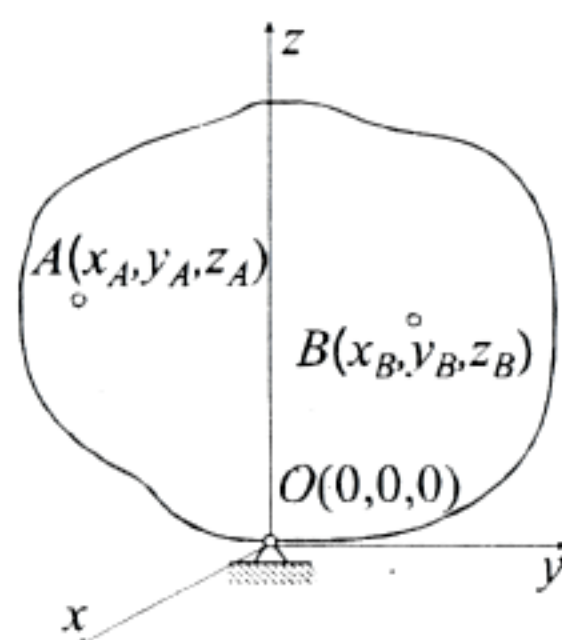


Glava 7

Sferno kretanje tela

7.1 Broj stepeni slobode kretanja

Pod-sfernim kretanjem tela podrazumeva se kretanje tela pri kojem je jedna tačka O , koja može pripadati telu ili biti van njega ali tada na neki način kruto vezana za telo (Slika 7.1), nepokretna. Pri sfernom kretanju svaka tačka tela se kreće po površini sfere poluprečnika, koji je jednak rastojanju te tačke od nepokretne tačke. Zato se ovo kretanje i naziva sfernim kretanjem tela, a često se naziva i obrtanje tela oko nepokretne tačke.



Slika 7.1:

Položaj tela u prostoru određen je sa položajem tri tačke tela koje ne leže na istom pravcu. U nepokretnoj tački O usvoji se nepokretan koordinatni sistem $Oxyz$. Pošto je nepokretna tačka O kruto vezana za telo, položaj tela u prostoru je potpuno određen sa položajem još dve njegove tačke A i B . Zbog

Sferno kretanje tela

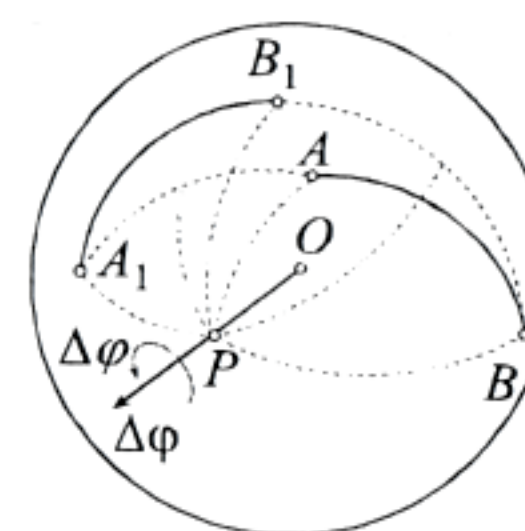
krutosti tela šest Dekartovih koordinata tačaka A i B , odnosno x_A, y_A, z_A, y_B i z_B , zadovoljavaju uslove konstantnosti rastojanja između sve tri tačke A i B

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2} = \text{const.}, \\ OB &= \sqrt{x_B^2 + y_B^2 + z_B^2} = \text{const.}, \\ AO &= \sqrt{x_A^2 + y_A^2 + z_A^2} = \text{const.} \end{aligned}$$

Iz ovih jednačina mogu se bilo koje tri koordinate, na primer x_A, x_B , i izraziti kao funkcije preostale tri nezavisne koordinate, na primer y_A, z_A , i pa je broj stepeni slobode sfernog kretanja tri. Jednačine (7.1) predstavljaju tri jednačine veza između koordinata. Broj stepeni slobode je ukupan parametara potrebnih za određivanje položaja tela umanjen za broj veza, z šest manje tri je tri.

7.2 Dalamber-Ojlerova teorema

Pri obrtanju tela oko nepomične tačke O svaka tačka tela se kreće po površini sfere sa centrom u tački O .



Slika 7.2:

Neka su tačke A i B odabrane tako da im je rastojanje od tačke O jednako, odnosno $OA = OB$. Opiše se sfera kroz te dve tačke sa centrom u tački O (Slika 7.2). Neka je u trenutku t položaj tela određen položajem tačaka B koji formiraju luk velikog kruga na sferi, a u trenutku $t + \Delta t$ lukom A_1 . Veliki krug na sferi je krug koji je presek sfere sa bilo kojom ravni koja prolazi kroz centar sfere. Spojimo tačke A i A_1 , B i B_1 lukovima velikih krugova. Iz sredine lukova AA_1 i BB_1 povučemo sferne normale, koje su takođe luke velikih krugova. Te sferne normale se seku u tački P na površini sfere. Sf

trouglovi ABP i A_1B_1P su podudarni, jer su im sferne stranice, odnosno lukovi, jednaki

$$\widehat{AB} = \widehat{A_1B_1}, \quad \widehat{AP} = \widehat{A_1P}, \quad \widehat{BP} = \widehat{B_1P}.$$

Spoje se tačke O i P . Ako se tačka P sfernog trougla kruto veže za sferu, onda se sferni trougao ABP dovodi do poklapanja sa trouglom A_1B_1P obrtanjem za neki ugao $\Delta\varphi$ oko pravca OP . Pravac OP se naziva osa konačnog obrtanja. Osa konačnog obrtanja je uopštenje pojma centra konačnog obrtanja ravanskog kretanja.

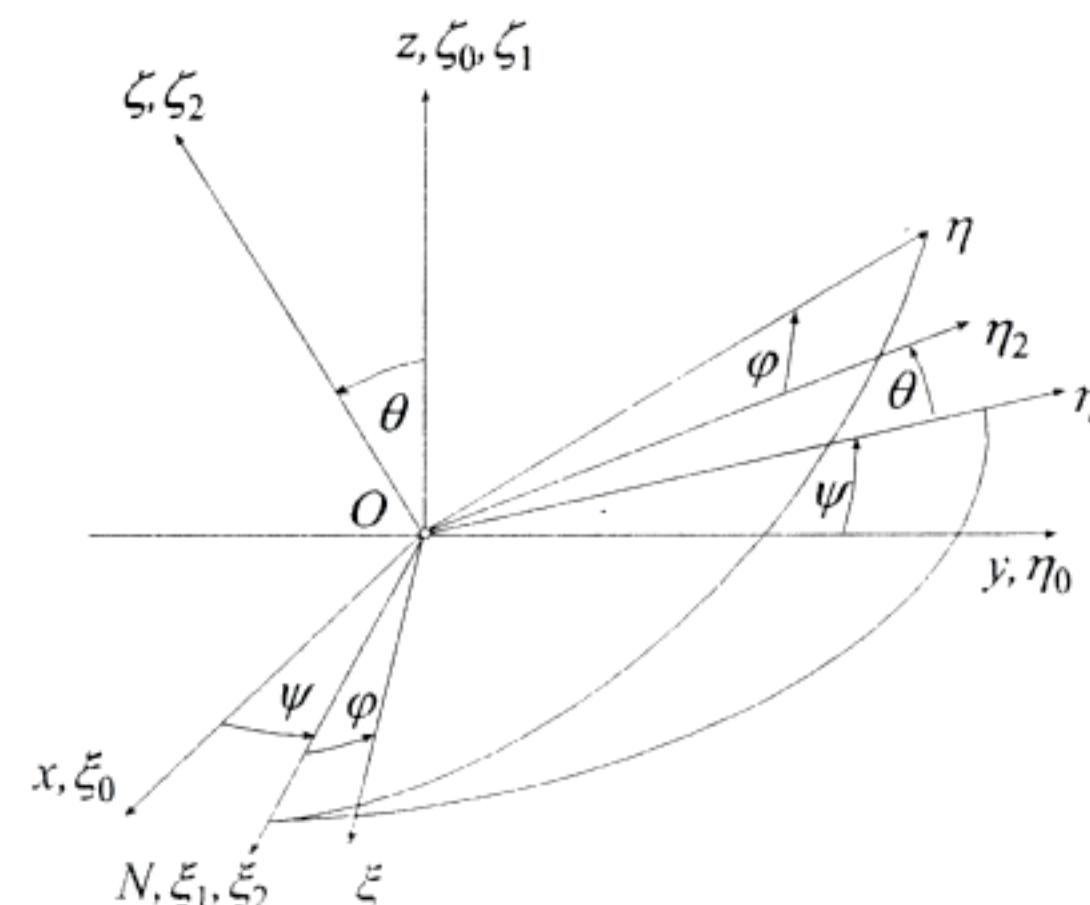
Ove činjenice predstavljaju sadržaj D'alambert (*J.D'Alembert* 1717 – 1783)-Ojlerove teoreme: Svako pomeranje tela, pri sfernom kretanju oko nepokretne tačke O , iz jednog u drugi položaj, može se ostvariti jednim obrtanjem oko ose OP koja prolazi kroz tačku O .

Ako je $\Delta\varphi$ konačan ugao obrtanja tela oko ose OP za vreme Δt , onda je srednja ugaona brzina tog obrtanja $\omega_s = \Delta\varphi/\Delta t$. Vektor srednje ugaone brzine konačnog obrtanja ω_s pada u pravac ose OP , a smer mu je u skladu sa smerom obrtanja. Kada se pomeranje tela obavi za infinitezimalno malo vreme dt , iz jednog u drugi infinitezimalno bliski položaj, onda je i ugao obrtanja $d\varphi$ infinitezimalno mali. Pri infinitezimalnom pomeranju srednja ugaona brzina teži ka trenutnoj ugaonoj brzini $\omega = d\varphi/dt$, a odgovarajući vektor ω je u pravcu odgovarajućeg trenutnog položaja pravca OP . Sferno kretanje u konačnom vremenskom intervalu odvija se beskonačnim nizom obrtanja oko trenutne ose obrtanja, koja stalno menja svoj položaj u prostoru prolazeći pri tom kroz nepokretnu tačku O . Trenutna osa obrtanja tokom kretanja opisuje površinu u prostoru sa temenom u nepokretnoj tački O . Zbog promenljivosti pravca ugaone brzine tokom kretanja ugaono ubrzanje ϵ , koje je izvod po vremenu ugaone brzine, odnosno $\epsilon = \dot{\omega}$, ne pada u pravac ugaone brzine, ali takođe prolazi kroz tačku O . I ovaj vektor tokom vremena svojim kretanjem opisuje drugu površinu u prostoru sa temenom u tački O .

7.3 Ojlerovi uglovi

Kao što je već napomenuto, telo koje se obrće oko nepokretne tačke ima tri stepena slobode kretanja, pa je njegov položaj u prostoru određen sa tri nezavisna parametra. Skoro uvek, tri parametra koja određuju položaj tela pri sfernom kretanju su tri ugla. U raznim oblastima mehanike i tehnike ovi uglovi se biraju na razne načine. Od svih tih načina najstariji je onaj koji se pripisuje Ojleru i koji se ovde koristi.

Neka se u nepokretnu tačku O postavi nepokretni koordinatni sistem $Oxyz$ (Slika 7.3). Za telo se veže koordinatni sistem $O\xi\eta\zeta$. Ovaj koordinatni sis-



Slika 7.3:

tem se kreće zajedno sa telom i jednoznačno određuje položaj tela u nepokretni koordinatni sistem. Položaj pokretnog koordinatnog sistema u odnosu na nepokretni određen je sa tri nezavisna ugla koji se i Ojlerovim uglovima. Iz polaznog položaja tela, kada se koordinatni sistemi poklapaju sa osama x, y i z , telo se dovodi u proizvoljan položaj kroz tri obrtanja. Ta obrtanja su za konačne uglove pa se, zbog poznate zavisnosti krajnjeg položaja tela od redosleda obrtanja, mora postovati sledeći obrtanja:

1. Zaokrene se pokretni koordinatni sistem za ugao ψ oko ose z u pozitivnom matematičkom smeru. Ovaj ugao se naziva ugao precesije. Ovaj koordinatni sistem $O\xi_1\eta_1\zeta_1$, posle tog obrtanja, prikazan je na slici 7.3. Ose ξ_1 , odnosno pravac ON , naziva se čvorna osa.

2. Zaokrene se telo oko čvorne ose ξ_1 za ugao θ u pozitivnom matematičkom smeru. Ugao θ se naziva ugao nutacije. Posle ovog obrtanja, koordinatni sistem $O\xi_2\eta_2\zeta_2$ zaklapa ugao θ sa nepokretnom ravnom.

3. Telo se obrne za ugao φ oko ose ζ_2 u pozitivnom matematičkom smeru. Ovaj ugao se naziva ugao sopstvenog obrtanja. Koordinatne ose $O\xi\eta\zeta$ krajnji položaj $O\xi\eta\zeta$, odnosno telo dolazi u krajnji položaj.

Poznate zavisnosti uglova precesije, nutacije i sopstvenog obrtanja u

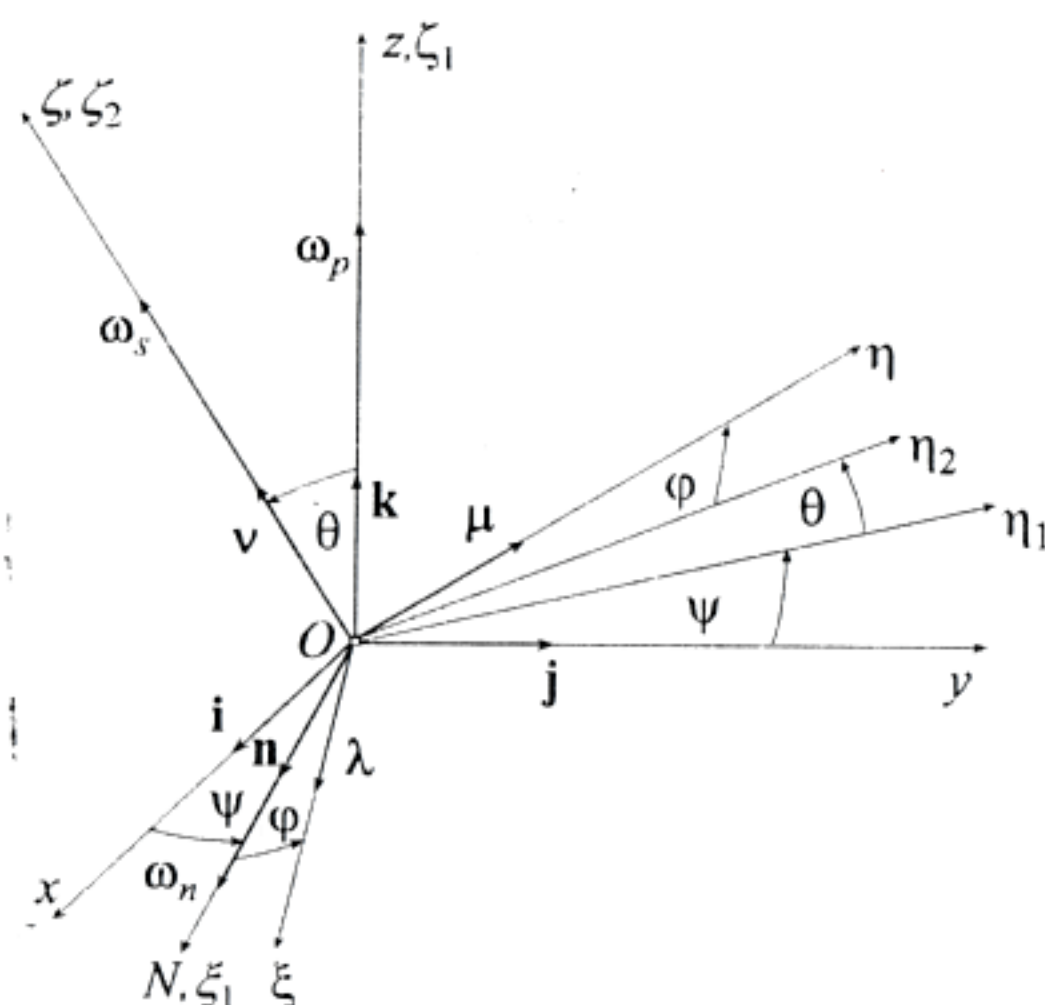
od vremena

$$\psi = \psi(t), \quad \theta = \theta(t), \quad \varphi = \varphi(t), \quad (7.2)$$

su zakoni sfernog kretanja tela.

