuje da je naelektrisanje invarijantno u odnosu na Lorencove transformacije.

1.2 Pojam električnog polja

Posmatramo usamljeno naelektrisanje q_0. U odsustvu drugih naelektrisanja nema sile koje deluje na to naelektrisanje. Međutim ukoliko u blizini q_0 postavimo tačksto naelektrisanje q, očigledno dolazi do promene, tj. javlja se električna sila na naelektrisanje q_0. Kažemo da naelektrisanje q stvara električno polje u prostoru, koje deluje na naelektrisanje q_0. Do egzaktne definicije električnog polja dolazimo pomoću Kulonovog zakona.

$$\vec{F} = q_0 \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2} \vec{r}_0 = q_0 \vec{E} \tag{10}$$

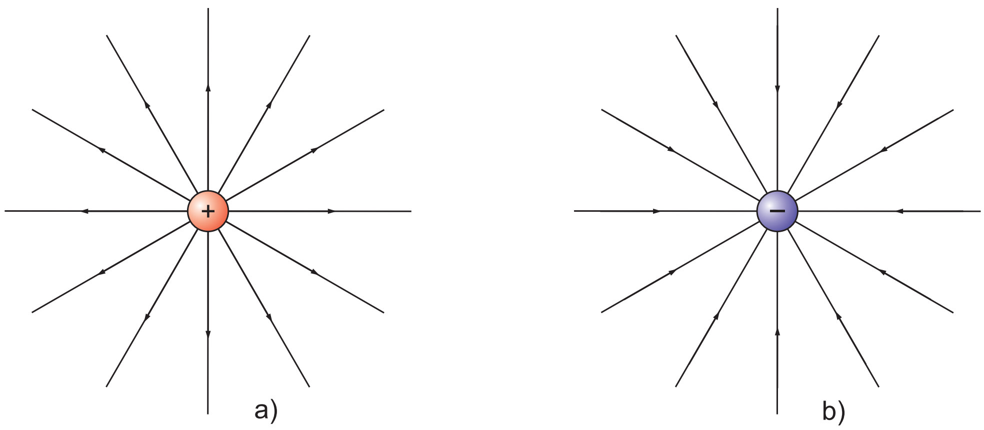
U tom smislu električno polje tačkastog naelektrisanja je:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2} \vec{r}_0 \tag{11}$$

Intenzitet električnog polja izražava se u jedinicama N/C (Njutn po Kulonu) ili V/m (Volt mo metru). Za električno polje isto kao i za silu važi princip superpozicije:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + ... + \vec{E}_n \tag{12}$$

Električno polje u nekoj tački jednako je vektorskom zbiru električnih polja koja potiču od svih prisutnih naelektrisanja. Uobičajno je da se električno polje vizuelno prikaže u vidu linija sila električnog polja (Slika 6).

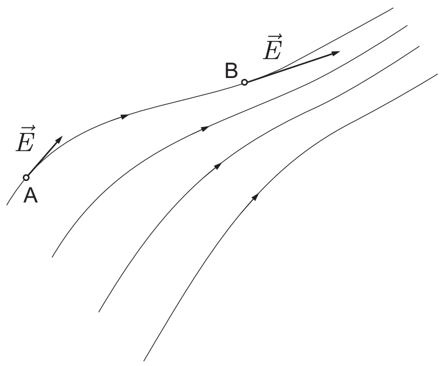


Slika 6 Linije sila električnog polja tačkastog naelektrisanja. a) pozitivno naelektrisanje b) negativno naelektrisanje.

Linije sila električnog polja tačkastog naelektrisanja su zrakaste linije koje se simetrično pružaju u sve pravce prostora. Strelica određuje smer vektora električnog polja. Pozitivna naelektrisanja kažemo da su izvori električnog polja, a negativna naelektrisanja ponori električnog polja. U tom smislu, ukoliko u prostoru postoji naelektrisanje, dodeljena je pored geoemtrijskih karakteristika još jedna osobina prostora. U opštem slučaju za proizvoljan raspored naelektrisanja električno polje je vektor koji je funkcija tri kordinate i vremena:

