

Kinematika – vežbe

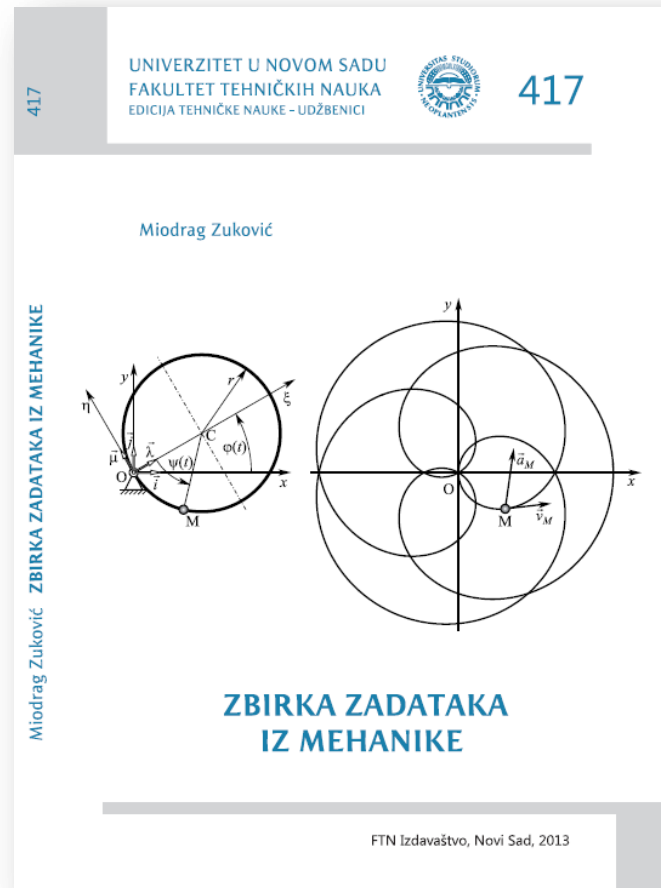
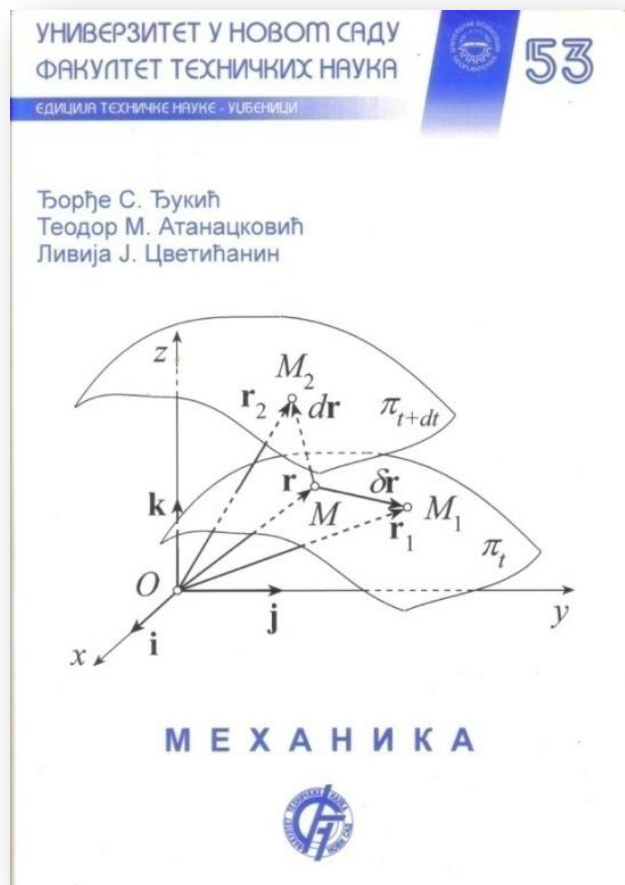
Kinematika tačke – 1. deo

Kinematika i dinamika

Miodrag Zuković

Novi Sad, 2021.

Literatura



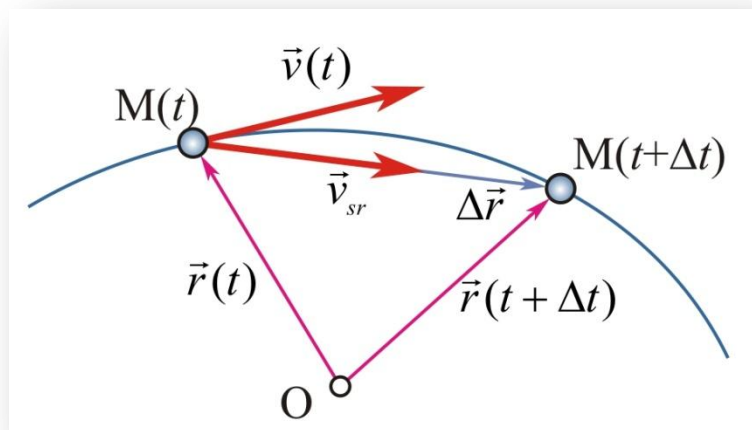
Šta ćemo naučiti?