7.4 Vektor trenutne ugaone brzine

Obrtanje tela oko nepomične tačke je složeno kretanje od tri obrtanja oko tri



Slika 7.4:

ose koje se seku u nepokretnoj tački. Odgovarajući vektori ugaonih brzina su: ugaona brzina precesionog obrtanja (Slika 7.4)

$$\omega_p = \dot{\psi} \mathbf{k}, \quad (7.3)$$

ugaona brzina nutacije

$$\omega_n = \dot{\theta} \mathbf{n}, \quad (7.4)$$

i ugaona brzina sopstvenog obrtanja

$$\omega_s = \dot{\varphi} \boldsymbol{\nu}. \quad (7.5)$$

Sferno kretanje tela

gde su $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ i $\mathbf{k}$ jedinični vektori nepokretnog koordinatnog sistema Oxy ; $\boldsymbol{\mu}$ i $\boldsymbol{\nu}$ jedinični vektori pokretnog koordinatnog sistema $O\xi\eta\zeta$, a $\mathbf{n}$ je jedini vektor u pravcu čvorne ose.

Prema rezultatima proučavanja složenog obrtanja tela oko više osa koje seku u jednoj tački, sferno kretanje je ekvivalentno obrtanju oko trenutnog obrtanja sa ugaonom brzinom $\boldsymbol{\omega}$ koja je vektorski zbir ove tri ugaone brzine odnosno

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_p + \boldsymbol{\omega}_n + \boldsymbol{\omega}_s,$$

ili zbog (7.3)-(7.5)

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\psi} \mathbf{k} + \dot{\theta} \mathbf{n} + \dot{\varphi} \boldsymbol{\nu}.$$

Ako je $\boldsymbol{\omega}_0$ jedinični vektor pravca trenutne ose obrtanja a ω intenzitet trenutne ugaone brzine, onda važi i sledeća relacija

$$\boldsymbol{\omega} = \omega \boldsymbol{\omega}_0.$$

7.5 Vektor trenutnog ugaonog ubrzanja

Ako se ugaona brzina (7.7) diferencira po vremenu dobija se trenutno ugaono ubrzanje

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \dot{\boldsymbol{\omega}} = \ddot{\psi} \mathbf{k} + \ddot{\theta} \mathbf{n} + \ddot{\varphi} \boldsymbol{\nu} + \dot{\psi} \dot{\mathbf{k}} + \dot{\theta} \dot{\mathbf{n}} + \dot{\varphi} \dot{\boldsymbol{\nu}}.$$

Izvod $\dot{\mathbf{k}}$ konstantnog jediničnog vektora u prostoru po vremenu jednak je $\boldsymbol{\omega}_p \times \mathbf{k}$. Jedinični vektor $\mathbf{n}$ se kreće nezavisno od kretanja tela. On se stalno nalazi u ravni Oxy i obrće oko ose z ugaonom brzinom precesije $\boldsymbol{\omega}_p$, pa je brzina vektora $\mathbf{n}$

$$\dot{\mathbf{n}} = \boldsymbol{\omega}_p \times \mathbf{n}. \quad (7.8)$$

Jedinični vektor $\boldsymbol{\nu}$ čvrsto je vezan za telo i brzina kraja tog vektora ima istu vrednost

$$\dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\nu},$$

odnosno, zbog (7.6) i činjenice da je zbog kolinearnosti vektora $\boldsymbol{\omega}_s$ i $\boldsymbol{\nu}$ njihov vektorski proizvod jednak nuli,

$$\dot{\boldsymbol{\nu}} = (\boldsymbol{\omega}_p + \boldsymbol{\omega}_n) \times \boldsymbol{\nu}. \quad (7.9)$$

Zamenom (7.10) i (7.11) u (7.9), i korišćenjem izraza (7.3)-(7.5), dobija se trenutno ugaono ubrzanje tela pri obrtanju oko nepomične tačke (Slika 7.5)

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_1 + \boldsymbol{\varepsilon}_2 + \boldsymbol{\varepsilon}_3,$$

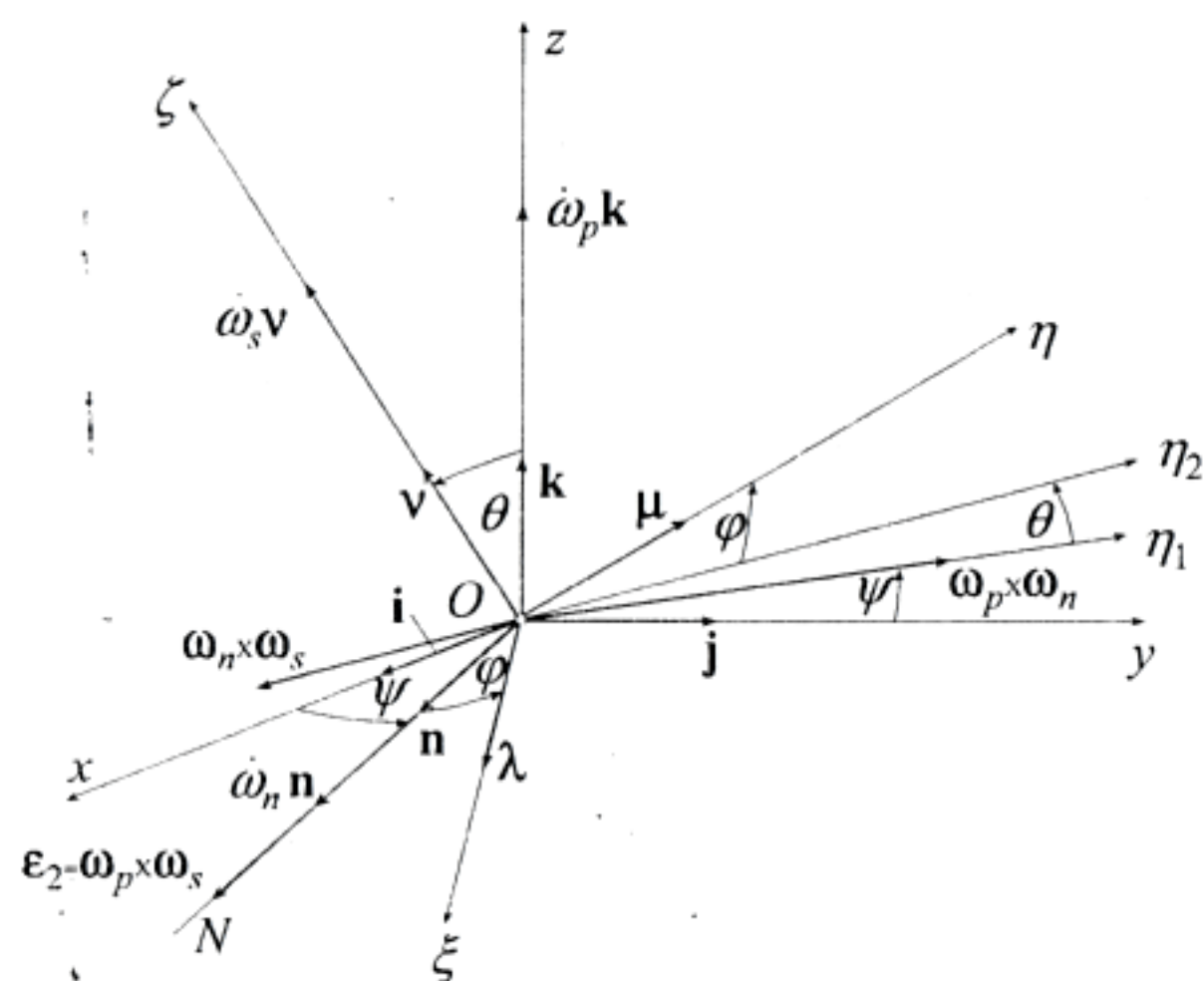
gde su komponente tog ugaonog ubrzanja

$$\epsilon_1 = \dot{\omega}_p \mathbf{k} + \dot{\omega}_n \mathbf{n} + \dot{\omega}_s \mathbf{v}, \quad (7.13)$$

$$\epsilon_2 = \omega_p \times \omega_s, \quad (7.14)$$

$$\epsilon_3 = \omega_p \times \omega_n + \omega_n \times \omega_s. \quad (7.15)$$

Pošto se ugaone brzine precesije ω_p i sopstvenog obrtanja ω_s nalaze u ravni $O\eta_1\eta_2\zeta$, komponenta ugaonog ubrzanja ϵ_2 pada u pravac čvorne ose, jer je ona normalna na tu ravan. Komponenta $\omega_p \times \omega_n$ ugaonog ubrzanja ϵ_3 pada u pravac normale na ravan $O\xi_1\zeta$ a to je pravac ose η_1 . Komponenta $\omega_n \times \omega_s$ ugaonog ubrzanja ϵ_3 pada u pravac normale na ravan $O\xi_1\zeta$, odnosno u pravac ose η_2 . Smerovi svih komponenti ugaonog ubrzanja određuju se prema smeru vektora koji je vektorski proizvod druga dva vektora.



Slika 7.5:

7.5.1 Sferno kretanje sa jednim stepenom slobode

U slučaju kada se sferno kretanje ostvaruje kotrljanjem bez klizanja jednog tela po drugom, koje je nepokretno, kretanje ima samo jedan stepen slobode kretanja. Pri takvim kretanjima ugao nutacije θ i ugao vektora ugaone brzine α

Sferno kretanje tela

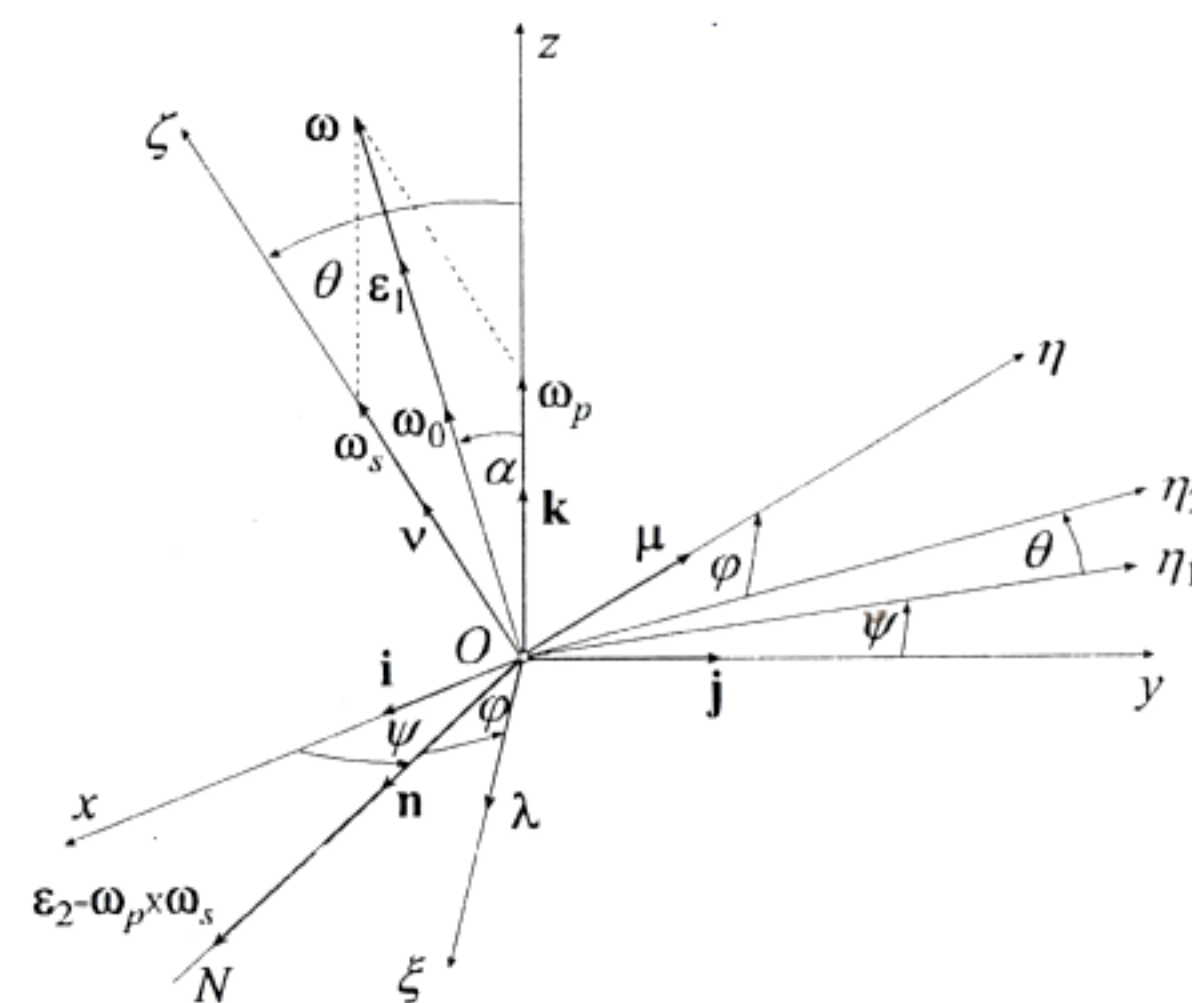
sa osom z , su konstantni, odnosno $\theta = \text{const.}$ i $\alpha = \text{const.}$ Zbog konstantnog ugla nutacije ugaona brzina nutacije je jednaka nuli

$$\omega_n = \dot{\theta} \mathbf{k} = 0, \quad (7.6)$$

pa je vektor ugaone brzine (7.6)

$$\omega = \omega_p + \omega_s, \quad (7.7)$$

i nalazi se u ravni osa ζ , z i η_2 (Slika 7.6).



Slika 7.6:

Zbog konstantnosti ugla α vektora ugaone brzine sa osom z , jedinični vektor ω_0 se pri ovom sfernom kretanju kreće po konusu gde je osa z osa kć. Ugaona brzina ovog precesionog kretanja jediničnog vektora ω_0 je ω_p , brzina kraja vektora ω_0

$$\dot{\omega}_0 = \omega_p \times \omega_0. \quad (7.8)$$

Sada, zbog (7.7)-(7.8), dobija se sledeća relacija

$$\omega \omega_0 = \dot{\psi} \mathbf{k} + \dot{\varphi} \mathbf{v},$$

iz koje posle diferenciranja po vremenu sledi

$$\dot{\omega} \omega_0 + \omega \dot{\omega}_0 = \ddot{\psi} \mathbf{k} + \ddot{\varphi} \mathbf{v} + \dot{\psi} \dot{\mathbf{k}} + \dot{\varphi} \dot{\mathbf{v}},$$

a posle korišćenja (7.3)-(7.5), (7.10), (7.16) i (7.18)

$$\dot{\omega}\omega_0 = \dot{\psi}\mathbf{k} + \dot{\varphi}\mathbf{v}. \quad (7.21)$$

Poređenjem prethodnog izraza sa (7.13), uz posledicu konstatnosti ugla nutacije, komponenta ugaonog ubrzanja ε_1 postaje

$$\varepsilon_1 = \dot{\omega}\omega_0, \quad (7.22)$$

dok je ukupno ugaono ubrzanje

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2, \quad (7.23)$$

gde je ε_2 dato sa (7.14), a ε_1 pada u pravac trenutne ose obrtanja ω .

7.6 Ojlerove kinematičke jednačine

U prethodnom izlaganju, vektor ugaone brzine ima tri komponente, koje nisu međusobno normalne. Ako se ova tri vektora projektuju na ose nepokretnog $Oxyz$ ili pokretnog $O\xi\eta\zeta$ koordinatnog sistema, onda se dobijaju projekcije ugaone brzine na međusobno normalne ose, koje se zovu Ojlerove kinematičke jednačine.