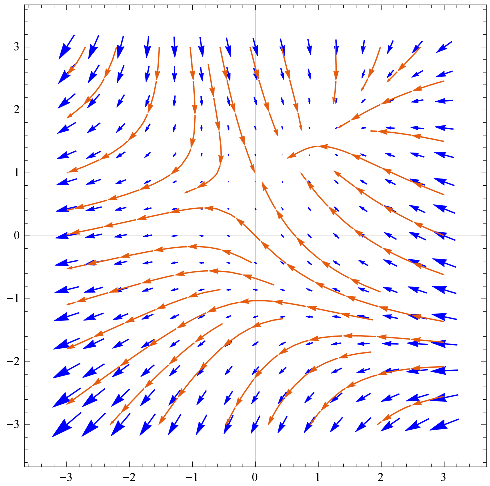
$$\vec{E} = \vec{E}(x, y, z, t), \tag{13}$$

međutim u elektrostatici razmatraju se samo polja koja ne zavise od vremena. Ili koja promene svoju konfiguraciju u vrlo kratkom vremenskom intervalu, odnosno pređu iz jednog statičnog stanja u drugo statično stanje. Uopšte konfiguracija električnog polja određena je rasporedom naelektrisanja i može imati vrlo nepravilni oblik (Slika 7). U oblasti gde su linije gušće, električno polje ima veći intenzitet. Takođe u svakoj tački linije sila, vektor električnog polja je tangenta.



Slika 7 Primer neke konfiguracije linije sila električnog polja. U blizini tačke A linije su ređe nego u tački B. Sledi da je intenzitet u tački B veći nego u A. Takođe vidi se da su vektori električnog polja tangente na linije sila.

Na Slici 9 prikazana je konfiguracija nekog električnog polja koja se dobija svremenim programskim paketima.

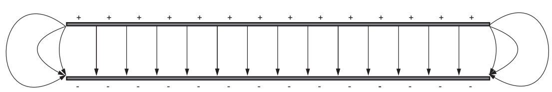


Slika 8 Primer neke konfiguracije električnog polja dobijenim pomoću savremenog softvera.

Za neke jednostavne raspodele naelektrisanja funkcija $\vec{E}(x, y, z)$ se može odrediti egzaktno. Najjednostavniji primer su dve planparalelne metalne ploče naelektrisane istom količinom naelektrisanja ali suprotnog znaka (Slika 9). Ukoliko je rastojanje između ploča mnogo manje od dimenzija ploča, električno polje između ploča je homogeno. Koristeći tzv. Gausovu teoremu, može se pokazati da je intenzitet električnog polja unutar ploča dato izrazom:

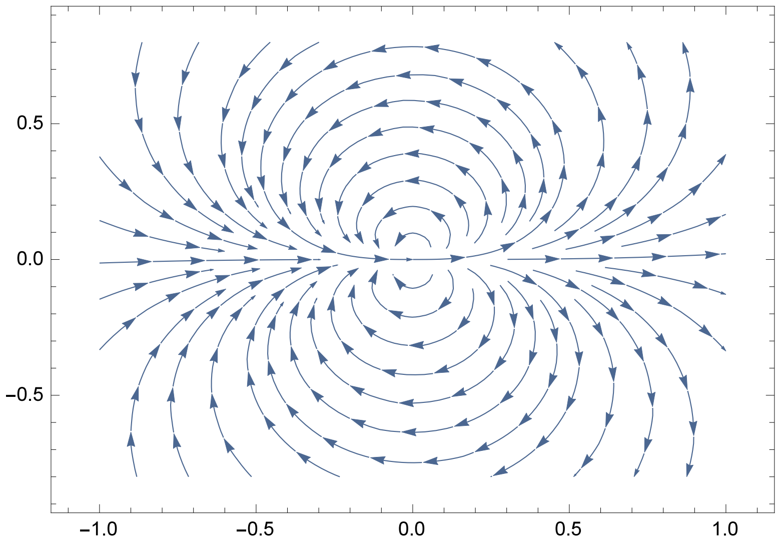
$$E = \frac{q}{\varepsilon_0 S} \tag{14}$$

gde je q količina naelektrisanja kojom su naelektrisane ploče, ε_0 permitivnost vakuuma i S površina ploča.



