1 UVOD

Fizika se bavi proučavanjem osobina materije i njenih promena. Postoje dva oblika materije: supstanca i fizičko polje. Supstanca je zgusnuti oblik materije drugim rečima to je sve ono od čega se sastoje tela. Fizičko polje je oblik materije koji prenosi interakciju sa jednog tela na drugo[1]. Materija se kreće i menja. Primeri ovih procesa su: povećanje zapremine pri zagrevanju, pretvaranje tečnosti u gas, vazdušne i morske struje, kosmičko zračenje, izbijanje elektrona sa površine materijala elektromagnetnim talasima itd. Materija i njene promene se opisuju fizičkim veličinama. Primera radi masa je fizička veličina koja predstavlja meru inertnosti tela.

Ustanovljeno je da se prirodne pojave i procesi odvijaju na isti odnosno približno isti način pri istim odnosno približno istim uslovima. Relacija između fizičkih veličina koje opisuju pojavu i uslove pri kojima se ona odvija predstavlja fizički zakon. Zakonitost se utvrđuje na osnovu rezultata posmatranja i merenja. Ustanovljena zakonitost služi za predviđanje ponašanja sistema u sličnim uslovima. Na primer, jedan od osnovnih zakona dinamike poznat kao II Njutnov zakon glasi – ubrzanje koje telo dobija delovanjem spoljašnje sile srazmerno je sili a obrnuto srazmerno masi tela. Ovaj zakon se, kao i ostale fizičke zakonitosti, može prikazati kvantitativno formulom. Matematička formulacija II Njutnovog zakona, koja se odnosi na intenzitete, ima oblik:

$$a = \frac{F}{m}, \tag{1.1}$$

u kom a predstavlja ubrzanje, F silu a m masu.

Većina fizičkih zakona važi samo pri određenim uslovima. Prethodno pomenuti II Njutnov zakon važi pri brzinama mnogo manjim od brzine svetlosti. Primer opšteg zakona je zakon održanja energije. Shodno ovom zakonu ukupna energija nekog sistema

[1] Fizičko polje je uvedeno da bi se objasnilo kako se interakcije prenosi bez direktnog međusobnog kontakta tela.

je konstantna odnosno ne može se menjati ali se može se pretvarati iz jednog oblika energije u drugi.

Među fizičkim veličinama postoje relacije te je stoga potrebno, nezavisno od ostalih, definisati samo mali broj fizičkih veličina. Ove fizičke veličine se nazivaju osnovnim jer se preko njih mogu definisati sve ostale koje stoga nazivamo izvedenim. Dogovorom je izabrano sedam osnovnih fizičkih veličina: dužina, masa, vreme, temperatura, jačina električne struje, jačina svetlosti i količina supstance. One čine okosnicu Internacionalnog Sistema Jedinica (Système International d'Unités – skraćeno SI) ustanovljenog na jedanaestom zasedanju Generalne Konferencije za Tegove i Mere 1960. godine. Pored osnovnih i izvedenih fizičkih jedinica u SI sistemu postoje i dve dopunske jedinice i to radijan (rad)[2] kao jedinica mere za ugao u ravni i sterradijan (sr)[3] kao jedinica mere za prostorni ugao.

Tabela 1.1 Osnovne fizičke veličine i jedinice SI sistema

fizička veličina	oznaka fizičke veličine	naziv jedinice	oznaka jedinice
dužina	l	metar	m
masa	m	kilogram	kg
vreme	t	sekunda	s
temperatura	T	kelvin	K
jačina električne struje	I	amper	A
Jačina svetlosti	J	kandela	cd
količina supstance	n	mol	mol

[2] Centralni ugao kruga koji na kružnici odseca luk čija je dužina jednaka poluprečniku kruga je jedinica mere ugla u ravni i iznosi $1\ \mathrm{rad}$.

[3] Prostorni ugao se definiše tako što se na sferi populpečnika r odabere površina S. Deo prostora koji ograničavaju izvodnice koje polaze iz centra sfere i obilaze konturu površine S predstavlja prostorni ugao. Mera prostornog ugla je količnik površine S i kvardata poluprečnika sfere. Jedinični prostorni ugao (ugao od $1\ \mathrm{sr}$) na proizvoljnoj sferi odseca površinu jednaku kvadratu poluprečnika sfere.

Tabela 1.2 Prefiksi SI sistema

Naziv prefiksa	oznaka prefiksa	Numerička vrednost prefiksa	Naziv prefiksa	oznaka prefiksa	Numerička vrednost prefiksa
deci	d	10^{-1}	deka	da	10^{1}
centi	c	10^{-2}	hekto	h	10^{2}
mili	m	10^{-3}	kilo	k	10^{3}
mikro	μ	10^{-6}	mega	M	10^{6}
nano	n	10^{-9}	giga	G	10^{9}
piko	p	10^{-12}	tera	T	10^{12}
fempto	f	10^{-15}	peta	P	10^{15}
ato	a	10^{-18}	eksa	E	10^{18}

Fizika proučava procese u prirodi kako kvalitativno tako i kvantitativno. Eksperimentalno merenje ima važnu ulogu u opisivanju procesa bilo da su rezultati merenja polazna osnova za utvrđivanje zakonitosti bilo da predstavljaju potvrdu teorijskih predviđanja. Merenje fizičkih veličina u osnovi predstavlja postupak kvantitativnog upoređivanja fizičkih veličina iste vrste. Da bi se rezultati merenja mogli međusobno porediti potrebno je definisati jedinicu mere. Rezultat merenja je brojna vrednost koja pokazuje koliko puta se jedinica mere sadrži u veličini koju merimo. Rezultat merenja se uvek iskazuje zajedno sa jedinicom mere koja se piše iza brojne vrednosti. U tabeli *1.1* su date jedinice mere za osnovne fizičke veličine. Jedinice mere za izvedene fizičke veličine dobijaju se polazeci od relacija koje povezuju izvedenu fizičku veličinu sa osnovnim

veličinama. Na primer, jedinica za brzinu (v) u SI sistemu je metar u sekundi ($\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$) shodno relaciji:

$$v=\frac{s}{t}, \tag{1.2}$$

gde je s pređeni put a t vreme. Izvedene jedinice često imaj naziv koji je nezavisan od naziva osnovnih jedinica preko kojih su izražene. Primera radi jedinica za silu u SI sistemu je njutn (N) koji je sa osnovnim jedinicama povezan relacijom:

$$\mathrm{N} = \mathrm{kg}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}. \tag{1.3}$$

U cilju jednostavnijeg prikazivanja brojnih vrednosti fizičkih veličina uvedene su njihove manje ili veće jedinice koje predstavljaju umnoške jedinica SI sistema. Ovi tzv. prefiksi se mogu primenjivati na sve jedinice kako osnovne tako izvedene. U tabeli *1.2* dati su prefiksi, simboli i numeričke vrednosti prefiksa.

1.1 Skalari i vektori

Fizičke veličine potpuno određene brojnom vrednošću i jedinicom nazivaju se skalarne veličine, skraćeno skalari. U skalarne veličine spadaju; masa, vreme, dužina temperatura, površina, zapremina, energija, rad, itd.

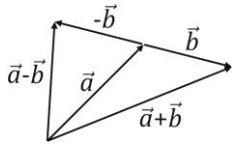
Veličine, koje nisu potpuno određene brojnom vrednošću i jedinicom, kod kojih je potrebno znati pravac i smer nazivaju se vektorske veličine, skraćeno vektori. Takve veličine su: brzina, ubrzanje, sila, impuls itd. Vektorske veličine se obeležavaju horizontalnom strelicom iznad oznake veličine, kao primer je navedena oznaka za vektor ubrzanja $\vec{a}$. Ukoliko je kod vektorske veličine izostavljena strelica, npr. a, oznaka podrazumeva intenzitet vektora koji se još označava i na sledeći način $|\vec{a}|$.

Vektorske veličine su jednake ako imaju paralelne pravce, jednake intenzitete i isti smer. Dva vektora koji imaju iste intenzitete, paralelne pravce i suprotne smerove nazivamo suprotnim vektorima i označavamo sa $\vec{a}$ i -$\overrightarrow{a}$. Takvi su vektori sila akcije i reakcije o kojima će još biti reči pri definiciji pojma sile.

Matematičke operacije sa vektorskim veličinama razlikuju se od operacija sa skalarima. Vektori se sabiraju tako što se na kraj prvog vektora u vektorskom zbiru nadovezuje početak drugog. Rezultat sabiranja je vektor čiji je početak na početku prvog a kraj na

kraju drugog vektora u vektorskom zbiru. Pri sabiranju više od dva vektora koristi se isti princip nadovezivanja. Rezultantni vektor počinje na početku prvog vektora u zbiru a završava na kraju poslednjeg vektora u zbiru.

Oduzimanje vektora se svodi na sabiranje ako se ima u vidu definicija suprotnog vektora:



Slika 1.1 Sabiranje i oduzimanje vektora

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + \left(-\vec{b}\right). \tag{1.4}$$

Grafički prikaz sabiranja i oduzimanja vektora dat je na slici *1.1*.

Rezultat množenja vektora sklarom je vektor istog pravca i smera čiji je intenzitet pomnožen skalarnom vrednošću. Vektori pre i posle množenja skalarnom veličinom mogu imati različitu prirodu. Primera radi prema II Njutnovom zakonu sila je jednaka proizvodu mase i ubrzanja, što matematički zapisano:

$$\vec{F} = m\vec{a}\,, \tag{1.5}$$

predstavlja množenje vektora skalarnom veličinom pri čemu je rezultat vektor druge prirode (vektorska veličina sa drugom jedinicom).

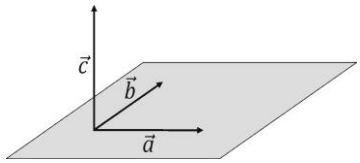
Pored množenja vektora skalarom postoje još i skalarni i vektorski proizvod vektora. Skalarni proizvod se označava tačkom između vektora koji se množe. Skalarni proizvod dva vektora je skalarna veličina jednaka proizvodu intenziteta vektora i kosinusa ugla koji zaklapaju vektori:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \measuredangle\left(\vec{a}, \vec{b}\right). \tag{1.6}$$

Primera radi, rad predstavlja skalarni proizvod sile i pređenog puta. Ukoliko je duž pravolinijskog puta $\vec{s}$ delovala konstantna sila $\vec{F}$ izvršeni rad jednak je:

$$A = \vec{F} \cdot \vec{s}\,. \tag{1.7}$$

Vektorsk proizvod se obeležava oznakom „×” između vektora koji se vektorski množe. Vektorski proizvod dva vektora $\vec{a} \times \vec{b}$ je vektor $\vec{c}$ koji je normalan na ravan u kojoj leže oba vektora vektorskog proizvoda kao što je prikazano na slici *1.2*. Smer vektorskog proizvoda definiše se pravilom koje je poznato kao pravilo desnog zavrtnja ili desne ruke. Prsti desne ruke se orijentišu od prvog vektora u vektorskom proizvodu ka drugom vektoru, i to najkraćim putem. Ispružen palac desne ruke pokazuje pravac vektorskog proizvoda. Intenzitet vektorskog proizvoda jednak je proizvodu intenziteta dva vektora i sinusa ugla koji zaklapaju vektori:



Slika 1.2 Vektorski proizvod

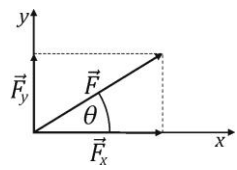
$$|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin \measuredangle(\vec{a}, \vec{b}). \tag{1.8}$$

Primera radi sila koja deluje na naelektrisanu česticu koja se kreće brzinom $\vec{v}$ kroz homogeno magnetno polje indukcije $\vec{B}$ definisana je vektorskim proizvodom:

$$\overrightarrow{F_L} = q\vec{v} \times \overrightarrow{B}, \tag{1.9}$$

gde je q naelektrisanje čestice.

Pri rešavanju pojedinih problema potrebno je umesto datog vektora posmatrati njegove komponente. Postupak određivanja tih komponenata naziva se razlaganje vektora. Razlaganje se svodi na konstrukciju paralelograma čija je dijagonala dati vektor što generalno ima bezbroj rešenja. Stoga se unapred zadaju pravci komponenata. Na slici *1.3* je prikazano razlaganje vektora na komponenta čiji su pravci unapred zadati tako da međusodno zaklapaju ugao od $90°$.



Slika 1.3 Razlaganje vektora

1.2 Sila

Objekti u prirodi međusobno deluju jedni na druge. Usled međusobnog dejstva dolazi do promene u načinu kretanja tela ili pak dolazi do njihove deformacije. Međudejstvo se javlja pri direktnom kontaktu (primer sudar dva tela) ili pak dejstvom na daljinu (kao

pri dejstvu magneta na predmete od gvožđa). Mera uzajamnog delovanja je sila. Sila je vektorska veličina.

Za međudejstvo tela koja se kreću brzinama mnogo manjim od brzine svetlosti i ukoliko su mase tela mnogo veće od masa atoma važe Njutnovi zakoni dinamike.

I Njutnov zakon

Telo zadržava stanje mirovanja ili ravnomernog pravolinijskog kretanja sve dok ga druga tela svojim dejstvom ne primoraju da to stanje promeni. Na ovom mestu treba pomenuti da je masa mera inertnosti kojom se opisuje svojstvo tela da se suprotstavlja promeni kretanja. Na osnovu ove zakonitosti sledi da koliko je rezultujuća sila koja deluje na telo jednaka nuli ($\vec{F} = 0$), telo miruje ($v = 0$) ili se kreće konstantnom brzinom ($v = const$).

II Njutnov zakon

Pod dejstvom rezultujuće sile koja je različita od nule telo se kreće ubrzano. Ubrzanje tela je srazmerno sili koja na njega deluje a obrnuto srazmerno masi tela:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}. \tag{1.10}$$

Pravac i smer ubrzanja se poklapa sa pravcem i smerom rezultujuće sile.

III Njutnov zakon

Međudejstvo je uzajamno, tela međusobno deluju jedno na drugo silama istog intenziteta i pravca a suprotnog smera. Prethodna tvrdnja je poznaka kao princip akcije i reakcije[4] koji se matematički može zapisati kao:

$$\overrightarrow{F_{12}} = -\overrightarrow{F_{21}}, \tag{1.11}$$

sa $\overrightarrow{F_{12}}$ je označena sila kojojm prvo telo deluje na drugo a sa $\overrightarrow{F_{21}}$ sila kojojm drugo telo deluje na prvo[5].

---

[4] Princip akcije i reakcije se lako uočava pri međudejstvu tela približnih masa. Ukoliko je masa jednog tela mnogo veća ovaj princip nije uočljiv jer je ubrzanje, koje to telo ima usled međudejstva sa telom mnogo manje mase, zanemarljivo malo.

[5] Pri rešavanju konkretnih problema, tj. pri proučavanju uzajamnog delovanja, najčešće se posmatraju promene kod jednog tela koje nam je od interesa. Tada se kaže da je na posmatrano telo delovala sila ne naglašavajući drugo telo koje je uzvor sile i ne vodeći računa o principu akcije i reakcije.

Gravitaciona sila

Iz iskustva znamo da bačen predmet uvek pada na Zemlju. Uzrok ovome je destvo gravitacione sile kojom Zemlja deluje na druga tela. Gravitacionim silama međusobno deluju sva tela u prirodi bez obzira na njihovu veličinu. Intenzitet gravitacione sile između dva tela svernog oblika kao i između tela čije su dimenzije zamenarljive u odnosu na njihovo međusobno rastojanje, te se tela mogu smatrati materijalnim tačkama, dat je izrazom:[6]

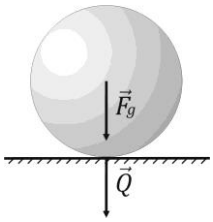
$$F_g = \gamma \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}, \tag{1.12}$$

gde su m_1 i m_2 mase tela, r rastojanje između njihovih centara masa, a $\gamma = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\mathrm{Nm}^2}{\mathrm{kg}^2}$ univerzalna gravitaciona konstanta. Intenziteg gravitacione sile ne zavisi od vrste sredine u kojoj se nalaze tela. Gravitaciona sila je uvek privlačna i ne postoji ništa što bi sprečilo njeno delovanje.

Gtavitaciona sila kojom Zemlja deluje na druga tela naziva se sila Zemljine teže. Pod pretpostavkom da je Zemlja sfernog oblika intenzitet gravitaciona sile koja deluje na telo mase m na površini Zemlje dat je izrazom:

$$F_g = \gamma \frac{m \cdot M_z}{{R_z}^2} = mg, \tag{1.13}$$

gde je M_z masa Zemlje, R_z njen srednji poluprečnik, a $g = \gamma \frac{M_z}{{R_z}^2} = 9{,}81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ vrednost ubrzanja Zemljine teže na površini Zemlje. Zbor različite nadmorske visine kao i zbog činjenice da Zemljin odlik odstupa od idealne sfere vrednost ubrzanja Zemljine teže (gravitacionog ubrzanja) nije identična u svim tačkama na površini Zemlje. Prethodno data brojna vrednost daje zadovoljavajuće rezultate ukoliko se ne zahteva velika tačnost u proračunu.



