REŠENJA ZADATAKA SA PRIJEMNOG ISPITA IZ MATEMATIKE ZA ELEKTROTEHNIKU, RAČUNARSTVO, ANIMACIJU U INŽENJERSTVU I MEHATRONIKU, FTN NOVI SAD 03.07.2012.

1. Na hipotenuzi AB pravouglog trougla $\triangle ABC$ date su tačke D i E, takve da je $AD = AC$ i $BE = BC$. Odrediti ugao $\delta = ∢DCE$.

Rešenje: Nekaje $\varphi = ∢EDC$ i $\psi = ∢DEC$. Kako je $∢ACD = ∢EDC = ∢ADC = \varphi$ i $∢BCE = ∢DEC = ∢BEC = \psi$, to je $\varphi + \psi - \delta = \frac{\pi}{2}$. Takođe je $\varphi + \psi + \delta = \pi$. Ako napravimo razliku prethodne dve jednakosti dobija se $2\delta = \frac{\pi}{2}$ tj. $\delta = \frac{\pi}{4}$.

2. Pet kuglica se raspoređuje u tri kutije, tako da je u svakoj kutiji bar jedna kuglica. Na koliko različitih načina se može izvršiti to raspoređivanje ako se:

a) kuglice ne razlikuju i kutije razlikuju **b)** kuglice razlikuju i kutije ne razlikuju

Rešenje: a) Poređamo 5 kuglica koje se ne razlikuju u jednu vrstu. Na svako od 4 mesta između tih 5 kuglica može se staviti ili ne staviti pregrada |. Postavićemo samo dve pregrade na neka od 4 pomenuta mesta među tim kuglicama, jer sve kuglice koje su levo od prve pregrade su u prvoj kutiji, sve kuglice između prve i druge pregrade su u drugoj kutiji i sve kuglice desno od druge pregrade su u trećoj kutiji. Prema tome od četiri mesta biramo dva na koja ćemo staviti pregrade i rezultat je $\binom{4}{2} = 6$. Efektivno ispisane sve mogućnosti su:

$ooo|o|o$, $oo|oo|o$, $oo|o|oo$, $o|ooo|o$, $o|oo|oo$, $o|o|ooo$

b) Skup od 5 kuglica $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ treba razbiti na tri disjunktna neprazna podskupa čija unija je ceo skup A. Broj elemenata u tim podskupovima može biti 1,1,3 ili 1,2,2. U prvom slučaju broj mogućnosti je $\binom{5}{3} = 10$, a u drugom slučaju je broj mogućnosti $\binom{5}{2} \cdot \binom{3}{2} \cdot \frac{1}{2!} = 15$. Prema tome krajnji rezultat je $S_3^5 = \binom{5}{3} + \binom{5}{2} \cdot \binom{3}{2} \cdot \frac{1}{2!} = 25$. Efektivno ispisane sve mogućnosti su:

$$\Big\{\{1\},\{2\},\{3,4,5\}\Big\},\Big\{\{1\},\{3\},\{2,4,5\}\Big\},\Big\{\{1\},\{4\},\{2,3,5\}\Big\},\Big\{\{1\},\{5\},\{2,3,4\}\Big\}\Big\{\{2\},\{3\},\{1,4,5\}\Big\},$$

$$\Big\{\{2\},\{4\},\{1,3,5\}\Big\},\Big\{\{2\},\{5\},\{1,3,4\}\Big\},\Big\{\{3\},\{4\},\{1,2,5\}\Big\}\Big\{\{3\},\{5\},\{1,2,4\}\Big\},\Big\{\{4\},\{5\},\{1,2,3\}\Big\}$$

****

$$\Big\{\{1\},\{2,3\},\{4,5\}\Big\},\Big\{\{1\},\{2,4\},\{3,5\}\Big\},\Big\{\{1\},\{2,5\},\{3,4\}\Big\},\Big\{\{2\},\{1,3\},\{4,5\}\Big\},\Big\{\{2\},\{1,4\},\{3,5\}\Big\},$$

$$\Big\{\{2\},\{1,5\},\{3,4\}\Big\},\Big\{\{3\},\{1,2\},\{4,5\}\Big\},\Big\{\{3\},\{1,4\},\{2,5\}\Big\},\Big\{\{3\},\{1,5\},\{2,4\}\Big\},\Big\{\{4\},\{1,2\},\{3,5\}\Big\},$$

$$\Big\{\{4\},\{1,3\},\{2,5\}\Big\},\Big\{\{4\},\{1,5\},\{2,3\}\Big\},\Big\{\{5\},\{1,2\},\{3,4\}\Big\},\Big\{\{5\},\{1,3\},\{2,4\}\Big\},\Big\{\{5\},\{1,4\},\{2,3\}\Big\},$$

3. Bočne ivice prave pravilne trostrane piramide su jednake 1, a ivica osnove je x.

a) Odrediti zapreminu $V = V(x)$ te piramide u zavisnosti od x.

b) Odrediti maksimum F_{max} funkcije $F = F(x)$, ako je $F = 144V^2$.

c) Odrediti maksimum V_{max} funkcije $V = V(x)$

Rešenje: a) $V = \frac{1}{3}\frac{x^2\sqrt{3}}{4}\sqrt{1 - (\frac{2}{3}\frac{x\sqrt{3}}{2})^2} \Leftrightarrow V = \frac{1}{3}\frac{x^2\sqrt{3}}{4}\sqrt{1 - \frac{x^2}{3}} \Leftrightarrow 144V^2 = -x^6 + 3x^4 = F$

b) $F' = -6x^5 + 12x^3 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$. $F_{max} = F(\sqrt{2}) = -8 + 12 = 4$. **c)** Očevidno je da maksimum funkcije F (pa i funkcije V) nastupa za $x = \sqrt{2}$. Prema tome $V_{max} = V(\sqrt{2}) = \frac{1}{6}$.

4. Neka je $A(-1, -8, 4)$, $B(7, -7, 8)$ i $C(8, 1, 4)$.

a) Izračunati intenzitete vektora $\overrightarrow{BA}$ i $\overrightarrow{BC}$ i ugao između njih.

b) Da li su tačke A, B, C temena jednakokrakog pravouglog trougla? Odgovor obrazložiti.

c) Izračunati površinu paralelograma konstruisanog nad vektorima $\overrightarrow{BA}$ i $\overrightarrow{BC}$.

d) Izračunati intenzitet vektora $\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC}$.