Slika 9 Homogeno električno polje formirano između dve naelektrisane planparalelne metalne ploče. U oblasti krajeva električno polje nije homogeno, ali vrlo brzo slabi.

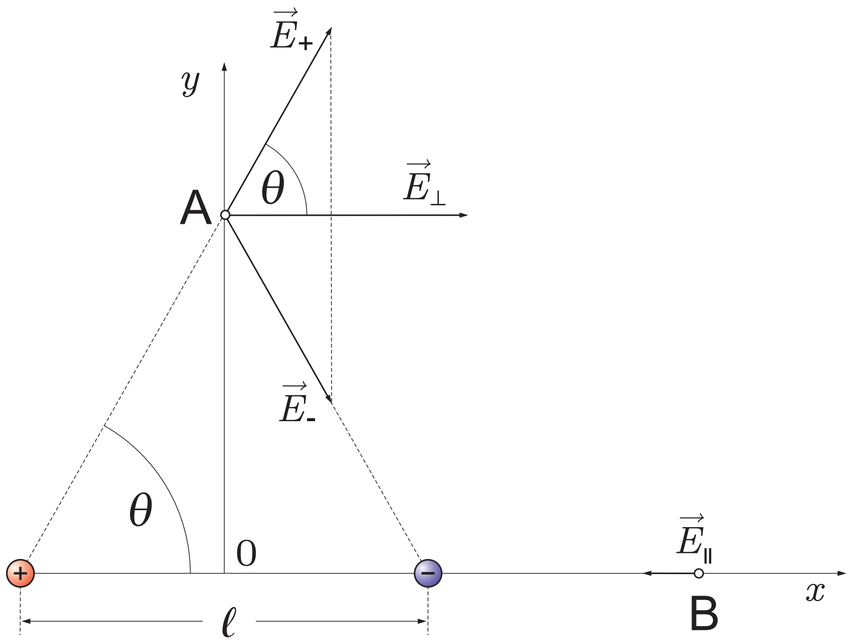
Vrlo važne konfiguracije električnog polja su one koje se dobijaju od dve tačke naelektrisane istim količinama naelektrisanja, ali suprotnog znaka. Ovakava konfiguracija naziva se električni dipol, a odgovarajuće polje-polje dipola (Slika 10).



Slika 10 Električno polje dipola

1.2.1 Električno polje dipola

Električno polje dipola se može egzaktno izračunati u celom prostoru. Ovde ćemo samo računati polje duž x i y-ose kada se dipol nalazi u $x-y$-ravni (Slika 11).



Slika 11 Dva tačkasta naelektrisanja suprotnog znaka koja se nalaze na rastojanju ℓ na osi x.

Neka se naelektrisanja q i $-q$ nalaze na rastojanju ℓ. Prema definiciji električnog polja za tačkasto naelektrisanje, intenzitet električnog polja u tački B koji potiče od pozitivnog naelektrisanja je:

$$E_+ = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{(x+\ell/2)^2} \tag{15}$$

a od negativnog:

$$E_- = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{(x-\ell/2)^2} \tag{16}$$

Ukupan intenzitet u B je dat razlikom između E_- i E_+

$$E_{||} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{(x-\ell/2)^2} - \frac{1}{(x+\ell/2)^2}\right) \tag{17}$$

Odnosno, ako svedemo na zajednički sadržalac:

$$E_{||} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2q\ell x}{(x^2-(\ell/2)^2)^2} \tag{18}$$

Na vrlo velikim rastojanjima $x >> \ell$ relacija se svodi na:

$$E_{||} \cong \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{q\ell}{x^3} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{p}{x^3} \tag{19}$$

Proizvod $q\ell$ se naziva dipolni moment i obično se označava sa p. Dipolni moment je vektorska veličina koja ima pravac spajanja dva tačkasta naelektrisanja suprotnog znaka. Smer je od negativnog ka pozitivnom naelektrisanju. Vidimo da električno polje dipola opada sa trećim stepenom rastojanja od x-ose.