1. Osnovni pojmovi mehanike - kinematike (Mehaničko kretanje i mirovanje. Prostor i vreme. Objekti proučavanja u mehanici. Osnovna kretanja. Broj stepeni slobode kretanja)
2. Vektor položaja tačke i trajektorija. Vektor brzine tačke. Vektor ubrzanja tačke. Ubrzano i usporeno kretanje
3. Kinematika tačke - Dekartov koordinatni sistem
4. Pravolinijsko kretanje tačke. Ravnomerno i ravnomerno promenljivo kretanje

Brzina i ubrzanje tačke

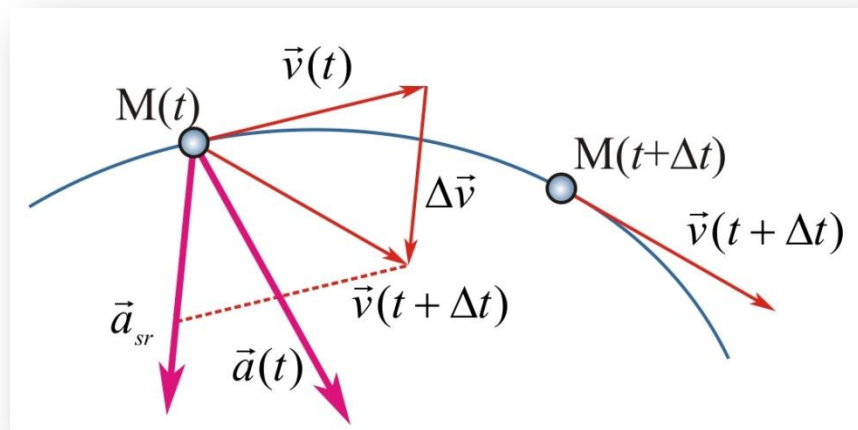
- Brzina

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}(t)$$

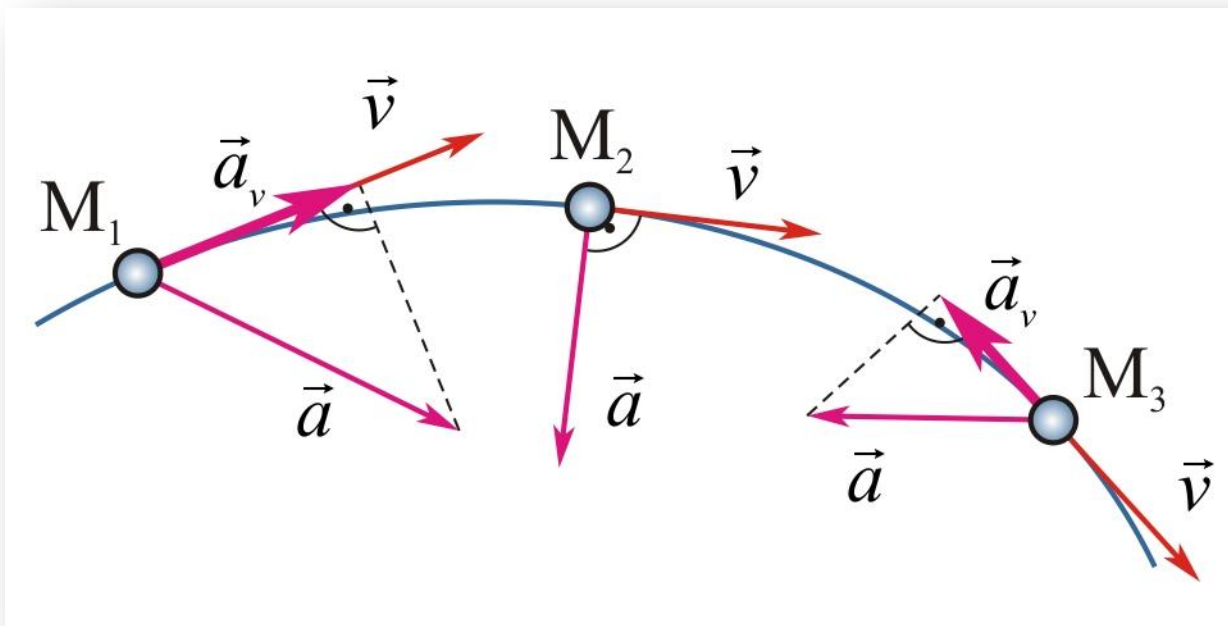


- Ubrzanje

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}}(t) = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}(t)$$



Ubrzano i usporeno kretanje



Ubrzano kretanje

$$\vec{a} \cdot \vec{v} > 0$$

Usporeno kretanje

$$\vec{a} \cdot \vec{v} < 0$$

Dekartov koordinatni sistem

- Položaj

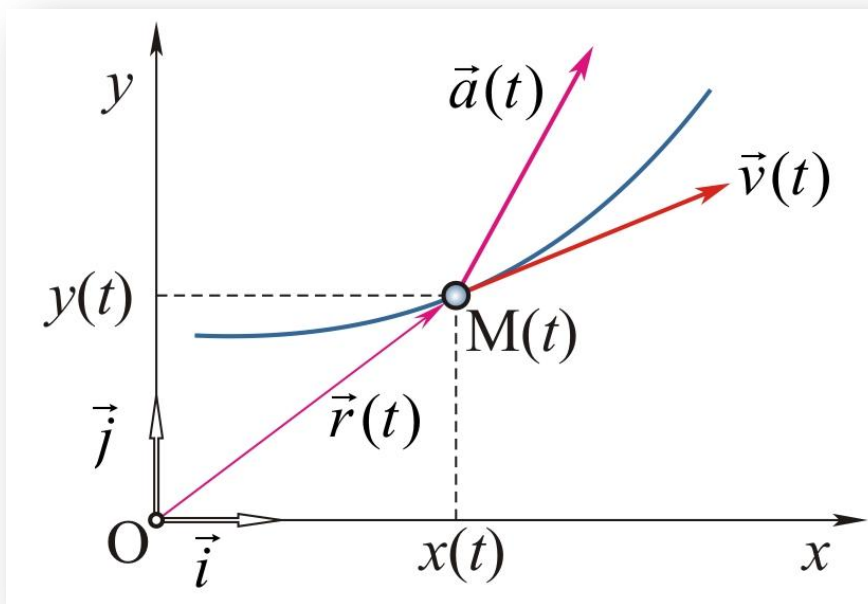
$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$$