Rešenje:

a) $\overrightarrow{BA} = (-8, -1, -4)$, $\overrightarrow{BC} = (1, 8, -4)$, $|\overrightarrow{BA}| = |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{8^2 + 1^2 + 4^2} = 9$ i $\overrightarrow{BA}\,\overrightarrow{BC} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{BA} \perp \overrightarrow{BC}$.

b) Jesu, jer je trougao ABC jednakokrak čiji ugao pri vrhu B je $\frac{\pi}{2}$.

c) Kako je ovaj paralelogram kvadrat stranice 9, to je njegova površina 81.

d) Kako je intenzitet vektorskog proizvoda $\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC}$, jednak površini paralelograma konstruisanog nad vektorima $\overrightarrow{BA}$ i $\overrightarrow{BC}$, to je $|\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC}| = 81$.

5. Ako je $z_1 = -1 + i$ i $z_2 = \sqrt{3} - i$, odrediti u algebarskom i trigonometrijskom obliku: **a)** $\frac{z_1}{z_2}$, **b)** $(\frac{z_1}{z_2})^{2012}$.
Rešenje:
(a) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{e^{i\frac{3\pi}{4}}}{e^{-i\frac{\pi}{6}}} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{11\pi}{12}} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\frac{11\pi}{12} + i\sin\frac{11\pi}{12}) = \frac{\sqrt{2}}{2}(-\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}) = -\frac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{2+\sqrt{3}} + i\frac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{2-\sqrt{3}}$.

(b) $(\frac{z_1}{z_2})^{2012} = 2^{-1006}(e^{i\frac{11\pi}{12}})^{2012} = 2^{-1006}e^{i\frac{\pi}{3}} = 2^{-1006}(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}) = 2^{-1006}(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}) = 2^{-1007}(1 + i\sqrt{3})$.

6. Naći skup A svih realnih vrednosti parametra a za koje je $(a+1)x^2 + (a+1)x + 1 > 0$ za svaki realni broj x.
Rešenje:
Ako je $a = -1$ tada imamo $1 > 0$, što je tačno za svaki realni broj x, pa $-1 \in A$. Ako je $a \neq -1$, tada polinom $(a+1)x^2 + (a+1)x + 1$ **jeste kvadratni polinom**, pa je pozitivan ako i samo ako
$a+1 > 0 \wedge a^2 - 2a - 3 < 0 \Leftrightarrow a > -1 \wedge a \in (-1,3) \Leftrightarrow a \in (-1,3)$. Kako $-1 \in A$, to je krajnji rezultat $a \in [-1,3)$.

7. Neka je funkcija f definisana sa $f(x) = 3\sin x + \cos 2x - 2$.
a) Naći nule funkcije $f(x)$ u intervalu $(-\pi, \pi]$. **b)** Rešiti nejednačinu $f(x) < 0$ u intervalu $(-\pi, \pi]$.
Rešenje: a) $3\sin x + \cos 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow -2\sin^2 x + 3\sin x - 1 = 0 \Leftrightarrow \sin x \in \{1, \frac{1}{2}\} \Leftrightarrow$
$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \vee x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$. Kako je $x \in (-\pi, \pi]$, to sledi da je rezultat zadatka $x \in \{\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}\}$.
b) Kako je funkcija $f(x)$ neprekidna, ona može da menja znak samo u njenim nulama $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{2}$ i $\frac{5\pi}{6}$, a kako je očevidno $f(0) = -1 < 0$, $f(\frac{\pi}{3}) > 0$, $f(\frac{2\pi}{3}) > 0$, i $f(\pi) = -1 < 0$ to sledi $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\pi, \frac{\pi}{6}) \cup (\frac{5\pi}{6}, \pi]$. $(A_{min}(\frac{\pi}{2}, 0))$!

8. Neka je funkcija f definisana sa $f(x) = 1 + \log_{\frac{1}{2}}(1+2x)$.
a) Rešiti jednačinu $f(x) = 0$, **b)** Rešiti nejednačinu $f(x) > 0$,
Rešenje:
a) $1 + \log_{\frac{1}{2}}(1+2x) = 0 \Leftrightarrow 1 + 2x = 2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$.
b) Kako je funkcija f neprekidna i kako za nulu ima samo $x = \frac{1}{2}$ u kojoj sigurno menja znak, jer je $f(0) = 1 > 0$ i $f(\frac{3}{2}) = -1 < 0$, to sledi $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

9. Dokazati da brojevi $\frac{1}{\log_3 2}$, $\frac{1}{\log_6 2}$, $\frac{1}{\log_{12} 2}$ obrazuju aritmetičku progresiju.

Rešenje: $\frac{1}{\log_3 2} + \frac{1}{\log_{12} 2} = \log_2 3 + \log_2 12 = \log_2 36 = 2 \cdot \log_2 6 = 2 \cdot \frac{1}{\log_6 2}$, pa je srednji aritmetička sredina krajnjih.
Drugi način. $\frac{1}{\log_6 2} - \frac{1}{\log_3 2} = \log_2 6 - \log_2 3 = \log_2 \frac{6}{3} = 1 = \log_2 \frac{12}{6} = \log_2 12 - \log_2 6 = \frac{1}{\log_{12} 2} - \frac{1}{\log_6 2}$.

10. Neka je funkcija f definisana sa $f(x) = (x+5)(x^2 - x - 6) = x^3 + 4x^2 - 11x - 30$.

a) Naći nule funkcije f i rastaviti na proste (nesvodljive) činioce (faktore) polinom $f(x)$.
b) Naći ekstremne tačke $A\big(\alpha, f(\alpha)\big)$ i $B\big(\beta, f(\beta)\big)$ funkcije f.
c) Odrediti intervale u kojima funkcija f raste.
d) Naći jednačine tangenti grafika funkcije f kojima pripada tačka $N(-5, 0)$.

Rešenje:
a) $f(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-5, -2, 3\}$, pa je $f(x) = (x+5)(x+2)(x-3)$.
b) $A(-\frac{11}{3}, \frac{400}{27})$ i $B(1, -36)$.
c) $f \nearrow \Leftrightarrow x \in (-\infty, -\frac{11}{3}) \cup (1, \infty)$.
d) Jednačina tangente na krivu $y = f(x)$ kroz tačku $(-5, 0)$ je $y - 0 = f'(\gamma)(x+5)$, gde $P(\gamma, f(\gamma))$ pripada i grafiku funkcije f i grafiku tangente $y - 0 = f'(\gamma)(x+5)$, pa sledi da je $f(\gamma) = f'(\gamma)(\gamma+5) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (\gamma+5)(\gamma+2)(\gamma-3) = (3\gamma^2 + 8\gamma - 11)(\gamma+5) \Leftrightarrow \gamma = -5 \vee 2\gamma^2 + 9\gamma - 5 = 0 \Leftrightarrow \gamma = -5 \vee \gamma = \frac{1}{2}$,
pa su jednačine traženih tangenti $y - 0 = f'(\gamma)(x+5)$ za $\gamma \in \{-5, \frac{1}{2}\}$ tj. $y = 24(x+5)$ i $y = -\frac{25}{4}(x+5)$.