U tački A vidimo da se y komponente električnog polja poništavaju. Zbog toga je ukupno električno polje na y osi dato sa:

$$E_{\perp} = 2E_{+}\cos\theta \tag{20}$$

Intenzitet električnog polja pozitivnog naelektrisanja je:

$$E_{+} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{(y^2+(\ell/2)^2)} \tag{21}$$

Sa slike se vidi da je:

$$\cos\theta = \frac{\ell/2}{\sqrt{y^2+(\ell/2)^2}} \tag{22}$$

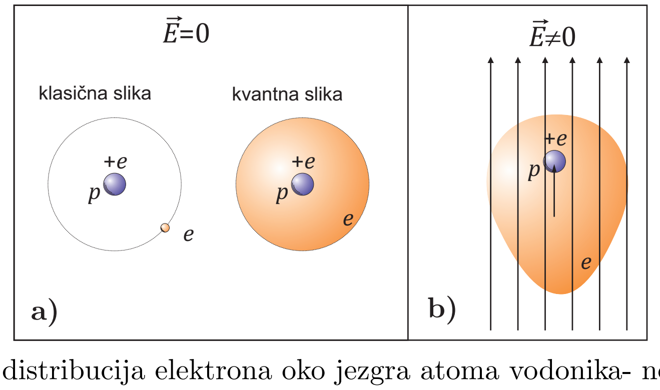
Ako (21) i (22) uvrstimo u (20) nalazimo:

$$E_{\perp} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\ell}{(y^2+(\ell/2)^2)^{\frac{3}{2}}} \tag{23}$$

Opet ako razmatramo velika rastojanja od dipola $y >> \ell$, nalazimo:

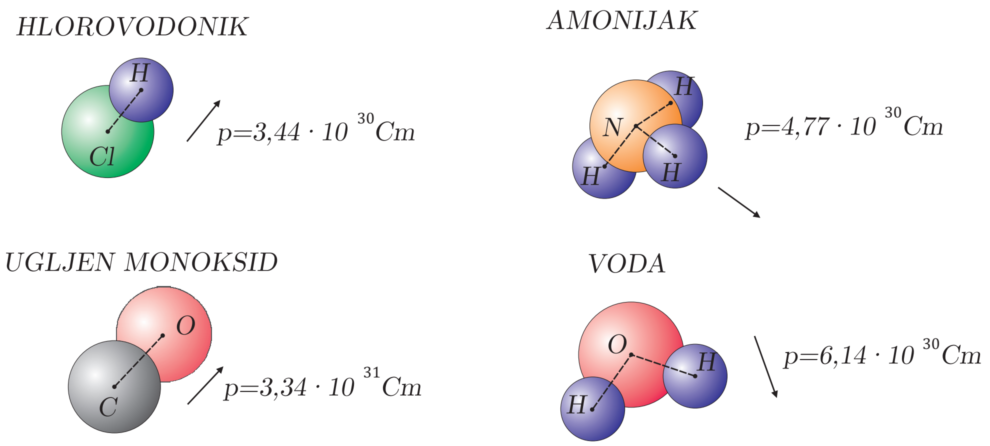
$$E_{\perp} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\ell}{y^3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p}{y^3} \tag{24}$$

I ovde vidimo da električno polje dipola u pravcu y-ose opada sa trećim stepenom rastojanja. Konfiguracija od dva suprotno naelektrisana tačkasta naelektrisanja koja se nalaze na fiksnom rastojanju ili konfiguracija koja se može svesti na ovu sliku je česta pojava kod molekula.
Na primer ako bi molekul vodonika (sastoji se od jednog protona i jednog elektrona) zamrznuli u jednom trenutku vremena, mogli bi smo reći da je dipolni moment molekula vodonika različit od nule. Međutim, prema kvantnoj fizici, ne može se utvrditi tačna pozicija elektrona koji se nalazi oko jezgra. Elektronu se pripisuje oblak naelektrisanja koji je simetrično raspoređen oko jezgra (Slika 12.a). Shodno tome, proton kao da se nalazi u naelektrisanoj sferi, pa nema električnog dipola. Međutim ako se atom vodonika unese u električno polje, doći će do redistribucije elektronskog oblaka, odnosno pojaviće se oblast gde se elektron češće nalazi. U tom smislu dolazi i do narušavanja simetrije, odnosno pojave električnog dipola atoma vodonika. Pojava dipolnog momenta koji je izazvan spoljašnjim poljem naziva se indukovani dipol (Slika 12.b.).