7.6.1 Nepokretan koordinatni sistem $Oxyz$

Vektor ugaone brzine precesije $\dot{\psi}\mathbf{k}$ pada u pravac ose z , a vektor ugaone brzine nutacije je u ravni Oxy , pa su njihove projekcije na ose nepokretnog koordinatnog sistema $Oxyz$ očigledne. Vektor ugaone brzine sopstvenog obrtanja $\dot{\varphi}\mathbf{v}$ nalazi se u vertikalnoj ravni u kojoj su i ose η_1, η_2, z i ζ , i zbog toga projekcija tog vektora na ravan Oxy iznosi $\dot{\varphi}\sin\theta$ i pada u pravac ose η_1 , dok je $\dot{\varphi}\cos\theta$ projekcija tog vektora na osu z . Konačne projekcije vektora ugaone brzine ω (7.7) na ose nepokretnog koordinatnog sistema $Oxyz$ glase (Slika 7.7)

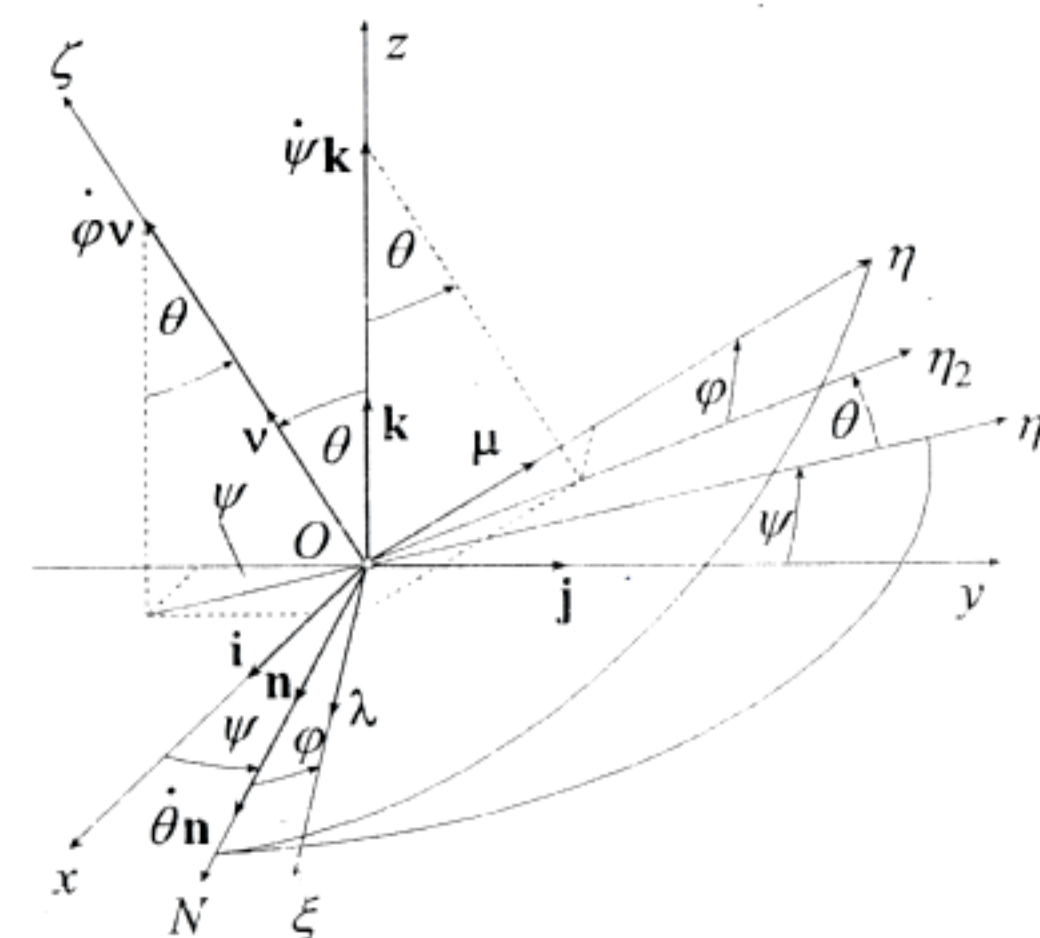
$$\begin{aligned} \omega_x &= \dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi + \dot{\theta}\cos\psi, \\ \omega_y &= -\dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi + \dot{\theta}\sin\psi, \\ \omega_z &= \dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta. \end{aligned} \quad (7.24)$$

Iz uslova

$$\omega = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2}, \quad (7.25)$$

zamenom (7.24) dobija se intenzitet trenutne ugaone brzine

$$\omega = \sqrt{\dot{\psi}^2 + \dot{\varphi}^2 + \dot{\theta}^2 + 2\dot{\psi}\dot{\varphi}\cos\theta}. \quad (7.26)$$



Slika 7.7:

Uglovi između vektora ugaone brzine ω i osa nepokretnog koordinatnog sistema $Oxyz$ iznose

$$\cos\angle(\omega, \mathbf{i}) = \frac{\omega_x}{\omega}, \quad \cos\angle(\omega, \mathbf{j}) = \frac{\omega_y}{\omega}, \quad \cos\angle(\omega, \mathbf{k}) = \frac{\omega_z}{\omega}.$$

Projekcijama ugaone brzine na ose nepokretnog sistema određen je i vektor ugaone brzine

$$\omega = \omega_x\mathbf{i} + \omega_y\mathbf{j} + \omega_z\mathbf{k}.$$

7.6.2 Pokretni koordinatni sistem $O\xi\eta\zeta$

Vektor ugaone brzine nutacije $\dot{\theta}\mathbf{n}$ pada u pravac čvorne ose, a vektor ugaone brzine sopstvenog obrtanja $\dot{\varphi}\mathbf{v}$ u pravac ose ζ , pa su njihove projekcije na ose pokretnog koordinatnog sistema $O\xi\eta\zeta$ očigledne. Vektor ugaone brzine precesije $\dot{\psi}\mathbf{k}$ pada u pravac ose z , a nalazi se u vertikalnoj ravni Oxz zbog toga projekcija tog vektora na ravan $O\xi\eta$ iznosi $\dot{\psi}\sin\theta$ i pada u pravac ose η_2 . Konačne projekcije vektora ugaone brzine ω (7.7) na ose pokretnog koordinatnog sistema $O\xi\eta\zeta$ glase (Slika 7.7)

$$\begin{aligned} \omega_\xi &= \dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi + \dot{\theta}\cos\varphi, \\ \omega_\eta &= \dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi - \dot{\theta}\sin\varphi, \\ \omega_\zeta &= \dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi}. \end{aligned}$$

Koristeći uslov da je

$$\omega = \sqrt{\omega_\xi^2 + \omega_\eta^2 + \omega_\zeta^2}, \quad (7.30)$$

i relacije (7.29) dobija se jednačina (7.26). Pravac vektora ugaone brzine ω u odnosu na ose pokretnog koordinatnog sistema $O\xi\eta\zeta$ je određen sa

$$\cos \angle(\omega, \lambda) = \frac{\omega_\xi}{\omega}, \quad \cos \angle(\omega, \mu) = \frac{\omega_\eta}{\omega}, \quad \cos \angle(\omega, \nu) = \frac{\omega_\zeta}{\omega}, \quad (7.31)$$

gde su λ , μ i ν jedinični vektori osa ξ , η i ζ . Vektor ugaone brzine prikazan preko svojih projekcija na ose nepokretnog koordinatnog sistema glasi

$$\omega = \omega_\xi \lambda + \omega_\eta \mu + \omega_\zeta \nu. \quad (7.32)$$

7.7 Projekcije vektora ugaonog ubrzanja

7.7.1 Nepokretan koordinatni sistem $Oxyz$

Pošto je vektor ugaonog ubrzanja ε izvod po vremenu vektora ugaone brzine ω , diferenciranjem izraza (7.28) po vremenu, uzimajući u obzir da su jedinični vektori i , j i k konstantni, dobija se vektor ugaonog ubrzanja

$$\varepsilon = \varepsilon_x i + \varepsilon_y j + \varepsilon_z k, \quad (7.33)$$

gde su projekcije ugaonog ubrzanja na ose nepokretnog koordinatnog sistema $Oxyz$

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \dot{\omega}_x, \\ \varepsilon_y &= \dot{\omega}_y, \\ \varepsilon_z &= \dot{\omega}_z. \end{aligned} \quad (7.34)$$

a $\dot{\omega}_x$, $\dot{\omega}_y$ i $\dot{\omega}_z$ izvodi po vremenu Ojlerovih kinematičkih jednačina (7.24).

7.7.2 Pokretan koordinatni sistem $O\xi\eta\zeta$

Diferenciranjem po vremenu izraza (7.32) dobija se

$$\varepsilon = \dot{\omega}_\xi \lambda + \dot{\omega}_\eta \mu + \dot{\omega}_\zeta \nu + \omega_\xi \dot{\lambda} + \omega_\eta \dot{\mu} + \omega_\zeta \dot{\nu}.$$

Poslednja tri člana prethodnog izraza definišu vremenske promene jediničnih vektora λ , μ i ν , osa ξ , η i ζ , odnosno brzine tačaka na krajevima tih vektora. Zato je

$$\dot{\lambda} = \omega \times \lambda, \quad \dot{\mu} = \omega \times \mu, \quad \dot{\nu} = \omega \times \nu,$$

pa zamenom u prethodni izraz sledi

$$\varepsilon = \dot{\omega}_\xi \lambda + \dot{\omega}_\eta \mu + \dot{\omega}_\zeta \nu + \omega \times (\omega_\xi \lambda + \omega_\eta \mu + \omega_\zeta \nu),$$

odnosno zbog (7.32) i činjenice da je $\omega \times \omega = 0$ dobija se vektor ubrzanja

$$\varepsilon = \varepsilon_\xi \lambda + \varepsilon_\eta \mu + \varepsilon_\zeta \nu,$$

gde su projekcije ugaonog ubrzanja na ose pokretnog koordinatnog si-

$$\varepsilon_\xi = \dot{\omega}_\xi,$$

$$\varepsilon_\eta = \dot{\omega}_\eta,$$

$$\varepsilon_\zeta = \dot{\omega}_\zeta.$$

Bez obzira što su ose ovog koordinatnog sistema pokretne, projekcije ugaonog ubrzanja na pojedine ose su izvodi odgovarajuće projekcije ugaonog ubrzanja po vremenu, kao što je to i kod nepokretnog koordinatnog sistema.

7.8 Brzina tačke tela

Ako je ω trenutna ugaona brzina sfernog kretanja, a r_M vektor proizvoljne tačke tela M u odnosu na nepokretnu tačku O (Slika 7.8), brzina tačke M

$$v_M = \omega \times r_M.$$

Intenzitet brzine tačke M je

$$v_M = \omega r_M \sin \angle(\omega, r_M).$$

Najkraće rastojanje tačke M od trenutne ugaone brzine, odnosno trenutnog obrtanja, je

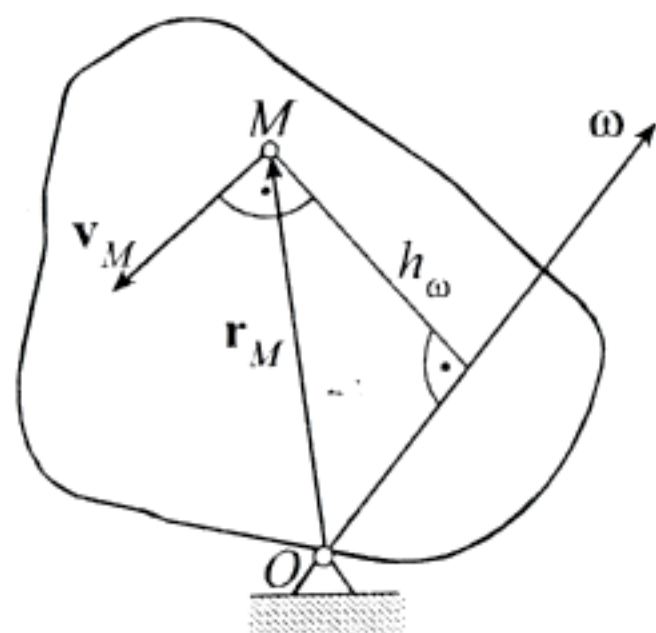
$$h_\omega = r_M \sin \angle(\omega, r_M),$$

pa je intenzitet brzine tačke M

$$v_M = \omega h_\omega.$$

Pravac brzine je upravan na ravan koju formiraju vektori ω i r_M . Usmeren po pravilu vektorskog proizvoda dva vektora. Pošto vektor ugaone brzine ω tokom kretanja menja svoj pravac u prostoru, brzina je u svakom trenutku tokom kretanja normalna na drugu ravan formiraju vektora ω i r_M .

Brzina tačke tela koje vrši sferno kretanje može se odrediti i d izračunavanjem vektorskog proizvoda (7.37), ako se znaju projekcije brzine na ose pokretnog $Oxyz$ ili nepokretnog koordinatnog sistema; koordinate tačke M u ovim koordinatnim sistemima.



Slika 7.8:

7.8.1 Nepokretan koordinatni sistem $Oxyz$

U nepokretnom koordinatnom sistemu $Oxyz$ vektor ugaone brzine je dat sa (7.28). Ako tačka M ima koordinate x, y i z u tom koordinatnom sistemu, onda je odgovarajući vektor položaja tačke M

$$\mathbf{r}_M = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}, \quad (7.41)$$

pa je prema (7.37)

$$\mathbf{v}_M = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_M = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix}.$$

Oдавде slede projekcije brzine na ose nepokretnog koordinatnog sistema $Oxyz$

$$\begin{aligned} v_x &= \omega_y z - \omega_z y, \\ v_y &= \omega_z x - \omega_x z, \\ v_z &= \omega_x y - \omega_y x. \end{aligned} \quad (7.42)$$

7.8.2 Pokretan koordinatni sistem $O\xi\eta\zeta$

U pokretnom koordinatnom sistemu $O\xi\eta\zeta$ vektor trenutne ugaone brzine ima oblik (7.32). Ako tačka M ima koordinate ξ, η i ζ u tom koordinatnom sistemu, onda je odgovarajući vektor položaja tačke M

$$\mathbf{r}_M = \xi\boldsymbol{\lambda} + \eta\boldsymbol{\mu} + \zeta\boldsymbol{\nu},$$

a prema (7.37)

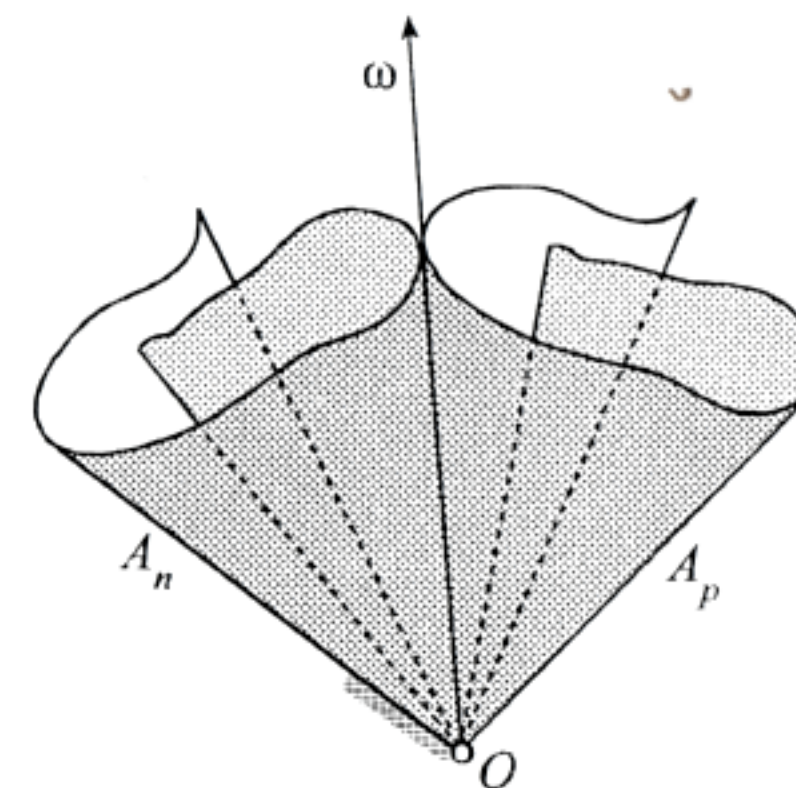
$$\mathbf{v}_M = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_M = \begin{vmatrix} \boldsymbol{\lambda} & \boldsymbol{\mu} & \boldsymbol{\nu} \\ \omega_\xi & \omega_\eta & \omega_\zeta \\ \xi & \eta & \zeta \end{vmatrix},$$

pa su projekcije brzine na ose pokretnog koordinatnog sistema $O\xi\eta\zeta$

$$\begin{aligned} v_\xi &= \omega_\eta \zeta - \omega_\zeta \eta, \\ v_\eta &= \omega_\zeta \xi - \omega_\xi \zeta, \\ v_\zeta &= \omega_\xi \eta - \omega_\eta \xi. \end{aligned}$$

7.9 Aksoidi

Prilikom sfernog kretanja tela trenutna osa obrtanja, ili vektor trenutne ugaone brzine, stalno menja svoj položaj u prostoru, ali stalno prolazi kroz nepokretnu tačku O . Geometrijsko mesto svih položaja trenutne ose obrtanja u nepokretnom $Oxyz$ ili pokretnom $O\xi\eta\zeta$ koordinatnom sistemu formira površine u



Slika 7.9:

kretnom i pokretnom prostoru koje se nazivaju nepokretni A_n i pokretni A_p (Slika 7.9). Nepokretni i pokretni aksoidi se u svakom trenutku vreću tokom kretanja dodiruju duž trenutne ose obrtanja. Očigledno, brzine tačaka tela koje leže u datom momentu vremena t na trenutnoj osi obrtanja su jednake nuli, odnosno prema (7.37)

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = 0.$$

Ako se koriste izrazi za komponente brzine u oba koordinatna sistema (7.42) i (7.43) i one izjednače sa nulom dobijaju se parametarske jednačine nepokretnog

$$\frac{x}{\omega_x} = \frac{y}{\omega_y} = \frac{z}{\omega_z}, \quad (7.45)$$

i pokretnog aksoida

$$\frac{\xi}{\omega_\xi} = \frac{\eta}{\omega_\eta} = \frac{\zeta}{\omega_\zeta}, \quad (7.46)$$

gde su x, y i z koordinate proizvoljne tačke na trenutnoj osi obrtanja u nepokretnom koordinatnom sistemu $Oxyz$, a ξ, η i ζ u pokretnom koordinatnom sistemu $O\xi\eta\zeta$.