Svaki zadatak vredi maksimum 6 bodova. **KATEDRA ZA MATEMATIKU**

ZADACI ZA PRIJEMNI ISPIT IZ MATEMATIKE

Saobraćaj, Građevinarstvo, Geodezija i geomatika

1. Data je funkcija $f(x) = \sqrt{x+17} - \sqrt{x-7} - 4$.

   (a) Odrediti domen i ispitati znak funkcije $f(x)$.

   (b) Izračunati $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

2. Rešiti nejednačinu
$$2 \cdot \left(\frac{1}{32}\right)^{\frac{x}{x^2+2x+2}} < 1.$$

3. Rešiti jednačinu
$$\log_5 \sqrt{x-3} + \log_{25}(10+x) = \frac{1}{\log_{6x} 25}.$$

4. Rešiti jednačinu
$$\sin^3 x + \cos^3 x = \sin x + \cos x.$$

5. Dat je jednakokraki trapez $ABCD$ kod koga su dužine osnovica $AB = 30$ i $CD = 12$, a dužine krakova $BC = AD = 15$. Produžeci krakova se seku u tački E. Koji procenat površine trougla ABE pretstavlja površina trapeza $ABCD$?

6. Površina prave pravilne četvorostrane piramide iznosi 40, a visina bočne strane je 3. Izračunati zapreminu kupe opisane oko piramide.

7. Tačke $A(-2,2,-1)$ i $C(3,4,0)$ su dva temena trougla ABC, a $C_1(-2,1,1)$ je sredina stranice AB.

   (a) Odrediti koordinate temena B i veličinu ugla kod temena A.

   (b) Izračunati površinu trougla ABC.

8. Data je funkcija $f(x) = \left(\frac{1}{x} - 2\sqrt{x}\right)^6$.

   (a) U razvoju binoma kojim je definisana funkcija $f(x)$, izračunati član koji sadrži $\sqrt{x^3}$.

   (b) Izračunati $\sqrt{f(2)}$.

9. Zbir svih članova aritmetičke progresije je 1035, a zbir prvog i poslednjeg člana je 90. Ako je količnik trećeg i prvog člana jednak 9, izračunati sedmi član.

10. Izračunati
$$\sqrt{\frac{1-2i}{3+i} \cdot 10 + (1-i)^3 - 2 + 5i}.$$

ZADACI ZA PRIJEMNI ISPIT IZ MATEMATIKE
Saobraćaj, Građevinarstvo, Geodezija i geomatika

1. **Data je funkcija** $f(x) = \sqrt{x+17} - \sqrt{x-7} - 4$.

   (a) Odrediti domen i ispitati znak funkcije $f(x)$.

   (b) Izračunati $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

   (a) Zbog oblasti definisanosti korene funkcije, potrebno je i dovoljno da
   $(x+17 \geq 0 \ \wedge\ x-7 \geq 0) \quad \Leftrightarrow \quad (x \geq -17 \ \wedge\ x \geq 7) \quad \Leftrightarrow \quad x \geq 7.$
   Dakle, domen funkcije je $\mathcal{D}_f = [7,\infty)$. Dalje je
   $f(x) = \sqrt{x+17} - \sqrt{x-7} - 4 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{x+17} > \sqrt{x-7} + 4$
   $\Leftrightarrow \quad x+17 > x-7+8\sqrt{x-7}+16 \quad \Leftrightarrow \quad 8 > 8\sqrt{x-7}$
   $\Leftrightarrow \quad 1 > \sqrt{x-7} \quad \Leftrightarrow \quad 1 > x-7 \quad \Leftrightarrow \quad 8 > x.$
   Dakle, funkcija je pozitivna na intervalu $[7,8)$, a negativna na intervalu $(8,\infty)$.

   (b) $$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\left(\left(\sqrt{x+17} - \sqrt{x-7}\right)\frac{\sqrt{x+17}+\sqrt{x-7}}{\sqrt{x+17}+\sqrt{x-7}} - 4\right)$$
   $$= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{(x+17)-(x-7)}{\sqrt{x+17}+\sqrt{x-7}} - 4\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{24}{\sqrt{x+17}+\sqrt{x-7}} - 4\right) = \frac{24}{\infty+\infty} - 4 = 0 - 4 = -4.$$

2. **Rešiti nejednačinu** $2\cdot\left(\dfrac{1}{32}\right)^{\frac{x}{x^2+2x+2}} < 1.$

   Nejednačina je definisana za $x \in \mathbb{R}$ jer je $x^2+2x+2 > 0$. Dakle,

   $2\cdot\left(\frac{1}{32}\right)^{\frac{x}{x^2+2x+2}} < 1 \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{1}{2^5}\right)^{\frac{x}{x^2+2x+2}} < \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow$

   $\Leftrightarrow \quad \left(2^{-5}\right)^{\frac{x}{x^2+2x+2}} < \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 2^{\frac{-5x}{x^2+2x+2}} < 2^{-1} \quad \Leftrightarrow$

   $\Leftrightarrow \quad \frac{-5x}{x^2+2x+2} < -1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{-5x}{x^2+2x+2} + 1 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^2-3x+2}{x^2+2x+2} < 0 \quad \Leftrightarrow$

   $\Leftrightarrow \quad x^2-3x+2 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(x_1 < x < x_2 \ \wedge\ x_{1,2} = \frac{3\pm\sqrt{9-8}}{2} = \frac{3\pm1}{2}\right) \quad \Leftrightarrow \quad 1 < x < 2.$

   Dakle, skup rešenja date nejednačine je $\mathcal{R} = (1,2)$.

3. **Rešiti jednačinu**
   $$\log_5\sqrt{x-3} + \log_{25}(10+x) = \frac{1}{\log_{6x} 25}.$$
   S obzirom na domen logaritamske i korene funkcije, kao i oblast definisanosti baze logaritamske funkcije, za oblast definisanosti posmatrane jednačine dobijamo
   $\left(x-3 \geq 0 \ \wedge\ \sqrt{x-3} > 0 \ \wedge\ 10+x > 0 \ \wedge\ 6x > 0 \ \wedge\ 6x \neq 1\right)$
   $\Leftrightarrow \quad \left(x > 3 \ \wedge\ x > -10 \ \wedge\ x > 0 \ \wedge\ x \neq \frac{1}{6}\right) \quad \Leftrightarrow \quad x > 3,$
   tj. skup u kome se nalazi rešenje je $\mathcal{D} = (3,\infty)$.