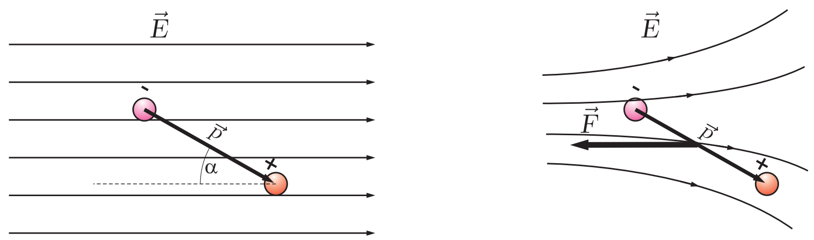
Slika 12 a) Simetrična distribucija elektrona oko jezgra atoma vodonika- nema dipolnog momenta. b) U prisustvu električnog polja dolazi do redistribucije elektronskog oblaka, odnosno pojave indukovanog dipola.

Permanentne ili stalne dipolne momente imaju neki molekuli koji su prikazani na Slici 13. Molekul vode ima veliki dipolni moment, a to je jedan od uzroka što je voda idelana sredina za odvijanje mnogih hemijskih procesa relevantnih za život.



Slika 13 Neki molekuli sa stalnim dipolnim momentom.

Električni dipol u homogenom električnom polju teži da se orjentiše u pravcu polja. U nehomogenom polju, on se i pomera u pravcu najbrže promene polja (Slika 14).



Slika 14 Električni dipol u homogenom i nehomogenom električnom polju.

1.3 Električni potencijal

Električno polje je vektorska veličina koja se može izračunati iz raspodele naelektrisanja. Električno polje je poznato ako poznajemo sve tri komponente u funkciji tri kordinate:

$$E_x = E_x(x, y, z) \qquad E_y = E_y(x, y, z) \qquad E_z = E_z(x, y, z) \tag{25}$$

Međutim, može se uvesti skalarna veličina koja se naziva električni potencijal, a takođe nosi kompletnu informaciju o konfiguraciji električnog polja.

$$\varphi = \varphi(x, y, z) \tag{26}$$

Jedinica za potencijal je V (Volt).
Potencijal koji stvara tačkasto naelektrisanje u vakuumu može se izračunati pomoću formule:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r} \tag{27}$$

Potencijal je brojno jednak radu potrebnom da se jedinično naelektrisanje prenese iz beskonačnosti na rastojanje r od takastog naelektrisanja q.
Potencijal je aditivna veličina:

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i \tag{28}$$

Dakle ako u nekoj tački prostora želimo da izračunamo električni potencijal, treba sabrati sve potencijale od prisutnih naelektrisanja.
Napon predstavlja razliku potencijala između dve tačke:

$$U = \varphi_1 - \varphi_2 \tag{29}$$

a jedinica je takođe Volt. Rad pri premeštanju naelektrisanja između tačaka gde vlada potencijalna razlika U jednak je:

$$A = qU \tag{30}$$

Jedinica za električni rad je ista kao i u mehanici (Džul). Međutim u razmatranju mikroskopskih pojava koristi se jedinica eV (elektronvolt). Rad od jednog elektron volta izvrši električno polje pri premeštanju elementarnog naelektrisanja između tačaka gde vlada potencijlana razlika od jedan volt. Iz ove definicije sledi veza: $1eV = 1,6 \cdot 10^{-19} J$.
Pretpostavimo da imamo dva tačkasta naelektrisanja q_1 i q_2 na rastojanju r. S obzirom na definiciju potencijala (27), energija elektrostatičke interakcije ova dva naelektrisanja jednaka je

$$E_p = \varphi_2 q_2 \tag{31}$$

gde je φ_2 potencijal koji stvara naelektrisanje q_1 u tački gde se nalazi q_2. Međutim energija interakcije može se napisati i kao:

$$E_p = \varphi_1 q_1 \tag{32}$$

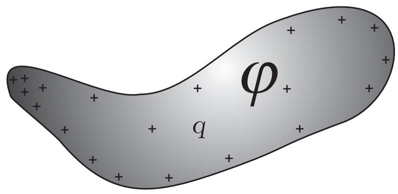
gde je φ_1 potencijal koji stvara naelektrisanje q_2 u tački gde se nalazi naelektrisanje q_1. Zbog jednakosti (31) i (32), električna energija interakcije je:

$$E_p = \frac{1}{2}\left(\varphi_1 q_1 + \varphi_2 q_2\right) \tag{33}$$

Relacija (33) može se uopštiti na sistem od n tačkastih naelektrisanja:

$$E_p = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \varphi_i q_i \tag{34}$$

koja kaže da se ukupna energija interakcije n tačkastih naelektrisanja računa kao polovina zbira proizvoda ukupnog potencijala i naelektrisanja u svih n tačaka.
Vrlo važan pojam u elektrostatici je kapacitet. U tom smislu razmatramo provodno telo proizvoljnog oblika koje je naelektrisano količinom naelektrisanja q (Slika 15).



Slika 15 Provodno telo naelektrisano količinom naelektrisanja q do potencijala φ.

Naeelektrisanje na ovom provodniku će se tako rasporediti da je potencijal na površini ovog tela svuda isti i znosi φ. U suprotnom, ukoliko bi postojala razlika potencijla na površini provodnog tela javio bi se tok eletrične struje, a u elektrostatici sva naelektrisanja miruju. Može se uspostaviti relacije između količine naelektrisanja provodnog tela i potencijala ovog provodnog tela:

$$q = C\varphi \tag{35}$$

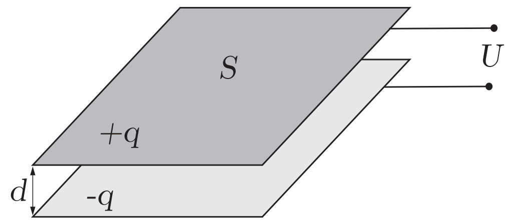
Količina naelektrisanja nekog provodnog tela srazmerna je potencijalu na kom se nalazi to telo. Konstanta proporcionalnosti C naziva se kapacitet, a jedinica je Farad (F).

1.4 Kondenzatori

Sistem od dva međusobno izolovana provodnika naelektrisana istom količinom naelektrisanja q ali suprotnog znaka naziva se kondenzator. Za kondenzator važi veza:

$$q = CU \tag{36}$$

gde je C kapacitet kondenzatora, a U razlika potencijala između ova dva provodnika. Kondenzatori imaju veliku primenu u elektrotehnici, tj. neizostavni su deo praktično svih električnih kola. Najjednostavniji kondenzator je izrađen u vidu dve međusobno izolovane planparalelne provodne ravni. Ovaj kondenzator naziva se pločasti kondenzator (slika 16).



Slika 16 Pločasti kondenzator priključen na napon U.

Pomoću tzv. Gausove teoreme može se pokazati da je kapacitet pločastog kondenzatora:

$$C = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{S}{d} \tag{37}$$

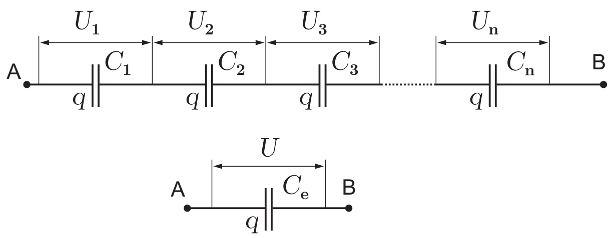
gde je ε_r relativna permitivnost date sredine (u ovom slučaju to se odnosi na meterijal između ploča), S površina ploče i d normalno rastojanje između njih. Kako je kapacitet srazmeran površini ploča, kondenzatori sa većim kapacitetom imaju i veće dimenzije. Zbog toga oni zauzimaju najviše prostora u odnosu na druge komponente u električnim kolima. Kondenzatori vremenom mogu izgubiti karakteristike i čest su uzrok kvara električnih kola. Pored kapaciteta svaki kondenzator okarakterisan je i maksimalnim naponom na koji može biti priključen (slika 17).

Slika 17 Kondenzatori u raznim varijantama.