- Brzina

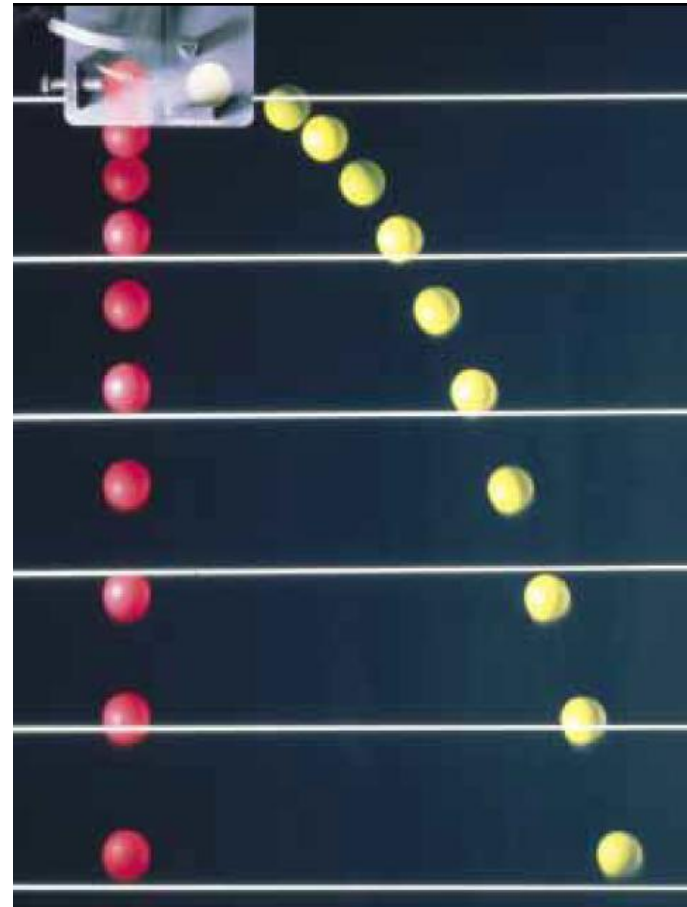
$$\vec{v}(t) = \dot{x}(t)\vec{i} + \dot{y}(t)\vec{j}$$

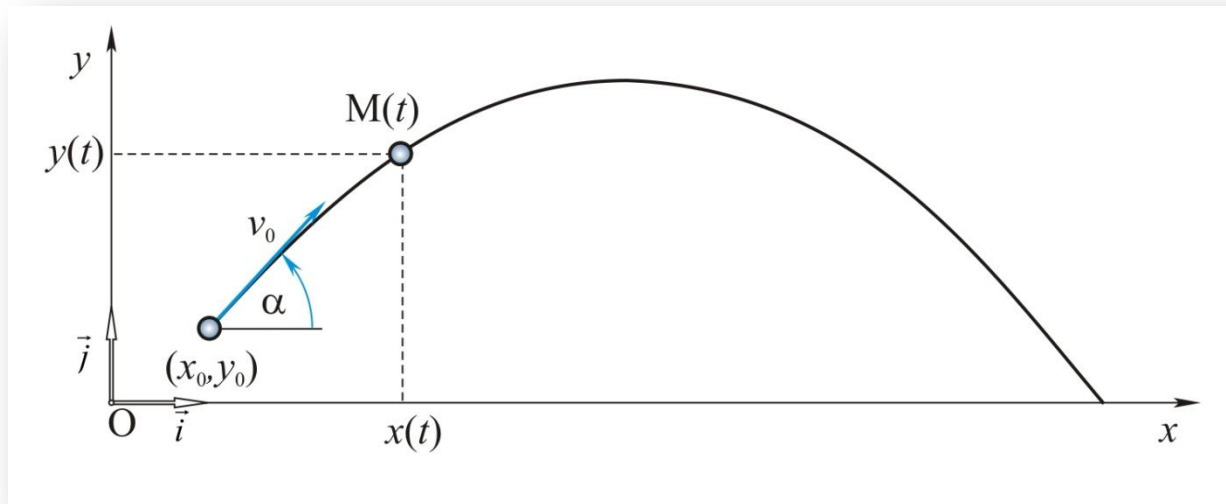
- Ubrzanje

$$\vec{a}(t) = \ddot{x}(t)\vec{i} + \ddot{y}(t)\vec{j}$$



Primer – kosi hitac





- Parametarske jednačine kretanja

$$x(t) = v_0 t \cos \alpha + x_0$$

$$y(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 t \sin \alpha + y_0$$

- trajektorija ($x_0=0, y_0=0$)