Slika 1.4 Težina tela i sila Zemljine teže

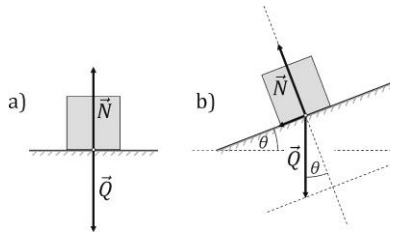
[6] Za tela drugog oblika koja se ne mogu smatrati tačkastim izraz za intenzitet gravitacione sile nema tako jednostavan oblik. U ovim slučajevima se intenzitet gravitacione sile dobija vektorskim zbrajanjem sila uzajamnjog delovanja svih tačkastih elemenata jednog tela sa svim tačkastim elementima drugog tela.

Težina tela

Pod težinom tela podrazumeva se sila kojom ono deluje na horizontalnu podlogu na koju je postavljeno ili pak zateže vertikalan konac o kog je okačeno (slika *1.4*). Drugim rečima težina je sila kojom telo deluje na merni instrument. Za težinu se uobičajeno koristi oznaka $\vec{Q}$. Težina je prvenstveno posledica dejstva gravitacione sile ali treba imati na umu da pored ove sile u realnim uslovima merenja deluju i druge sile te strogo govoreći težina nije jednaka gravitacionoj sili. Razlika je posledica nekoliko činjenica od kojih su najbitnije: dejstvo sile potiska vazduha ili nekog drugog fluida koji okružuje telo, rotacija Zemlje oko sopstvene ose i ubrzano kretanje podloge (mernog instrumenta) na kojoj se telo nalazi. Dejstvo sile potiska ima za posledicu smanjenje težine u odnosu na gravitacionu silu. Primera radi za tela koja se nalaze u vazduhu i koja su napravljena od materijala čija je gustina veća od $60\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$ ova razlika je manja od $2\ \%$, dok za tela napravljena od materijala gustine veće od $1300\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$ ova razlika postaje manja od $0{,}1\ \%$. Stoga se uticaj sile potiska na težinu tela u vazduhu u većini slučajeva može zanemariti. Ukoliko se tela nalaze u tečnosti uticaj sile potiska nije zanemarljiv te se i težina tela u tečnostima naziva prividnom težinom.

Usled rotacije Zemlje oko sopstvene ose na tela na njenoj površini deluje inercijalna centrifugalna sila koja ima za posledicu smanjenje težine tela idući od polova ka ekvatoru. Težina tela na ekvatoru je $\approx\ 3\%$ manja od težine na polovima te se i ovaj faktor u većini konkretnih problema zanemaruje.

Osobe koje nisu vezane za sedišta lebde u vazduhu u avionu koji slobodno pada. Isto se dešava sa astronautima u veštačkim Zemljinim satelitima. U oba slučaja se govori o bestežinskom stanju. Navedeni primeri demonstriraju uticaj ubrzanog kretanja: ukoliko se merni uređaj i telo kreću ubrzano u vertikalnom pravcu težina zavisi od vrednosti ubrzanja i od smera kretanja. Ukoliko se telo i merni uređaj kreću ubrzano vertikalno nagore težina je veća, a ukoliko se kreću vertikalno nadole težina je manja u odnosu na težinu u slučaju da telo i merni uređaj miruju u odnosu na Zemljinu površinu.



Slika 1.5 Normalna sila

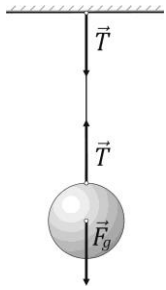
Normalna sila

Na telo koje pritiska neku površinu sama površina deluje silom koja je normalna sa nju

(princip akcije i reakcije). Ta sila se naziva normalnom silom i obeležava sa $\vec{N}$. Ako se telo nalazi na horizontalnoj podlozi intenzitet normalne sile jednak je intenzitetu težine tela. Pošto je težina tela u većini slučajeva aproksimativno jednaka gravitacionoj sili često se kaže da je normalna sila po intenzitetu jednaka gravitacionoj sili (sili Zemljine teže). Ukoliko se telo nalazi na podlozi koja nije horizontalna, intenzitet normalne sile jednak je vrednosti projekcije težine na pravac normalan na površinu kao što je prikazano na slici *1.5*.

Sila zatezanja

Zategnut konopac deluje na tela koja ga zatežu silom koja se naziva sila zatezanja i obeležava sa $\vec{T}$. Sila zatezanja deluje duž konopca u smeru od tela pri čemu je napadna tačka na mestu vezivanja kao što je prikazano na slici *1.6.* Intenzitet sile zatezanja kojom vertikalni konopac deluje na telo približno je jednak težini tela ukoliko je masa konopca zanemarljiva[7] u odnosu na masu tela.



Slika 1.6 Sila zatezanja

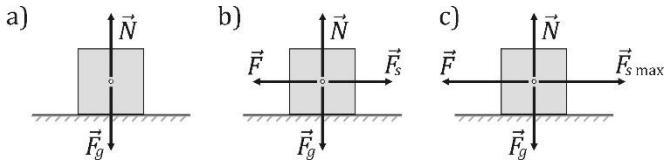
Sila trenja

Sva tela koja se kreću po nekoj podlozi, koja su nakon početnog impulsa prepuštena sama sebi, zaustavljaju se nakon izvesnog vremena. Do zaustavljanja dolazi usled delovanja sile trenja koja deluje između tela koje se kreće i tela sa kojima je ono u dodiru. Ova sila deluje u tangentnoj ravni dodira pri čemu je smer dejstva sile suprotan od smera kretanja tela. Zahvaljujuću sili trenja hodamo, vozimo rolere i bicikl, itd. Pored spoljašnjeg trenja koje se javlja pri dodiru čvrstih tela postoji i unutrašnje trenje, tzv. viskoznost, koje postoji između slojeva fluida pri proticanju kao i pri kretanju čvrstog tela kroz fluid. Spoljašnje trenje se javlja u više oblika: trenje mirovanja, trenje klizanja i trenje kotrljanja.

U osnovi se sila trenja svodi na međumolekulske (međuatomske) interakcije između molekula (atoma) na površini tela koja su u međusobnom konkaktu, odnosno atoma

[7] Aproksimacija u kojoj se masa konopca zanemaruje podrazumeva da za njegovo ubrzano kretanje nije potrebna sila kao i da je sila zatezanja ista na oba kraja konopca. U većini konkretnih problema se zanemaruje istezanje konopca tj. on se smatra neistegljivim. Na taj način se dobija da su brzine i ubrzanja tela koja se nalaze na suprotnim krajevima zategnutog konopca u svakom trenutnu jednaki.

dva susedna sloja fluida. No, priroda sile trenja je veoma složena i ne postoji opšti izraz koji bi dao zadovoljavajuće rezultate u svim slučajemima. U praksi se koriste emirijski izrazi.



Slika 1.7 Sila trenja mirovanja

Posmatrajmo telo na horizontalnoj podlozi, prikazano na slici *1.7* a). Na telo deluju dve[8] sile: sila Zemljine teže i normalna sila. Sila trenja jednaka je nuli sve dok nema pokušaja da telo pokrenemo (slika 1.7 a). Na slici *1.7* b) je prikazan slučaj kad na pomenuto telo delujemo silom $\vec{F}$ u horizontalnoj ravni koja nije dovoljna za pokretanje tela. Iako na telo delujemo silom ono se ne pomera jer smeru suprotnom od smera dejstva sile kojom pokušavamo pokrenuti telo deluje sila trenja $\vec{F_s}$. Ova sila se naziva stila trenja mirovanja, i ustanovljeno je da raste sa porastom sile $\vec{F}$ (slike *1.7* b) i *1.7* c)) sve do trenutka kad dolazi do pokretanja tela. Neposredno pred pokretanje intenzitet sile trenja mirovanja dostiže svoju maksimalnu vrednost F_{smax} za koju je eksperimentalno utvrđeno da praktično ne zavisi od veličine dodirne površine i da je proporcionalna normalnoj sili:

$$F_{smax} = \mu_s N \,. \qquad (1.14)$$

Koeficijent proporcionalnosti u prethodnom izrazu, označen sa μ_s, predstavlja koeficijent statičkog trenja koji je bezdimenziona veličina[9]. Koeficijent statičkog trenja zavisi od vrste materijala od kog su tela napravljena, stepena uglačanosti i čistoće dodirnih površina, temperature itd. Primera radi prislonimo dva šmirg papira jednake granulacije hrapavima stranama jedan prema drugom. Lakše je pokrenuti papire, da klize jedan preko drugog, ukoliko je njihova granulacija manja to jest stepen uglačanosti veći. Sa druge strane, u sličnom eksperimentu, teže je pokrenuti dve glatka staklene

[8] Sila potiska vazduha je zanemarena.

[9] Koeficijent statičkog trenja je neimenovan broj, nema jedinicu, pošto je definisan količnikom sile trenja mirovanja i normalne sile.

pločice u odnosu na pločice koje su peskirane. Ovi primeri ukazuju da zavisnost koeficijenta statičkog trenja od stepena uglačanosti nije jednoznačna. U tabeli *1.3* date su približne vrednosti za koeficijent statičkog trenja za različite materijale u kontaktu.

Tabela 1.3 Približne vrednosti koeficijenta statičkog trenja i koeficijenta trenja klizanja

materijali u kontaktu	koeficijent statičkog trenja	koeficijent trenja klizanja
aluminijum- aluminijum	1,9	1,4
staklo-staklo	0,94	0,35
guma- suv beton	1,2	0,85
guma- vlažan beton	0,8	0,6
čelik-čelik	0,75	0,48
čelik-led	0,1	0,05
drvo-drvo	0,58	0,4

Na telo koje klizi po podlozi deluje sila trenja klizanja. Eksperimentalno je ustanovljeno da je sila trenja klizanja uvek manja od maksimalne sile trenja mirovanja[10]. Sila trenja klizanja proporcionalna je normalnoj sili:

$$F_k = \mu_k N \ , \qquad (1.15)$$

gde je μ_k koeficijent trenja klizanja koji je manji od koeficijenta trenja mirovanja pod istim uslovima ($\mu_k < \mu_s$). Koeficijent trenja klizanja prvenstveno zavisi od vrste materijala od kojih su tela napravljena kao i od stepena uglačanosti podloge. Eksperimentalno je ustanovljeno da koeficijent trenja klizanja neznatno varira sa

[10] Svi smo iskusili da je za pokretanje nameštaja potrebno delovati većom silom nego kasnije kad je nameštaj već počeo da se pomera.

promenom relativne brzine tela u odnosu na podlogu. Pri brzinama od nekoliko metara u sekundi može se uzeti da je koeficijent trenja klizanja približno konstantan. U tabeli *1.3* date su približne vrednosti za koeficijent trenja klizanja za različite materijale u kontaktu. Vrednosti date u tabeli odnose se na slučaj suvog trenja bez sredstva za podmazivanje

Na telo cilindričnog ili sfernog oblika koje se kotrlja po podlozi deluje sila trenja kotrljanja. Eksperimentalno je ustanovljeno da je, za isto telo pri istim uslovima, trenje pri kotrljanju manje od trenja pri klizanju. Intenzitet sile trenja kotrljanja srazmeran je normalnoj sili a obrnuto srazmeran poluprečniku cilindra (sfere):

$$F_K = \mu_K \frac{N}{r}. \tag{1.16}$$

1.3 Pitanja i zadaci za samostalan rad

1. Navesti jednu skalarnu i jednu vektorsku fizičku veličinu.
2. Da li brzina spada u osnovne fizičke veličine SI sistema i koja je njena jedinica u ovom sistemu?
3. Koja fizička veličina je mera interakcije između tela?
4. Izračunati težinu tela mase 850 g na površini Zemlje.
5. Kolikom normalnom silom deluje horizontalna podloga na telo težine 120 N koje se nalazi na njoj? Kakav je smer delovanja ove sile?
6. Kako se odnose sila trenja klizanja i maksimalna sila trenja mirovanja za određeno telo na određenoj podlozi?
7. Koja je jedinica za koeficijent statičkog trenja u SI sistemu?

2 MEHANIKA FLUIDA

Postoje tri agregatna stanja[11] supstance sa kojima se srećemo u svakodnevnom životu: čvrsto, tečno i gasovito. Supstanca u čvrstom agregatnom stanju ima određen oblik i zapreminu, dok gasovi zauzimaju oblik i zapreminu suda u kom se nalaze. Tečnosti su po nekim osobinama slične gasovima, a po nekim čvrstim telima. Tečnosti imaju određenu zapreminu, koja se može neznatno menjati, ali poprimaju oblik suda u kom se nalaze. Unutrašnja građa tečnosti slična je unutrašnjoj građi čvrstog agregatnog stanja u odnosu na koju ima veći stepen neuređenosti. Molekuli tečnosti imaju veću slobodu kretanja u odnosu na čvrsto agregatno stanje ali mnogo manju nego u gasovitom. Pošto su fizičke osobine tečnosti identične u svim pravcima za njih kažemo da su izotropne.

2.1 Gustina

Gustina homogenog tela se definiše kao količnik mase i zapremine tela, drugim rečima to je masa jedinice zapremine:

$$\rho = \frac{m}{V}\,. \tag{2.1}$$

Jedinica za gustinu u Internacionalnom Sistemu Jedinica (SI sistem) je $\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$. Gustina zavisi od vrste materijala i od temperature. Sa porastom temperature gustina većine materijala opada, jer se sa porastom temperature materijali šire (povećavaju zapreminu). Kod većine materijala je gustina u čvrstom agregatnom stanju najveća, u tečnom znatno manja a najmanja u gasovitom agregatnom stanju. Voda pokazuje odstupanje od ponašanja većine materijala i ova pojava je poznata kao anomalija vode.

[11] Plazma i Boze-Ajnštajnov kondenzat se takođe smatraju agregatnim stanjima supstance. Na visokim temperaturama su atomi razloženi na elektrone i jone i to stanje predstavlja plazmu. Zvezde su u stanju plazme te se može reći da je ona najrasprostranjenije agregatno stanje u univerzumu. Na temperaturama bliskim apsolutnoj nuli atomi supstance se ne ponašaju kao individualne čestice i to stanje je poznato kao Boze-Ajnštajnov kondenzat.

Led ima veću specifičnu zapreminu[12] od vode u tečnom agregatnom stanju, odnosno manju gustinu, te stoga pluta po vodi. Kod vode u tečnom agregatnom stanju gustina raste sa porastom temperature u uzanom temperaturskom intervalu od $0\ ℃$ do $4\ ℃$ a zatim opada kao kod većine materijala. Ovakvo ponašanje vode omogućilo je opstanak živog sveta na Zemlji. U tabeli *2.1* su date vrednosti gustine vode na različitim temparaturama. Uočava se da je promena gustine vode sa promenom temperature relativno mala. Većina proračuna daje zadovoljavajuće rezultate ako se za gustinu vode koristi brojna vrednost od $10^3\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$.

Tabela 2.1 Gustina vode na različitim temperaturama

t [°C]	$\rho\ \left[\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}\right]$	t [°C]	$\rho\ \left[\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}\right]$
0	999,87	12	999,52
2	999,97	14	999,27
4	1000,00	16	998,97
8	999,88	18	998,66
10	999,73	20	998,23

2.2 Pritisak

Na telo u čvrstom agregatnom stanju možemo delovati silom i to preko neke površine ili pak u jednoj tački. Na fluide (tečnosti i gasova) se ne može delovati silom u jednoj tački već samo preko određene površine. Sila koja deluje po jedinici površine predstavlja pritisak:

$$p = \frac{F}{S}. \tag{2.2}$$

[12] Specifična zapremina je zapremina jednog kilograma materijala (zapremina jedinice mase).

Jedinica za pritisak u SI sistemu je paskal (Pa). Kod tečnosti je pritisak isti u horizontalnoj ravni ali raste sa dubinom. Pritisak na određenoj dubini tečnosti predstavlja zbir atmosferskog pritiska p_0 i pritiska koji je posledica težine tečnosti iznad posmatrane dubine:

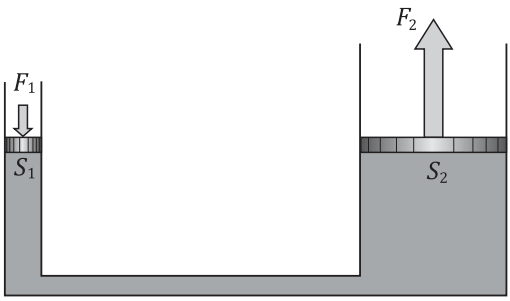
$$p = p_0 + \rho g h \,. \tag{2.3}$$

Drugi član u prethodnom izrazu naziva se hidrostatički pritisak.

Kako se pritisak prenosi kroz tečnosti? Da li samo u pravcu delovanja sile? Francuski matematičar i fizičar Blez Paskal je u XVII veku dao odgovor na ovo pitanje: pritisak primenjen na tečnost u zatvorenom sudu prenosi se jednako u svim pravcima kroz tečnost kao i na same zidove suda. Na ovom principu radi hidraulična dizalica koja predstavlja zatvoren sistem unutar kog je tečnost u kom postoje dva pokretna klipa različitih površina (slika *2.1*). Ako na površinu manjeg klipa S_1 delujemo silom F_1 , hidraulični (spoljašnji) pritisak kojim delujemo na tečnost je $p = \frac{F_1}{S_1}$. Taj pritisak se prenosi jednako u svim pravcima, deluje na zidove suda kao i na pokretni klip veće površine S_2. Intenzitet sile kojom tečnost deluje na ovaj klip iznosi:

$$F_2 = pS_2 = F_1 \frac{S_2}{S_1}\,, \tag{2.4}$$

i veći je onoliko puta koliki je odnos površine dva klipa. Drugim rečima, hidrauličnom dizalicom moguće je podići telo delujući silom koja je manja od njegove težine.