Eliminacijom vremena, kao parametra iz ovih jednačina, sledi eksplicitna jednačina nepokretnog aksoida

$$F_1(x, y, z) = 0, \quad (7.47)$$

i pokretnog

$$F_2(\xi, \eta, \zeta) = 0. \quad (7.48)$$

Ako se napravi telo oblika nepokretnog aksoida i čvrsto veže za zemlju, i telo oblika pokretnog aksoida i čvrsto veže za telo koje vrši sferno kretanje, onda se sferno kretanje tela podudara sa kretanjem istog tela koje je vezano za pokretan aksoid pri kotrljanju bez klizanja pokretnog aksoida po nepokretnom. U svakom trenutku vremena pokretan i nepokretan aksoid se dodiruju duž trenutne ose obrtanja, pa vektor trenutne ugaone brzine ω tokom kretanja opisuje površinu u koordinatnom sistemu $Oxyz$ koja se poklapa sa nepokretnim aksoidom.

Aksoidi sfernog kretanja, nepokretan i pokretan, su uopštenja pojma centroida ravanskog kretanja, nepokretne i pokretne centroide.

7.10 Ubrzanje tačke tela

Diferenciranjem izraza za brzinu (7.37) po vremenu, i uzimajući u obzir da je izvod po vremenu ugaone brzine ω ugaono ubrzanje ϵ , a izvod po vremenu vektora položaja $\mathbf{r}_M$ tačke M njena brzina $\mathbf{v}_M$, dobija se ubrzanje tačke M

$$\mathbf{a}_M = \dot{\mathbf{v}}_M = \epsilon \times \mathbf{r}_M + \omega \times \mathbf{v}_M, \quad (7.49)$$

koje se može napisati kao

$$\mathbf{a}_M = \mathbf{a}_\epsilon + \mathbf{a}_\omega, \quad (7.50)$$

Sferno kretanje tela

gde su

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_\omega &= \omega \times \mathbf{v}_M, \\ \mathbf{a}_\epsilon &= \epsilon \times \mathbf{r}_M. \end{aligned}$$

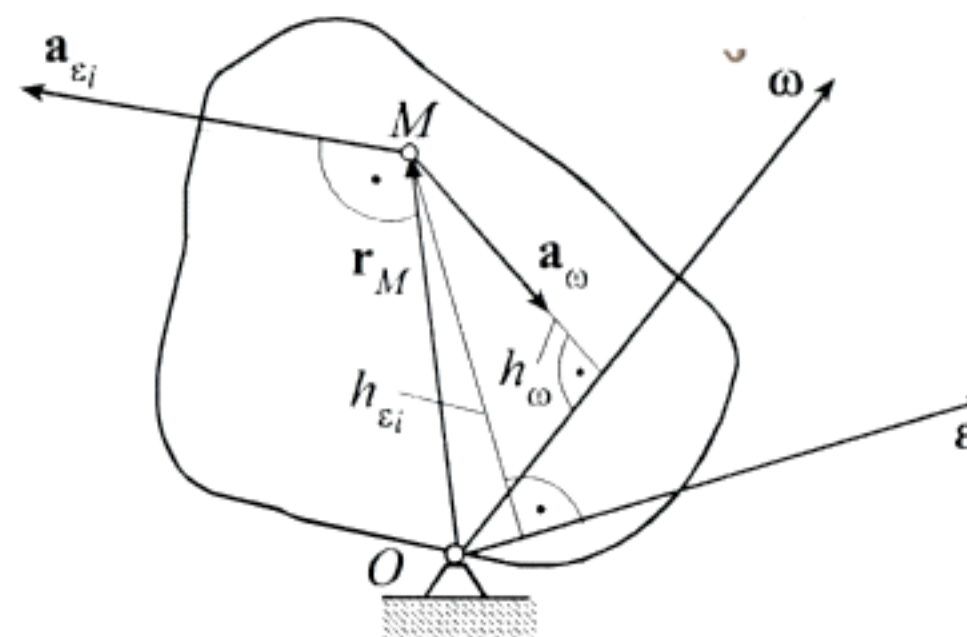
Normalna komponenta ubrzanja $\mathbf{a}_\omega$ (7.51) ima intenzitet

$$a_\omega = \omega v_M \sin \angle(\omega, \mathbf{v}_M).$$

Uzimajući u obzir da je ugao između ugaone brzine ω i brzine $\mathbf{v}_M$ prav je intenzitet brzine tačke M dat sa (7.40) sledi da je

$$a_\omega = \omega^2 h_\omega.$$

Ovo ubrzanje ima pravac h_ω i usmereno je uvek ka trenutnoj osi obrtanja (7.10). Ovo ubrzanje je slično normalnom ubrzanju tačke tela koje se obr nepomične ose, koje je uvek bilo u smeru ose obrtanja, pa se i ova komponenta naziva normalno ubrzanje.



Slika 7.10:

Ovde se $\mathbf{a}_\epsilon$ (7.52) naziva obrtno ubrzanje tačke M . Pošto vektor ug ubrzanja ϵ , prema (7.12), ima u najopštijem slučaju sfernog kretanja tri ponente ϵ_1, ϵ_2 i ϵ_3 , koje su date izrazima (7.13)-(7.15), toliko komponenti i obrtno ubrzanje

$$\mathbf{a}_\epsilon = \mathbf{a}_{\epsilon_1} + \mathbf{a}_{\epsilon_2} + \mathbf{a}_{\epsilon_3},$$

gde su

$$\mathbf{a}_{\epsilon_1} = \epsilon_1 \times \mathbf{r}_M, \quad \mathbf{a}_{\epsilon_2} = \epsilon_2 \times \mathbf{r}_M, \quad \mathbf{a}_{\epsilon_3} = \epsilon_3 \times \mathbf{r}_M.$$

Intenzitet bilo kog dela obrtnog ubrzanja $\mathbf{a}_{\varepsilon_i}$ iznosi

$$a_{\varepsilon_i} = \varepsilon_i r_M \sin \angle(\varepsilon_i, \mathbf{r}_M), \quad i = 1, 2, 3., \quad (7.57)$$

odnosno

$$a_{\varepsilon_i} = \varepsilon_i h_{\varepsilon_i}, \quad (7.58)$$

gde je h_{ε_i} najkraće rastojanje tačke M od pravca komponente ugaonog ubrzanja ε_i

$$h_{\varepsilon_i} = r_M \sin \angle(\varepsilon_i, \mathbf{r}_M), \quad (7.59)$$

a pravci i smerovi tih vektora su određeni pravilom vektorskog proizvoda.

Treba napomenuti da u najopštijem slučaju sfernog kretanja ni jedna komponenta obrtnog ubrzanja $\mathbf{a}_{\varepsilon_i}$ tačke M nije kolinearna (Slika 7.10) sa brzinom $\mathbf{v}_M$ tačke M , jer vektori ugaone brzine $\boldsymbol{\omega}$ i vektori ugaonih ubrzanja ε_i sfernog kretanja nisu kolinearni.

7.10.1 Sferno kretanje sa jednim stepenom slobode

U specijalnom slučaju sfernog kretanja tela kada ono ima jedan stepen slobode kretanja, ugao nutacije i ugao α koji trenutna ugaona brzina obrtanja zaklapa sa z osom su konstantni, pa ugaono ubrzanje tela ima dve komponente dato je izrazom (7.23), pa ubrzanje tačke M (7.50) i (7.55) ima tri komponente

$$\mathbf{a}_M = \mathbf{a}_{\varepsilon_1} + \mathbf{a}_{\varepsilon_2} + \mathbf{a}_{\omega}, \quad (7.60)$$

gde su $\mathbf{a}_{\varepsilon_1}$ i $\mathbf{a}_{\varepsilon_2}$ dati sa (7.56), a dve komponente ugaonog ubrzanja, prema (7.22) i (7.14), iznose

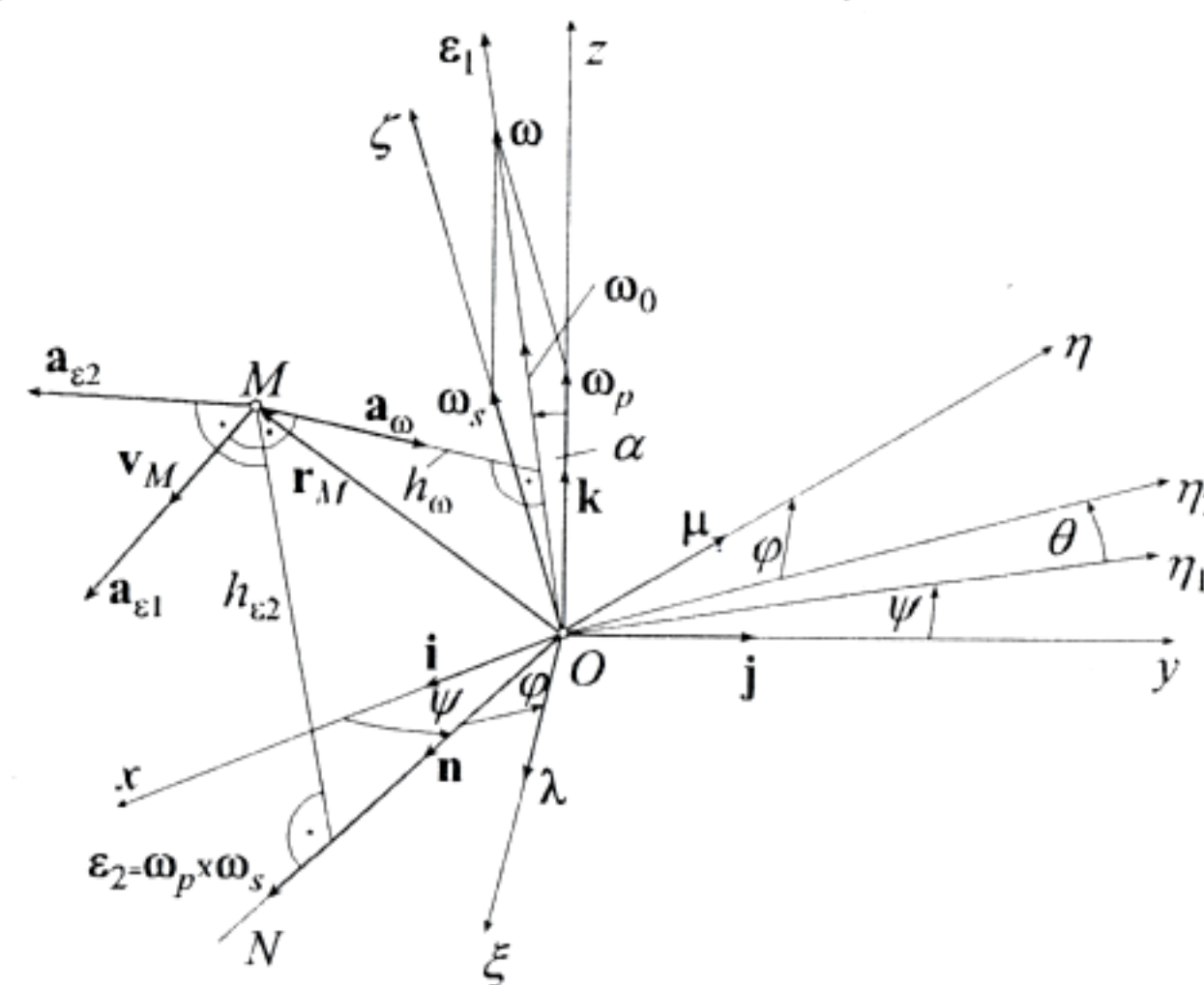
$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \dot{\omega} \omega_0, \\ \varepsilon_2 &= \boldsymbol{\omega}_p \times \boldsymbol{\omega}_s. \end{aligned} \quad (7.61)$$

U ovom slučaju ε_1 pada u pravac trenutne ose obrtanja pa je

$$a_{\varepsilon_1} = \varepsilon_1 r_M \sin \angle(\varepsilon_1, \mathbf{r}_M) = \varepsilon_1 h_{\omega}, \quad (7.62)$$

jer su vektori $\boldsymbol{\omega}$ i ε_1 kolinearni. Pravac vektora $\mathbf{a}_{\varepsilon_1}$ odgovara pravcu vektora brzine $\mathbf{v}_M$ a njegov smer zavisi od smera vektora ε_1 u odnosu na smer vektora trenutne ugaone brzine $\boldsymbol{\omega}$ (Slika 7.11). Ako je ε_1 istog smera sa $\boldsymbol{\omega}$ onda je $\mathbf{a}_{\varepsilon_1}$ u smeru vektora brzine $\mathbf{v}_M$, a ako je ε_1 suprotnog smera od smera $\boldsymbol{\omega}$ onda je $\mathbf{a}_{\varepsilon_1}$ u suprotnom smeru od vektora brzine $\mathbf{v}_M$. Druga komponenta ubrzanja $\mathbf{a}_{\varepsilon_2}$ ima intenzitet

$$a_{\varepsilon_2} = \varepsilon_2 r_M \sin \angle(\varepsilon_2, \mathbf{r}_M) = \varepsilon_2 h_{\varepsilon_2}, \quad (7.63)$$



Slika 7.11:

gde

$$h_{\varepsilon_2} = r_M \sin \angle(\varepsilon_2, \mathbf{r}_M), \quad (7.64)$$

predstavlja najkraće rastojanje od tačke M do ose ugaonog ubrzanja ε_2 , odnosno do čvorne ose ON jer je vektor ε_2 u njenom pravcu. Pravac vektora $\mathbf{a}_{\varepsilon_2}$ je upravan na ravan koju formiraju vektori ε_2 i $\mathbf{r}_M$, a smer je određen smerom vektorskog proizvoda.

7.11 Primeri

Primer 14 Obrtanje tela oko nepokretne tačke određeno je Ojlerovim uglovima $\psi = \frac{\pi}{2} + nt$ [rad], $\theta = \frac{\pi}{3}$ [rad], $\varphi = nt$ [rad], gde je n konstantna veličina. I odrediti pokretni A_p i nepokretni aksoid A_n .