$$\dot{x}(t) = v_0 \cos \alpha$$

$$\ddot{x}(t) = 0$$

$$\dot{y}(t) = -gt + v_0 \sin \alpha$$

$$\ddot{y}(t) = -g$$

$$y(x) = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2$$

- domet

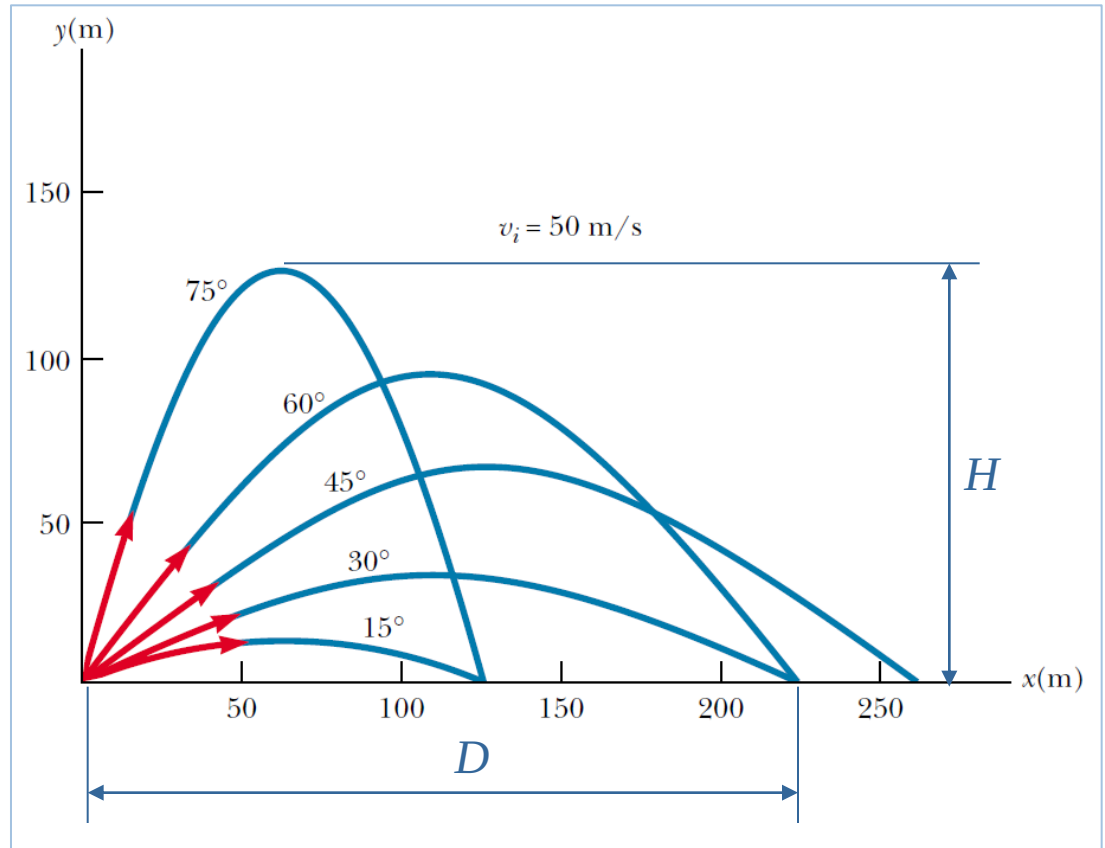
$$D = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$$

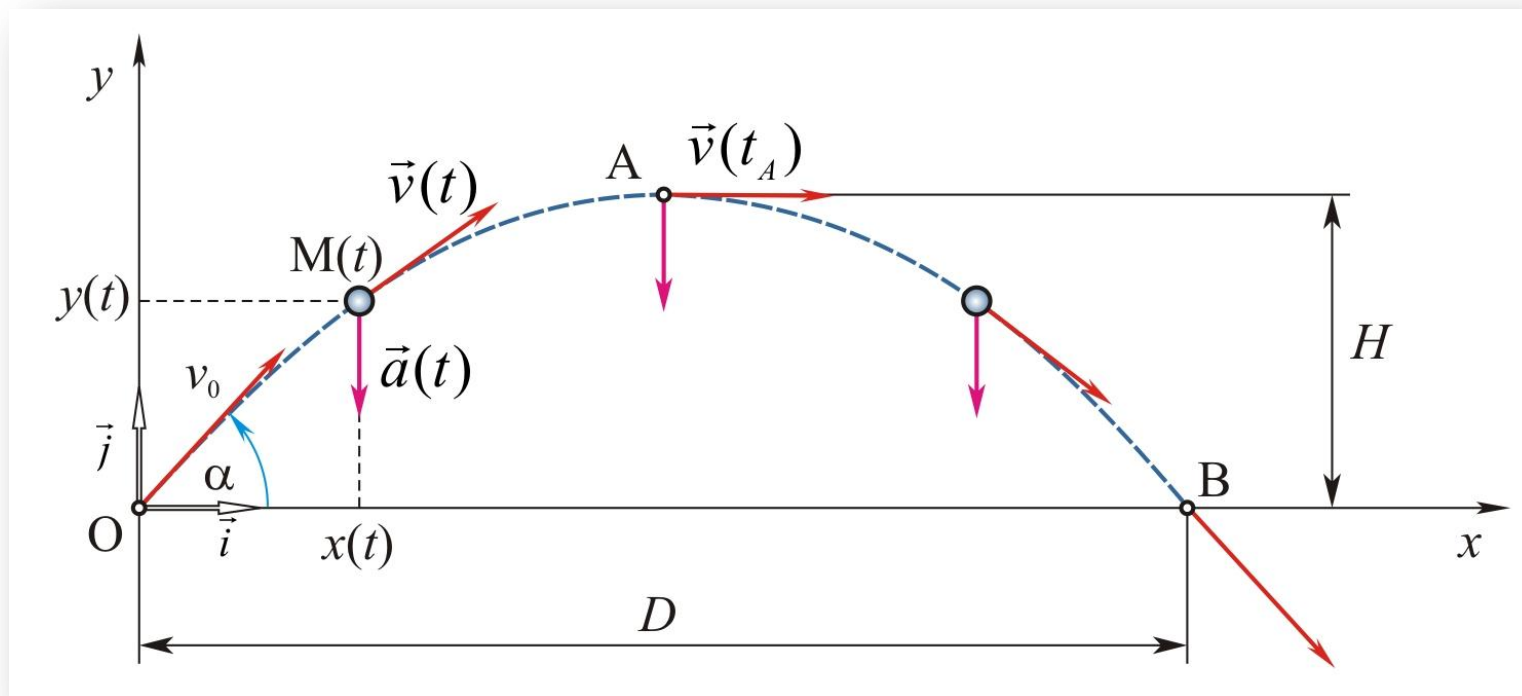
$$D_{\max} = \frac{v_0^2}{g}, \text{ za } \alpha = 45^\circ$$