   $\log_5\sqrt{x-3} + \log_{25}(10+x) = \frac{1}{\log_{6x} 25} \quad \Leftrightarrow \quad \log_5 (x-3)^{\frac{1}{2}} + \log_{25}(10+x) = \log_{25}(6x)$

   $\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}\log_5(x-3) + \log_{25}(10+x) = \log_{25}(6x) \quad \Leftrightarrow \quad \log_{25}(x-3) + \log_{25}(10+x) = \log_{25}(6x)$

   $\Leftrightarrow \quad \log_{25}((x-3)\cdot(10+x)) = \log_{25}(6x) \quad \Leftrightarrow \quad (x-3)\cdot(10+x) = 6x \quad \Leftrightarrow \quad x^2+x-30 = 0$

   $\Leftrightarrow \quad x = \frac{-1\pm\sqrt{1+120}}{2} = \frac{-1\pm11}{2} \quad \Leftrightarrow \quad (x = -6 \ \vee\ x = 5),$

   te je, zbog $-6 \notin \mathcal{D} = (3,\infty)$, jedino rešenje date jednačine $x = 5$.

4. **Rešiti jednačinu**

$$\sin^3 x + \cos^3 x = \sin x + \cos x.$$

Koristeći identitete $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ i $a^3 + b^3 = (a+b)\left(a^2 - ab + b^2\right)$ dobijamo

$\sin^3 x + \cos^3 x = \sin x + \cos x \quad \Leftrightarrow \quad (\sin x + \cos x)\left(\sin^2 x - \sin x \cos x + \cos^2 x\right) = \sin x + \cos x$

$\Leftrightarrow \quad (\sin x + \cos x)(1 - \sin x \cos x) - (\sin x + \cos x) = 0$

$\Leftrightarrow \quad (\sin x + \cos x)(1 - \sin x \cos x - 1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\sin x = -\cos x \quad \vee \quad \sin x \cos x = 0)$

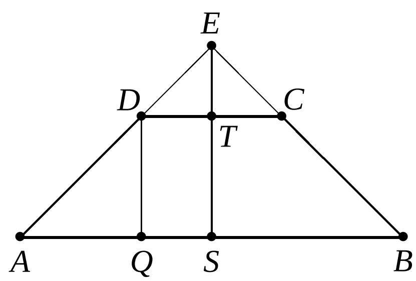
$\Leftrightarrow \quad \left(x = \frac{3\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \quad \vee \quad \sin x = 0 \quad \vee \quad \cos x = 0\right)$

$\Leftrightarrow \quad \left(x = \frac{3\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \quad \vee \quad x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \quad \vee \quad x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right)$

$\Leftrightarrow \quad \left(x = \frac{3\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \quad \vee \quad x = \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\right).$

5. **Dat je jednakokraki trapez $ABCD$ kod koga su dužine osnovica $AB = 30$ i $CD = 12$, a dužine krakova $BC = AD = 15$. Produžeci krakova se seku u tački E. Koji procenat površine trougla ABE pretstavlja površina trapeza $ABCD$?**

Neka su S i T redom sredine stranica AB i CD trapeza.
Kako je trapez jednakokraki, sledi da su tačke E, T i S kolinearne, i pri tome je $\measuredangle ESA = \frac{\pi}{2}$.
Neka je Q podnožje normale na AB koja sadrži tačku D. Sledi da je $DQ = TS$.



Iz $QS = DT = \frac{1}{2}CD = 6$ sledi da je $AQ = AS - QS = \frac{1}{2}AB - QS = 15 - 6 = 9$. Primenom Pitagorine teoreme na trougao DQA dobijamo $TS = DQ = \sqrt{AD^2 - AQ^2} = \sqrt{15^2 - 9^2} = 12$. Iz sličnosti $\triangle DQA \sim \triangle ESA$ sledi da je $\frac{AQ}{AS} = \frac{DQ}{ES}$, odnosno $\frac{9}{15} = \frac{12}{ES} \ \Leftrightarrow \ ES = 20$.

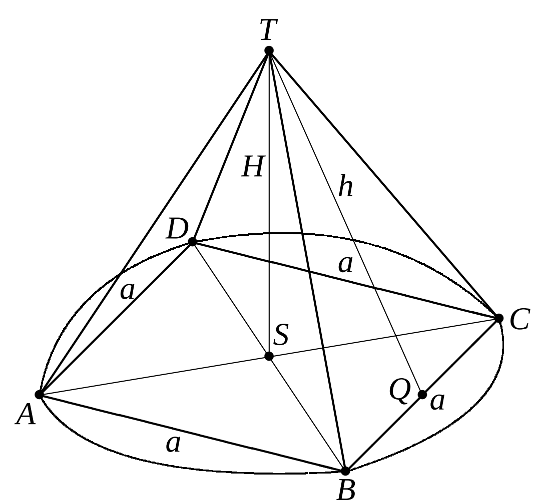
Koristeći formule za površine jednakokrakog trougla i jednakokrakog trapeza dobijamo

$P_{ABCD} = TS \cdot \frac{AB+CD}{2} = 12 \cdot \frac{30+12}{2} = 252, \quad P_{ABE} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot ES = 15 \cdot 20 = 300,$

te je $\frac{P_{ABCD}}{P_{ABE}} = \frac{252}{300} = \frac{84}{100} = 84\%$.
Dakle, površina trapeza $ABCD$ pretstavlja 84% površine trougla ABE.

6. **Površina prave pravilne četvorostrane piramide iznosi 40, a visina bočne strane je 3. Izračunati zapreminu kupe opisane oko piramide.**

Neka je $ABCD$ kvadrat u osnovi piramide, i neka je T vrh piramide i opisane kupe. Neka je H visina piramide i opisane kupe, $h = 3$ visina bočne strane piramide, i neka je Q sredina npr. duži BC.
Na osnovu date površine P_p piramide dobijamo
$P_p = 40 = a^2 + 4h\frac{a}{2} = a^2 + 6a$
$\Leftrightarrow \quad a^2 + 6a - 40 = 0$
$\Leftrightarrow \quad a_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36+160}}{2} = \frac{-6 \pm 14}{2}$
$\Leftrightarrow \quad a \in \{-10, 4\}$,
odnosno $a = 4$ (negativno rešenje odbacujemo).



Iz pravouglog trougla TSQ sledi $H = \sqrt{TQ^2 - SQ^2} = \sqrt{h^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{5}$. Poluprečnik osnove opisane kupe je polovina dijagonale kvadrata koji je u osnovi piramide, dakle $r = \frac{1}{2}\sqrt{2}a = 2\sqrt{2}$, te za zapreminu kupe dobijamo $V_k = \frac{1}{3}r^2\pi H = \frac{1}{3} \cdot 8 \cdot \pi \cdot \sqrt{5} = \frac{8\sqrt{5}}{3}\pi$.