Ojlerove kinematičke jednačine za nepokretni koordinatni sistem (7.24)

zadate zakone kretanja su

$$\begin{aligned}\omega_x &= \dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi = n \frac{\sqrt{3}}{2} \cos nt, \\ \omega_y &= -\dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi + \dot{\theta} \sin \psi = n \frac{\sqrt{3}}{2} \sin nt, \\ \omega_z &= \dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta = n \left(1 + \frac{1}{2}\right).\end{aligned}$$

Zamenom ovih ugaonih brzina u (7.45) dobija se parametarska jednačina nepokretnog aksoida A_n

$$\frac{x}{n \frac{\sqrt{3}}{2} \cos nt} = \frac{y}{n \frac{\sqrt{3}}{2} \sin nt} = \frac{z}{n \frac{3}{2}},$$

odnosno

$$\begin{aligned}x &= \frac{\sqrt{3}z}{3} \cos nt, \\ y &= \frac{\sqrt{3}z}{3} \sin nt.\end{aligned}\quad (A)$$

Kvadriranjem ovih jednačina (A) i sabiranjem tih kvadrata dobija se jednačina nepokretnog aksoida A_n

$$x^2 + y^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 z^2. \quad (B)$$

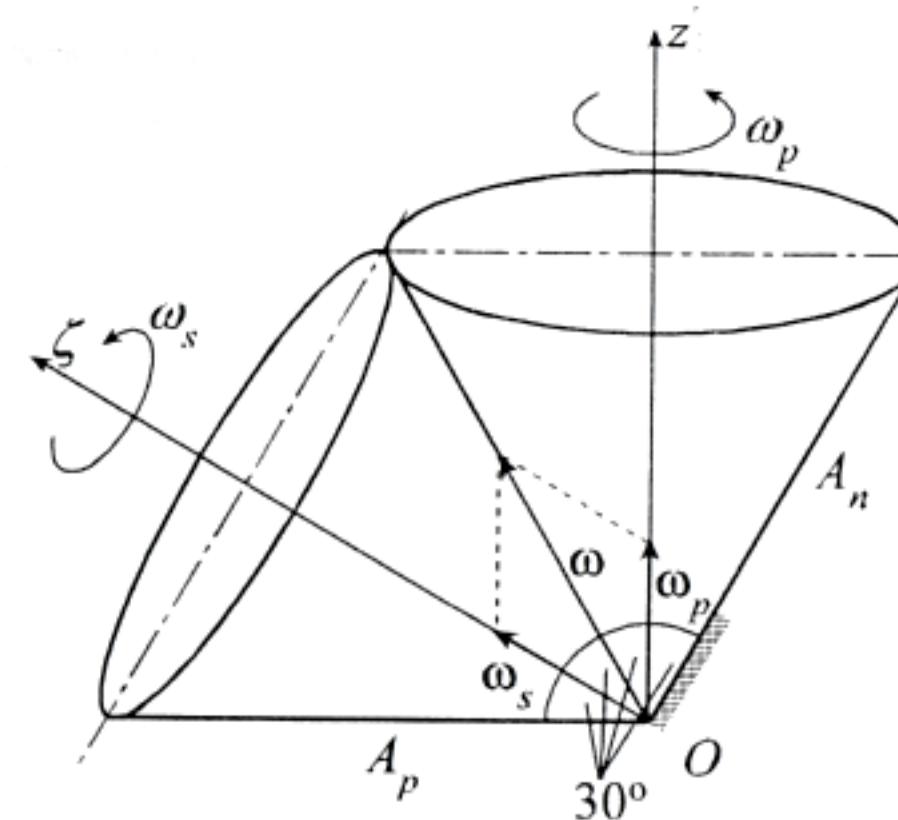
Vidi se da je nepokretni aksoid A_n kružni konus sa vrhom u tački O i čija je osa simetrije osa z . Presek ove površine sa ravni $x = 0$ su prave linije u ravni Oyz

$$z = \pm \sqrt{3}y,$$

pa je ugao konusa pri vrhu dva puta po $\pi/6$ [rad].

Projekcije ugaone brzine na ose pokretnog koordinatnog sistema prema (7.29) su

$$\begin{aligned}\omega_\xi &= \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi = n \frac{\sqrt{3}}{2} \sin nt, \\ \omega_\eta &= \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi = n \frac{\sqrt{3}}{2} \cos nt, \\ \omega_\zeta &= \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi} = n \left(\frac{1}{2} + 1\right).\end{aligned}$$



Slika 7.12:

Jednačina pokretnog aksoida A_p je data sa (7.46), pa zamenom preth komponenti ugaone brzine, dobija se

$$\frac{\xi}{n \frac{\sqrt{3}}{2} \sin nt} = \frac{\eta}{n \frac{\sqrt{3}}{2} \cos nt} = \frac{\zeta}{n \frac{3}{2}},$$

odnosno

$$\begin{aligned}\xi &= \frac{\zeta}{3} \sqrt{3} \sin nt, \\ \eta &= \frac{\zeta}{3} \sqrt{3} \cos nt.\end{aligned}$$

Eliminisanjem vremena t iz jednačina (C) dobija se jednačina pokretnog aksoida A_p

$$\xi^2 + \eta^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 \zeta^2.$$

Ova površina je simetričan kružni konus u koordinatnom sistemu $O\xi\eta$ vrhom u tački O i čija je osa simetrije osa ζ . Presek ove površine sa $\xi = 0$ su prave linije u ravni $O\eta\zeta$

$$\zeta = \pm \sqrt{3}\eta,$$

pa je ugao konusa pri vrhu dva puta po $\pi/6$ [rad]. Pošto je ugao nu između z i ζ osa $\pi/3$ [rad], nacrtava se prvo poznati pravac ose ζ , pa se ok

dobija se

$$h_\omega = r\sqrt{3} \text{ [m]}.$$

Intenzitet brzine tačke M je prema (7.40)

$$v_{M1} = \omega_1 h_\omega = r\sqrt{3} \text{ [m/s]},$$

dok njen pravac pada u pravac tangente na krug poluprečnika h_ω u tački M , a smer je određen smerom obrtanja ω .

U posmatranom problemu, ugao nutacije i ugao između vektora ugaone brzine i z ose su konstantni, pa se ubrzanje tačke M dobija iz relacija (7.60)-(7.64)

$$\mathbf{a}_M = \mathbf{a}_{\varepsilon_1} + \mathbf{a}_{\varepsilon_2} + \mathbf{a}_\omega. \quad (B)$$

Normalno ubrzanje ima vrednost

$$a_{\omega 1} = \omega_1^2 h_\omega = r\sqrt{3} \text{ [m/s}^2\text{]}.$$

Pravac ovog ubrzanja odgovara pravcu h_ω , i usmeren je ka trenutnoj osi obrtanja.

Prvi deo obrtnog ugaonog ubrzanja ε_1 glasi

$$\varepsilon_1 = \dot{\omega} = \sqrt{2} \cos t,$$

a u datom trenutku t_1 ima vrednost

$$\varepsilon_{11} = 1 \text{ [s}^{-2}\text{]}.$$

Pošto je u datom trenutku $\varepsilon_{11} > 0$, pravac i smer ovog ugaonog ubrzanja poklapa se sa pravcem i smerom trenutne ugaone brzine, pa je

$$a_{\varepsilon 11} = \varepsilon_{11} h_\omega = r\sqrt{3} \text{ [m/s}^2\text{]},$$

dok je vektor ovog ubrzanja $\mathbf{a}_{\varepsilon 11}$ u pravcu i smeru brzine tačke M .

Druga komponenta obrtnog ugaonog ubrzanja $\varepsilon_2 = \omega_p \times \omega_s$ ima vrednost

$$\varepsilon_{21} = \omega_{p1} \omega_{s1} \sin(\pi - \frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ [s}^{-2}\text{]}.$$

Ugaono ubrzanje ε_{21} je u pravcu čvorne ose, a to je za položaj tela na slici osa x . Smer ovog vektora je određen pravilom vektorskog proizvoda.

Pošto je ubrzanje $\mathbf{a}_{\varepsilon 2} = \varepsilon_2 \times \mathbf{r}_M$, gde je $\mathbf{r}_M$ vektor položaja tačke M , vrednost tog ubrzanja je

$$a_{\varepsilon 21} = \varepsilon_{21} r_M \sin \frac{\pi}{2},$$

Sferno kretanje tela

jer je ugao između vektora ε_{21} i $\mathbf{r}_M$ prav. Dužina vektora $\mathbf{r}_M$ je rast tačke M od pravca ugaonog ubrzanja ε_{21}

$$r_M = OM = 2r \text{ [m]},$$

pa je ubrzanje $a_{\varepsilon 21}$

$$a_{\varepsilon 21} = \varepsilon_{21} r_M = r\sqrt{3} \text{ [m/s}^2\text{]}.$$

Ovo ubrzanje ima pravac normale na ravan vektora ε_{21} i $\mathbf{r}_M$ a to je pravu y . Smer odgovara smeru vektorskog proizvoda.

Projekcije vektorske jednačine (B) na ose koordinatnog sistema $Oxyz$

$$a_{M1x} = a_{\varepsilon 11} = r\sqrt{3} \text{ [m/s}^2\text{]},$$

$$a_{M1y} = -a_{\varepsilon 21} + a_{\omega 1} \sin \frac{\pi}{6} = -r\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ [m/s}^2\text{]},$$

$$a_{M1z} = -a_{\omega 1} \cos \frac{\pi}{6} = -r\frac{3}{2} \text{ [m/s}^2\text{]},$$

pa je intenzitet ubrzanja tačke M

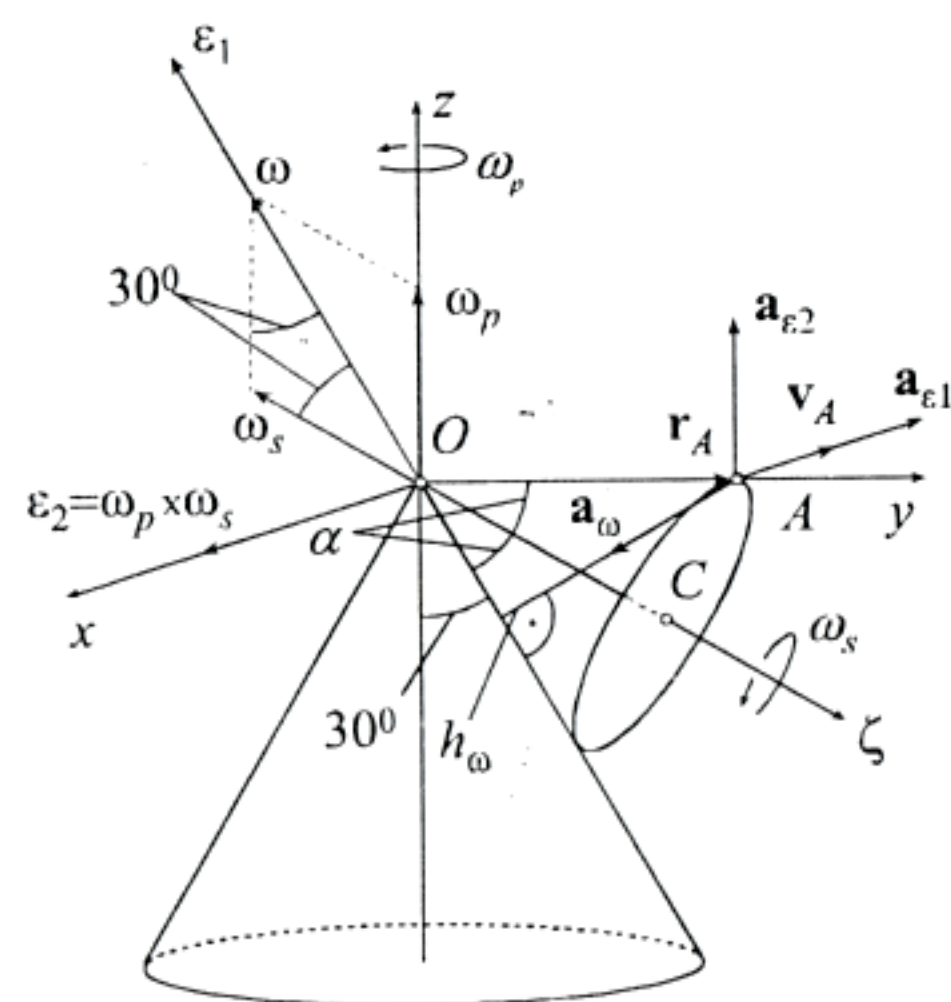
$$a_{M1} = \sqrt{a_{M1x}^2 + a_{M1y}^2 + a_{M1z}^2} = r\sqrt{6} \text{ [m/s}^2\text{]}.$$

Primer 16 Kružni disk kotrlja se bez klizanja po nepokretnom konusu č ugao pri vrhu $\pi/3$ [rad] (Slika 7.14). Ugaona brzina obrtanja oko vertikalne ose je $\omega_p = 2t^2 - t^3$ [s⁻¹]. Rastojanje tačaka O i C je $3/\sqrt{3}$ [m]. Odrediti brzinu i ubrzanje tačke A na obodu diska nakon $t_1 = 1$ [s]. Prilikom kretanja tačka A se stalno nalazi na istoj horizontali sa sfernim zglobovom C .

Disk se sferno obrće oko tačke O . Obrtanje diska oko ose OC je sopstveno obrtanje, a obrtanje diska oko vertikalne ose je precesiono kretanje. Pošto kotrljanje diska odvija bez klizanja, ovaj problem kretanja diska ima jedan pen slobode kretanja. Ugao nutacije je konstantan zadati ugao $\theta = 2\pi/3$ [rad] pa je ugaona brzina nutacije jednaka nuli, $\omega_n = 0$ [s⁻¹]. Disk se precesiono obrće oko ose z ugaonom brzinom ω_p . Ugaona brzina sopstvenog obrtanja ω_s oko ose ζ , koja pada u pravac OC , iznosi ω_s . Ukupna trenutna ugaona brzina diska je prema (7.17)

$$\omega = \omega_s + \omega_p.$$

Pošto je tačka dodira diska i konusa nepokretna, jer se disk kotrlja bez klizanja, trenutna osa obrtanja na kojoj leži ugaona brzina mora prolaziti kroz tačku O i tačku dodira diska i konusa. Ugao koji trenutna osa zaklapa



Slika 7.14:

pravcem ose ζ je sa slike $\alpha = \pi/6$ [rad]. Znajući ovaj podatak, i koristeći sliku 7.14, sinusna teorema za vektorsku jednačinu (A) daje

$$\frac{\omega_p}{\sin \frac{\pi}{6}} = \frac{\omega_s}{\sin \frac{\pi}{6}} = \frac{\omega}{\sin \frac{2\pi}{3}},$$

pa su odgovarajuće ugaone brzine

$$\begin{aligned}\omega_s &= \omega_p = 2t^2 - t^3, \\ \omega &= 2\omega_p \cos \frac{\pi}{6} = \sqrt{3}(2t^2 - t^3),\end{aligned}$$

odnosno u datom trenutku t_1

$$\begin{aligned}\omega_{s1} &= \omega_{p1} = 1 \text{ [s}^{-1}\text{]}, \\ \omega_1 &= \sqrt{3} \text{ [s}^{-1}\text{]}.\end{aligned}$$

Pravac i smer ugaonih brzina prikazan je na slici 7.14.

Sa slike 7.14 je $r = OC \tan \pi/6 = 1$ [m], pa je rastojanje OA

$$OA = \sqrt{(OC)^2 + r^2} = 2 \text{ [m]}.$$

Sferno kretanje tela

Najkraće rastojanje h_ω tačke A od trenutne ose obrtanja dobija se ako se tačke spusti normala na osu obrtanja, pa je

$$h_\omega = OA \sin \frac{\pi}{3} = \sqrt{3} \text{ [m]}.$$

Brzina tačke A je po intenzitetu

$$v_{A1} = \omega_1 h_\omega = 3 \text{ [m/s]},$$

njen pravac je upravan na ravan koju formiraju vektori $\mathbf{r}_A$ i $\boldsymbol{\omega}$, a smer odgo smeru obrtanja ukupne ugaone brzine.

Kako je ugao nutacije θ konstantan, i vektor trenutne ugaone brzine zaklapa konstantan ugao $\pi/6$ [rad] sa osom z sledi da je ubrzanje tačke A relacijama (7.60)-(7.64)

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_{\varepsilon_1} + \mathbf{a}_{\varepsilon_2} + \mathbf{a}_\omega.$$

Intenzitet normalnog ubrzanja je

$$a_{\omega 1} = \omega_1^2 h_\omega = 3\sqrt{3} \text{ [m/s}^2\text{]},$$

njegov pravac odgovara pravcu h_ω , a smer je ka trenutnoj osi obrtanja.