Mogu se vezati redno i paralelno. U tom smislu može se definisati ekvivalentni kapacitet redne i ekvivalentni kapacitet paralelne veze.

1.4.1 Redna veza kondenzatora

Razmotrimo redno vezane kondenzatore kao što je prikazano na Slici 18.



Slika 18 Redno vezani kondenzatori i njihov ekvivalentni kapacitet.

Šematska oznaka kondenzatora su dve paralelne linije, koje predstavljau ploče naelektrisane istim količinama naelektrisanja, ali suprotnog znaka. Celokupan niz od n kondenzatora može se zameniti jednim kondenzatorom koji ima tzv. ekvivalentni kapacitet. Ukupan napon između tačaka A i B je:

$$U = U_1 + U_2 + U_3 + ... + U_n \tag{38}$$

a s obzirom na relaciju (36), sledi:

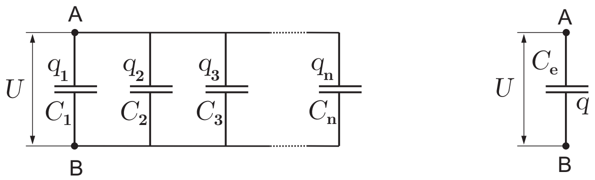
$$\frac{q}{C_e} = \frac{q}{C_1} + \frac{q}{C_2} + \frac{q}{C_3} + ... + \frac{q}{C_n} \tag{39}$$

odnosno ekvivalenti kapacitet redno vezanih kondenzatora je dat obrascem:

$$\frac{1}{C_e} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + ... + \frac{1}{C_n} \tag{40}$$

1.4.2 Paralelna veza kondenzatora

Razmotrimo paralelno vezane kondenzatore priključene na napon U kao što je prikazano na Slici 19.



Slika 19 Paralelno vezani kondenzatori i njihov ekvivalentni kapacitet.

Ukupno naelektrisanje u tački A je:

$$q = q_1 + q_2 + q_3 + ... + q_n \tag{41}$$

odnosno prema (36), sledi:

$$C_eU = C_1U + C_2U + C_3U + ... + C_nU \tag{42}$$

Nakon skraćivanja napona, nalazimo izraz za izračunavanje ekvivalentnog kapaciteta paralelno vezanih kondenzatora:

$$C_e = C_1 + C_2 + C_3 + ...C_n \tag{43}$$

1.4.3 Energija kondenzatora

Razmotrimo kondenzator koji ima kapacitet C. Potencijal ploče naelektrisane pozitivnom količinom naelektrisanja q_+ je φ_+, a potencijal negativne ploče q_- je φ_-. Prema (34) ukupna energija interakcije naelektrisanih ploča je:

$$E_p = \frac{1}{2}\left(\varphi_+ q_+ + \varphi_- q_-\right) \tag{44}$$

S obzirom da je kod kondenzatora $q_+ = -q_-$, sledi:

$$E_p = \frac{1}{2}\left(\varphi_+ q_+ - \varphi_- q_+\right) = \frac{1}{2} q_+ \left(\varphi_+ - \varphi_-\right) \tag{45}$$

Razlika potencijala je napon između ploča kondezatora $\varphi_+ - \varphi_- = U$, pa sledi izraz za energiju kondenzatora:

$$E_p = \frac{1}{2} qU \tag{46}$$

odnoosno s obzirom na (36):

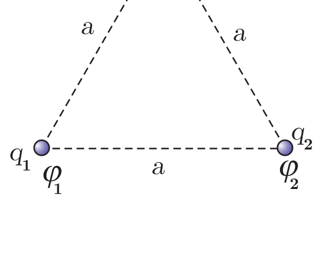
$$E_p = \frac{1}{2} CU^2 \tag{47}$$

PRVI ZADATAK

Odrediti energiju interakcije tačkastih naelektrisanja $q_1 = e$, $q_2 = -5e$ i $q_3 = 8e$, koja se nalaze u temenima jednakostraničnog trougla stranice $a = 10nm$. e je elementarno naelektrisanje i iznosi $e = 1,6 \cdot 10^{-19}C$; $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}F/m$

REŠENJE

Na slici je ilustrovana situacija opisana u zadataku.