Slika 2.1 Hidraulična dizalica

2.3 Sila potiska

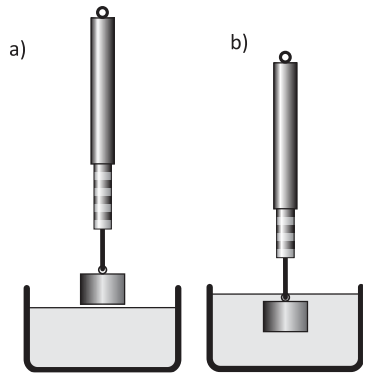
Sila potiska[13] predstavlja silu kojom fluid deluje na telo koje je delimično ili potpuno potopljeno u njega. Ova sila je po intenzitetu jednaka težini telom istisnute tečnosti i deluje vertikalno naviše. Izraz za silu potiska je oblika:

$$F_p = V\rho_t g \ , \qquad (2.5)$$

gde je V zapremina telom istisnute tečnosti, ρ_t gustina tečnosti a $g = 9{,}81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ gravitaciono ubrzanje na površini Zemlje. Sila potiska dakle zavisi od vrste tečnosti, preciznije od njene gustine, i od zapremine koju zaronjeni deo tela zauzima u tečnosti. Usled delovanja sile potiska telo gubi od svoje težine Q onoliko kolika je težina njime istisnute tečnosti odnosno sila potiska:

$$Q' = Q - V\rho_t g \ . \qquad (2.6)$$

Težina tela u tečnosti se naziva prividnom težinom. Prethodna tvrdnja je slikovito prikazana na slici *2.2*. Upoređujući pokazivanje dinamometara na slikama *2.2* a) i *2.2* b) uočava se da je težina tela potopljenog u tečnost Q' (prividna težina) manja u odnosu na težinu tela u vazduhu.



Slika 2.2 Demonstracija sile potiska

U zavisnosti od odnosa gustine tela i tečnosti telo može biti delimično ili potpuno zaronjeno u tečnost a da pri tom sila potiska bude jednaka sili Zemljine teže. Ukoliko je gustina tela ρ manja od gustine tečnosti ρ_t $(\rho < \rho_t)$ telo je delimično potopljeno odnosno pluta. Ako je $\rho = \rho_t$ telo je potpuno

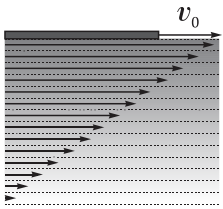
[13] Dejstvo sile potiska je otkrio najveći matematičar i fizičar antičkog sveta Arhimed. Do većine otkrića Arhimed je došao rešavajući konkretne probleme. U ovom slučaju trebalo je utvrditi da li je kruna kralja Hijerona napravljena od samog zlata ili su ga zlatari prevarili dodavši i srebro. Prema priči, Arhimed je do rešenja došao tokom kupanja osetivši se „lakšim" kad se potopio u vodu. Sav oduševljen istrčao je na ulicu vičući „EUREKA! EUREKA! " („PRONAŠAO SAM! PRONAŠAO SAM!"). Arhimed je naime došao na ideju da krunu i istu masu zlata okači o terazije i zaroni u tečnost. Potapanjem je ravnoteža terazija bila narušena pošto su predmeti bili različite zapremine. Zapremina krune je bila veća a samim tim i sila potiska koja je delovala na nju. Arhimed je utvrdio da je zlatar prevario kralja.

potopljeno u tečnost i lebdi u njoj. Ukoliko je $\rho > \rho_t$ telo tone, pošto sila potiska ne može da kompenzuje silu Zemljine teže ni kada je telo potpuno potopljeno.

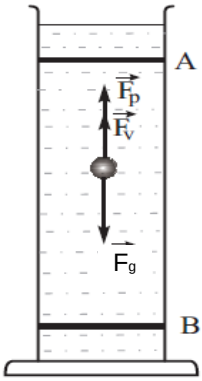
2.4 Viskoznost

Viskoznost je osobina koju poseduju svi realni fluidi (tečnosti i gasovi). To je unutrašnje trenje između slojeva fluida koje se javlja pri proticanju zbog čega različiti slojevi imaju različite brzine. Isticanje tečnosti iz boce slikovito i jednostavno demonstrira postojanje unutrašnjeg trenja. Iz iskustva je poznato da različite tečnosti ističu različitim brzinama kao i da tečnost neposredno uz zidove boce uvek poslednja ističe.

Posmatrajmo ploču koja se kreće po površini tečnosti konstantnom brzinom $\overrightarrow{v_0}$, prikazanu na slici *2.4*. Ustanovljeno je da se sloj tečnosti koji neposredno dodiruje ploču kreće zajedno sa pločom brzinom $\overrightarrow{v_0}$. I slojevi tečnosti ispod ploče se kreću, ali različitim brzinama. Sa porastom dubine brzina slojeva tečnosti opada što je objašnjeno interakcijom između slojeva unutar tečnosti. Ukoliko molekuli ne prelaze iz jednog sloja u drugi, kretanje tj. tok fluida se naziva laminarnim i tada je sila viskoznog trenja proporcionalna brzini kretanja. Postoji još i turbulentan tok kod kog dolazi do mešanja slojeva i to se dešava pri većim brzinama toka fluida. Tada je sila viskoznog trenja proporcionalna ili kvadratu ili trećem stepenu brzine.



Slika 2.4 Dijagram brzina



Slika 2.3 Stoksov metod

Unutrašnje trenje se opisuje koeficijentom viskoznosti koji zavisi od vrste tečnosti i od temperature. Sa porastom temperature koeficijent viskoznosti tečnosti opada. Primera radi, koeficijent viskoznosti glicerina na temperaturi $100\ ℃$ je oko 1000 puta manji nego na $0\ ℃$. Jedinica za koeficijent viskoznosti u SI sistemu je paskalsekunda ($\mathrm{Pa\ s}$). Viskoznost tečnosti se objašnjava kratkodometnim kohezionim silama koje deluju između molekula. Pod dejstvom ovih međumolekulskih privlačnih sila, molekuli tečnosti iz bržeg sloja „vuku” molekule iz sporijeg sloja. Što su

međumolekulske sile jače veći je i koeficijent viskoznosti.

Postoje različite metode i uređaji za merenje viskoznosti, jedna od njih je Stoksova metoda. Stoks je pokazao da za telo sfernog oblika koje se kreće kroz fluid brzinom $\boldsymbol{v}$ sila otpora usled viskoznog trenja iznosi:

$$F_v = 6\pi\eta r\boldsymbol{v}\ , \tag{2.7}$$

gde je r poluprečnik kuglice, a η koeficijent viskoznosti.

Kada se kuglica pusti da slobodno pada kroz viskozni fluid (slika *2.3*), na nju deluju tri sile. Sila Zemljine teže $F_g = mg$=$\frac{4}{3}r^3\pi\rho_k g$ deluje vertikalno naniže, dok sila trenja $F_v = 6\pi\eta r\boldsymbol{v}$ i sila potiska $F_p = \frac{4}{3}r^3\pi\rho_t g$ deluju u suprotnom smeru. Ovde je r poluprečnik, ρ_k gustina kuglice, dok je ρ_t gustina tečnosti. Kretanje kuglice kroz fluid je u početku ubrzano, a kako sa porastom njene brzine raste i sila trenja F_v, u jednom trenutku dolazi do izjednačavanja sila koje deluju naviše i naniže. Kretanje kuglice tada postaje ravnomerno pravolinijsko ($\boldsymbol{v} = const$) i važi:

$$F_g = F_v + F_p\ , \tag{2.8}$$

odnosno:

$$\frac{4}{3}r^3\pi\rho_k g = 6\pi\eta r\boldsymbol{v} + \frac{4}{3}r^3\pi\rho_t g\ . \tag{2.9}$$

Nakon sređivanja dobija se da je:

$$\eta = \frac{2}{9}\frac{(\rho_k - \rho_t)}{\boldsymbol{v}}gr^2\ . \tag{2.10}$$

Kako je brzina kod ravnomernog pravolinijskog kretanja $\boldsymbol{v} = \frac{L}{\tau}$, gde je L put koji kuglica pređe tokom vremenskog intervala τ, prethodni izraz se može napisati u obliku:

$$\eta = \frac{2}{9}\frac{(\rho_k - \rho_t)\tau}{L}gr^2\ . \tag{2.11}$$

Ukoliko su poznati gustina tečnosti (ρ_t), gustina materijala od kog je napravljena kuglica (ρ_k) kao i njen poluprečnik (r) potrebno je izmeriti pređeni put i vreme kretanja kuglice da bi se pomoću prethodnog izraza odredio koeficijent viskoznosti.

U praksi se put i vreme mere pošto kuglica pređe nekoliko centimetara u tečnosti. Na ovaj način se obezbeđuje da merenje počne po uspostavljanju ravnomernog kretanja.

2.5 Pitanja i zadaci za samostalan rad

3. Posuda zapremine $750\ \mathrm{ml}$ je do vrha napunjena bojom tako da masa posude i boje iznosi $1{,}5\ \mathrm{kg}$. Izračunati gustinu boje ako je poznato da masa same posude iznosi $250\ \mathrm{g}$.
4. Koliko iznosi gustina smeše dobijene mešanjem dve tečnosti u istom zapreminskom odnosu? Pomešano je $800\ \mathrm{cm}^3$ boje gustine $1245\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$ sa bojom čija je gustina $1{,}29\ \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$.

3. Na kojoj dubini u vodi hidrostatički pritisak iznosi $124500\ \mathrm{Pa}$?

4. Kolika sila deluje na dno bazena, dimenzija $25\mathrm{m} \times 50\mathrm{m} \times 4\mathrm{m}$, koji je do vrha napunjen vodom?

5. Da li telo čija je gustina jednaka gustini tečnosti pliva, tone ili lebdi u njoj?

6. Kuglica poluprečnika $3\ \mathrm{mm}$ kreće se konstantnom brzinom $1{,}2\ \frac{\mathrm{cm}}{s}$ kroz tečnost koeficijenta viskoznosti $0{,}07\ \mathrm{Pas}$. Odrediti silu viskoznog trenja koja deluje na kuglicu.

7. Kako se koeficijent viskoznosti tečnosti menja sa porastom temperature?

8. Odrediti silu potiska koja deluje na telo oblika kocke koje je do polovine zaronjeno u tečnost gustine $1110\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$. Stranica kocke iznosi $125\ \mathrm{mm}$.

3 TERMODINAMIKA

Termodinamika se kao nauka razvila iz potrebe da se teorijski objasni pretvaranje energije zagrejane pare u mehanički rad. Pored toga što proučava transformaciju toplotne energije u druge vidove energije, ona utvrđuje uticaj spoljašnjih uslova na procese u kojima se odvija pomenuta transformacije. Termodinamika se bavi i unutrašnjom energijom tela kao izvorom toplote, prenošenjem toplote sa jednog tela na drugo, faznim prelazima itd. Jedna od osnovnih termodinamičkih veličina je temperatura koju većina ljudi opisuje kao merilo zagrejanosti tela. Da li je nešto toplo ili hladno u svakodnevnom životu često određujemo dodirom. Naše čulo dodira nije savršeno i u njega se ne možemo pouzdati čak ni pri proceni da li su dva tela jednako zagrejana. Primera radi, ako zimi dodirnete metalni oluk i koru drveta učiniće vam se da je metal hladniji. Ova zabluda je posledica činjenice da metal brže odvodi toplotu iz naših ruku. Tačno je to da su oba tela na istoj temperaturi.

3.1 Temperatura

Temperatura, jedna od osnovnih termodinamičkih veličina[14], predstavlja meru unutrašnje energije tela. Unutrašnja energija tela predstavlja zbir kinetičkih i potencijalnih energija molekula, atoma i drugih mikroskopskih čestica (elektrona, nukleona itd.) od kojih je telo izdrađeno. Telo veće unutrašnje energije nalazi se na višoj temperaturi. Temperatura kojoj odgovara minimalna unutrašnja energija proglašena je apsolutnom nulom ili nulom Kelvinove skale[15]. Na temperaturama bliskim apsolutnoj nuli dešavaju se zanimljive pojave, npr. superprovodljivost (kretanje elektrona u provodnicima bez električnog otpora), superfluidnost (proticanje fluida bez unutrašnjeg otpora – viskoznosti) ili već spomenuta Boze-Ajnštajnova kondenzacija.

---

[14] Jedna od osnovnih jedinica u SI sistemu je kelvin (K) - jedinica za temperaturu.

[15] Najniža vrednost temperature od $10^{-4}\,\mathrm{K}$ dostignuta je pri ispitivanju ponašanja gasova na niskim temperaturama.

Merni instrumenti za merenje temperature nazivaju se termometri. Jedan od osnovnih principa na kojima počiva termodinamika je tzv. nulti princip koji odražava činjenicu da će temperature dva tela biti jednake ukoliko su tela u neposrednom kontaktu dovoljno dugo. Stoga se merenje temperature može izvršiti ukoliko se termometar dovede u neposredni kontakt sa telom čiju temperaturu želimo izmeriti. Promene fizičkih osobina tela pri zagrevanju, odnosno hlađenju, mogu poslužiti za merenje temperature. Sa porastom temperature se zapremina tela generalno povećava, dolazi do topljenja tela u čvrstom agregatnom stanju, raste električni otpor metala, menja se spektar emitovanih elektromagnetnih talasa, itd. Shodno tome, postoje različite vrste termometara: gasni termometri, termometri sa tečnošću[16], bimetalni termometri, termistori (otpornički termometri), infracrveni termometri itd. Za kalibraciju termometara je potrebno izabrati dve referentne tačke, npr. topljenje leda i ključanje vode. Ovakav odabir referentnih tačaka je veoma jednostavan ali se pokazao nepouzdanim iz razloga što obe tačke zavise od spoljašnjeg pritiska što je posebno izraženo kod ključanja vode. Dogovorom je za referentnu tačku koja služi za određivanje nule uzeta trojna tačka vode. Naime, sva tri agregatna stanja vode su u ravnoteži samo pri tačno određenom pritisku koji iznosi $611{,}7\ \mathrm{Pa}$ i to na samo jednoj određenoj temperaturi. Ta temperatura je proglašena za $273{,}16\ \mathrm{K}$.

Tri najpoznatije temperaturske skale su Celzijusova, Kelvinova i Farenhajtova. U svakodnevnom životu najviše se koristi Celzijusova skala na kojoj su temperature zamrzavanja i ključanja vode pri normalnom pritisku od $101325\ \mathrm{Pa}$ proglašene za $0\ ^\circ\mathrm{C}$ i $100\ ^\circ\mathrm{C}$, dok se Kelvinova sklala najviše koristi u nauci. Uobičajeno je da se za temperaturu koristi oznaka t ukoliko se izražava u stepenima Celzijusa a T ukoliko je data u Kelvinima. Temperaturu izraženu u Kelvinima možemo pretvoriti u stepene Celzijusa na jednostavan način koristeći relaciju:

$$t\,[^\circ\mathrm{C}] = T[\mathrm{K}] - 273{,}15\,. \tag{3.1}$$

Treba napomenuti da je promena temperature izražena u ove dve skale jednaka, iako početne i krajnje brojne vrednosti temperature nisu:

$$\Delta t = \Delta T\,. \tag{3.2}$$

[16] Donedavno su najčešće korišteni termometri sa živom. Danas se umesto žive koriste druge netoksične tečnosti. Tečnost se nalazi u staklenom balončiću koji se završava dugom uskom cevi. Povećanje temperature dovodi do širenja tečnosti koja se penje uz staklenu cev.

3.2 Količina toplote i toplotni kapacitet

Temperatura mleka koje iznesete iz frižidera i ostavite na stolu dovoljno dugo postepeno raste sve dok ne dostigne temperaturu na kojoj se nalaze okolni predmeti, odnosno sobnu temperaturu. Slično se dešava sa šoljom vrućeg čaja, s tom razlikom što temperatura čaja opada. Promena temperature je u oba slučaja posledica razmene (prenosa) unutrašnje energije između tela i njegove okoline. Pri hlađenju se unutrašnja energija tela smanjuje (temperatura opada), dok je pri zagrevanju obrnuto. Razmenjena energija naziva se količinom toplote i najčešće se označava sa Q. Tela mogu da gube (oslobađaju) količinu toplote ili da je primaju (apsorbuju). Jedinica za količinu toplote u SI sistemu je naravno jedinica za energiju, tj. džul (J). Na ovom mestu treba naglasiti da se pojmovi temperatura i toplota u svakodnevnom govoru brkaju. Termin toplota se često koristi kada se misli na temperaturu, što je pogrešno.