Prva komponenta obrtnog ugaonog ubrzanja je

$$\varepsilon_1 = \dot{\omega} = \sqrt{3}(4t - 3t^2),$$

a u datom trenutku ima vrednost

$$\varepsilon_{11} = \sqrt{3} \text{ [s}^{-2}\text{]}.$$

Pošto je ovo ubrzanje pozitivno, vektor ugaonog ubrzanja $\boldsymbol{\varepsilon}_1$ ima pr i smer vektora ugaone brzine $\boldsymbol{\omega}$. Komponenta ubrzanja $\mathbf{a}_{\varepsilon_1}$ ima isti pravac smer kao i brzina tačke A a intenzitet

$$a_{\varepsilon_1 1} = \varepsilon_{11} h_\omega = 3 \text{ [m/s}^2\text{]}.$$

Druga komponenta ugaonog ubrzanja

$$\boldsymbol{\varepsilon}_2 = \boldsymbol{\omega}_p \times \boldsymbol{\omega}_s,$$

ima vrednost

$$\varepsilon_{21} = \omega_{p1} \omega_{s1} \sin \angle(\boldsymbol{\omega}_p, \boldsymbol{\omega}_s) = \omega_{p1} \omega_{s1} \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ [s}^{-2}\text{]},$$

pravac upravan na ravan vektora ω_p i ω_s , a smer u skladu sa pravilom vektorskog proizvoda.

Druga komponenta obrtnog ubrzanja $\mathbf{a}_{\varepsilon_2} = \varepsilon_2 \times \mathbf{r}_A$, gde je $\mathbf{r}_A$ vektor položaja tačke A, ima intenzitet

$$a_{\varepsilon_2} = \varepsilon_2 r_A \sin \angle(\varepsilon_2, \mathbf{r}_A) = \varepsilon_2 r_A \sin \frac{\pi}{2} = \sqrt{3} \text{ [m/s}^2\text{]},$$

gde je $r_A = OA$. Pravac vektora $\mathbf{a}_{\varepsilon_2}$ je upravan na ravan koju formiraju vektori ε_2 i $\mathbf{r}_A$, a smer u skladu sa pravilom vektorskog proizvoda. U cilju određivanja ukupnog ubrzanja tačke A, projektuje se vektorska jednačina (B) na ose koordinatnog sistema Oxyz

$$a_{A1x} = -a_{\varepsilon_1} = -3 \text{ [m/s}^2\text{]},$$

$$a_{A1y} = -a_{\omega_1} \cos \frac{\pi}{6} = -\frac{9}{2} \text{ [m/s}^2\text{]},$$

$$a_{A1z} = a_{\varepsilon_2} - a_{\omega_1} \sin \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ [m/s}^2\text{]}.$$

Intenzitet ukupnog ubrzanja iznosi

$$a_{A1} = \sqrt{a_{A1x}^2 + a_{A1y}^2 + a_{A1z}^2} = \sqrt{30} \text{ [m/s}^2\text{]}.$$

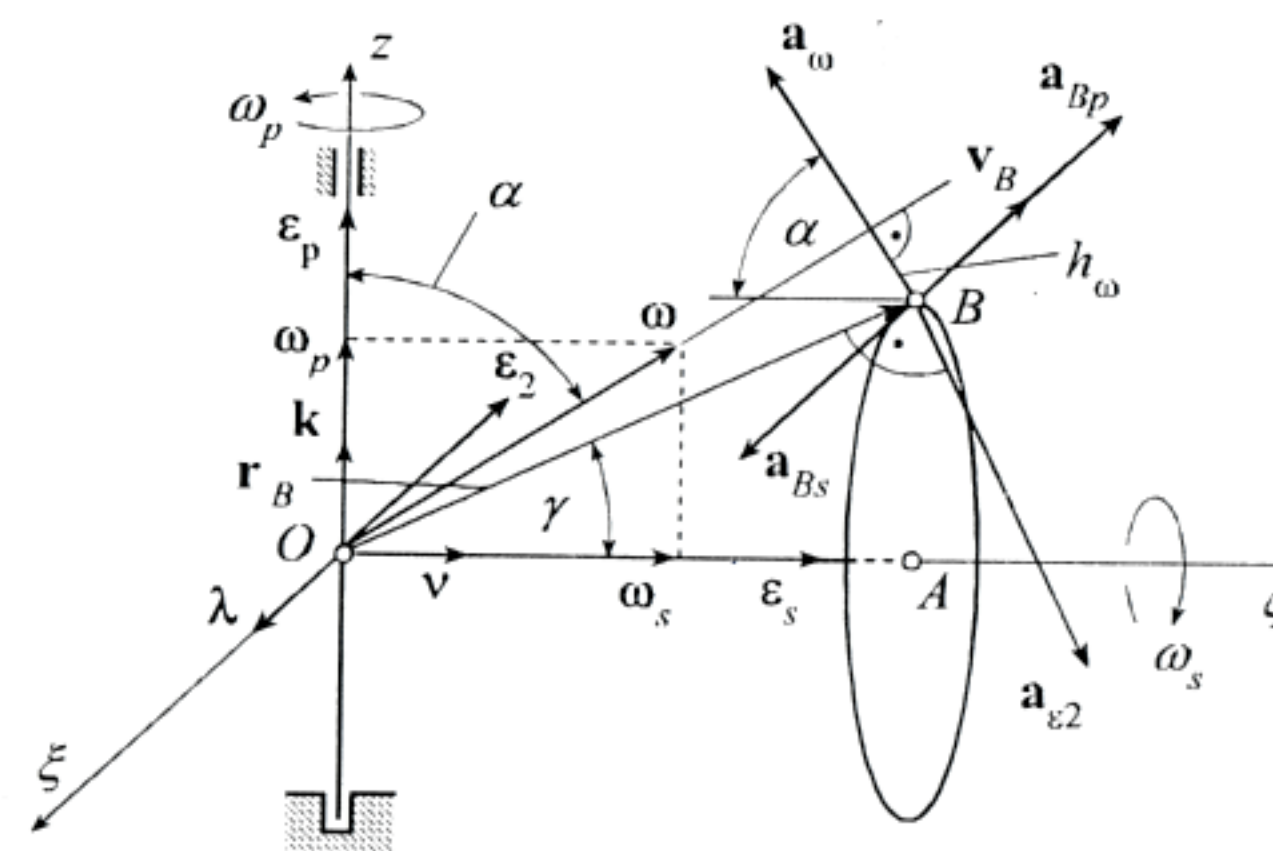
Primer 17 Na vertikalno vratilo kruto je vezana horizontalna osovina dužine $OA = 2 \text{ [m]}$ na čijem kraju se nalazi disk čiji je poluprečnik $r = 1 \text{ [m]}$. Vratilo se obrće ugaonom brzinom $\omega_p = 2t \text{ [s}^{-1}\text{]}$ oko vertikalne ose. Disk se obrće ugaonom brzinom $\omega_s = 3t^2 \text{ [s}^{-1}\text{]}$ oko svoje ose simetrije (Slika 7.15). Odrediti brzinu i ubrzanje tačke B koja je u najvišem položaju na disku u trenutku $t_1 = 1 \text{ [s]}$.

Pošto se kretanje diska sastoji od dva nezavisna obrtanja, oko osa koje se seku pod stalnim uglom $\pi/2 \text{ [rad]}$ u tački O, ovaj problem ima dva stepena slobode a tačka O, koja je presek osa obrtanja, je nepokretna tačka sfernog kretanja. Za posmatranje kretanja usvaja se pokretna osa ζ u pravcu OA i nepokretna osa z u vertikalnom pravcu. Obrtanje oko ose ζ je sopstveno obrtanje ugaonom brzinom ω_s . Obrtanje oko ose z , je precesiono obrtanje pa je ω_p ugaona brzina precesije. Znači

$$\begin{aligned} \omega_p &= 2t, \\ \omega_s &= 3t^2, \end{aligned} \quad (A)$$

dok je ugao nutacije konstantan, $\theta = \pi/2 \text{ [rad]}$, pa je ugaona brzina nutacije jednaka nuli, $\omega_n = 0 \text{ [s}^{-1}\text{]}$. Ukupna ugaona brzina diska je

$$\omega = \omega_p + \omega_s,$$



Slika 7.15:

a njen intenzitet je, zbog ortogonalnosti vektora ω_p i ω_s

$$\omega = \sqrt{\omega_p^2 + \omega_s^2} = \sqrt{4t^2 + 9t^4}.$$

U trenutku $t_1 = 1 \text{ [s]}$ ove veličine iznose

$$\begin{aligned} \omega_{p1} &= 2 \text{ [s}^{-1}\text{]}, \\ \omega_{s1} &= 3 \text{ [s}^{-1}\text{]}, \\ \omega_1 &= \sqrt{13} \text{ [s}^{-1}\text{]}. \end{aligned}$$

Zbog promenljivosti ugaonih brzina preseccije ω_{p1} i sopstvenog obrtanja ω_{s1} vremenom, i ugao α između vektora ugaone brzine ω i ose z se menja kretanja.

Sinusi i kosinusi ugla α između vektora trenutne ugaone brzine i o ugla γ na slici 7.15. u trenutku t_1 iznose

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \frac{\omega_{s1}}{\omega_1} = \frac{3}{\sqrt{13}}, & \cos \alpha &= \frac{\omega_{p1}}{\omega_1} = \frac{2}{\sqrt{13}}, \\ \sin \gamma &= \frac{r}{OB} = \frac{1}{\sqrt{5}}, & \cos \gamma &= \frac{OA}{OB} = \frac{2}{\sqrt{5}}, \end{aligned}$$

gde je dužina

$$OB = \sqrt{OA^2 + r^2} = \sqrt{5} \text{ [m]}.$$

Sa slike 7.15 je najkraće rastojanje tačke B od vektora ugaone brzine ω dato sa

$$h_\omega = OB \sin\left(\frac{\pi}{2} - \gamma - \alpha\right) = \frac{1}{\sqrt{13}} [m],$$

pa je brzina tačke B u trenutku t_1

$$v_{B1} = \omega_1 h_\omega = 1 [m/s].$$

Pošto je ugaona brzina nutacije jednaka nuli, komponenta ϵ_3 ugaonog ubrzanja je, prema (7.15), jednaka nuli. Zato je ugaono ubrzanje (7.12)

$$\epsilon = \epsilon_1 + \epsilon_2,$$

gde je

$$\epsilon_2 = \omega_p \times \omega_s,$$

a ϵ_1 se izračunava prema (7.13)

$$\epsilon_1 = \dot{\omega}_p \mathbf{k} + \dot{\omega}_s \boldsymbol{\nu}, \quad (D)$$

zbog promenljivosti ugla α između vektora ugaone brzine ω i ose z .

Iz (B) se dobija

$$\dot{\omega}_p = 2, \quad \dot{\omega}_s = 6t,$$

a u datom trenutku t_1 je

$$\dot{\omega}_{p1} = 2 [s^{-2}], \quad \dot{\omega}_{s1} = 6 [s^{-2}]. \quad (E)$$

U ovom problemu ubrzanje tačke B, prema (7.55) i uzimanjem u obzir izraza (D), iznosi

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_{Bp} + \mathbf{a}_{Bs} + \mathbf{a}_{\epsilon_2} + \mathbf{a}_\omega, \quad (F)$$

gde su

$$\mathbf{a}_{Bp} = \dot{\omega}_p \mathbf{k} \times \mathbf{r}_B, \quad (G)$$

$$\mathbf{a}_{Bs} = \dot{\omega}_s \boldsymbol{\nu} \times \mathbf{r}_B, \quad (H)$$

i gde je $\mathbf{r}_B$ vektor položaja tačke B, pa su intenziteti ubrzanja

$$a_{Bp1} = \dot{\omega}_{p1} OB \sin\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right) = \dot{\omega}_{p1} OA = 4 [m/s^2],$$

$$a_{Bs1} = \dot{\omega}_{s1} OB \sin \gamma = \dot{\omega}_{s1} r = 6 [m/s^2].$$

Na slici 7.15 nacrtane su ove dve komponente vektora ubrzanja u skladu sa više puta ponovljenim pravilom vektorskog proizvoda.

Komponenta ugaonog ubrzanja ϵ_2 ima intenzitet prema (D)

$$\epsilon_{21} = \omega_{p1} \omega_{s1} \sin \angle(\omega_p, \omega_s) = \omega_{p1} \omega_{s1} \sin \frac{\pi}{2} = 6 [s^{-2}].$$

Pravac vektora ϵ_2 je upravan na ravan koju formiraju vektori ω_p i ω_s , njegov smer je u skladu sa pravilom vektorskog proizvoda. Komponenta obrotne ubrzanja $\mathbf{a}_{\epsilon_2} = \epsilon_2 \times \mathbf{r}_B$ ima intenzitet

$$a_{\epsilon_21} = \epsilon_{21} OB \sin \frac{\pi}{2} = 6\sqrt{5} [m/s^2].$$

Konačno, normalno ubrzanje ima intenzitet

$$a_{\omega 1} = \omega_1^2 h_\omega = \sqrt{13} [m/s^2],$$

pravac odgovara pravcu h_ω a smer je ka trenutnoj osi obrtanja.

Da bi se odredilo ukupno ubrzanje, usvoji se osa ξ koja u svakom tren kretanja obrazuje sa osama z i ζ pravougli koordinatni sistem i na te ose projektuje vektorska jednačina (F)

$$a_{B\xi 1} = a_{Bs1} - a_{Bp1} = 2 [m/s^2],$$

$$a_{B\zeta 1} = a_{\epsilon_21} \sin \gamma - a_{\omega 1} \cos \alpha = 4 [m/s^2],$$

$$a_{Bz1} = a_{\omega 1} \sin \alpha - a_{\epsilon_21} \cos \gamma = -9 [m/s^2],$$

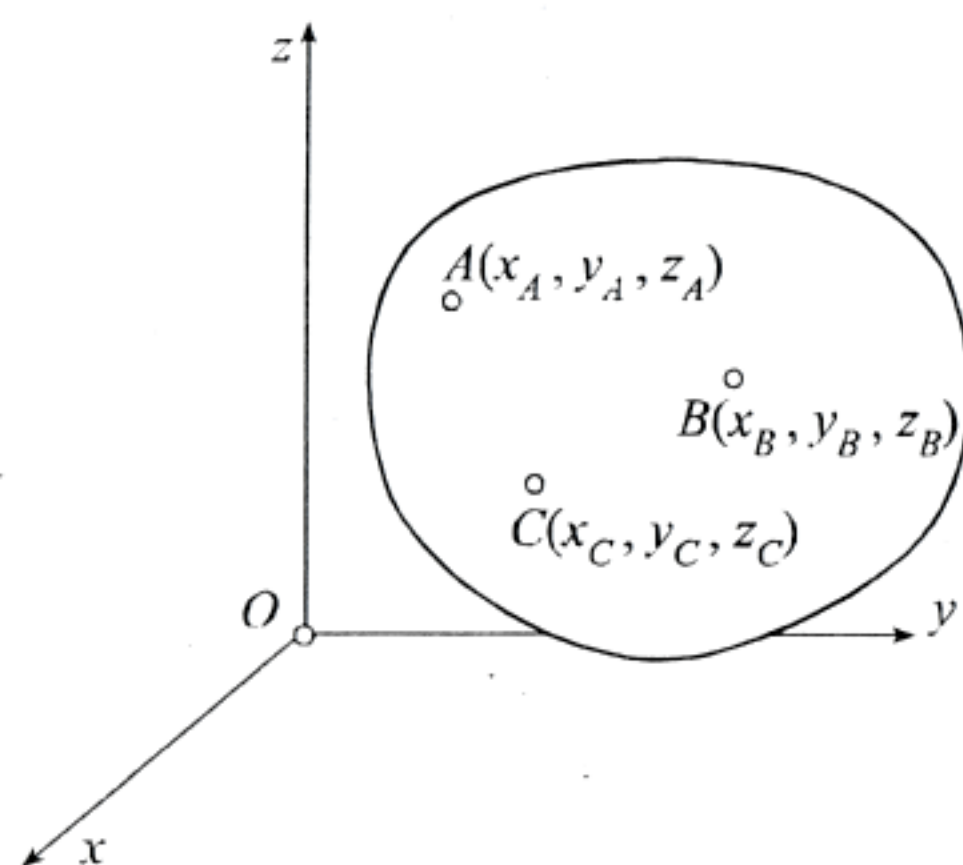
pa je intenzitet ukupnog ubrzanja tačke B

$$a_{B1} = \sqrt{a_{B\xi 1}^2 + a_{B\zeta 1}^2 + a_{Bz1}^2} = \sqrt{101} [m/s^2].$$

Glava 8

Slobodno kretanje tela

Ako kretanje tela u prostoru nije ograničeno nikakvim vezama onda se telo slobodno kreće u prostoru. Često se ovakvo kretanje tela zove opšte kretanje tela. Položaj tela u trodimenzionalnom prostoru jednoznačno je određen položajem tri njegove tačke A , B i C koje se ne nalaze na istom pravcu (Slika 8.1).