7. **Tačke $A(-2,2,-1)$ i $C(3,4,0)$ su dva temena trougla ABC, a $C_1(-2,1,1)$ je središte stranice AB.**

(a) Odrediti koordinate temena B i veličinu ugla kod temena A.

(b) Izračunati površinu trougla ABC.

Neka je α ugao kod temena A.

(a) $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AC_1} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = 2\left(\overrightarrow{OC_1} - \overrightarrow{OA}\right)$

$\overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OC_1} - \overrightarrow{OA} = 2\cdot(-2,1,1) - (-2,2,-1) = (-4,2,2) - (-2,2,-1) = (-2,0,3)$,
odnosno dobili smo $B(-2,0,3)$. Dalje je
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (-2,0,3) - (-2,2,-1) = (0,-2,4)$,
$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = (3,4,0) - (-2,2,-1) = (5,2,1)$.
Kako je $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = (0,-2,4)\cdot(5,2,1) = 0\cdot 5 + (-2)\cdot 2 + 4\cdot 1 = 0$, i pri tome je $\overrightarrow{AB} \neq \vec{0}$ i $\overrightarrow{AC} \neq \vec{0}$, iz $0 = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|\cdot\cos\alpha$ sledi da je $\cos\alpha = 0$, odnosno $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

(b) Kako je ABC pravougli trougao sa pravim uglom kod temena A, i pri tome je
$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{0^2 + (-2)^2 + 4^2} = \sqrt{20}, \quad \left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{5^2+2^2+1^2} = \sqrt{30},$ sledi da je
$P_{ABC} = \frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{20}\cdot\sqrt{30} = 5\sqrt{6}$.

8. **Data je funkcija $f(x) = \left(\frac{1}{x} - 2\sqrt{x}\right)^6$.**

(a) U razvoju binoma kojim je definisana funkcija $f(x)$, izračunati član koji sadrži $\sqrt{x^3}$.

(b) Izračunati $\sqrt{f(2)}$.

(a) Koristeći binomni obrazac dobijamo

$$f(x) = \left(\tfrac{1}{x} - 2\sqrt{x}\right)^6 = \left(x^{-1} - 2x^{\frac{1}{2}}\right)^6 = \sum_{k=0}^{6}\binom{6}{k}\cdot\left(x^{-1}\right)^{6-k}\cdot\left(-2x^{\frac{1}{2}}\right)^k =$$
$$= \sum_{k=0}^{6}\binom{6}{k}\cdot(-1)^k\cdot 2^k\cdot x^{k-6}\cdot x^{\frac{1}{2}k} = \sum_{k=0}^{6}\binom{6}{k}\cdot(-1)^k\cdot 2^k\cdot x^{\frac{3}{2}k-6},$$

pri čemu je
$\sqrt{x^3} = x^{\frac{3}{2}} = x^{\frac{3}{2}k-6} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3}{2} = \frac{3}{2}k - 6 \quad \Leftrightarrow \quad 3 = 3k - 12 \quad \Leftrightarrow \quad 3k = 15 \quad \Leftrightarrow \quad k = 5.$
Dakle, radi se o članu razvoja $\binom{6}{5}\cdot(-1)^5\cdot 2^5\cdot x^{\frac{3}{2}} = -192\sqrt{x^3}$.

(b) $$\sqrt{f(2)} = \sqrt{\left(\tfrac{1}{2} - 2\sqrt{2}\right)^6} = \left|\tfrac{1}{2} - 2\sqrt{2}\right|^3 = \left(2\sqrt{2} - \tfrac{1}{2}\right)^3 = \left(\tfrac{4\sqrt{2}-1}{2}\right)^3$$
$$= \frac{\left(4\sqrt{2}\right)^3 - 3\left(4\sqrt{2}\right)^2 + 3\cdot 4\sqrt{2} - 1}{8} = \frac{128\sqrt{2} - 96 + 12\sqrt{2} - 1}{8} = \frac{140\sqrt{2} - 97}{8} = \frac{35}{2}\sqrt{2} - \frac{97}{8}.$$

9. **Zbir svih članova aritmetičke progresije je 1035, a zbir prvog i poslednjeg člana je 90. Ako je količnik trećeg i prvog člana jednak 9, izračunati sedmi član.**

Dakle, treba da izračunamo sedmi član aritmetičke progresije $a_1, a_2, \ldots, a_n$, gde je n broj njenih članova, a_1 je prvi član, i d je razlika članova niza. Dato je da je

(1) $\quad 1035 = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \quad \Rightarrow \quad n(a_1 + a_n) = 2070,$

(2) $\quad 90 = a_1 + a_n,$

(3) $\quad 9 = \frac{a_3}{a_1} \quad \Leftrightarrow \quad 9 = \frac{a_1 + 2d}{a_1}.$

Iz prve dve jednačine sledi $n\cdot 90 = 2070$, odnosno $n = 23$, a zatim iz (2) i (3).

[2] $\quad 90 = a_1 + a_n = a_1 + a_1 + (n-1)d \quad \Leftrightarrow \quad 90 = 2a_1 + 22d,$

[3] $\quad 9a_1 = a_1 + 2d \quad \Leftrightarrow \quad 8a_1 - 2d = 0 \quad \Leftrightarrow \quad d = 4a_1,$

Uvrštavanjem [3] u [2] dobijamo $90 = 2a_1 + 88a_1$ pa je $a_1 = 1$ i $d = 4a_1 = 4$.
Tako za sedmi član niza dobijamo $a_7 = a_1 + 6d = 25$.