- visina leta

$$H = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$$

$$H_{\max} = \frac{v_0^2}{2g}, \text{ za } \alpha = 90^\circ$$





Pravolinijsko kretanje tačke

- Vektor položaja

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i}$$

- Brzina

$$\vec{v}(t) = v_x(t)\vec{i} = \dot{x}(t)\vec{i} = \dot{\vec{r}}(t)$$

- Ubrzanje

$$\vec{a}(t) = a_x(t)\vec{i} = \dot{v}_x(t)\vec{i} = \ddot{x}(t)\vec{i} = \dot{\vec{v}}(t) = \ddot{\vec{r}}(t)$$

Zadatak 1

Кретње тачке у равни описано је параметарским једначинама кретања:

$$x(t) = 4 + 2 \sin(2t), \quad y(t) = 3 - 2 \cos(2t).$$

Одредити:

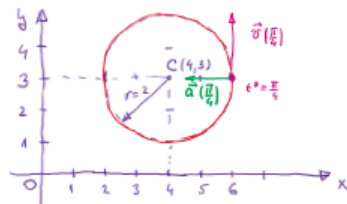
- a) трајекторију кретања тачке и нацртати је,
- b) тренутак t^* у коме ће се брзина тачке први пут паралелна оси y ,
- c) векторе брзине и убрзања и њихове интензитете у произвољном тренутку t ,
- d) векторе брзине и убрзања и њихове интензитете у тренутку t^* .

Крeтeње тачкe у равни описано је параметарским јeдначинама крeтeња:

$$x(t) = 4 + 2 \sin(2t), y(t) = 3 - 2 \cos(2t).$$

Одрeдити:

- трајекторију крeтeња тачкe и нацртати је,
- тренутак t^* у коме ће се брзина тачкe први пут паралелна оси y ,
- векторе брзине и убрзања и њихове интензитете у произвољном тренутку t ,
- векторе брзине и убрзања и њихове интензитете у тренутку t^* .



$$a) \begin{cases} x(t) \\ y(t) \end{cases} \xrightarrow{\text{ЕЛМ.}} \begin{cases} x \\ y \end{cases} \wedge \cap$$

$$\begin{cases} (1) x = 4 + 2 \sin(2t) \\ (2) y = 3 - 2 \cos(2t) \end{cases} \quad \begin{matrix} \therefore \text{УДЕЈА!} \\ \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \end{matrix}$$

$$\begin{aligned} (1) x - 4 &= 2 \sin(2t) \\ (2) y - 3 &= -2 \cos(2t) \end{aligned} \quad \left| \begin{matrix} /2 \\ /2 \end{matrix} \right. \rightarrow (x-4)^2 + (y-3)^2 = 2^2 \sin^2(2t) + 2^2 \cos^2(2t)$$

$$(x-4)^2 + (y-3)^2 = 2^2 \quad \wedge \cap \rightarrow C(4, 3) \quad r=2$$

КРЖИНИЦА

$$(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2$$

$C(p, q)$, r - ПОЛУПРЕЧНИК

$$\text{ОК} \quad t \geq 0$$

$$(1) x(t) = 4 + 2 \sin(2t)$$

$$(2) y(t) = 3 - 2 \cos(2t)$$

$$-1 \leq \frac{\sin(2t)}{\cos(2t)} \leq 1$$

$$(1) 2 \leq x \leq 6$$

$$(2) 1 \leq y \leq 5$$

$$b) t^* = ? \rightarrow \vec{v} \parallel y$$

$$\vec{v}(t) \uparrow \quad \dot{x}(t^*) = 0$$

$$x(t) = 4 + 2 \sin(2t)$$

$$\dot{x}(t) = 2 \cdot 2 \cos(2t)$$

$$\dot{x}(t^*) = 4 \cdot \cos(2t^*) = 0$$

$$\cos(2t^*) = 0$$

$$2t^* = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \dots$$

$$2t^* = \frac{\pi}{2} \rightarrow t^* = \frac{\pi}{4}$$

$$c) \begin{aligned} \vec{v} &= \dot{x} \vec{e}_1 + \dot{y} \vec{e}_2 \\ \vec{a} &= \ddot{x} \vec{e}_1 + \ddot{y} \vec{e}_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1) x(t) &= 4 + 2 \sin(2t) & \begin{cases} \dot{x}(t) = 4 \cos(2t) \\ \ddot{x}(t) = -8 \sin(2t) \end{cases} \\ (2) y(t) &= 3 - 2 \cos(2t) & \begin{cases} \dot{y}(t) = +4 \sin(2t) \\ \ddot{y}(t) = 8 \cos(2t) \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} & a &= \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2} \\ v(t) &= \sqrt{4^2 \cos^2(2t) + 4^2 \sin^2(2t)} & a(t) &= \sqrt{8^2 \sin^2(2t) + 8^2 \cos^2(2t)} \\ v(t) &= \sqrt{4^2} = 4 = \text{const} & a(t) &= 8 = \text{const} \end{aligned}$$