Odnos dovedene (emitovane) količine toplote Q i nastale promene temperature Δt predstavlja karakteristiku tela koja je nazvana toplotni kapacitet:

$$C = \frac{Q}{\Delta t}. \tag{3.3}$$

Ovako definisan toplotni kapacitet predstavlja količinu toplote koju je potrebno dovesti telu da bi mu se temperatura povisila za $1\,°\mathrm{C}$ (1 K). Jedinica za toplotni kapacitet u SI sistemu je $\frac{\mathrm{J}}{°\mathrm{C}}$ ($\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}}$). Ispitujući toplotne kapacitete tela različitih masa napravljenih od istog materijala, ustanovljeno je da se deljenjem toplotnog kapaciteta masom tela dobija vrednost koja je karakteristična za materijal. Ova veličina je nazvana specifični toplotni kapacitet i predstavlja količinu toplote koja jednom kilogramu posmatrane supstance promeni temperaturu za $1\,°\mathrm{C}$ (1 K). Drugim rečima, specifični toplotni kapacitet predstavlja toplotni kapacitet obračunat po jedinici mase i definisan je relacijom:

$$c = \frac{C}{m}. \tag{3.4}$$

Jedinica za specifični toplotni kapacitet u Si sistemu je $\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg\,K}}$. Specifični toplotni kapacitet je kao što je pomenuto karakteristika materijala. Toplotni kapacitet tela pak zavisi i od njegove mase i od materijala od kog je napravljeno. Ne ulazeći u detalje treba napomenuti da vrednosti specifičnog toplotnog kapaciteta materijala u čvrstom i

tečnom agregatnom stanju zavise i od temperature, dok za materijale u gasovitom agregatnom stanju zavise i od toga da li se proces prenošenja toplote odvijao pri konstantnom pritisku ili pri konstantnoj zapremini.

Tabela 3.1 Specifični toplotni kapacitet

materijal	$c\ \left[\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg\ K}}\right]$
bakar	385
papir	1340
voda	4185
pesak	835
etanol	2410
parafinsko ulje	2130

U tabeli *3.1* su date vrednosti specifičnog toplotnog kapaciteta za neke materijale na temperaturi od ≈ 300 K. Uočava se da najveću vrednost u tabeli *3.1* ima voda[17], svi ostali materijali imaju znatno manje vrednosti specifičnog toplotnog kapaciteta. Zbog velikog specifičnog toplotnog kapaciteta voda može da apsorbuje (oslobađa) veliku količinu toplote a da joj se pri tom temperatura ne promeni značajno. Stoga je voda životna sredina sa znatno manjim temperaturskim fluktuacijama u poređenju sa vazduhom i zemljištem. Ova osobina vode takođe sprečava brzu i veliku promenu telesne[18] temperature životinja pri nagloj i velikoj promeni temperature vazduha.

Kada se tela različitih temperatura dovedu u direktan kontakt između njih dolazi do razmene količine toplote. Ovaj proces prestaje kada se temperature tela izjednače, odnosno kada dođe do uspostavljanja termodinamičke ravnoteže. Posmatrajmo sistem,

[17] Od svih materijala u tečnom i čvrstom agregatnom stanju najveću vrednost specifičnog toplotnog kapaciteta ima tečni amonijak, zatim sledi voda.
[18] U telu životinja, voda je najzastupljenija supstanca.

koji čine dva tela početnih temperatura t_1 i t_2 $(t_1 < t_2)$, koji je dobro termički izolovan od okoline te se razmena toplotne energije tela sa okolinom može zanemariti. Količina toplote koju telo početne temperature t_2 otpušta hladeći se do temperature termodinamičke ravnoteže t_r predaje se drugom telu koje se na račun ove primljene količine toplote zagreva od t_1 do t_r. Dogovom je usvojeno da je količina toplote pozitivna ako se toplota dovodi telu a negativna ako je telo oslobađa. Ukoliko se i uzrazu za količinu toplote $Q = mc\Delta t = C\Delta t$ razlika temperature napiše kao krajnja minus početna temperatura dobija se odgovarajući predznak (pri zagrevanju je Δt pozitivno, dok je pri hlađenju Δt negativno). Algebarski zbir primljene i oslobođene količine toplote, kod termički izolovanih sistema koji čine tela različite početne temperature, jednak je nuli. Shodno tome za razmatrani sistem dva tela važi relacija:

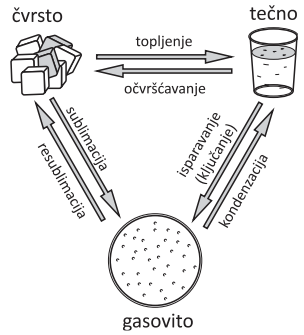
$$Q_1 + Q_2 = 0\,, \tag{3.5}$$

$$m_1c_1(t_r - t_1) + m_2c_2(t_r - t_2) = 0\,, \tag{3.6}$$

gde su m_1, m_2, c_1 i c_2 mase i odgovarajući specifični toplotni kapaciteti tela početnih temperatura t_1 i t_2, respektivno, a t_r temperatura oba tela po uspostavljanju termodinamičke ravnoteže.

3.3 Fazni prelazi

Iz iskustva je poznato da materijali mogu menjati agregatna stanja. Najjednostavniji primeri su zamrzavanje i ključanje vode[19]. Prelazi iz jednog u drugo agregatno stanje nazivaju se fazni prelazi. Često se pojam agregatnog stanja poistovećuje sa pojmom faze, no treba imati na umu da i u okviru jednog agregatnog stanja neke supstance može postojati nekoliko faza (npr. nekoliko različitih kristalnih modifikacija). Striktno govoreći faza je deo sistema, homogen po hemijskom sastavu i fizičkim osobinama,



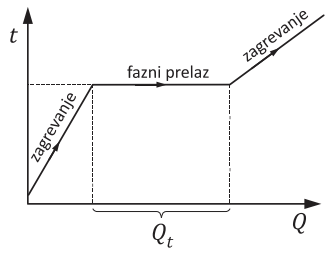
Slika 3.1 Fazni prelazi između agregatnih stanja

[19] U oba slučaja voda u tečnom agregatnom stanju razmenjuje toplotu sa okolinom.

koji je graničnom površinom odvojen od drugih delova sistema. Fazni prelaz je transformacija jedne faze u drugu pri čemu se skokovito menja neka od fizičkih karakteristika: zapremina, gustina, električna provodljivost i slično. Postoje fazni prelazi prve i druge vrste. Pri faznim prelazima prve vrste se toplota oslobađa ili apsorbuje. Fazni prelazi druge vrste odvijaju se bez razmene količine toplote sa okolinom. Fazni prelazi koji predstavljaju promenu agregatnog stanja su fazni prelazi prve vrste.

Na dijagramu prikazanom na slici *3.1* navedeni su fazni prelazi između čvrstog, tečnog i gasovitog agregatnog stanja. Iz iskustva nam je poznato da do topljenja leda dolazi samo ako se on nalazi u sredini čija je temperatura veća od njegove. U tim uslovima led apsorbuje (prima) količinu toplote od okoline. Znamo da će voda proključati ako od grejnog tela prima količinu toplote. Fazni prelazi u obrnutom smeru iz tečnog u čvrsto agregatno stanje (očvršćavanje) i iz gasovitog u tečno (kondenzacija) odvijaju se uz oslobađanje količine toplote koja se predaje okolini.

Razmotrimo kako se odvija proces topljenja leda pri normalnom atmosferskom pritisku. Na račun dovedene količine toplote temperatura leda prvo postepeno raste, kao što je prikazano na slici 2.2. Na $0\ ^\circ\mathrm{C}$ se u posudi sa ledom primećuje i tečna faza a temperatura prestaje da raste. Pomenuta temperatura predstavlja temperaturu faznog prelaza na kojoj postoje obe faze istovremeno. Iznad ili ispod temperature faznog prelaza postoji samo jednofazni sistem. Da bi se proces topljenja odigrao do kraja nije dovoljno samo zagrejati led do $0\ ^\circ\mathrm{C}$, već je potrebno i dalje dovoditi toplotu, kao što je prikazano na slici *3.2*. Značajno je napomenuti da dovedena količina toplote, na slici označena sa Q_t, ne izaziva promenu temperature leda i vode. Do daljeg porasta temperature dolazi tek pošto se sav led otopi, kada ustvari dolazi do zagrevanja tečnosti. Količina toplote koju je neophodno dovesti jednom kilogramu date supstance da bi se ona, na temperaturi faznog prelaza, u potpunosti prevela iz čvrstog u tečno agregatno stanje naziva se latentna[20] toplota topljenja:



Slika 3.2 Promena temperature pri zagrevanju i topljenju kristala

[20] latentna - skrivena

$$q_t = \frac{Q_t}{m}. \tag{3.7}$$

Jedinica za latentnu toplotu topljenja u SI sistemu je $\frac{\text{J}}{\text{kg}}$. Pri očvršćavanju jednog kilograma supstance oslobađa se količina toplote koja je jednaka latentnoj toploti topljenja. Latentna toplota topljenja leda (očvršćavanja vode) iznosi $3{,}34 \cdot 10^5\ \frac{\text{J}}{\text{kg}}$.

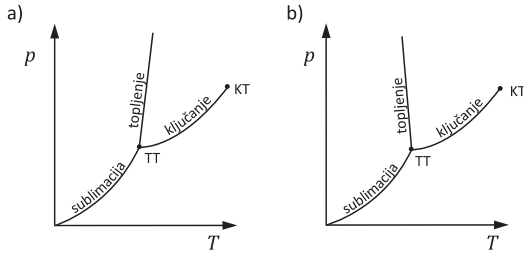
Prelazak supstance iz tečnog u gasovito agregatno stanje (paru) može se odvijati na dva načina: isparavanjem i ključanjem. Isparavanje je proces koji se odigrava na svim temperaturama većim od apsolutne nule, kada molekuli iz površinskog sloja steknu dovoljno veliku energiju da raskinu međumolekulske veze i pređu u prostor iznad slobodne površine tečnosti. Ključanje je, sa druge strane, proces burnog isparavanja iz celokupne zapremine tečnosti, praćen stvaranjem mehurića pare. Ono što ključanje suštinski razlikuje od isparavanja jeste to da se ovaj proces odvija na strogo određenoj temperaturi (tačka ključanja). Da bi se proces ključanja odvijao, tečnosti se neprekidno mora dovoditi toplota. Količina toplote q_i koju je neophodno dovesti jednom kilogramu date supstance da bi se ona u potpunosti prevela iz tečnog u gasovito agregatno stanje naziva se latentna toplota isparavanja. Latentna toplota isparavanja zavisi od vrste tečnosti i opada sa povećanjem temperature.

Prelazak supstance iz jednog u drugo agregatno stanje pri zadanom pritisku odvija se na strogo određenoj temperaturi [21] [22]. Na primer, pri normalnom pritisku, voda ključa na $100\ ℃$, a led se topi na $0\ ℃$. Temperature ovih faznih prelaza, pri nekom drugom pritisku, imaće drugačije vrednosti. Voda koju alpinisti kuvaju za čaj ne ključa na $100\ ℃$ zbog činjenice da atmosferski pritisak opada sa porastom nadmorske visine. Primera radi, na nadmorskoj visini od ≈ 4000 m voda ključa na temperaturi koja iznosi $\approx 86\ ℃$. Na slici *3.3* je principijelno prikazana zavisnost temperature faznih prelaza od pritiska, odnosno mogući izgled faznog dijagrama. Krive na faznom dijagramu prikazuju ravnotežu dve faze (dva agregatna stanja). Krive faznih prelaza se spajaju u tački koja predstavlja ravnotežu sva tri agregatna stanja i naziva se trojna tačka koja je na slici *3.3*

[21] Treba napomenuti da se čvrsto agregatno stanje u pogledu uređenosti unutrašnje građe deli na kristalno i amorfno stanje. Kod kristala postoji dugodometna uređenost unutrašnje građe, drugim rečima atomi, joni i molekuli periodično zauzimaju tačno određene položaje u prostoru. Za razliku od kristalnog, kod amorfnog stanja ne postoji dugodometna uređenost strukture. Prelazak iz kristalnog u tečno agregatno stanje se odvija na tačno određenoj temperaturi, dok topljenje amorfnih materijala otpočinje na jednoj a završava na drugoj višoj temperaturi.

[22] Razlika između ključanja i isparavanja je objašnjena u prethodnom tekstu.

označena sa TT. Eksperimentalno je utvrđeno da sa porastom pritiska temperatura faznog prelaza između tečne i gasovite faze, kao i između čvrste i gasovite faze, raste. Drugim rečima nagib krive ključanja (kondenzacije) i krive sublimacije je uvek pozitivan, kao što je prikazano na slici *3.3*. Kriva ravnoteže između tečne i gasovite faze se završava u kritičnoj tački koja je na slici *3.3* označena sa KT. Iznad kritične temperature supstanca postoji samo u gasovitom agregatnom stanju. Uticaj pritiska na temperaturu faznog prelaza između čvrstog i tečnog agregatnog stanja, manje je izražen u odnosu na prethodno pomenute fazne prelaze ali može biti dvojak. Porast pritiska može imati za posledicu kako porast tako i sniženje temperature ovog faznog prelaza. Principijelna razlika između dijagrama prikazanih na slikama *3.3* a) i b) je u različitom nagibu krive topljenja (očvršćavanja). Na slici *3.3* a) je nagib pozitivan, a na slici *3.3* b) negativan. Iako pozitivan nagib postoji kod većine materijala, jedna supstanca sa negativnim nagibom krive topljenja ima veliki značaj za život na Zemlji. To je voda.



Slika 3.3 Zavisnost temperature faznih prelaza od pritiska

3.4 Pitanja i zadaci za samostalan rad

1. Odrediti početnu i krajnju temperaturu u stepenima Celzijusa ako je poznato da se telo zagrevalo od temperature $298\ \mathrm{K}$ do temperature $340\ \mathrm{K}$. Koliko iznosi promena temperature u obe pomenute temperaturske skale?

2. Toplotni kapacitet tela iznosi $5 \cdot 10^4\ \frac{\mathrm{mJ}}{°\mathrm{C}}$. Izračunati promenu temperature u Kelvinovoj skali ako se telu dovede količina toplote od $850\ \mathrm{J}$.

3. Temperatura tela, mase $520\ \mathrm{g}$, poraste za $18\ °\mathrm{C}$ na račun dovedene količine toplote od $8600\ \mathrm{J}$. Izračunati specifični toplotni kapacitet materijala od kog je telo napravljeno.

4. Od čega zavisi toplotni kapacitet tela?

5. Da li se pri faznom prelazu iz tečnog u čvrsto agregatno stanje toplota oslobađa ili apsorbuje?

6. Da li i kako porast pritiska utiče na temperaturu faznog prelaza iz čvrstog u gasovito agregatno stanje?

7. Odrediti količinu toplote koja se oslobodi pri zamrzavanju $45\ \mathrm{cm}^3$ vode na $0\ ^\circ\mathrm{C}$. Latentna toplota očvršćavanja vode iznosi $3{,}34 \cdot 10^5\ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}}$.

4 IDEALAN GAS I PRVI PRINCIP TERMODINAMIKE

Ponašanje i osobine gasova ćemo proučavati razmatrajući parametre koji opisuju svojstva gasa kao celine a to su: količina gasa, pritisak, zapremina, temperatura i unutrašnja energija. Ovakav pristup koji ne ulazi u strukturu i međusobne interakcije između molekula gasa se naziva termodinamički.

4.1 Jednačina stanja idealnog gasa

Eksperimentalno je ustanovljeno da se različiti gasovi pod određenim uslovima ponašaju veoma slično. Ovo se dešava pri malim gustinama i na relativno visokim temperaturama. Za opisivanja ovog gotovo identičnog ponašanje različitih vrsta gasa koristi se model idealnog gasa. Pod idealnim gasom se podrazumeva gas čiji se molekuli nalaze na velikom međusobnom rastojanju tako da ne interaguju međumolekulskim silama. Interakcije postoje kratkotrajno pri sudarima. Sudare molekula idealnog gasa sa zidovima suda i drugim molekulima smatramo idealno elastičnim dok se zapremina samih molekula zanemaruje u odnosnu na ukupnu zapreminu gasa[23].

Pojam pritiska je definisan u poglavlju mehanika fluida izrazom 2.2. Molekuli gasa koji se nalaze u nekom zatvorenom sudu se kreću i pri tome sudaraju međusobno kao i sa zidovima suda. Pri svakom sudaru molekuli deluju na zidove suda silom. Pritisak gasa je određen srednjom silom kojom molekuli zbirno deluju na zidove.

Eksperimentalno je ustanovljeno da su makroskopski parametri stanja: pritisak, temperatura i zapremina određene količine gasa međusobno zavisni. Ako se na primer pri konstantnoj zapremini poveća temperatura gasa i pritisak gasa raste. Utvrđeno je da pri malim koncentracijama gasa, odnosno za idealne gasove, relacija koja povezuje parametre stanja ima oblik:

[23] Vazduh (Zemljina atmosfera) ispunjava ovaj uslov. Gustina vazduha je reda veličine $1\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$. Zapremina samih molekula gasa procenjuje se na osnovu činjenice da $1\ \mathrm{kg}$ kondenzovanog vazduha zauzima zapreminu od $1\ \mathrm{dm}^3$, što je za tri reda veličine manje od njegove zapremine u gasovitom agregatnom stanju.

$$pV = nRT\ , \tag{4.1}$$

gde p pritisak, V zapremina, T apsolutna temperatura, n broj molova gasa a R univerzalna gasna konstanta. Brojna vrednost univerzalne gasne konstante iznosi $R = 8{,}314\ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{mol\ K}}$. Prethodni izraz je poznat kao jednačina stanja idealnog gasa.