10. **Izračunati**

$$\sqrt{\frac{1-2i}{3+i}\cdot 10+(1-i)^3-2+5i}.$$

Kako je

$\frac{1-2i}{3+i}=\frac{1-2i}{3+i}\cdot\frac{3-i}{3-i}=\frac{3-6i-i+2i^2}{9-i^2}=\frac{1-7i}{10}$ i $(1-i)^3=1-3i+3i^2-i^3=1-3i-3+i=-2-2i,$
sledi

$\sqrt{\frac{1-2i}{3+i}\cdot 10+(1-i)^3-2+5i}=\sqrt{1-7i-2-2i-2+5i}=\sqrt{-3-4i}.$

Vrednosti kompleksnog korena $\sqrt{-3-4i}$ izračunavamo u obliku $\sqrt{-3-4i}=x+yi$, gde je $x,y\in\mathbb{R}$.
Kvadriranjem izraza $\sqrt{-3-4i}=x+yi$ dobijamo

$-3-4i=x^2-y^2+2xyi \quad\Leftrightarrow\quad \left(x^2-y^2=-3 \ \wedge\ 2xy=-4\right) \quad\Leftrightarrow\quad \left(y^2-x^2=3 \ \wedge\ xy=-2\right).$

$\Leftrightarrow \quad \left(x=-\frac{2}{y} \ \wedge\ y^2-\left(\frac{2}{y}\right)^2=3\right) \quad\Leftrightarrow\quad \left(x=-\frac{2}{y} \ \wedge\ y^4-4=3y^2\right)$

$\Leftrightarrow \quad \left(x=-\frac{2}{y} \ \wedge\ t^2-3t-4=0 \ \wedge\ t=y^2\right)$

$\Leftrightarrow \quad \left(x=-\frac{2}{y} \ \wedge\ t_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{9+16}}{2}=\frac{3\pm5}{2} \ \wedge\ t=y^2\right) \quad\Leftrightarrow\quad \left(x=-\frac{2}{y} \ \wedge\ y^2=4\right)$

$\Leftrightarrow \quad \left(x=-\frac{2}{y} \ \wedge\ (y=-2 \vee y=2)\right) \quad\Leftrightarrow\quad ((y=-2 \wedge x=1) \vee (y=2 \wedge x=-1)).$

Dakle, $\sqrt{-3-4i}=\{1-2i,-1+2i\}$.

FAKULTET TEHNIČKIH NAUKA, NOVI SAD

STRUKA: MAŠINSTVO

DATUM: 02.07.2012.

ZADACI ZA PRIJEMNI ISPIT IZ

M A T E M A T I K E

1. **(3 boda) a) Izračunati**

$$\left(\left(\frac{1}{5}+\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{9}\right):1\frac{7}{30}\right)^{-3}+\log_2 0.0625\,.$$

   (3 boda) b) Uprostiti izraz

$$\left(\frac{3}{x^2-x}-\frac{(2+x)^2-x^2}{4x^2-4}\right)\cdot\frac{1-x}{3x^3-x^4},\qquad x\in\mathbb{R}\setminus\{-1,0,1,3\}\,.$$

2. **(6 bodova) U kvadratnoj jednačini**

$$x^2-(1+2m)\,x+m^2+2=0$$

   odrediti realan parametar m **tako da jedan njen koren bude dva puta veći od drugog, a zatim izračunati te korene.**

3. **(6 bodova) Rešiti jednačinu**

$$3^{2x-1}-6\cdot 3^{x-2}-1=0.$$

4. **(6 bodova) Rešiti nejednačinu**

$$\log_3 x<\log_9 (x+2)\,.$$

5. **(6 bodova) Rešiti jednačinu**

$$2\cos^2 x+\cos 2x=0.$$

6. **(5 bodova) U razvoju binoma** $\left(2x^{-3}+\sqrt{x}\right)^{14}$**,** $x>0$ **izračunati član koji ne sadrži** x**.**

7. **(2 boda) a) Neka su** M **i** N **redom sredine stranica** BC **i** CD **paralelograma** $ABCD$**. Izraziti vektor** $\overrightarrow{MN}$ **pomoću vektora** $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{a}$ **i** $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{b}$**.**
   (3 boda) b) Za $A(2,0,1)$ **i** $B(0,-2,1)$ **odrediti sredinu duži** AB **i intenzitet vektora** $\overrightarrow{AB}$**.**

TRAJANJE ISPITA: 180 minuta

Katedra za matematiku

FAKULTET TEHNIČKIH NAUKA, NOVI SAD, 02. 07. 2012.
STRUKA: MAŠINSTVO

REŠENJA ZADATAKA ZA PRIJEMNI ISPIT IZ
M A T E M A T I K E

1. **a) Izračunati** $A=\left(\left(\frac{1}{5}+\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{9}\right):1\frac{7}{30}\right)^{-3}+\log_2 0.0625$.

   $A=\left(\left(\frac{1}{5}+\frac{5}{12}\right):\frac{37}{30}\right)^{-3}+\log_2\frac{625}{10000}=\left(\frac{37}{60}\cdot\frac{30}{37}\right)^{-3}+\log_2\frac{5^4}{10^4}=\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}+\log_2 2^{-4}=2^3+(-4)\log_2 2=4$.

   b) Uprostiti izraz $B=\left(\frac{3}{x^2-x}-\frac{(2+x)^2-x^2}{4x^2-4}\right)\cdot\frac{1-x}{3x^3-x^4},\qquad x\in\mathbb{R}\setminus\{-1,0,1,3\}$.

   $B=\left(\frac{3}{x(x-1)}-\frac{4+4x+x^2-x^2}{4(x-1)(x+1)}\right)\cdot\frac{1-x}{x^3(3-x)}=\left(\frac{3}{x(x-1)}-\frac{4(1+x)}{4(x-1)(x+1)}\right)\cdot\frac{1-x}{x^3(3-x)}=\frac{3-x}{x(x-1)}\cdot\frac{1-x}{x^3(3-x)}=\frac{-1}{x^4}$.

2. **U kvadratnoj jednačini** $x^2-(1+2m)x+m^2+2=0$ **odrediti realan parametar** m **tako da jedan njen koren bude dva puta veći od drugog, a zatim izračunati te korene.**

   Neka su x_1 i x_2 rešenja date jednačine. Na osnovu Vijetovih pravila je $x_1+x_2=1+2m$, $x_1\cdot x_2=m^2+2$, a iz uslova zadatka je $x_1=2x_2$. Tako dobijamo sistem jednačina

   $$\begin{array}{lcl} x_1+x_2 &=& 1+2m\\ x_1\cdot x_2 &=& m^2+2\\ x_1 &=& 2x_2\end{array}\iff\begin{array}{lcl} 3x_2 &=& 1+2m\\ 2x_2^2 &=& m^2+2\\ x_1 &=& 2x_2\end{array}\iff\begin{array}{lcl} x_1 &=& 2x_2\\ x_2 &=& \frac{1+2m}{3}\\ 2\left(\frac{1+2m}{3}\right)^2 &=& m^2+2\end{array}$$

   iz kog sledi $2+8m+8m^2=9m^2+18$, tj. dobijamo jednačinu $m^2-8m+16=0$ čije je rešenje $m=4$.

   Za $m=4$ rešenja polazne jednačine su $x_1=6$ i $x_2=3$.

3. **Rešiti jednačinu** $3^{2x-1}-6\cdot3^{x-2}-1=0$.