Slika 8.1:

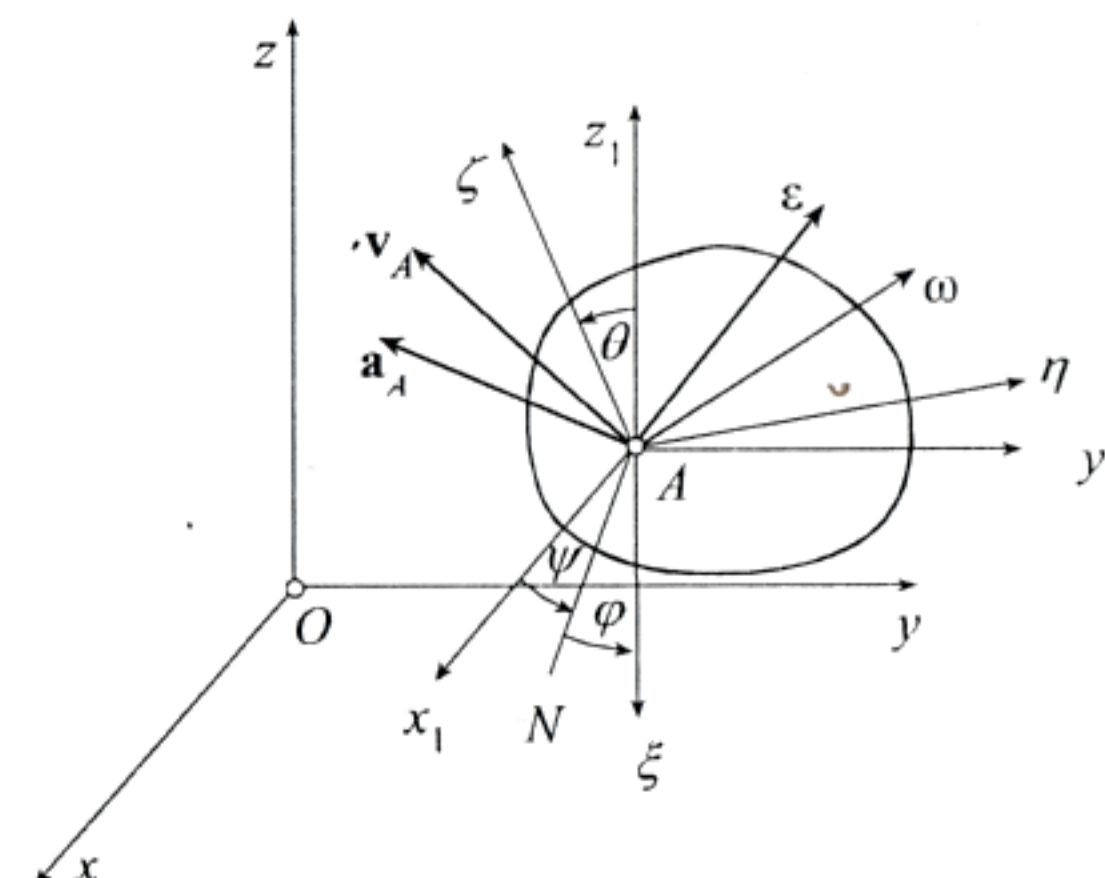
Ako se usvoji nepokretan koordinatni sistem $Oxyz$, onda je položaj ove tri tačke određen sa devet parametara, odnosno devet Dekartovih koordinata x_A , y_A , z_A , x_B , y_B , z_B , x_C , y_C i z_C tih tačaka. Iz uslova da je telo kruto sledi da

Slobodno kretanje tela

je rastojanje između ovih tačaka tokom kretanja nepromenljivo

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2} = \text{const.}, \\ AC &= \sqrt{(x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2 + (z_A - z_C)^2} = \text{const.}, \\ BC &= \sqrt{(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2 + (z_B - z_C)^2} = \text{const.} \end{aligned}$$

Iz ove tri jednačine mogu se bilo koje tri koordinate izraziti preko preostale tri koordinate, koje su prema tome nezavisne, pa ovo kretanje ima šest stepeni slobode kretanja. Ove jednačine predstavljaju jednačine veza, pa oduzimajući broj jednačina veza, tri, od ukupnog broja parametara, devet, sledi da je stepeni slobode kretanja šest. Znači, šest jednačina kretanja opisuje slobodno kretanje tela.



Slika 8.2:

Telo se može pomeriti iz jednog položaja u prostoru u drugi jednim translacionim pomeranjem i jednim obrtanjem oko proizvoljno izabrane tačke. Na telu jedna tačka A (Slika 8.2) i veže za nju koordinatni sistem $Ax_1y_1z_1$ koji se kreće translaciono zajedno sa telom u odnosu na nepokretni koordinatni sistem $Oxyz$. Proizvoljno izabrana tačka A naziva se pol slobodnog kretanja tela. Za telo se u tački A čvrsto veže koordinatni sistem $A\xi\eta\zeta$. Koordinatni sistem $A\xi\eta\zeta$ se obrće zajedno sa telom oko pola A , odnosno vrši sferno kretanje oko pola A . Slobodno kretanje tela određeno je kretanjem pola, odnosno translacionim kretanjem koordinatnog sistema $Ax_1y_1z_1$, i sfernim kretanjem

oko tačke A , odnosno obrtanjem koordinatnog sistema $A\xi\eta\zeta$ u odnosu na koordinatni sistem $Ax_1y_1z_1$.

Položaj koordinatnog sistema $Ax_1y_1z_1$ u odnosu na nepokretan koordinatni sistem $Oxyz$ određen je koordinatama x_A, y_A, z_A pola A slobodnog kretanja tela, koje su pri kretanju poznate funkcije vremena

$$x_A = x_A(t), \quad y_A = y_A(t), \quad z_A = z_A(t). \quad (8.1)$$

Položaj koordinatnog sistema $A\xi\eta\zeta$ u odnosu na koordinatni sistem $Ax_1y_1z_1$ određen je Ojlerovim uglovima precesije ψ , nutacije θ i sopstvenog obrtanja φ (Slika 8.2), koji su pri kretanju poznate funkcije vremena, odnosno

$$\psi = \psi(t), \quad \theta = \theta(t), \quad \varphi = \varphi(t). \quad (8.2)$$

Ovih šest jednačina (8.1) i (8.2) definišu slobodno kretanje tela i nazivaju se konačnim jednačinama slobodnog kretanja tela.

Translatorno kretanje tela potpuno je poznato znanjem brzine $\mathbf{v}_A$ i ubrzanja $\mathbf{a}_A$ pola A . Sferno kretanje oko tačke A je okarakterisano ugaonom brzinom ω i ugaonim ubrzanjem ε obrtanja oko tačke A . Slično kao kod sfernog kretanja tela, ovi vektori ω i ε stalno prolaze kroz pol A , menjajući svoj pravac u prostoru. U najopštijem slučaju slobodnog kretanja tela vektori ω i ε ne padaju u isti pravac.

U svakom trenutku vremena vektor $\mathbf{v}_A$ brzine pola A i vektor ugaone brzine ω obrtanja tela oko pola A formiraju u polu kinematički torzer. Pošto je u svakom trenutku tokom kretanja ugao između elemenata ovog torzera proizvoljan, slobodno kretanje tela ostvaruje se beskonačnim nizom trenutnih zavojskih kretanja (vidi poglavlje 5.3.3).

8.1 Brzina tačke tela

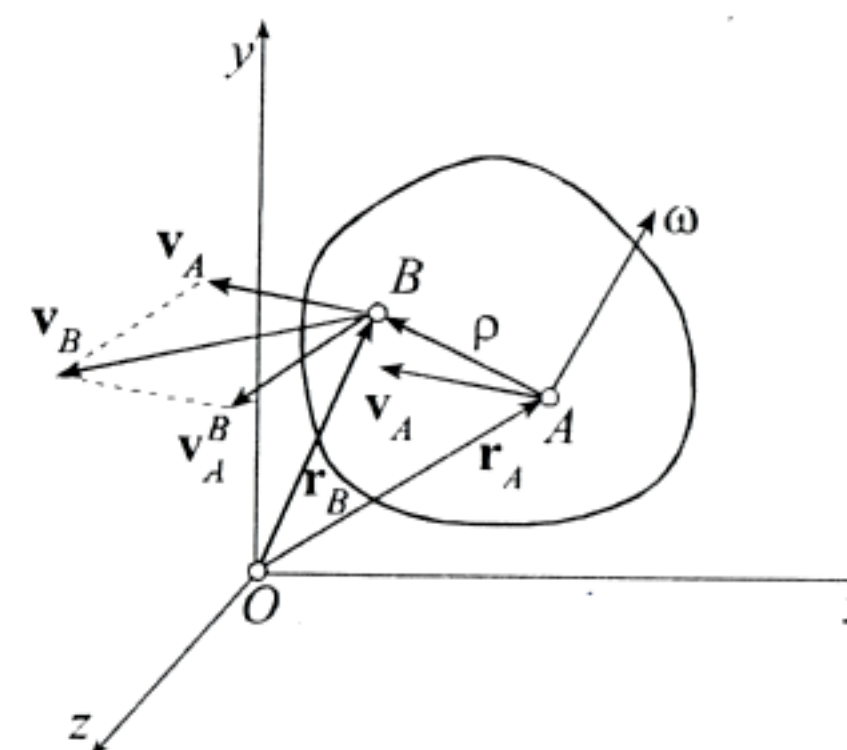
Neka je B proizvoljna tačka tela koje vrši slobodno kretanje. Vektor položaja tačke B tela u odnosu na tačku O nepokretnog koordinatnog sistema $Oxyz$ je (Slika 8.3)

$$\mathbf{r}_B = \mathbf{r}_A + \boldsymbol{\rho}, \quad (8.3)$$

gde je $\mathbf{r}_A$ vektor položaja pola kretanja A u odnosu na koordinatni početak O nepokretnog koordinatnog sistema $Oxyz$, a $\boldsymbol{\rho}$ vektor položaja tačke B u odnosu na pol A .

Diferenciranjem po vremenu izraza (8.3) dobija se

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_B^A, \quad (8.4)$$



Slika 8.3:

gde su brzine tačaka A i B

$$\mathbf{v}_B = \dot{\mathbf{r}}_B, \quad \mathbf{v}_A = \dot{\mathbf{r}}_A.$$

Vektor $\boldsymbol{\rho}$ je konstantne dužine zbog krutosti tela, pa je njegov izvod vremenu jednak brzini kraja tog vektora zbog obrtanja tela oko tačke A

$$\dot{\mathbf{v}}_B^A = \dot{\boldsymbol{\rho}} = \omega \times \boldsymbol{\rho}. \quad (8.5)$$

Intenzitet vektora $\mathbf{v}_B^A$ je

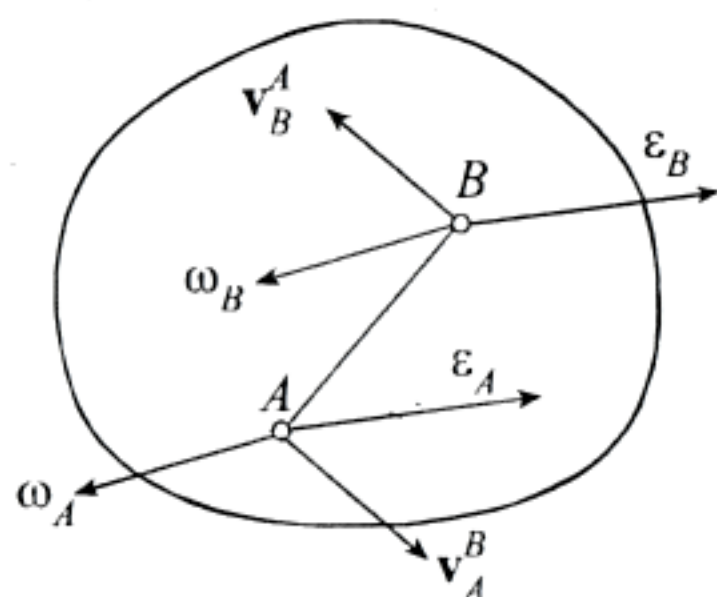
$$v_B^A = \omega \rho \sin \angle(\omega, \rho) = \omega h_\omega,$$

gde je $h_\omega = \rho \sin \angle(\omega, \rho)$ najkraće rastojanje od tačke B do vektora ugaone brzine ω . Pravac vektora $\mathbf{v}_B^A$ poklapa se sa tangentom u tački B na krug poluprečnika h_ω u ravni koja je normalna na vektor ugaone brzine ω i prolazi kroz tačku A , a smer odgovara smeru ugaone brzine.

Prema tome, brzina tačke B tela koje vrši slobodno kretanje (8.4) jedna je vektorskom zbiru translatorne brzine pola A i brzine tačke B zbog obrtanja tela oko pola A .

8.2 Svojstva ugaone brzine i ugaonog ubrzanja

Pretpostavi se da ugaona brzina slobodnog kretanja tela zavisi od izbora tačke za pol. Naime, neka je ω_A ugaona brzina tela u odnosu na pol u tački A ,



Slika 8.4:

ω_B u odnosu na pol u tački B (Slika 8.4), pri čemu pravac vektora $\mathbf{AB}$ nije paralelan pravcima vektora ugaonih brzina. Brzina tačke A u odnosu na B je

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \omega_B \times \mathbf{BA}, \quad (8.6)$$

dok je brzina tačke A u odnosu na tačku B

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \omega_A \times \mathbf{AB}. \quad (8.7)$$

Zamenom izraza (8.7) u (8.6), i pošto je $\mathbf{AB} = -\mathbf{BA}$ dobija se

$$(\omega_A - \omega_B) \times \mathbf{AB} = 0. \quad (8.8)$$

Pošto je vektor $\mathbf{AB}$ proizvoljan, a pravac tog vektora nije paralelan vektorima ω_A i ω_B , ova relacija je ispunjena samo ako je

$$\omega_A = \omega_B, \quad (8.9)$$

odnosno ugaona brzina ω_B obrtanja oko pola B jednaka je ugaonoj brzini ω_A obrtanja oko pola A . Prema tome, vektor ugaone brzine $\omega = \omega_B = \omega_A$ slobodnog kretanja tela ne zavisi od izbora pola.

Diferenciranjem izraza (8.9) po vremenu dobija se

$$\dot{\omega}_A = \dot{\omega}_B, \quad (8.10)$$

odnosno sledi zaključak da ni vektor ugaonog ubrzanja ne zavisi od izbora pola, pa je

$$\epsilon = \epsilon_A = \epsilon_B. \quad (8.11)$$

8.3 Ubrzanje tačke tela

Diferenciranjem jednačine (8.4) po vremenu dobija se

$$\dot{\mathbf{v}}_B = \dot{\mathbf{v}}_A + \dot{\omega} \times \rho + \omega \times \dot{\rho}. \quad (8)$$

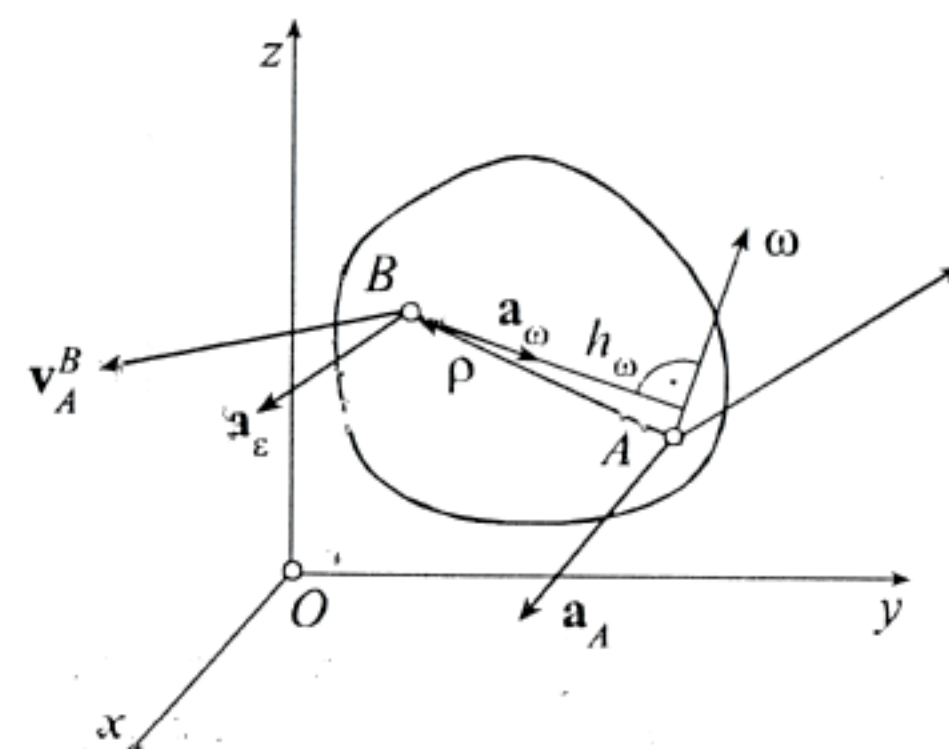
Kako je $\dot{\mathbf{v}}_B$ ubrzanje tačke B , a $\dot{\mathbf{v}}_A$ ubrzanje tačke A , $\dot{\omega}$ ugaono ubrzanje obrtanja tela oko pola A i $\dot{\rho}$ dato sa (8.5) ovaj izraz postaje

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \epsilon \times \rho + \omega \times \mathbf{v}_B^A. \quad (8)$$

Na slici 8.5 prikazane su sve komponente ubrzanja. Komponente

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_\epsilon &= \epsilon \times \rho, \\ \mathbf{a}_\omega &= \omega \times \mathbf{v}_B^A, \end{aligned} \quad (8)$$

predstavljaju deo ubrzanja tačke B zbog obrtanja tela oko pola A . Komponenta $\mathbf{a}_\epsilon$ ubrzanja tačke B usled obrtanja tela oko pola A zove se malno ubrzanje. Kao i kod sfernog kretanja, a zbog karakteristika vektorskog proizvoda $\omega \times \mathbf{v}_B^A$, ova komponenta ima intenzitet $a_\omega = \omega^2 h_\omega$, pravac i smer ka vektoru ω , a smer ka vektoru ω . Kao i kod ranije proučenih kretanja komponenta ubrzanja $\mathbf{a}_\epsilon$ zove se obrtno ubrzanje.