Mera količine gasa je broj molova. Pod molom se podrazumeva količina supstance koja sadrži isti broj osnovnih elemenata koliko ima atoma u 12 g ugljenikovog izotopa C^{12}. Osnovni elementi supstance mogu biti različiti: za inertne (atomske) gasove to su atomi, dok su za molekulske gasove to molekuli. Broj osnovnih elemenata u molu supstance iznosi $N_A = 6{,}022 \cdot 10^{23}\ \frac{1}{\mathrm{mol}}$. Ovaj broj se naziva Avogadrov broj[24]. Broj molova gasa se može izraziti preko mase gasa m i molarne mase M:

$$n = \frac{m}{M}\ , \tag{4.2}$$

kao i preko broja atoma (molekula) N i Avogadrovog broja:

$$n = \frac{N}{N_A}\ . \tag{4.3}$$

Uvrštavanjem prethodnih izraza jednačina stanja idealnog gasa dobija oblik:

$$pV = \frac{m}{M}RT\ , \tag{4.4}$$

odnosno:

$$pV = \frac{N}{N_A}RT = Nk_BT\ , \tag{4.5}$$

gde je $k_B = \frac{R}{N_A} = 1{,}38 \cdot 10^{-23}\ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}}$ Bolcmanova konstanta.

Ponašanje realnih gasova odstupa od jednačine stanja idealnog gasa pri velikim gustinama i niskim temperaturama. Što je gustina gasa veća manje je rastojanje između molekula i međumolekulske interakcije su jače. Sa druge strane veća gustina

[24] Za idealne gasove važi Avogadrov zakon koji glasi: pri istim pritiscima i temperaturama jednake zapremine idelalnih gasove sadrže jednak broj molekula.

podrazumeva i veći broj molekula gasa po jedinici zapremine te se zapremina samih molekula ne može zanemariti. Pritisak kojim na zidove suda deluje realan gas manji je od pritiska koji bi imao u idealnom slučaju. Naime, međumolekulske interakcije imaju za posledicu smanjenje pritiska.

Realan gas se može opisati Van der Valsovom jednačinom:

$$\left(p + a\frac{n^2}{V^2}\right)(V - nb) = nRT\ . \tag{4.6}$$

Koeficijenti a i b u jednačini se zovu Van der Valsove konstante i one zavise od vrste gasa.

4.2 Termodinamički procesi

Makroskopski parametri stanja gasa mogu se menjati u tzv. termodinamičkim procesima. Pri promeni stanja gasa menjaju se istovremeno najmanje dva parametra. Termodinamički procesi mogu biti ravnotežni (povratni) i neravnotežni (nepovratni). Proces je ravnotežan ukoliko se odvija sporo i tad gas prolazi kroz niz stanja u kojima se parametri menjaju kontinualno. U procesima koji se odvijaju brzo nema dovoljno vremena da se u svakom trenutku uspostavi termodinamička ravnoteža. Ovakvi procesi su nepovratni. Razmotrimo procese u kojima je pored određene količine gasa konstantan i jedan od parametara stanja (p, V ili T).

Izotermski proces

Ukoliko je temperatura sistema konstantna proces se naziva izotermskim. U aproksimaciji idealnog gasa jednačina izotermskog procesa ($T = const$) za određenu količinu gasa ($n = const$) glasi:

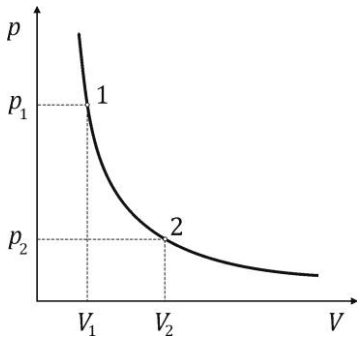
$$pV = const\ . \tag{4.7}$$

Proizvod pritiska i zapremine određene količine idealnog gasa pri konstantnoj temperaturi je konstantan. Ovaj zakon je poznat kao Bojl-Mariotov zakon. Grafički prikaz ovog zakona u $p - V$ dijagramu je dat na slici *4.1*. Kriva koja prikazuje zavisnost pritiska

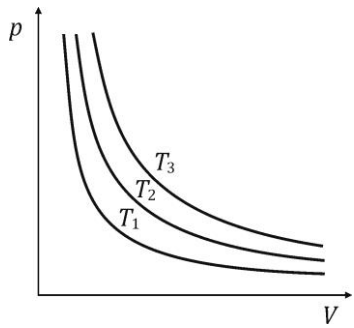
od zapremine pri konstantnoj temperaturi je ravnostrana hiperbola ($p = \frac{const}{V}$) i naziva se izoterma. Tačke 1 i 2 na izotermi prikazanoj na slici *4.1* povezane su relacijom:

$$p_1 V_1 = p_2 V_2. \tag{4.8}$$

Na slici *4.2* prikazane su tri izoterme idealnog gasa na različitim temperaturama. Izoterma najbliža koordinantom početku ima najnižu temperaturu, udaljavanjem od koordinatnog početka temperatura izotermi raste.



Slika 4.1 Izoterma u p-V dijagramu



Slika 4.2 Izoterme različitih temperatura

Izobarski proces

Proces koji se odvija pri konstantnom pritisku naziva se izobarski. Za određenu količinu idealnog gasa pri kontantnom pritisku važi relacija:

$$\frac{V}{T} = const\ , \tag{4.9}$$

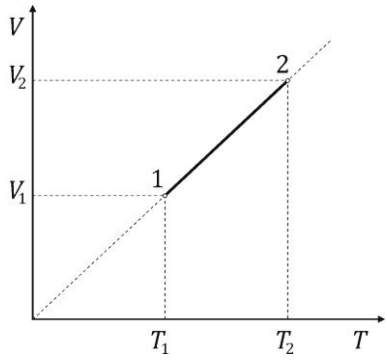
koja se dobija uvrštavajući $n = const$ i $p = const$ u jednačinu stanja idealnog gasa. Ova relacija je poznata kao Gej-Lisakov zakon prema kom je odnos zapremine i apsolutne temperature određene količine gasa gasa pri konstantnom pritisku konstantan. Grafički prikaz izobarskog procesa u $V - T$ dijagramu je prikazan na slici *4.3*. Kriva koja prikazuje zavisnost zapremine gasa od temperature pri konstantnom pritisku naziva se izobara. Tačke 1 i 2 na izobari prikazanoj na slici *4.3* povezane su relacijom:

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}. \tag{4.10}$$

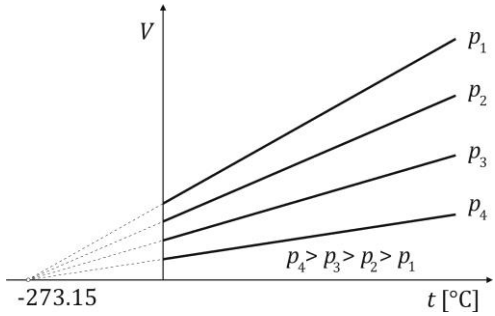
Gej-Lisakov zakon izražen preko temperature u stepenima Celzijusa je oblika:

$$V = V_0(1 + \gamma t)\,, \tag{4.11}$$

gde je V zapremina gasa na temperaturi t, V_0 zapremina iste količine gasa pri istom pritisku na $0\ ^\circ\mathrm{C}$ a γ temperaturski koeficijent zapreminskog širenja. Gej-Lisakov zakon se može formulisati i na sledeći način: zapremina određene količine gasa pri konstantnom pritisku raste linearno sa porastom temperature. Temperaturski koeficijent zapreminskog širenja idealnog gasa iznosi $\gamma = \frac{1}{273{,}15}\,\frac{1}{^\circ\mathrm{C}}$. Na slici *4.4* su prikazane izobare za nekoliko različitih pritisaka idealnog gasa. Uočava se da sa porastom pritiska nagib izobare opada.



Slika 4.3 Izobara u V-T dijagramu



Slika 4.4 Izobare pri različitim pritiscima

Izohorski proces

Kod izohorskog procesa je zapremina konstantna. Za izohorski proces važi Šarlov zakon koji glasi: odnos pritiska i apsolutne temperature određene količine idealnog gasa je konstantan pri konstantnoj zapremini. Relacija koja važi u ovom slučaju je oblika:

$$\frac{p}{T} = const\ . \tag{4.12}$$

i dobija se uvrštavajući $n = const$ i $V = const$ u jednačinu stanja idealnog gasa. Grafički prikaz izhorskog procesa u $p - T$ dijagramu je dat na slici *4.5*. Kriva koja prikazuje

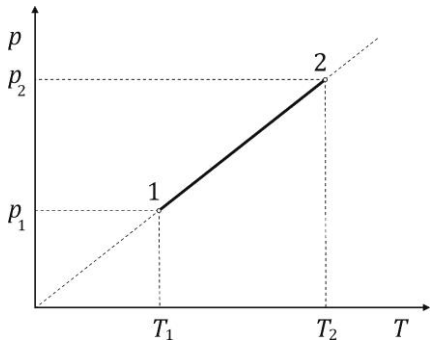
zavisnost pritiska od temperature pri konstantnoj zapremini naziva se izohora. Tačke 1 i 2 na izhori prikazanoj na slici 4.5 povezane su relacijom:

$$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2}. \tag{4.13}$$

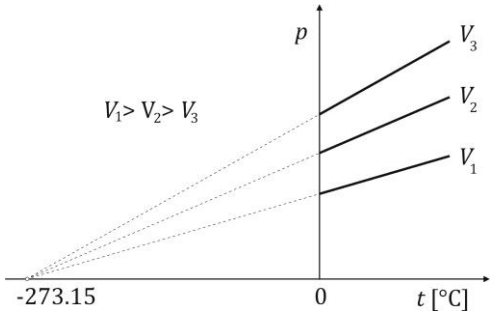
Šarlov zakon u kom fuguriše temperatura u stepenima Celzijusa je oblika:

$$p = p_0(1 + \delta t)\,, \tag{4.14}$$

gde je p pritisak gasa na temperaturi t, p_0 pritisak iste količine gasa u istoj zapremini na $0\ °\mathrm{C}$ a $\delta = \frac{1}{273{,}15}\,\frac{1}{°\mathrm{C}}$ temperaturski koeficijent porasta pritiska. Na slici *4.6* su prikazane izohore za tri različite zapremine idealnog gasa. Uočava se da sa porastom zapremine koeficijent pravca izohore opada.



Slika 4.5 Izohora u p-T dijagramu



Slika 4.6 Izohore različitih zapremina

4.3 Prvi princip termodinamike

Neka se gas nalazi u cilindru koji je zatvoren pokretnim klipom. Ovom sistemu se preda određena količina toplote, npr. tako što ga postavimo iznad gorionika. Doći će do promene unutrašnje energije, koja se ogleda u promeni temperature, kao i do pomeranja klipa. Pomeranje klipa se vrši pod dejstvom sile pritiska pri čemu pomenuta sila vrši rad. Pošto pritisak unutar cilindra generalno nije konstantan, ukupan rad u procesu se dobija polazeći od elementarnog rada koje gas vrši pri pomeranju klipa za dx:

$$dA = Fdx\,. \tag{4.15}$$

Intenzitet sile F se može izraziti preko pritiska i površine klipa:

$$F = pS, \tag{4.16}$$

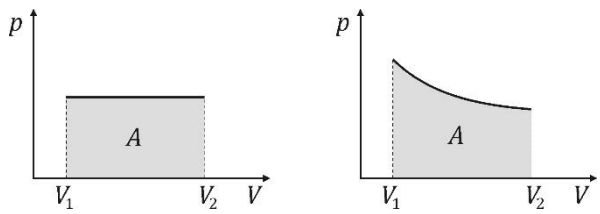
tako da prethodni izraz postaje:

$$dA = pSdx = pdV\,, \tag{4.17}$$

$dV = Sdx$ predstavlja promenu zapremine gasa pri pomeranju klipa za dx. Sabiranjem elementarnih radova (integraljenjem) dobija se ukupan rad:

$$A = \int_{V_1}^{V_2} pdV. \tag{4.18}$$

Iz prethodnog izraza sledi da površina ispod krive, na grafiku koji prikazuje zavisnost pritiska gasa od njegove zapremine, predstavlja rad (slika *4.7*).



Slika 4.7 Rad kod termodinamičkih procesa

Polazeći od razmatranog primera jasno je da se, generalno, količina toplote predata nekom sistemu koristi kako za promenu unutrašnje energije sistema tako i za vršenje rada, što se može zapisati na sledeći način:

$$Q = \Delta U + A\,. \tag{4.19}$$

Ova jednačina predstavlja prvi princip termodinamike. Količina toplote se smatra pozitivnom ukoliko je okolina predaje posmatranom sistemu. Sistem tada apsorbuje količinu toplote. U suprotnom, ako se toplota prenosi sa posmatranog sistema na

okolinu, količina toplote se smatra negativnom. Posmatrani sistem tada oslobađa količinu toplote. Rad koji vrši gas je pozitivan ukoliko se zapremina gasa povećava, negativan ukoliko se zapremina smanjuje. Ukoliko nema promene zapremine rad je jednak nuli.

Ustanovljeno je da količina toplote i rad pri promeni parametara stanja gasa od (p_1, V_1, T_1) do (p_2, V_2, T_2) zavise od konkretnog procesa tj. od načina kako je gas menjao stanje. Sa druge strane promena unutrašnje energije ne zavisi od procesa (putanje) kojom je sistem prešao iz jednog u drugo stanje već samo od početne i krajnje temperature. U sistemu sa idealnim gasom mogu se odvijati različiti procesi. Neki od njih su prethodno pomenuti. Razmotrimo njihove karakteristike sa stanovišta prvog principa termodinamike.

Izohorski proces

Pri izohorskom procesu se ne vrši rad pošto je zapremina konstantna. Stoga se celokupna količina toplote dovedena gasu pri izohorskom procesu troši na povećanje unutrašnje energije:

$$V = const \quad \rightarrow \quad A = 0 \quad \rightarrow \quad Q = \Delta U \,. \tag{4.20}$$

Promena unutrašnje energije gasa je srazmerna razlici temperatura krajnjeg i početnog stanja:

$$Q = \Delta U = nC_V \Delta T \,, \tag{4.21}$$

gde je n broj molova gasa a C_V molarna količina toplote pri konstantnoj zapremini.

Izotermski proces

Pošto je pri izotermskom procesu temperatura konstantna ne menja se ni unutrašnja energija gasa. Količina toplote dovedena idealnom gasu pri izotermskom procesu se u potpunosti troši na vršenje rada pri širenju gasa. Iz prvog principa termodinamike sledi da za izotermski proces važi relacija:

$$T = const \;\rightarrow\; \Delta U = 0 \;\rightarrow\; Q = A \,. \tag{4.22}$$

Pri izotermskom širenju gasa sistem dakle prima određenu količinu toplote i na njen račun gas vrši rad. Količinu toplote i rad tad uzimamo sa pozitivnim predznakom. Pri izotermskom sabijanju gas otpušta količinu toplote koju predaje okolini. Ta otpuštena količina toplote jednaka je radu spoljašnjih sila. Količinu toplote i rad tad uzimamo sa negativnim predznakom. Rad koji se vrši pri izotermskom procesu računa se pomoću izraza:

$$A = nRT \ln \frac{V_2}{V_1}, \tag{4.23}$$

gde je V_1 početna a V_2 krajnja zapremina gasa temperature T.

Izobarski proces

Pri izobarskom procesu se dovedena količina toplote troši i na promenu unutrašnje energija i na vršenje rada.

$$p = const \ \rightarrow Q = \Delta U + A\,. \tag{4.24}$$

Rad koji se vrši pri izobarskom procesu dat je relacijom:

$$A = p\Delta V\,. \tag{4.25}$$

Pri širenju gasa se zapremina povećava i rad je pozitivan. Pri sabijanju je obrnuto. Uvrštavajući izraze 4.21 i 4.25 u izraz 4.24 dobija se da dovedenu količinu toplote pri izobarskom procesu možemo izraziti:

$$Q = nC_V\Delta T + p\Delta V = nC_p\Delta T\,, \tag{4.26}$$

gde je C_p molarna količina toplote pri konstantnom pritisku. Na osnovu prethodno pomenutog sledi da je za izobarsko zagrevanje gasa od temperature T_1 do temperature T_2 potrebna veća količina toplote u poređenju sa izohorskim zagrevanjem koje će izazvati istu promenu temperature ($C_p > C_V$) .