   $3^{2x-1}-6\cdot3^{x-2}-1=0\iff\frac{1}{3}3^{2x}-\frac{6}{3^2}3^x-1=0$. Uvodjenjem smene $3^x=t$ dobija se kvadratna jednačina $\frac{1}{3}t^2-\frac{2}{3}t-1=0\iff t^2-2t-3=0$ čija su rešenja $t_1=3$ i $t_2=-1$. Vraćanjem smene, za $t_1=3$ dobija se $3^x=3$, pa je $x=1$, a rešenje $t_2=-1$ odbacujemo jer je $3^x>0$ za svaki realan broj x. Dakle, jedino rešenje jednačine je $x=1$.

4. **Rešiti nejednačinu** $\log_3 x<\log_9(x+2)$.

   Data logaritamska nejednačina je definisana za $x>0$ i $x+2>0$, tj. $x\in(0,\infty)$.

   $\log_3 x<\log_9(x+2)\iff\log_3 x<\frac{1}{2}\log_3(x+2)\iff\log_3 x<\log_3(x+2)^{\frac{1}{2}}\iff x<\sqrt{x+2}$.

   Kako $x\in(0,\infty)$ to dalje imamo da je $x^2<x+2$, tako da dobijamo kvadratnu nejednačinu $x^2-x-2<0$ čije je rešenje $x\in(-1,2)$. Iz uslova $x\in(0,\infty)$ i $x\in(-1,2)$ sledi da je $x\in(0,2)$.

5. **Rešiti jednačinu** $2\cos^2 x+\cos 2x=0$.

   $2\cos^2 x+\cos 2x=0\iff 2\cos^2 x+\cos^2 x-\sin^2 x=0\iff 3\cos^2 x-1+\cos^2 x=0\iff 4\cos^2 x=1\iff\cos^2 x=\frac{1}{4}\iff$ $\iff\cos x=\pm\frac{1}{2}\iff x=\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$ i $x=\pm\frac{2\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

   Skup rešenja jednačine je $\left\{\frac{\pi}{3}+k\pi|k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\frac{2\pi}{3}+k\pi|k\in\mathbb{Z}\right\}$.

6. **U razvoju binoma** $\left(2x^{-3}+\sqrt{x}\right)^{14}$**,** $x>0$ **izračunati član koji ne sadrži** x**.**

   Razvoj datog binoma je $\sum_{k=0}^{14}\binom{14}{k}\left(2x^{-3}\right)^k\left(\sqrt{x}\right)^{14-k}=\sum_{k=0}^{14}\binom{14}{k}2^kx^{-3k}x^{\frac{14-k}{2}}$. Za član koji ne sadrži x mora da važi $x^{\frac{-6k+14-k}{2}}=1$, odnosno $\frac{-7k+14}{2}=0$, a odatle dobijamo da je $k=2$. Traženi član binoma je $\binom{14}{2}2^2=\frac{14\cdot13}{2}\cdot4=364$.

7. **a) Neka su** M **i** N **redom sredine stranica** BC **i** CD **paralelograma** $ABCD$**. Izraziti vektor** $\overrightarrow{MN}$ **pomoću vektora** $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{a}$ **i** $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{b}$**.**

   $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{CN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{b}-\overrightarrow{a}\right)$.

   b) Za $A(2,0,1)$ **i** $B(0,-2,1)$ **odrediti sredinu duži** AB **i intenzitet vektora** $\overrightarrow{AB}$**.**

   Sredina duži AB je $S\left(\frac{2+0}{2},\frac{0-2}{2},\frac{1+1}{2}\right)$, tj. $S(1,-1,1)$.

   Kako je $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(0,-2,1)-(2,0,1)=(-2,-2,0)$ to je intenzitet vektora $\overrightarrow{AB}$,

   $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(-2)^2+(-2)^2+0^2}=2\sqrt{2}$.

Fakultet tehničhih nauka, Novi Sad
Grafičko inženjerstvo i dizajn
Inženjerstvo zaštite životne sredine

04.07.2012.

REŠENJA ZADATAKA ZA PRIJEMNI ISPIT IZ MATEMATIKE

1. a) (3 boda) Izračunati:

$$\left(\frac{2}{3}+\frac{3}{2}:\frac{2}{5}-\frac{5}{12}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

b) (3 boda) Odrediti uslove pod kojima je sledeći izraz definisan, a zatim ga uprostiti:

$$\frac{a^2+b^2}{ab}-\frac{a^2}{ab-b^2}+\frac{b^2}{a^2-ab}.$$

Rešenje:

a) (3 boda) $\left(\frac{2}{3}+\frac{3}{2}:\frac{2}{5}-\frac{5}{12}\right)^{-\frac{1}{2}}=\left(\frac{2}{3}+\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}-\frac{5}{12}\right)^{-\frac{1}{2}}=\left(\frac{2}{3}+\frac{15}{4}-\frac{5}{12}\right)^{-\frac{1}{2}}=\left(\frac{8+45-5}{12}\right)^{-\frac{1}{2}}=\left(\frac{48}{12}\right)^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{4}}=\frac{1}{2}$

b) (3 boda) Dati izraz je definisan za $ab\neq 0$ i $a\neq b$, odnosno $a\neq 0$ i $b\neq 0$ i $a\neq b$.

$$\begin{aligned}\frac{a^2+b^2}{ab}-\frac{a^2}{ab-b^2}+\frac{b^2}{a^2-ab}&=\frac{a^2+b^2}{ab}-\frac{a^2}{b(a-b)}+\frac{b^2}{a(a-b)}\\&=\frac{(a^2+b^2)(a-b)-a^3+b^3}{ab(a-b)}\\&=\frac{a^3-a^2b+b^2a-b^3-a^3+b^3}{ab(a-b)}\\&=\frac{ab(b-a)}{ab(a-b)}\\&=-1.\end{aligned}$$

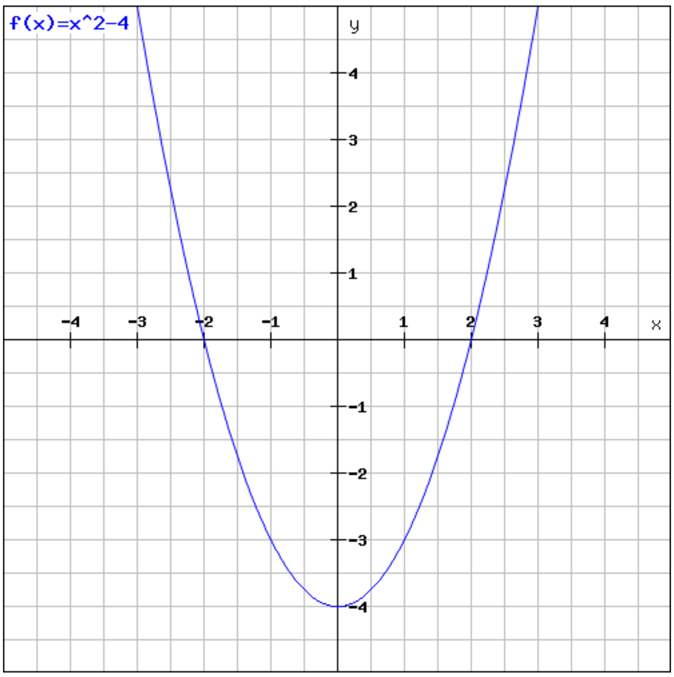
2. (6 bodova) Rešiti nejednačinu:

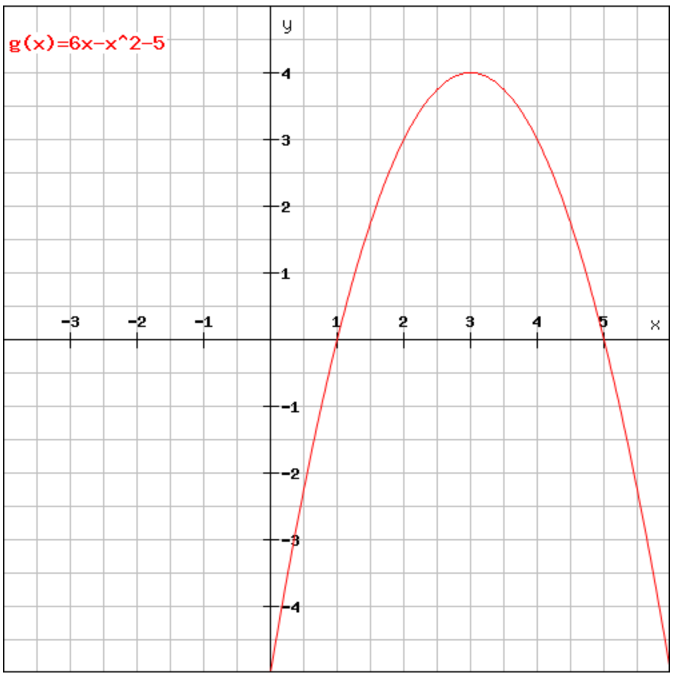
$$\frac{x^2-4}{6x-x^2-5}\geq 0.$$

Rešenje:

(6 bodova) Data nejednačina je definisana za $x\in\mathbb{R}\backslash\{1,5\}$.

$$\frac{x^2-4}{6x-x^2-5}\geq 0\Leftrightarrow\frac{(x-2)(x+2)}{-(x-1)(x-5)}\geq 0$$





	$(-\infty,-2)$	$(-2,1)$	$(1,2)$	$(2,5)$	$(5,+\infty)$
x^2-4	$+$	$-$	$-$	$+$	$+$
$6x-x^2-5$	$-$	$-$	$+$	$+$	$-$
$\dfrac{x^2-4}{6x-x^2-5}$	$-$	$+$	$-$	$+$	$-$

Na osnovu čega dobijamo da je

$$\frac{x^2-4}{6x-x^2-5} \geq 0 \Leftrightarrow x \in [-2,1) \cup [2,5).$$

3. (6 bodova) Rešiti jednačinu:

$$\log_2(9^{x-1}+7) = 2 + \log_2(3^{x-1}+1).$$

Rešenje:
(6 bodova) Data jednačina je definisana za svako $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\log_2(9^{x-1}+7) = 2 + \log_2(3^{x-1}+1) &\Leftrightarrow \log_2(9^{x-1}+7) = \log_2 4 + \log_2(3^{x-1}+1)\\
&\Leftrightarrow \log_2(9^{x-1}+7) = \log_2 4(3^{x-1}+1)\\
&\Leftrightarrow (9^{x-1}+7) = 4(3^{x-1}+1)\\
&\Leftrightarrow 9^{x-1} - 4\cdot 3^{x-1} + 3 = 0.
\end{aligned}$$

Posle smene $3^{x-1}=t$ pri čemu je $t>0$, dobijamo kvadratnu jednačinu $t^2-4\cdot t+3=0$ sa rešenjima $t_1=1,\ t_2=3$. Iz $3^{x-1}=1$ sledi da je $x-1=0$, odnosno $x=1$, a iz $3^{x-1}=3$ sledi da je $x-1=1$, odnosno $x=2$. Dakle, skup rešenja date jednačine je $\mathfrak{R}=\{1,2\}$.

4. (6 bodova) Rešiti jednačinu:

$$\cos^2 x - 2\sin x = 1.$$

Rešenje:
(6 bodova)

$$\begin{aligned}
\cos^2 x - 2\sin x = 1 &\Leftrightarrow 1-\sin^2 x - 2\sin x = 1\\
&\Leftrightarrow \sin^2 x + 2\sin x = 0\\
&\Leftrightarrow \sin x\cdot(2+\sin x) = 0\\
&\Leftrightarrow \sin x = 0 \vee 2+\sin x = 0.
\end{aligned}$$

Iz $\sin x = 0$ sledi da je $x=k\pi, k\in\mathbb{Z}$, dok jednačina $\sin x=-2$ nema rešenja. Dakle, skup rešenja date jednačine je

$$\mathfrak{R} = \{k\pi | k\in\mathbb{Z}\}.$$

5. (6 bodova) U razvoju binoma izračunati član koji ne sadrži x:

$$\left(\frac{2}{x}+\sqrt[4]{x}\right)^{10}.$$

Rešenje:
(6 bodova)

$$\begin{aligned}
\left(\frac{2}{x}+\sqrt[4]{x}\right)^{10} &= \left(\frac{2}{x}+x^{\frac{1}{4}}\right)^{10}\\
&= \sum_{k=0}^{10}\binom{10}{k}\left(\frac{2}{x}\right)^k\left(x^{\frac{1}{4}}\right)^{10-k}\\
&= \sum_{k=0}^{10}\binom{10}{k}2^k x^{-k} x^{\frac{10-k}{4}}\\
&= \sum_{k=0}^{10}\binom{10}{k}2^k x^{\frac{10-k-4k}{4}}\\
&= \sum_{k=0}^{10}\binom{10}{k}2^k x^{\frac{10-5k}{4}}.
\end{aligned}$$

Iz uslova da član ne sadrži x dobijamo $\dfrac{10-5k}{4}=0 \Leftrightarrow 10-5k=0 \Leftrightarrow k=2$, odakle sledi da je traženi član $\binom{10}{2}2^2 = 45\cdot 4 = 180$.