$$d) t^* = \frac{\pi}{4}$$

$$\begin{aligned} x\left(\frac{\pi}{4}\right) &= 4 + 2 \sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{4}\right) = 6 & \left. \begin{aligned} \dot{x}\left(\frac{\pi}{4}\right) &= 4 \cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{4}\right) = 0 \\ \dot{y}\left(\frac{\pi}{4}\right) &= 4 \sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{4}\right) = 4 \end{aligned} \right\} & \begin{aligned} \ddot{x}\left(\frac{\pi}{4}\right) &= -8 \\ \ddot{y}\left(\frac{\pi}{4}\right) &= 0 \end{aligned} \\ y\left(\frac{\pi}{4}\right) &= 3 - 2 \cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{4}\right) = 3 & & a\left(\frac{\pi}{4}\right) = 8 \end{aligned}$$

$$v\left(\frac{\pi}{4}\right) = 4$$

Zadatak 2

Kretanje tačke je opisano parametarskim jednačinama

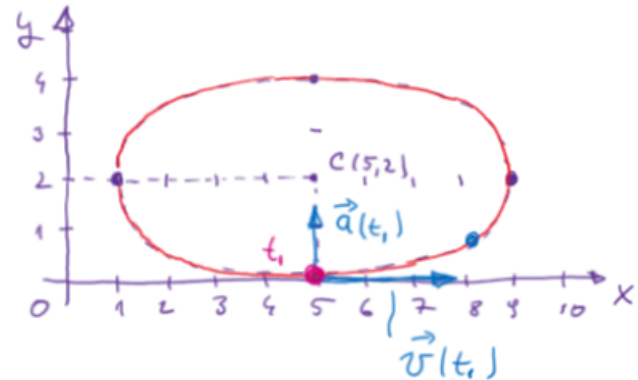
$$x(t) = 5 - 4 \cos t, y(t) = 2 - 2 \sin t$$

- a) Odrediti i nacrtati trajektoriju kretanja tačke,
- b) odrediti trenutak $t_1 > 0$ u kome će se tačka prvi put naći na osi x ,
- c) odrediti brzinu i ubrzanje tačke u proizvoljnom trenutku vremena t ,
- d) odrediti brzinu i ubrzanje tačke, i njihove intenzitete, u trenucima t_1 i $t_2 = t_1 + \frac{\pi}{2}$,

Kretanje tačke je opisano parametarskim jednačinama

$$x(t) = 5 - 4 \cos t, y(t) = 2 - 2 \sin t$$

- Odrediti i nacrtati trajektoriju kretanja tačke,
- odrediti trenutak $t_1 > 0$ u kome će se tačka prvi put naći na osi x ,
- odrediti brzinu i ubrzanje tačke u proizvoljnom trenutku vremena t ,
- odrediti brzinu i ubrzanje tačke, i njihove intenzitete, u trenucima t_1 i $t_2 = t_1 + \frac{\pi}{2}$.



a) (1) $x = 5 - 4 \cos t$
 (2) $y = 2 - 2 \sin t$ } $\xrightarrow[t]{\text{elim}} y(x)$

(1) $\frac{x-5}{4} = -\cos t$ /²
 (2) $\frac{y-2}{2} = -\sin t$ /² +

$$\frac{(x-5)^2}{4^2} + \frac{(y-2)^2}{2^2} = 1 \quad \text{Eliptična}$$

$$\frac{(x-p)^2}{a^2} + \frac{(y-q)^2}{b^2} = 1$$

$$C(p, q); \quad a, b - \text{polusoce}$$

OK $t \geq 0$
 $-1 \leq \sin t \leq 1$
 (1) $\rightarrow 1 \leq x \leq 9$
 (2) $\rightarrow 0 \leq y \leq 4$
 $C(5, 2)$
 $a = 4$
 $b = 2$

b) $t_1 > 0$ Ha ocau x

$$y(t_1) = 0$$

$$(2) \quad y(t_1) = 2 - 2 \sin t_1 = 0$$

$$\sin t_1 = 1 \rightarrow \boxed{t_1 = \frac{\pi}{2}} \quad \frac{5\pi}{2}, \dots$$

c) (1) $x(t) = 5 - 4 \cos t$

(2) $y(t) = 2 - 2 \sin t$

$$\left. \begin{array}{l} \dot{x}(t) = +4 \sin t \\ \dot{y}(t) = -2 \cos t \end{array} \right\} \rightarrow v(t) = \sqrt{16 \sin^2 t + 4 \cos^2 t}$$

$$\left. \begin{array}{l} \ddot{x}(t) = 4 \cos t \\ \ddot{y}(t) = +2 \sin t \end{array} \right\} \rightarrow a(t) = \sqrt{16 \cos^2 t + 4 \sin^2 t}$$

d) $t_1 = \frac{\pi}{2}$

$$\left. \begin{array}{l} (1) \ x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 5 - 4 \cancel{\cos \frac{\pi}{2}} = 5 \\ (2) \ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 - 2 \cancel{\sin \frac{\pi}{2}} = 0 \end{array} \right\}$$

$$\dot{x}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4 \quad v\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4$$

$$\dot{y}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$\ddot{x}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$\ddot{y}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$$

$$a\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$$

Zadatak 3

Kretanje tačke je opisano parametarskim jednačinama

$$x(t) = 4 \sin t, y(t) = 3 \sin t$$

- a) Odrediti i nacrtati trajektoriju kretanja tačke,
- b) odrediti brzinu i ubrzanje tačke u proizvoljnom trenutku vremena t ,
- c) odrediti položaj, brzinu i ubrzanje tačke u trenucima $t_0 = 0, t_1 = \pi/2$ i $t_2 = \pi$,