Adijabatski proces

Ukoliko je posuda sa gasom dobro termički izolovana od okoline može se smatrati da nema prenosa toplote između gasa i okoline, odnosno:

$$Q = 0\,. \tag{4.27}$$

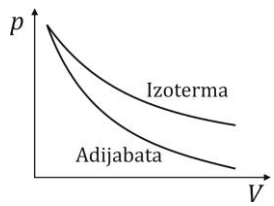
Proces koji se odvija pri ovakvim uslovima naziva sa adijabatski. Sa stanovišta prvog principa termodinamike za adijabatske procese važi relacija:

$$A = -\Delta U\,. \tag{4.28}$$

Drugim rečima pri adijabatskom procesu se vrši rad na račun promene unutrašnje energije. Pri povećanju zapremine gas vrši rad koji je pozitivan. Promena unutrašnje energije gasa tokom adijabatskog procesa je tada negativna tj. temperature gasa opada. Ako se tokom adijabatskog procesa zapremina gasa smanjuje nad gasom se vrši rad koji je negativan. Temperatura gasa tada raste jer dolazi do pozitivne promene unutrašnje energije.

Pri adijabatskom procesu se istovremeno menjaju pritisak, zapremina i temperatura. Grafički prikaz adijabatskog procesa u p-V dijagramu je dat na slici *4.8*. Uočava se da povećanje zapremine ima za posledicu smanjenje pritiska, slično kao kod izotermskog procesa s tim da je adijabata strmija od izoterme.

Kao što je prethodno pomenuto dobra termička izolacija gasa obezbeđuje da se proces odvija adijabatski. Razmena toplote je svedena na minimum i ukoliko se proces odvija brzo te nema vremena za prenos toplote. Termodinamički procesi koji se odvijaju brzo se smatraju adijabatskim.



Slika 4.8 Izotermski i adijabatski procesi u $\boldsymbol{p - V}$ *dijagramu*

Kružni proces

Procesi kod kojih se sistem nakon razmene energije sa okolinom i vršenja rada vraća u početno stanje[25] nazivaju se kružni (ciklični) procesi. Unutrašnja energija gasa po završetku kružnog procesa ima početnu vrednost te važi da je:

[25] Parametri stanja (pritisak, zapremina i temperatura) imaju početne vrednosti.

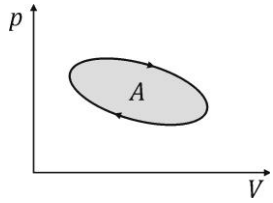
$$\Delta U = 0\,, \tag{4.29}$$

odnosno sa stanovišta prvog principa termodinamike:

$$Q = A\,. \tag{4.30}$$

Drugim rečima ukupan rad koji se vrši tokom kružnog procesa jednak je razmenjenoj količini toplote.

Na slici *4.9* je prikazan proizvoljan kružni proces. Ukupan rad u toku jednog ciklusa odgovara površini procesa u $p - V$ dijagramu. Za prikazan smer[26] odvijanja procesa rad je pozitivan. Ukoliko bi se proces odvijao u suprotnom smeru rad bi bio negativan.

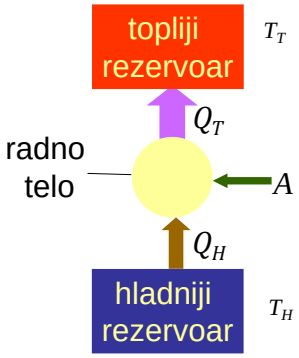


Slika 4.9 Rad kružnog procesa

4.4 Toplotne pumpe i rasladni uređaji

Toplotne pumpe i uređaji za hlađenje prenose količinu toplote iz sredine niže temperature u sredinu više temperature. Ovaj proces se ne odvija spontano već uz vršenje rada koji se dobija na račun utroška nekog drugog oblika energija (električne energije). Na slici *4.10* je shematski, veoma uprošćeno, prikazan princip rada ovih uređaja. Sa T_H je označena temperatura hladnijeg rezervoara (sredine niže temperature) a sa T_T temperatura toplijeg rezervoara (sredine više temperature). Radno telo ovih uređaja su lakoisparljive tečnosti koje tokom rada prolaze kroz niz termodinamičkih kružnih procesa koji se odvijaju sukcesivno. Količina toplote koju radno telo primi, tokom ciklusa, od hladnijeg rezervoara označena je na slici *4.10* sa Q_H, rad izvršen nad radnim telom u ciklusu je označen sa A a količina toplote koju radno telo (tokom ciklusa) preda toplijem rezervoaru označena je sa Q_T.

[26] Strelice označavaju smer odvijanja procesa.



Slika 4.10 Princip rada toplotne pumpe / rashladnog uređaja

Toplotne pumpe i uređaji za hlađenje su u osnovi isti uređaji koji služe u različite svrhe. Kod uređaja za hlađenje je krajnji cilj održavanje određenog prostora na temperaturi koja je niža od okoline što se ostvaruje odvodeći količinu toplote iz njega u okolinu. Svrha rada toplotnih pumpi je održavanje određenog prostora na temperaturi koja je viša od okoline što se ostvaruje prenosom toplote iz okoline u njega. Svrsishodnost uređaja opisuje se koeficijentom korisnog dejstva koji je različito definisan za rashladne uređaje i toplotne pumpe. Kod uređaja za hlađenje je poželjno odvesti što veću količinu toplote iz sredine niže temperature a da pri tome rad izvršen nad radnim telom bude što manji. Stoga je koeficijent korisnog dejstva rashladnog uređaja definisan izrazom:

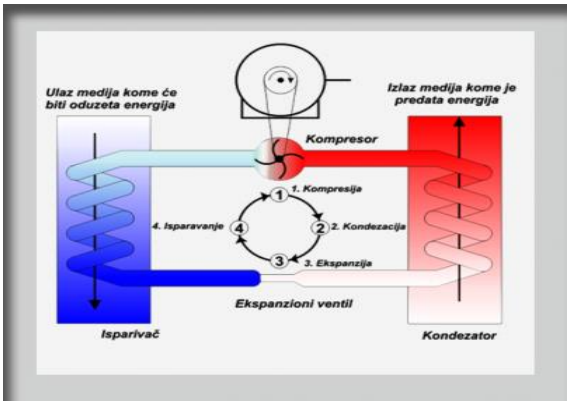
$$\eta_{ru} = \frac{|Q_H|}{|A|} = \frac{|Q_H|}{|Q_T| - |Q_H|}. \qquad (4.31)^{27}$$

Kod toplotnih pumpi je cilj preneti što veću količinu toplote sredini više temperature a da pri tome rad izvršen nad radnim telom bude što manji te se koeficijent korisnog dejstva računa pomoću izraza:

$$\eta_{tp} = \frac{|Q_T|}{|A|} = \frac{|Q_T|}{|Q_T| - |Q_H|}. \qquad (4.32)$$

[27] Pošto je za kružne procese ukupan rad jednak ukupnoj razmenjenoj količini toplote (nema promene unutrašnje energije pošto je u kružnom procesu $\Delta U = 0$) važi sledeća relacija: $|A| = |Q_T| - |Q_H|$.

Koeficijenti korisnog dejstva su, u oba slučaja, pozitivne vrednosti i poželjno je da budu što veće (koeficinetni korisnog dejstva obično imaju vrednosti koje se kreću u interval 2-5).[28]



Slika 4.11 Struktura toplotne pumpe/rashladnog uređaja

Struktura ovih uređaja sa označenim osnovnim komponentama i termodinamičkim procesima kroz koje prolazi radno telo prikazana je na slici *4.11* Osnovne komponente uređaja su: kompresor, ekspanzioni ventil i zatvoren sistem cevi kroz kroz koji cirkuliše radno telo. Radno telo[29] prolazi kroz niz termodinamičkih kružnih procesa. U toku jednog cikusa menjaju se pritisak, zapremina i temperature radnog tela a kao posledica toga dolazi do promene agregatnog stanja (radno telo prelati iz tečnog u gasovito agregatno stanje i obrnuto tj. dolazi do isparavanja i kondenzacije). Sastavni deo ovih uređaja je kompresor , koji je prikazan na slici i označen brojem. Na ulasku u kompresor i na izlasku iz njega je radno telo u gasovitom agregatnom stanju. U kompresoru se nad radnim telom vrši rad (kompresor sabija gas) na račun električne energije potrebne za njegovo funkcionisanje. Kompresija gasa se odvija brzo i ovaj process se može smatrati adijabatskim. U adijabatskom procesu se pritisak povećava ukoliko se zapremina smanji a temperatura poveća. Znači pri kompresiji gasa temperatura gasa raste i upravo je ovo

[28] Ukoliko se prostorija zagreva pomoću toplotne pumpe količina toplote koje se predaje toplijem rezervoaru je veća u odnosu na slučaj kad bi se električne energije potreban za pokretanje pumpe pretvarala, u električnim grejačima, direktno u toplotu. Najmanji koeficinet korisnog dejstva pri kom toplotna pumpa radi efikasno, ali bez otplate uloženih sredstava, jednak je jedinici pri čemu radno telo predaje grejaču količinu toplote koja je jednaka uloženom radu (uloženoj električnoj energiji). Ukoliko koeficijent korisnog dejstva padne ispod jedan, to se dešava kada je temperatura hladnjaka veoma niska, sistem grejanja se prebacuje na drugi režim (npr. direktno pretvaranje električne energije u toplotu).

[29] Freon je uobičajeni naziv za sva jedinjenja koja se koriste kao radno telo u ovim uređajima iako mnoga od njih nisu hlorofluorougljenici, primera radi danas se u ovim uređajima između ostalog koristi i ugljen-dioksid.

deo kružnog procesa u kom dolazi do najvećeg porasta temperature radnog tela. Zatim sledi deo ciklusa tokom kog je radno telo u kontaktu sa toplijim rezervoarom.[30] Topliji rezervoar može biti voda u sistemu etažnog grejanja ili vazduh unutar objekta. Temperatura radnog tela na ulasku u topliji rezervoar je veća od temperature rezervoara i stoga radno telo predaje rezervoaru toplotu na račun koje temperatura rezervoara raste dok temperature radnog tela opada i u jednom trenutku dostiže temperature faznog prelaza iz gasovitog u tečno agregatno stanje. Tada dolazi do kondenzacije. Tokom kondenzacije radno telo i dalje predaje[31] toplotu rezrvoaru s tim da se temperatura radnog tela ne menja (izotermski deo ciklusa). Nakon kondenzacije se radno telo odvaja od toplijeg rezervoara. Pritisak pod kojim se nalazi radno telo, koje je u ovom delu ciklusa u tečnom agregatnom stanju, je velik i približno jednak pritisku koji stvara kompresor. Temperatura radnog tela u ovom delu ciklusa je, iako niža od njegove temperature po izlasku iz kompresora, još uvek značajno iznad temperature hladnijeg rezervoara. Hladniji rezervoar toplote može biti zemljište, podzemna vode ili spoljašnji vazduh i on je na ovoj slici prikazan pravougaonikom. Temperaturu radnog tela treba brzo sniziti ispod temperature hladnijeg rezervoara a to se postiže prolaskom radnog tela kroz ekspanzioni ventil. Pritisak sa druge strane ekspanzionog ventila je znatno manji i posledično dolazi do smanjenja temperature i do istovremene pojave gasovite faze. U delu ciklusa koji sledi, kada je radno telo u kontaktu sa hladnijim rezervoarom, radno telo ima manju temperautu od rezervoara te od njega prima toplotu. Na račun primljene količine toplote temperature radnog tela raste a istovremeno se povećava i količina gasovite faze. U jednom trenutku temperatura radnog tela može dostići temperaturu ključanja koja je, s obzirom na nizak pritisak koji vlada u cevima, značajno niža od temperature pri kojoj dolazi do kondenzacije dok je radno telo u kontaktu sa toplijim rezervoarom. Tada radno telo i dalje prima količinu toplote od hladnijeg rezervoara s tim da se njegova temperature ne menja već dolazi do potpunog prelaska tečne u gasovitu fazu. Nakon što je radno telo u potpunosti pešlo u gasovito agregatno stanje dolazi do njegovog odvajanja od hladnijeg rezervoara i prolaska kroz kompresor čime počinje novi ciklus.

U zavisnosti od toga šta je to što predstavlja topliji odnosno hladniji rezervoar, ovi uređaju se dele na tzv. sisteme: voda-voda, vazduh-vazduh, zemlja-voda i zemlja/vazduh.

[30] Termini topliji i hladniji rezervoar ukazuju na međusobni odnos temperatura dva rezervoara a ne na međusobni odnos temperature radnog rela i rezervoara.
[31] Pri faznim prelazima resublimacije, kondenzacije i očvršćavanja se oslobađa količina toplote.

4.5 Pitanja i zadaci za samostalan rad

1. U boci koja je projektovana da izdrži maksimalan pritisak $p_{max} = 3\ \mathrm{MPa}$ zatvorena je određena količina vazduha na temperaturi $t_1 = 0°\mathrm{C}$ i pritisku $p_1 = 2\ \mathrm{MPa}$. Da li će boca izdržati pritisak koji će se uspostaviti pri zagrevanju do temperature $t_2 = 100°\mathrm{C}$? Zanemariti promenu zapremine posude usled promene temperature.

2. Gas se nalazi na temperaturi $t_1 = 27\ °\mathrm{C}$. Za koliko je potrebno povećati temperaturu da bi se njegov pritisak povećao 100% pri izohorskom procesu?

3. Meteorološki balon ima zapreminu $V_1 = 500\ \mathrm{cm}^3$ na temperaturi $t_1 = 27\ °\mathrm{C}$ i pritisku $p_1 = 1000\ \mathrm{mbar}$. Kolika je zapremina gasa na visini gde je pritisak $p_2 = 10\ \mathrm{mbar}$, a temperatura $t_2 = -23\ °\mathrm{C}$? ($1\ \mathrm{bar} = 10^5\ \mathrm{Pa}$)

4. Koliko molekula kiseonika se nalazi u sudu zapremine $V = 5\ l$ pod pritiskom $p = 0{,}2\ \mathrm{MPa}$ na temperaturi $t = 22\ °\mathrm{C}$?

5. Kako se menja zapremina određene količine idealnog gasa pri konstantnom pritisku?

6. Opisati adijabatski proces.

7. Kako se menja zapremina idealnog gasa ako se pritisak poveća za 80% pri izotermskom procesu?

8. Prikazati izobarski proces u $p - T$ i $p - V$ dijagramu.

9. Prikazati izotermski proces u $p - T$ i $T - V$ dijagramu.

10. Pri kojim uslovima realne gasove opisujemo modelom idealnog gasa?

5 TRANSPORT TOPLOTE

Poznato je da se toplota spontano prenosi sa tela (mesta) više na telo (mesto) niže temperature. Postoje tri načina prenošenja toplote: strujanje (konvekcija), zračenje (radijacija) i provođenje (kondukcija). Pomenuti procesi se često javljaju istovremeno, ali je skoro uvek jedan od njih dominantan.

5.1 Konvekcija

Prenošenje toplote strujanjem (konvekcijom) karakteristično je za fluide[32] i podrazumeva istovremen prenos mase i toplote (fluid se kreće i prenosi toplotu, kao što je slučaj kod centralnog grejanja). Postoje dva oblika konvekcije toplote: spontana i prinudna. Kod spontane konvekcije se slojevi fluida različitih temperatura, budući da imaju različite gustine, kreću pod uticajem gravitacione sile i sile potiska. Slojevi veće temperature imaju manju gustinu te se stoga podižu uvis. Slojevi manje temperature, budući da im je gustina veća, kreću se u suprotnom smeru.[33] Prinudna konvekcija podrazumeva da je kretanje fluida uslovljeno dejstvom neke spoljašnje sile koju stvara npr. ventilator ili pumpa.

Inženjere građevinarstva prvenstveno interesuje prenošenje toplote između zida i okolnog vazduha, koje se odvija strujanjem. Najjednostavnije je da granicu zida i vazduha postavimo u koordinatni početak ($x = 0$). Temperaturu zida označimo sa T_z a temperaturu vazduha na dovoljnoj udaljenosti od zida sa T_v. Razmotrimo slučaj kada je $T_z > T_\mathrm{v}$ odnosno kada se toplota spontano prenosi sa toplijeg zida na hladniji vazduh. Konvektivni toplotni fluks se definiše kao količina toplote koja se usled razlike temperatura transportuje konvekcijom u jedinici vremena:

$$\phi_s = \frac{dQ}{d\tau}. \tag{5.1}$$

[32] tečnosti i gasove

[33] Morske i vazdušne struje su primeri konvekcije nastali dejstvom gravitacione sile i sile potiska na slojeve fluida različitih gustina (različitih temperatura).

Jedinica za konvektivni fluks u SI sistemu je $\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{s}} = \mathrm{W}$. Gustina konvektivnog toplotnog fluksa predstavlja količinu toplote koja se konvekcijom prenese kroz jedinicu površine (postavljene normalno na pravac prenosa toplote) u jedinici vremena:

$$j_s = \frac{d\phi}{dS} = \frac{d^2Q}{dSd\tau}. \tag{5.2}$$

Jedinica za gustinu toplotnog fluksa u SI sistemu je $\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}$. Razmatrani proces konvekcije opisuje se Njutnovim zakonom hlađenja prema kom je gustina konvektivnog toplotnog fluksa proporcionalna razlici temperatura zida i okolnog vazduha:

$$j_s = \alpha(T_z - T_\mathrm{v}), \tag{5.3}$$

gde je α koeficijent prelaza toplote strujanjem čija je jedinica $\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2\mathrm{K}}$. Prethodni izraz se može napisati i u obliku:

$$j_s = \frac{\Delta T}{R_s}, \tag{5.4}$$

gde je $R_s = \frac{1}{\alpha}$ otpornost prelazu toplote strujanjem čija je jedinica $\frac{\mathrm{m}^2\mathrm{K}}{\mathrm{W}}$. Koeficijent prelaza toplote (α) samim tim i otpornost prelazu toplote strujanjem (R_s) zavise od oblika površine čvrstog tela i njene hrapavosti, brzine kretanja fluida kao i od karakteristika samog fluida kao što su gustina i specifični toplotni kapacitet. Tipične vrednosti koeficijenta prelaza toplote strujanjem su date u tabeli *5.1*.