Potencijal u tački 1 je:

$$\varphi_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 a}(q_2 + q_3) \tag{1}$$

u tački 2:

$$\varphi_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 a}(q_1 + q_3) \tag{2}$$

i u tački 3:

$$\varphi_3 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 a}(q_1 + q_2) \tag{3}$$

S obzirom na (34) sledi:

$$E_p = \frac{1}{2}(\varphi_1 q_1 + \varphi_2 q_2 + \varphi_3 q_3) \tag{4}$$

Ako uvrstimo izraze (1), (2) i (3) u (4), nakon sređivanja nalazimo:

$$E_p = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 a}(q_1 q_2 + q_1 q_3 + q_2 q_3) \tag{5}$$

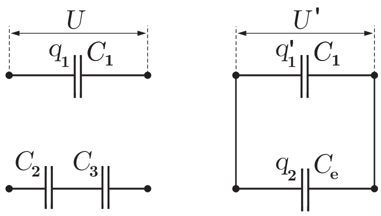
Brojna vrednost je: $E_p = -8,52 \cdot 10^{-19} J$. U jedinicama eV $E_p = -5,32 eV$.

DRUGI ZADATAK

Kondenzator kapaciteta $C_1 = 2\mu F$, naelektrisan do napona $U = 60V$, priključili smo paralelno na krajeve redno vezanih kondenzatora $C_2 = 3\mu F$ i $C_3 = 5\mu F$ koji su bili nenaelektrisani. Kolika će pri tome proteći količina naelektrisanja kroz spoj? Kolika je promena ukupne energije kondenzatora?

REŠENJE

Situacija pre spajanja i nakon spajanja prikazana je na Slici.



Ekvivalentni kapacitet redne veze kondenzatora C_2 i C_3 je prema (40):

$$\frac{1}{C_e} = \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \tag{1}$$

odnosno:

$$C_e = \frac{C_2 C_3}{C_2 + C_3} = 1,875\mu F \tag{2}$$

Naelektrisanje kondenzatora C_1 pre spajanja je prema (36):

$$q_1 = C_1 U = 120\mu C \tag{3}$$

Izvesna količina naelektrisanje nakon spajanja kondenzatora pređe sa C_1 na ekvivalentni kondenzator C_e, pa se za novu raspodelu naelektrisanja može napisati:

$$q_1 = q_1' + q_2 \tag{4}$$

pri čemu je:

$$q_1' = C_1 U' \tag{5}$$

i

$$q_2 = C_e U' \tag{6}$$

Kombinacijom (4), (5) i (6) nalazimo napon na C_1 i C_e nakon preraspodele naelektrisanja:

$$U' = \frac{C_1}{C_1 + C_e} U = 31V \tag{7}$$

Na osnovu (5) i rešenja (7) sledi naelektrisanje na kondenzatoru C_1 nakon spajanja:

$$q_1' = C_1 U' = 62\mu C \tag{8}$$

Naelektrisanje koje protekne kroz spoj je:

$$\Delta q = q_1 - q_1' = 58\mu C \tag{9}$$

Energija kondenzatora pre spajanja je prema (47)

$$E_{p1} = \frac{1}{2} C_1 U^2 = 3,6mJ \tag{10}$$

A nakon spajanja:

$$E_{p2} = \frac{1}{2} C_1 U'^2 + \frac{1}{2} C_e U'^2 = 1,86mJ \tag{11}$$

Promena energije je:

$$\Delta E = E_{p1} - E_{p2} = 1,74mJ \tag{12}$$

Pri spajanju kondenzatora izvestan deo energije se transformisao u toplotu!

Zadaci za samostalni rad: 5.1; 5.2; 5.3; 5.4; 5.5; 5.6; 5.7; 5.8; 5.9; 5.10; 5.11; 5.12; 5.13; 5.14; 5.15; 5.16

Literatura: Zbirka zadataka iz fizike - mašinski odsek, Ljuba Budinski-Petković, Ana Kozmidis-Petrović, Milica Vučinić Vasić, Ivana Lončarević, Aleksandra Mihailović, Dušan Ilić, Robert Lakatoš.
FTN Izdavaštvo, Novi Sad.