Kretanje tačke je opisano parametarskim jednačinama

$$x(t) = 4 \sin t, y(t) = 3 \sin t$$

- Odrediti i nacrtati trajektoriju kretanja tačke,
- odrediti brzinu i ubrzanje tačke u proizvoljnom trenutku vremena t ,
- odrediti položaj, brzinu i ubrzanje tačke u trenucima $t_0 = 0, t_1 = \pi/2$ i $t_2 = \pi$,

9) (1) $x = 4 \sin t \rightarrow \sin t = \frac{x}{4}$
 (2) $y = 3 \sin t \rightarrow y = 3 \cdot \frac{x}{4}$

$$\boxed{y = \frac{3}{4} x} \quad \text{AN}$$

NPABA

b) (1) $x(t) = 4 \sin t$
 (2) $y(t) = 3 \sin t$

$$\dot{x}(t) = 4 \cos t$$

$$\dot{y}(t) = 3 \cos t$$

$$v(t) = \sqrt{4^2 \cos^2 t + 3^2 \cos^2 t}$$

$$v(t) = \sqrt{25 \cos^2 t}$$

$$v(t) = |v(t)| = 5 \sqrt{\cos^2 t}$$

$$\ddot{x}(t) = -4 \sin t$$

$$\ddot{y}(t) = -3 \sin t$$

$$a(t) = \sqrt{4^2 \sin^2 t + 3^2 \sin^2 t}$$

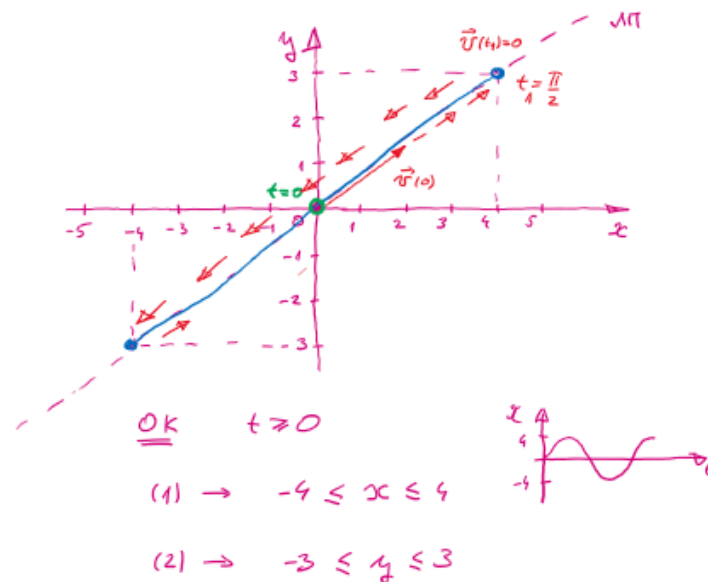
$$a(t) = 5 \sqrt{\sin^2 t}$$

Определить скорость кривой y по известной параметризации.

$t = 0$

$$\left. \begin{aligned} x(0) &= 4 \sin 0 = 0 \\ y(0) &= 3 \sin 0 = 0 \end{aligned} \right\} \left. \begin{aligned} \dot{x}(0) &= 4 \cos 0 = 4 \\ \dot{y}(0) &= 3 \end{aligned} \right\} \left. \begin{aligned} \ddot{x}(0) &= 0 \\ \ddot{y}(0) &= 0 \end{aligned} \right\}$$

$$v(0) = 5 \sqrt{\cos^2 0} = 5 \quad a(0) = 0$$



Zadatak 4

Kretanje tačke je opisano parametarskim jednačinama

$$r(t) = ae^t, \varphi(t) = bt$$

- a) Odrediti i nacrtati trajektoriju kretanja tačke,
- b) odrediti brzinu i ubrzanje tačke u proizvoljnom trenutku vremena t ,
- c) odrediti brzinu i ubrzanje tačke u početnom trenutku,

Kretanje tačke je opisano parametarskim jednačinama

$$\underline{r(t) = ae^t, \varphi(t) = bt}$$

- Odrediti i nacrtati trajektoriju kretanja tačke,
- odrediti brzinu i ubrzanje tačke u proizvoljnom trenutku vremena t ,
- odrediti brzinu i ubrzanje tačke u početnom trenutku,

$$a, b > 0$$

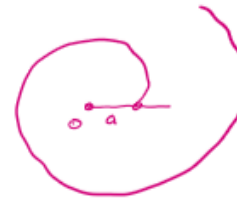
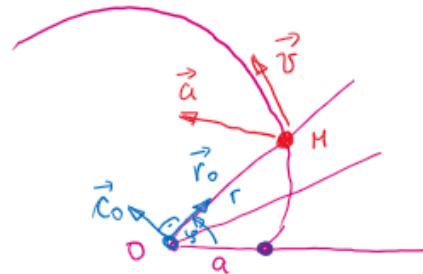
$$a) \quad \left. \begin{matrix} r(t) \\ \varphi(t) \end{matrix} \right\} \xrightarrow[t]{\text{elim.}} r(\varphi) \quad \underline{\underline{\text{ln}}}$$