Tabela 5.1 Vrednosti koeficijenta prelaza toplote strujanjem

tip konvekcije	$\alpha \left[\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2\mathrm{K}}\right]$
spontana konvekcija gasova	2-25
spontana konvekcija tečnosti	10-1000
prinudna konvekcija gasova	25-250
prinudna konvekcija tečnosti	50-20000

5.2 Kondukcija

Provođenje toplote je proces prenošenja energije bez prenošenja supstance. Kondukcija je glavni mehanizm transporta toplote kroz tela u čvrstom agregatnom stanju. Do kondukcije dolazi ukoliko se temperature različitih delova tela razlikuju i tad dolazi do prenosa toplote iz oblasti više temperature ka delovima tela niže temperature.

Kretanje atoma (molekula) u čvrstom agregatnom stanju je ograničeno na oscilacije oko tzv. ravnotežnih položaja pri čemu su brzina i amplituda oscilovanja srazmerne temperaturi. Atomi međusobno interaguju što za posledicu ima transfer energije. Ukoliko su pojedini delovi tela na različitim temperaturama, energija se prenosi iz slojeva veće u slojeve manje unutrašnje energije. Prenos toplote sa mesta više na mesta niže temperature ima za cilj izjednačavanje temperatura tj. uspostavljanje termodinamičke ravnoteže.

Provođenje toplote kroz homogeno telo konstantnog poprečnog preseka

Ukoliko se temperature pojedinih delova tela menjaju tokom vremena provođenje se naziva nestacionarnim i teško ga je matematički opisati. Pri stacionarnom provođenju toplote temperature pojedinih delova tela se ne menjaju tokom vremena. U daljem tekstu ćemo razmatrati stacionarno provođenje toplote pri kom se temperatura menja duž jednog pravca. Provođenje toplote kroz zidove zgrada, ukoliko se temperature vazduha sa obe strane zida neznatno menjaju, je primer ovakvog provođenja. Unutrašnju i spoljašnju temperaturu zida označimo sa T_u i T_s, površinu zida sa S, a njedovu debljinu sa d. Toplota se prenosi u pravcu normalnom na površine zida, stoga duž tog pravca postavljamo x osu. Količina toplote koja se u toku kratkog vremenskog intervala $d\tau$ prenese provođenjem kroz tanak sloj zida debljine dx data je tzv. Furijeovim zakonom:

$$dQ = -KS\frac{dT}{dx}d\tau \,, \tag{5.5}$$

gde je K toplotna provodljivost dok $\frac{dT}{dx}$ predstavlja gradijent temperature koji opisuje kako se temperatura menja duž x ose. Pošto se toplota prenosi sa mesta više ka mestima niže temperature u prethodnom izrazu postoji znak minus. Toplotna provodljivost

prvenstveno zavisi od vrste materijala a njena jedinica u SI sistemu je $\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m \cdot K}}$. U tabeli *5.2* su date vrednosti toplotne provodljivosti za neke materijale koji se koriste u građevinarstvu.

Tabela 5.2 Toplotna provodljivost pojedinih materijala

materijal	$K\left[\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m \cdot K}}\right]$	materijal	$K\left[\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m \cdot K}}\right]$
gipsani malter	0,51	poliuretan	0,025
malter sa krečnim cementom	1,00	mineralna vuna	0,035
slama	0,045	drvena vuna	0,04
penasto staklo	0,04	beton	0,1-1,8
trska	0,045	aluminijum	237
nerđajući čelik	15,6	bakar	401
staklo	0,7-1,4	vazduh	0,026
cigla	1-1,8	tvrdo drvo	0,16

Polazeći od prethodnog izraza dobija se da je konduktivni toplotni fluks, koji predstavlja količinu toplote koja se provede kroz telo u jedinici vremena, jednak:

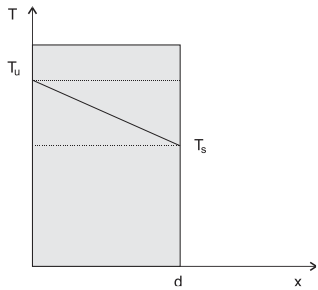
$$\phi_p = \frac{dQ}{d\tau} = -KS\frac{dT}{dx}, \tag{5.6}$$

dok je njegova gustina data izrazom:

$$j_p = \frac{dQ}{Sd\tau} = -K\frac{dT}{dx}. \tag{5.7}$$

Pri stacionarnom provođenju je toplotni fluks konstantan te je temperatura T na rastojanju x od unutrašnje strane zida[34]:

$$T = T_u - \frac{\phi_p x}{KS}. \tag{5.8}$$



Slika 5.1 Zavisnost temperature od koordinate $\boldsymbol{x}$ u pravcu provođenja toplote za stacionarno provođenje kroz jednoslojni zid

Na osnovu prethodnog izraza sledi zaključak da temperatura unutrašnjosti zida linearno opada sa porastom rastojanja x, kao što je prikazano na slici *5.1*. Za $x = d$ je $T = T_s$ te prethodni izraz postaje:

$$T_s = T_u - \frac{\phi_p d}{KS}, \tag{5.9}$$

odakle se može izračunati konduktivni toplotni fluks znajući unutrašnju i spoljašnju temperaturu zida, njegovu površinu i debljinu kao i toplotnu provodljivost materijala od kog je napravljen:

$$\phi_p = \frac{KS}{d}\,(T_u - T_s)\,. \tag{5.10}$$

Da bi se opisalo provođenje toplote kroz sloj homogenog materijala često se umesto toplotne provodljivosti koristi otpor provođenju toplote (toplotna otpornost). Toplotna otpornost predstavlja količnik debljine materijala i toplotne provodljivosti:

[34] Jednačina je dobijena razdvajanjem promenljivih u izrazu 5.6 i integraljenjem tako dobijenog izraza u odgovarajućim granicama($\int_0^x \phi dx = -\int_{T_u}^{T} KSdT$).

$$R_p = \frac{d}{K}. \tag{5.11}$$

U praksi su zidovi višeslojni, sačinjeni od slojeva različitih materijala debljine $d_1, d_2, \dots, d_n$ toplotne provodljivosti $K_1, K_2, \dots, K_n$. Tada je pri stacionarnom provođenju toplotni fluks konstantan i može se izračunati na osnovu izraza:

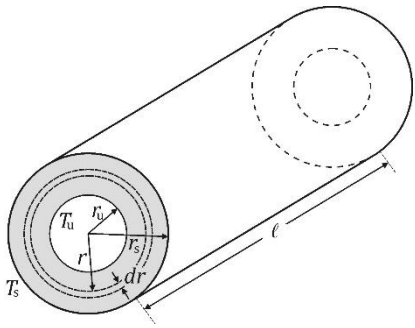
$$\phi_p = S\frac{T_u - T_s}{\sum_{i=1}^{n}\frac{d_i}{K_i}}. \tag{5.12}$$

Ukupna toplotna otpornost višeslojnog zida jednaka je zbiru toplotnih otpornosti svih slojeva:

$$R_{pu} = \sum_{i=1}^{n}\frac{d_i}{K_i}. \tag{5.13}$$

Provođenje toplote kroz omotač cilindra

Gubitke energije pri proticanju zagrejanog fluida kroz cevi koje povezuju toplanu sa zgradama je potrebno svesti na minimum te se cevi oblažu izolatorom. Da bi razmotrili ovaj slučaj posmatrajmo provođenje toplote kroz omotač cilindra prikazan na slici *5.2*.



Slika 5.2 Provođenje toplote kroz omotač cilindra

Temperature unutrašnje i spoljašnje površine omotača su označene sa T_u i T_s , dok su unutrašnji i spoljašnji poluprečnici označeni sa r_u i r_s, respektivno. Razmotrimo slučaj stacionarnog provođenja kada je $T_u > T_s$. Konduktivni toplotni fluks kroz cilindar poluprečnika r debljine dr je tada konstantan i iznosi:

$$\phi_p = -KS\frac{dT}{dr}, \tag{5.14}$$

Toplota se prenosi kroz površinu omotača cilindra koja na rastojanju r od ose cilindra iznosi:

$$S = 2\pi rl\,, \tag{5.15}$$

gde je l dužina cilindra. Pošto se površina omotača cilindra povećava udaljavanjem od ose cilinda gustina toplotnog fluksa nije konstantna u ovom slučaju. Pri stacionarnom provođenju temperatura T na rastojanju r od ose cilindra iznosi[35]:

$$T = T_u - \frac{\phi_p}{2\pi Kl}\ln\frac{r}{r_u}\,. \tag{5.16}$$

Uvrštavanjem $r = r_s$ i $T = T_s$ u prethodni izraz dobija se da toplotni fluks kroz omotač cilindra iznosi:

$$\phi_p = 2\pi Kl\,\frac{T_u - T_s}{\ln\frac{r_s}{r_u}}\,. \tag{5.17}$$

5.3 Radijacija

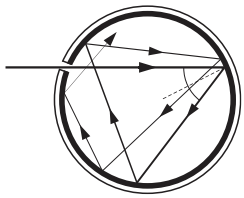
Sva tela emituju elektromagnetne talase pošto se jedan deo energije termičkog kretanja atoma, jona ili molekula pretvara u energiju elektromagnetnog zračenja. Elektromagnetni talasi prenose energiju kroz prostor i ta energija biva delimično apsorbovana od strane drugih tela koja se nađu na putu ovih talasa. Deo apsorbovane energije se može transformisati u unutrašnju energiju što ima za posledicu porast temperature tela. Na ovaj način se, sumarno gledano, energija prenosi sa tela više na telo niže temperature. Interesantno je napomenuti da se prenos toplote zračenjem između dva tela odvija iako ih razdvaja sredina čija je temperatura niža od temperature

[35] Jednačina 5.16 je dobijena uvrštavanjem izraza 5.15 u izraz 5.14, razdvajanjem promenljivih i integraljenjem ($\int_{r_1}^{r}\frac{\phi}{2\pi Kl}\frac{dr}{r} = -\int_{T_u}^{T_s}dT$).

oba tela. [36] Drugi oblici prenošenja toplote mogu se odvijati samo u materijalnim sredinama dok se elektromagnetni talasi prostiru i kroz vakuum. Stoga je zračenje dominantan oblik prenošenja energije u vasioni.[37]

Spektar emitovanih elektromagnetnih talasa zavisi od temperature tela te se ovo zračenje naziva se termičko, odnosno toplotno. Termičko zračenje obuhvata interval talasnih dužina $0{,}1\ \mu\mathrm{m} - 100\ \mu\mathrm{m}$, odnosno infracrvenu, vidljivu oblast kao i deo ultraljubičaste oblasti. Emisioni spektar termičkog zračenja je polihromatski[38], kontinualan i širok, pošto promena kinetičke energije atoma i molekula može imati veoma različite vrednosti. U spektru toplotnog zračenja nisu sve talasne dužine zastupljene sa jednakim intenzitetom. Na raspodela intenziteta po talasnim dužinama (frekvencijama) dominantno utiče temperatura tela. Na nižim temperaturama je najintenzivnije infracrveno zračenje, dok sa porastom temperature raste intenzitet svetlosti. Na visokim temperaturama, reda veličine $10^3\mathrm{K}$, elektromagnetni talasi u vidljivom delu spektra su najintenzivniji.

Apsolutno crno telo predstavlja eksperimentalni i teorijski model kojim se aproksimativno opisuje zračenje termičkih izvora. Eksperimentalni model apsolutno crnog tela je otvor sferne šupljine čija je unutrašnjost prekrivena čađu. Čađ ima najveću apsorpcionu moć u prirodi koja iznosi $99\,\%$[39]. Emisioni spektri apsolutno crnog tela sadrže samo informacije o termičkom zračenju.[40] [41]



Slika 5.3 Apsolutno crno telo

[36] Sunčevo zračenje dospeva do površine Zemlje nakon što prođe kroz slojeve atmosfere koji su na mnogo nižoj temperaturi od Zemljine površine.

[37] Celokupnu energiju koju Zemlja dobija od Sunca prenose elektromagnetni talasi.

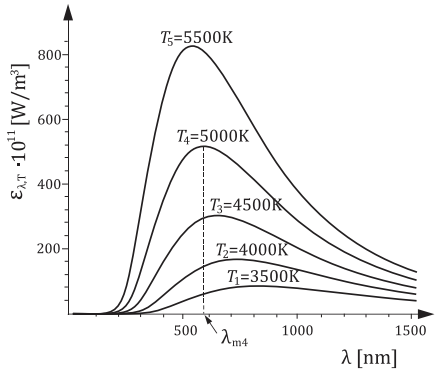
[38] Polihromatski spektar sadrži više talasnih dužina za razliku od monohromatskog koji sadrži samo jednu talasnu dužinu.

[39] Čađ apsorbuje 99% upadnog intenziteta elektromagnetnih talasa.

[40] Pored toga što emituje, svako telo istovremeno i apsorbuje i reflektuje elektromagnetne talase koji na njega padnu. Stoga spektri, snimljeni pomoću spektrofotometra, ne sadrže samo informacije o termičkom zračenju koje telo emituje. Neminovno se snimi i zračenje čiji izvor ne predstavlja posmatrano telo odnosno snimi se i zračenje reflektovano od površine tela.

[41] Elektromagnetni talasi koji, kroz pomenuti mali otvor, uđu u unutrašnjost sfere nakon nekoliko refleksija bivaju u potpunosti apsorbovani kao što je prikazano na slici *5.3*.

Na slici *5.4* prikazana je spektralna raspodela zračenja (spektralna emisiona moć - $\varepsilon_{\lambda,T}$) apsolutno crnog tela na različitim temperaturama. Pod spektralnom raspodelom zračenja podrazumeva se energija koju telo emituje sa jedinične površine u jedinici vremena u veoma uzanom intervalu talasnih dužina. Talasna dužina na kojoj se emituje najviše energije na određenoj temperaturi označava se sa λ_m i na grafiku odgovara maksimumu funkcije. Utvrđeno je da se sa porastom temperature maksimum emisione moći apsolutno crnog tela pomera ka kraćim talasnim dužinama, kao što se može uočiti na slici *5.4*. Ova eksperimentalno ustanovljena činjenica poznata je kao Vinov zakon pomeranja. Analitički oblik ovog zakona, određen za apsolutno crno telo, je oblika:



Slika 5.4 Spektralna emisiona moć apsolutno crnog tela na različitim temperaturama

$$\lambda_m = \frac{b}{T}, \tag{5.18}$$

gde je $b = 2{,}9 \cdot 10^{-3}\mathrm{m} \cdot \mathrm{K}$ Vinova konstanta. U spektrima toplotnog zračenja drugih tela je takođe ustanovljeno da je talasna dužina na kojoj se emituje najviše energije obrnuto srazmerna temperature, te izraz (5.18) aproksimativno važi i za druge termičke izvore. Pomenuti izraz omogućava da se na osnovu emisionog spektra proceni temperatura tela. Iz snimljenog emisionog spektra tela odredi se λ_m a potom se pomoću Vinovog zakona izračuna temperatura:

$$T = \frac{b}{\lambda_m}. \tag{5.19}$$

Ukupna energija koju emituju tela sa jedinične površine u jedinici vremena naziva se intenzitet zračenja ili gustina emitovanog radijacionog fluksa. Intenzitet zračenja apsolutno crnog tela grafički predstavlja površinu ispod krive koja prikazuje emisionu moć u zavisnosti od temperature (slika *5.4*) i srazmeran je četvrtom stepenu temperature:

$$I = \sigma T^4 \,, \tag{5.20}$$

gde je $\sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8}\ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2K^4}}$ Štefan-Bolcmanova konstanta. Ova relacija poznata je kao Štefan-Bolcmanov zakon zračenja.

Intenzitet termičkog zračenja koje emituju druga tela je uvek manji u poređenju sa zračenjem apsolutno crnog tela na istoj temperaturi. Stoga se gustina emitovanog radijacionog fluksa (intenzitet zračenja) računa kao:

$$j_z = \varepsilon \sigma T^4 \,, \tag{5.21}$$

gde je ε koeficijent emisije (emisivnost) koja se kreće u intervalu $0 \leq \varepsilon \leq 1$ ($\varepsilon = 1$ za apsolutno crno telo). Emisivnost prvenstveno zavisi od stanja površine tela kao i od njegove temperature. U tabeli *5.3* su date brojne vrednosti emisivnosti nekih materijala.