Slika 8.5:

Kao i kod sfernog kretanja obrtno ubrzanje ima više komponenti, koje detaljno proučene kod sfernog kretanja. Prema tome, ubrzanje proizvođačke tačke B tela pri slobodnom kretanju u prostoru jednako je vektorskom zbiru

ubrzanja $\mathbf{a}_A$ pola A , obrtnog ubrzanja $\mathbf{a}_e$ tačke B , i normalnog ubrzanja $\mathbf{a}_\omega$ usled obrtanja tela oko pola A

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_e + \mathbf{a}_\omega. \quad (8.15)$$

Sva prethodno proučena kretanja tela, obrtanje oko nepokretne ose, sferno kretanje, ravansko kretanje tela i translatorno kretanje tela predstavljaju samo specijalne slučajeve slobodnog kretanja tela.

8.4 Primer

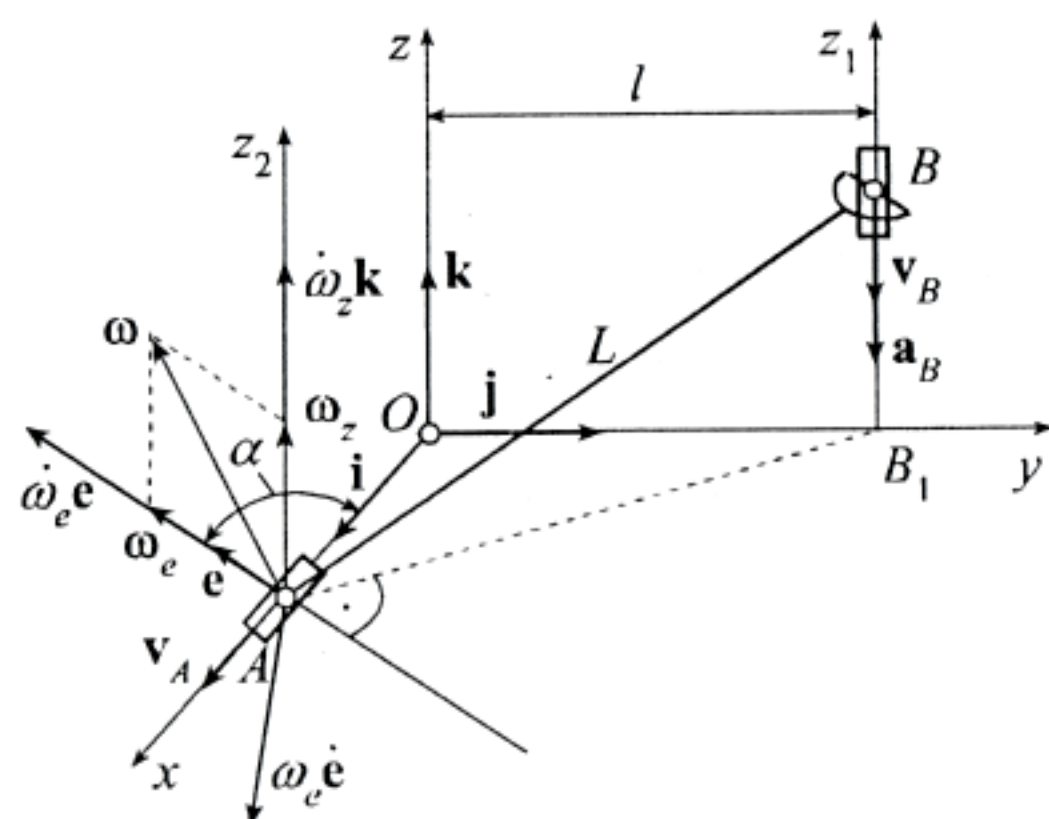
Primer 18 Za krajeve štapa AB dužine $L = 4$ [m] zgloбно su vezana dva klizača. Klizač A se kreće po nepokretnom pravcu OA , a klizač B po pravcu z_1 koji je paralelan pravcu z a nalazi se na rastojanju $l = 2$ [m] (Slika 8.6). U trenutku kada se kraj A štapa AB nalazi na rastojanju $l_1 = 2$ [m] od nepokretne tačke O brzina tačke A je

$$v_A = \sqrt{2} \text{ [m/s]}$$

a) ubrzanje

$$a_A = 0 \text{ [m/s}^2\text{]}.$$

Odrediti brzinu i ubrzanje tačke B u tom trenutku vremena: a) analitički, b) vektorski.



Slika 8.6:

Analitički način.

Štap AB vrši slobodno kretanje, ali ima samo jedan stepen slobode. Tačka B se translatorno pomera u pravcu z_1 ose pa ima brzinu u tom pravcu. Odredi se koordinata tačke B u z_1 pravcu. Iz pravouglog trougla ABB_1

$$z_B^2 = L^2 - (AB_1)^2.$$

Iz trougla OAB_1 je

$$(AB_1)^2 = x_A^2 + l^2.$$

Zamenom (B) u (A) dobija se

$$z_B^2 = L^2 - (x_A^2 + l^2).$$

Izvod izraza (C) po vremenu glasi

$$z_B \dot{z}_B = -x_A \dot{x}_A,$$

odnosno odatle se dobija brzina tačke B

$$v_B = -\frac{x_A}{z_B} v_A.$$

U datom momentu vremena je

$$v_{B1} = -1 \text{ [m/s]}.$$

Izvod po vremenu izraza (D) za brzinu tačke B je

$$z_B \ddot{z}_B + \dot{z}_B^2 = -x_A \ddot{x}_A - \dot{x}_A^2,$$

pa je ubrzanje tačke B

$$a_B = -\frac{1}{z_B} (v_B^2 + v_A^2 + x_A a_A).$$

U zadanom trenutku vremena ubrzanje tačke B je

$$a_{B1} = -\frac{3}{2\sqrt{2}} \text{ [m/s}^2\text{]}.$$

Vektorski način.

Štap AB vrši slobodno kretanje. Izabere se tačka A za pol slobodnog kretanja, koja se kreće pravolinijski duž x ose, pa je njena brzina

$$\mathbf{v}_A = v_A \mathbf{i}.$$

Tokom kretanja štap AB vrši sferno kretanje oko pola A , i pri tom se nalazi stalno u vertikalnoj ravni ABB_1 . Ta ravan se obrće oko vertikalne ose z_2 , koja je paralelna osi z , ugaonom brzinom

$$\omega_z = \omega_z \mathbf{k}.$$

U toj ravni štap AB se obrće oko ose koja je normalna na ravan ABB_1 i nalazi se u ravni Oxy . Neka je jedinični vektor tog pravca $\mathbf{e}$, a odgovarajuća ugaona brzina $\omega_e = \omega_e \mathbf{e}$. Sa slike se vidi da je

$$\mathbf{e} = -\mathbf{i} \cos \alpha - \mathbf{j} \sin \alpha,$$

gde je α ugao između jediničnog vektora $\mathbf{e}$ i pravca ose x . Ukupna ugaona brzina sfernog kretanja štapa AB iznosi

$$\omega = \omega_z \mathbf{k} + \omega_e (-\mathbf{i} \cos \alpha - \mathbf{j} \sin \alpha). \quad (B)$$

Tačka B se kreće pravolinijski po pravcu paralelnom osi z , pa ako se postavi da se ona kreće naniže njena brzina glasi

$$\mathbf{v}_B = -v_B \mathbf{k}. \quad (C)$$

Brzine tačaka A i B povezane su relacijom (8.7)

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \omega \times \mathbf{AB}. \quad (D)$$

Sa slike 8.6 je

$$z_B = \sqrt{L^2 - (AB_1)^2} = \sqrt{L^2 - (x_A^2 + l^2)},$$

pa su koordinate tačaka A i B štapa u zadatom trenutku vremena $A(2, 0, 0)$ i $B(0, 2, 2\sqrt{2})$, i vektor položaja $\mathbf{AB}$ glasi

$$\mathbf{AB} = (x_B - x_A)\mathbf{i} + (y_B - y_A)\mathbf{j} + (z_B - z_A)\mathbf{k} = -2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\sqrt{2}\mathbf{k}. \quad (E)$$

Sa slike se vidi da je $\sin \alpha = x_A / \sqrt{x_A^2 + l^2} = \sqrt{2}/2$, pa je ugao

$$\alpha = \frac{\pi}{4} [\text{rad}].$$

Zamenom izraza (A), (B), (C) i (E) u vektorsku jednačinu (D) dobija se

$$-v_B \mathbf{k} = v_A \mathbf{i} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -\omega_e \cos \alpha & -\omega_e \sin \alpha & \omega_z \\ -2 & 2 & 2\sqrt{2} \end{vmatrix}.$$

Slobodno kretanje tela

Ova vektorska jednačina je zadovoljena ako su zadovoljene sledeće tri skalarne jednačine

$$\begin{aligned} 0 &= v_A - 2\sqrt{2}\omega_e \sin \alpha - 2\omega_z, \\ 0 &= 2\sqrt{2}\omega_e \cos \alpha - 2\omega_z, \\ -v_B &= -2\omega_e (\cos \alpha + \sin \alpha), \end{aligned}$$

čijim rešavanjem se dobija

$$\omega_{e1} = \omega_{z1} = \frac{\sqrt{2}}{4} [s^{-1}], \quad v_{B1} = 1 [m/s].$$

Veza ubrzanja tačaka A i B (8.13) glasi

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \varepsilon \times \rho + \omega \times \mathbf{v}_B^A,$$

gde je prema (8.4), (A), (C) i (F)

$$\mathbf{v}_B^A = \mathbf{v}_B - \mathbf{v}_A = -\mathbf{k} - \sqrt{2}\mathbf{i}.$$

Izvod izraza (B) po vremenu pruža ugaono ubrzanje obrtanja štapa AB oko pola A

$$\varepsilon = \dot{\omega} = \dot{\omega}_z \mathbf{k} + \dot{\omega}_e \mathbf{e} + \omega_e \dot{\mathbf{e}},$$

gde je $\dot{\mathbf{k}} = 0$ zbog konstantnosti vektora $\mathbf{k}$, a brzina $\dot{\mathbf{e}}$ kraja jediničnog vektora zbog obrtanja oko pola A iznosi

$$\dot{\mathbf{e}} = \omega \times \mathbf{e} = (\omega_z \mathbf{k} + \omega_e \mathbf{e}) \times \mathbf{e} = \omega_z \mathbf{k} \times \mathbf{e},$$

odnosno

$$\dot{\mathbf{e}} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & \omega_z \\ -\cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{i} \omega_z \sin \alpha - \mathbf{j} \omega_z \cos \alpha.$$

Zamenom ovog izraza u (I) dobija se ugaono ubrzanje

$$\varepsilon = \mathbf{i}(-\dot{\omega}_e \cos \alpha + \omega_e \omega_z \sin \alpha) + \mathbf{j}(-\dot{\omega}_e \sin \alpha - \omega_e \omega_z \cos \alpha) + \dot{\omega}_z \mathbf{k}.$$

Uzimajući u obzir sve dobijene rezultate, veza ubrzanja (G) tačaka glasi

$$-a_B \mathbf{k} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\sqrt{2}}{2}(-\dot{\omega}_e + \frac{1}{8}) & \frac{\sqrt{2}}{2}(-\dot{\omega}_e - \frac{1}{8}) & \dot{\omega}_z \\ -2 & 2 & 2\sqrt{2} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4} \\ -\sqrt{2} & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

Ova vektorska jednačina je zadovoljena ako su zadovoljene sledeće tri skalarne jednačine

$$\begin{aligned} 0 &= 2(-\dot{\omega}_e - \frac{1}{8}) - 2\dot{\omega}_z + \frac{1}{4}, \\ 0 &= -2\dot{\omega}_z - 2(-\dot{\omega}_e + \frac{1}{8}) - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}, \\ -a_B &= \sqrt{2}(-\dot{\omega}_e + \frac{1}{8}) + \sqrt{2}(-\dot{\omega}_e - \frac{1}{8}) - \frac{\sqrt{2}}{4}. \end{aligned}$$

Rešavanjem ovih jednačina nalaze se ugaona ubrzanja $\dot{\omega}_e$ i $\dot{\omega}_z$ i ubrzanje a_B tačke B

$$\dot{\omega}_{e1} = \frac{1}{4} [s^{-2}], \quad \dot{\omega}_{z1} = -\frac{1}{4} [s^{-2}], \quad a_{B1} = \frac{3\sqrt{2}}{4} [m/s^2].$$

Glava 9

Složeno kretanje tačke

Na samom početku proučavanja kretanja tačke ili tela spominje se da ono bude apsolutno ili relativno. Do sada je proučavano samo kretanje, odnosno kretanje koje se odvija u odnosu na neko nepokretno ili odgovarajući nepokretno koordinatni sistem u prostoru. Kretanje je svako pomeranje u odnosu na neko pokretno telo ili neki pokretni koordinatni sistem. U mnogim problemima javlja se kretanje tela i kretanje tačke u odnosu na telo. U takvim problemima tačke posmatra se istovremeno u odnosu na dva koordinatna sistema: nepokretni i drugi pokretni i čvrsto vezan za pokretno telo. Takvo kretanje naziva se složeno kretanje tačke.

Posmatra se sledeći primer. Po palubi broda, koji plovi po reki, stoji čovek, a iznad broda leti helikopter. Kretanje čoveka i helikoptera posmatra se sa broda, sastoji se od dva kretanja, od kretanja broda i kretanja čoveka i helikoptera u odnosu na brod. Kretanje čoveka i helikoptera na zemlju, ako se ona smatra nepokretnom, je apsolutno kretanje. Kretanje čoveka i helikoptera u odnosu na zemlju su apsolutne putanje i njih pravi čovek koji stoji nepokretno na zemlji. Kretanje čoveka i helikoptera na brod je relativno kretanje. Putanje čoveka i helikoptera u odnosu na brod su relativne putanje i njih pravilno vidi čovek koji stoji nepokretno na brodu. U opisanom problemu, postoji i kretanje samog broda. Apsolutno kretanje broda u odnosu na zemlju naziva se prenosno kretanje. Drugim rečima, kretanje čoveka i helikoptera u odnosu na zemlju može da se rastavi na dva kretanja: 1) kretanje broda, odnosno prenosno kretanje i 2) kretanje u odnosu na brod, odnosno relativno kretanje.

Neka je $Oxyz$ (Slika 9.1) nepokretni koordinatni sistem, sa jedinicama i, j, k . U tom prostoru kreću se neko telo i