$$(1) \quad r = ae^t \quad \longrightarrow$$

$$(2) \quad \varphi = bt \quad \longrightarrow \quad t = \frac{\varphi}{b}$$

$$\underline{r = ae^{\frac{1}{b}\varphi}} \quad \text{ln}$$

$$\varphi = 0 \rightarrow r = a \frac{e^0}{1} = a$$



ЛОГАРИТАМСКА
СПИРАЛА

$$b) \quad \begin{cases} r(t) = a e^t \\ \varphi(t) = b t \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{r}(t) = a \cdot e^t \\ \dot{\varphi}(t) = b \end{cases} \quad \begin{cases} \ddot{r}(t) = a e^t \\ \ddot{\varphi}(t) = 0 \end{cases}$$

$$\vec{v} = v_r \vec{r}_0 + v_c \vec{c}_0 ; \quad \vec{a} = a_r \vec{r}_0 + a_c \vec{c}_0$$

$$v_r = \dot{r} = a e^t$$

$$v_c = r \dot{\varphi} = a b e^t$$

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_c^2} = \sqrt{a^2 (e^t)^2 + a^2 b^2 (e^t)^2}$$

$$v = a e^t \sqrt{1 + b^2}$$

$$a_r = \ddot{r} - r \dot{\varphi}^2 = a e^t - a e^t b^2 = a(1 - b^2) e^t$$

$$a_c = \cancel{r \ddot{\varphi}} + 2 \dot{r} \dot{\varphi} = 2 \cdot a e^t \cdot b = 2 a b e^t$$

$$a = \sqrt{a_r^2 + a_c^2} = \dots\dots\dots$$

$$c) \quad t = 0 \quad r(0) = a e^0 = a, \quad \varphi(0) = b \cdot 0 = 0$$

$$\left. \begin{aligned} v_r(0) &= a e^0 = a \\ v_c(0) &= a b e^0 = a b \end{aligned} \right\} \rightarrow v(0) = \sqrt{v_r^2(0) + v_c^2(0)}$$

$$v(0) = \sqrt{a^2 + a^2 b^2} = a \sqrt{1 + b^2}$$

$$\left. \begin{aligned} a_r(0) &= a(1 - b^2) e^0 = a(1 - b^2) \\ a_c(0) &= 2 a b e^0 = 2 a b \end{aligned} \right\} \rightarrow a(0) = \sqrt{a_r^2(0) + a_c^2(0)}$$

$$a(0) = \sqrt{a^2(1 - b^2)^2 + 4 a^2 b^2}$$

Zadatak 5

Kretanje tačke je opisano parametarskim jednačinama u polarnom koordinatnom sistemu

$$r(t) = 2R \cos t, \varphi(t) = t$$

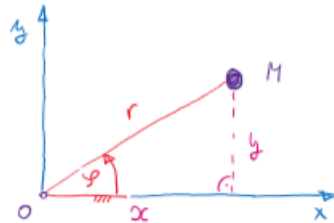
Odrediti parametarske jednačine i trajektoriju kretanja tačke u Dekartovom koordinatnom sistemu.

Kretanje tačke je opisano parametarskim jednačinama u polarnom koordinatnom sistemu

$$r(t) = 2R \cos t, \varphi(t) = t$$

Odrediti parametarske jednačine i trajektoriju kretanja tačke u Dekartovom koordinatnom sistemu.

$$\begin{cases} r(t) = 2R \cos t \\ \varphi(t) = t \end{cases} \quad \begin{cases} x(t) = ? \\ y(t) = ? \end{cases} \quad r_\varphi(x) = ?$$



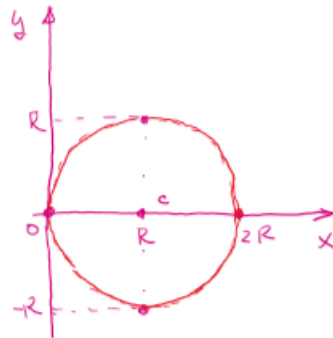
$$\sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - (1 - \cos^2 \alpha)$$

$$\cos(2\alpha) = 2 \cos^2 \alpha - 1$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos(2\alpha)}{2}$$



$$x = r \cos \varphi$$

$$y = r \sin \varphi$$

$$x = 2R \cos t \cdot \cos t$$

$$y = 2R \cos t \cdot \sin t$$

$$x = 2R \cos^2 t$$

$$y = R \sin(2t)$$

$$x = R \cdot \frac{1 + \cos(2t)}{2}$$

$$y = R \sin(2t)$$

$$x(t) = R + R \cos(2t)$$

$$y(t) = R \sin(2t)$$

$$\begin{aligned} x - R &= R \cos(2t) \quad /^2 \\ y &= R \sin(2t) \quad /^2 \end{aligned} \quad \downarrow +$$

$$(x - R)^2 + y^2 = R^2 \cos^2(2t) + R^2 \sin^2(2t)$$

$$(x - R)^2 + y^2 = R^2 \quad \text{KRYHUKA}$$

$$C(R, 0) ; r = R$$

Šta smo naučili?

1. Osnovni pojmovi mehanike - kinematike (Mehaničko kretanje i mirovanje. Prostor i vreme. Objekti proučavanja u mehanici. Osnovna kretanja. Broj stepeni slobode kretanja)
2. Vektor položaja tačke i trajektorija. Vektor brzine tačke. Vektor ubrzanja tačke. Ubrzano i usporeno kretanje
3. Kinematika tačke - Dekartov koordinatni sistem
4. Pravolinijsko kretanje tačke. Ravnomerno i ravnomerno promenljivo kretanje

Kinematika – vežbe

Kinematika tačke – 1. deo

Kinematika i dinamika

Miodrag Zuković

Novi Sad, 2021.