Tabela 5.3 Emisivnost pojedinih materijala na temperaturi $\mathbf{300\ K}$

materijal	ε
staklo	0,9
poliran čelik	0,17
crvena cigla	0,93-0,96
ljudska koža	0,95
drvo	0,82-0,92
zemljište	0,93-0,96
gipsani malter	0,93
beton	0,93

Posmatrajmo telo apsolutne temperature T čija je ukupna površina S. Temperaturu okoline u kojoj se nalazi posmatrano telo označimo sa T_{ok}, pri čemu je $T > T_{ok}$. Sumarni radijacioni toplotni fluks između tela i okoline se može proceniti na osnovu izraza:

$$\phi_z = \varepsilon S \sigma (T^4 - T_{ok}^4)\,, \tag{5.22}$$

Pored toga što omogućava da se aproksimativno opiše zračenje termičkih izvora, model apsolutno crnog tela je obeležio početak razvoja savremene kvantne fizike. Svi pokušaji da se eksperimentalno dobijena zavisnost emisione moći apsolutno crnog tela od talasne dužine objasni teorijskim zakonitostima klasične fizike bili su bezuspešni. Problem je rešen 1900. godine kada je nemački fizičar Maks Plank postavio hipotezu da se elektromagnetno zračenje ne emituje kontinualno, već u tačno određenim paketima (kvantima) energije:

$$E = h\nu = \frac{hc}{\lambda}\,, \tag{5.23}$$

gde je $h = 6{,}626 \cdot 10^{-34}\ \mathrm{Js}$ Plankova konstanta, ν frekvencija, a λ talasna dužina zračenja. Prethodni izraz definiše energiju fotona, pošto su kvanti energije elektromagnetnog zračenja nazvani fotoni.

5.4 Pitanja i zadaci za samostalan rad

1. Nabrojati načine prenošenja toplote.

2. Izračunati konduktivni toplotni fluks kroz omotač cilindra unutrašnjeg prečnika $15\ \mathrm{cm}$ obračunat po jedinici dužine cilindrične cevi. Spoljašnji poluprečnik cilindra je $10\ \mathrm{cm}$. Temperature unutrašnje i spoljašnje površine cilindričnog sloja iznose $60\ ^\circ\mathrm{C}$ i $300\ \mathrm{K}$, respektivno. Toplotna provodljivost materijala je $0{,}5\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{Km}}$

3. Od čega zavisi koeficijent prelaza toplote?

4. Kako se toplota prenosi provođenjem?

5. Otpor provođenju toplote dvoslojnog zida od maltera i cigle iznosi $0{,}127\ \frac{\mathrm{m^2K}}{\mathrm{W}}$. Poznato je da debljina maltera iznosi $2\ \mathrm{cm}$ a njegova toplotna provodljivost $0{,}51\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{Km}}$, dok je je toplotna provodljivost cigle $1{,}7\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m{\cdot}K}}$. Na osnovu ovih podataka izračunati debljinu sloja od cigle.

6. Da li je sledeća tvrdnja tačna? Ukupna energija koja se emituje sa jedinične površine u jedinici vremena naziva se intenzitet zračenja (I) i istovremeno predstavlja ukupnu snagu koja se emituje sa jedinice površine odnosno gustinu emitovanog radijacionog fluksa.

7. Sa porastom temperature tela talasna dužina na kojoj se emituje najviše energije zračenjem: a) raste; b) opada; c) ne menja se; d) kod nekih tela raste dok kod drugih opada – odnosno nema pravila. Zaokružiti tačno.

8. Talasna dužina na kojoj neko telo emituje najviše energije iznosi $0{,}005\ \mathrm{mm}$. Kolika je temperatura površine tela uz pretpostavku da ono zrači kao apsolutno crno telo?

9. Kako intenzitet zračenja apsolutno crnog tela zavisi od temperature?

6 ELASTIČNOST

Među česticama (atomima, molekulima ili jonima) od kojih su tela izgrađena deluju sile elektromagnetne prirode koje sistem čine kompaktnim. Ove kohezione elastične sile imaju osobinu da su jednake nuli kad se čestice nalaze na ravnotežnim rastojanjima. Ukoliko se rastojanje između česticama npr. smanji, u odnosu na ravnotežno, ove sile se aktiviraju i postaju odbojne[42] u težnji da vrate čestice na ravnotežno rastojanje. Utvrđeno je da se intenzitet elastičnih sila direktno proporcionalan promeni rastojanja (x) u odnosu na ravnotežno:

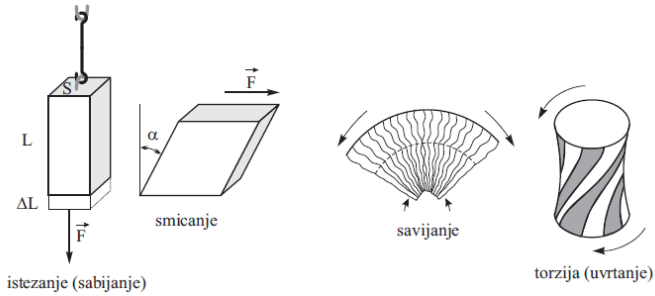
$$F = -kx\,. \tag{6.1}$$

Konstanta srazmere k je koeficijent elastičnosti koji zavisi od vrste materijala. Jedinica za koeficijent elastičnosti u SI sistemu je $\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$. Do promene međusobnog rastojanja među česticama dolazi pri deformaciji tela. Pod deformacijom se podrazumeva promena dimenzija i oblika tela pod dejstvom spoljašnjih sila. Znak minus u izrazu 6.1 označava da se elastične sile suprotstavljaju delovanju spoljašnjih sila, odnosno teže da vrate čestice u ravnotežne položaje. Kod deformacije istezanja rastojanje između čestica raste pa unutrašnje elastične sile imaju privlačni karakter. Nasuprot tome, pri sabijanju su elastične sile odbojne jer se čestice približavaju na rastojanja koja su manja od ravnotežnog. Postojanje unutrašnjih elastičnih sila u oba slučaja ima za posledicu da se telo pri deformaciji nalazi u tzv. napetom stanju. Pri deformaciji telo poprima konačan oblik i dimenzije kad se unutrašnje elastične sile uravnoteže sa spoljašnjim silama. Ako se po prestanku dejstva spoljašnjih sila telo vrati u stanje pre deformacije, deformacija je elastična. Kod plastične deformacije telo po prestanku dejstva spoljašnjih sila ostaje trajno deformisano.

Deformacije istezanja (sabijanja) i smicanja predstavljaju osnovne deformacije (slika *6.1*). Istezanje (sabijanje) nastaje ako spoljašnje sile deluju normalno na površinu, a smicanje u slučaju kada sile deluju tangencijalno. Različite složene deformacije mogu se prikazati kao kombinacija osnovnih deformacija (slika *6.1*). Na primer, savijanje je

[42] Ukoliko se rastojanje poveća sile su privlačne.

kombinacija istezanja i sabijanja, a torzija (uvrtanje) se svodi na osnovnu deformaciju smicanja.

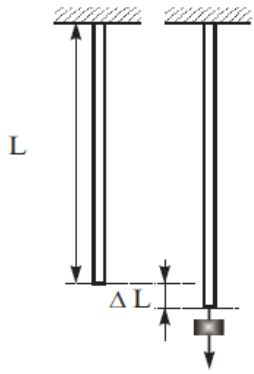


Slika 6.1 Različite vrste deformacija

6.1 Istezanje i sabijanje

Deformaciju istezanja je najjednostavnije proučavati na primeru žice koja se na jednom kraju učvrsti, a na drugom optereti tegovima. Težina tegova predstavlja spoljašnju silu koja uzrokuje deformaciju žice (slika *6.2*). Deformisanje traje sve dotle dok unutrašnje elastične sile po intenzitetu ne izjednače sa težinom tegova.

Na slici *6.2* je prikazano istezanje žice do kog dolazi ukoliko sila F deluje normalno na površinu poprečnog preseka S. Apsolutna mera deformacije je promena dužine žice odnosno izduženje ΔL. Kao mera deformacije koristi se i relativna deformacija koja predstavlja odnos promene dimenzije tela i prvobitne dimenzije, u slučaju istezanja relativna deformacija je količnik $\frac{\Delta L}{L}$. Relativna deformacija je bezdimenziona veličina. Engleski naučnik Robert Huk eksperimentalno je ustanovio da je relativno istezanje žice pod dejstvom sile F srazmerno količniku sile i površine poprečnog preseka žice:



Slika 6.2 Apsolutna deformacija pri istezanju

$$\frac{\Delta L}{L} = \frac{1}{E}\frac{F}{S}, \tag{6.2}$$

gde je E Jangov modul elastičnosti koji pokazuje u kojoj meri se materijal suprotstavlja deformaciji. Sila koja deluje po jedinici površine poprečnog preseka predstavlja normalni napon[43] i označava se sa σ:

$$\sigma = \frac{F}{S}. \tag{6.3}$$

Hukov zakon se shodno tome može napisati u obliku:

$$\frac{F}{S} = E\frac{\Delta L}{L}, \tag{6.4}$$

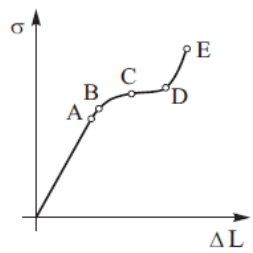
odnosno:

$$\sigma = E\frac{\Delta L}{L}. \tag{6.5}$$

Ako se izraz 6.5 napiše u obliku:

$$E = \frac{\sigma}{\frac{\Delta L}{L}}, \tag{6.6}$$

vidi se da je Jangov modul elastičnosti brojno jednak naponu pri kom bi došlo do jedinične relativne promene dužine (ako je $\frac{\Delta L}{L} = 1$ $E = \sigma$)[44]. Jangov modul ne zavisi od geometrijskog oblika niti od dimenzija tela, već samo od vrste materijala. Modul elastičnosti ima istu jedinicu u SI sistemu kao i napon čija jedinica je $\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}$. U tabeli *6.1* date su brojne vrednosti Jangovog modula elastičnosti za neke materijale.



Slika 6.3 Zavisnost normalnog napona od relativne deformacije

[43] Iako je napon definisan preko intenziteta spoljašnje sile on predstavlja odgovor materijala na dejstvo sila koje izazivaju deformaciju tela.

[44] Jangov modul elastičnosti jednak je naponu pri kom se dužina žice udvostruči.

Pri istezanju (sabijanju) žice dolazi i do promene poprečnih dimenzija s tim da je relativna promena prečnika žice ($\frac{\Delta d}{d}$) manja[45] od relativne promene dužine žice ($\frac{\Delta L}{L}$). Odnos poprečne (transverzalne) i uzdužne (longituinalne) relative deformacije predstavlja Poasonov koeficijent:

$$\mu = -\frac{\frac{\Delta d}{d}}{\frac{\Delta L}{L}}. \tag{6.7}$$

Znak minus u prethodnom izrazu obezbeđuje da Poasonov koeficijent ima pozitivnu vrednost pošto se pri istezanju prečnik žice smanjuje a pri sabijanju prečnik povećava[46]. Recipročna vrednost Poasonovog koeficijenta predstavlja Poasonov broj.

Tabela 6.1 Jangov modul elastičnosti nekih materijala

materijal	$E\left[\frac{\mathrm{GN}}{\mathrm{m}^2}\right]$	materijal	$E\left[\frac{\mathrm{GN}}{\mathrm{m}^2}\right]$
aluminijum	69	beton	15-40
čelik	180-230	pleksiglas	2,5
bakar	117	kaučuk	$7{,}9\cdot 10^{-3}$
srebro	83	tvrdo drvo	15,7
gvožđe	210	najlon	2-4
granit	52	staklo	50-90

Hukov zakon važi samo u određenim granicama pri deformaciji. Napon pri kome se narušava linearna zavisnost zove se granica proporcionalnosti (tačka A na slici *6.3*). Dalje povećanje napona (od tačke A do tačke B na slici *6.3*) takođe ima za posledicu izduženje

[45] Promena poprečnih dimenzija se često zanemaruje s obzirom da ovu eksperimentalno utvrđenu činjenicu.

[46] Ako je transverzalna relativna deformacija pozitivna longitudinalna je negativna i obrnuto.

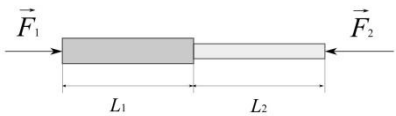
žice, ali je prisutno veće ili manje odstupanje od Hukovog zakona. Napon koji odgovara tački B naziva se granicom elastičnosti. Primenom napona većeg od granice elastičnosti za dati materijal, žica ostaje trajno deformisana. Deo krive od tačke B do tačke C pokazuje da izduženje raste sa povećanjem napona nešto brže nego ranije. Posle tačke C počinje horizontalni deo krive gde se žica izdužuje bez povećanja napona. Ova pojava se objašnjava pregrupisavanjem malih kristala unutar ispitivanog materijala. Nakon pregrupisavanja kristala žica postaje izdržljivija i kriva opet kreće naviše sve dok se žica konačno ne prekine. Napon pri kome dolazi do pucanja žice je granica izdržljivosti (tačka E).

6.2 Koncept ekvivalentnog štapa

Delovi građevinskih konstrukcija su najčešće nehomogeni. Za opisivanje njihovih elastičnih svojstava često se koristi koncept ekvivalentnog štapa. Pod ekvivalentnim štapom se podrazumeva homogen štap, iste geometrije kao razmatrani deo konstrukcije, koji se na isti način ponaša pri deformaciji.

Redna veza

Dvodelni štap se sastoji od homogenih štapova različitih dužina L_1 i L_2 i površina poprečnog preseka S_1 i S_2, kao što je prikazano na slici *6.4*. Štapovi su napravljeni od različitog materijala i nadovezani su jedan na drugog, kao na slici, tako da se uzdužne ose štapova poklapaju. Neka na dvodelni štap deluju sile koje izazivaju sabijanje štapa u mirovanju pri čemu se deformacija odvija u oblasti važenja Hukovog zakona.



Slika 6.4 Dvodelni štap

Iz uslova ravnoteže sledi da je intenzitet sila koje deluju na štapove jednak[47]. Isti slučaj imamo kad je dvodelni štap jednim krajem oslonjen na nepomičan zid a na drugi kraj štapa se deluje silom F na sabijanje[48].

Pod dejstvom sile F dolazi do apsolutne deformacije delova štapa za ΔL_1 i ΔL_2, respektivno. Na osnovu Hukovog zakona (izraz 6.4) ΔL_1 i ΔL_2 se mogu izraziti na sledeći način:

$$\Delta L_1 = \frac{F\ L_1}{S_1\ E_1}, \tag{6.8}$$

$$\Delta L_2 = \frac{F\ L_2}{S_2\ E_2}, \tag{6.9}$$

Ukupna promena dužine dvodelnog štapa pod dejstvom sile F je:

$$\Delta L = \Delta L_1 + \Delta L_2\ , \tag{6.10}$$

$$\Delta L = \frac{F\ L_1}{S_1\ E_1} + \frac{F\ L_2}{S_1\ E_2} = F\left(\frac{L_1}{S_1\ E_1} + \frac{L_2}{S_2\ E_2}\right). \tag{6.11}$$

Zbog različite površine porečnog preseka naponi u štapovima se razlikuju i iznose:

$$\sigma_1 = \frac{F}{S_1}, \tag{6.12}$$

$$\sigma_2 = \frac{F}{S_2}. \tag{6.13}$$

Ukoliko su površine S_1 i S_2 jednake ima smisla govoriti o ekvivalentnom štapu i ekvivalentnom modulu elastičnosti (E_e). Pod ekvivalentnim štapom se podrazumeva homogen štap iste geometrije koji se na isti način ponaša pri deformaciji. Dužina ekvivalentnog štapa je $L = L_1 + L_2$ a površina poprečnog preseka $S = S_1 = S_2$. Hukov zakon za ekvivalentni štap ima oblik:

---

[47] Kada bi sile bile različitog intenziteta dvodelni štap bi se kretao pod dejstvom rezultujuće sile.

[48] Zid deluje na štap silom istog intenziteta a suprotnog smera što proizilazi iz III Njutnovog zakona.

$$\frac{F}{S} = E_e \frac{\Delta L}{L_1 + L_2}, \tag{6.14}$$

odakle sledi da je aspolutna deformacija homogenog štapa:

$$\Delta L = \frac{F(L_1 + L_2)}{S\, E_e}. \tag{6.15}$$

Ukupna promena dužine jednaka je zbiru apsolutnih deformacija delova štapa ($\Delta L = \Delta L_1 + \Delta L_2$) što se uz uslov $S = S_1 = S_2$može zapisati:

$$\frac{F(L_1 + L_2)}{S\, E_e} = \frac{F}{S}\left(\frac{L_1}{E_1} + \frac{L_2}{E_2}\right), \tag{6.16}$$

odakle se dobija da ekvivalentni Jangov modul elastičnosti zavisi od elastičnih svojstava materijala i dužine delova na sledeći način:

$$E_e = \frac{L_1 + L_2}{\frac{L_1}{E_1} + \frac{L_2}{E_2}}. \tag{6.17}$$

Množenjem imenioca i brojioca prethodne relacije površinom poprečnog preseka (S) dobija se:

$$E_e = \frac{SL_1 + SL_2}{\frac{SL_1}{E_1} + \frac{SL_2}{E_2}} = \frac{V_1 + V_2}{\frac{V_1}{E_1} + \frac{V_2}{E_2}}, \tag{6.18}$$

gde su V_1 i V_2 zapremine pojedinih delova.

Ukoliko se štap sastoji od n delova različitih dužina i jednakih površina poprečnog preseka ekvivalentni Jangov modul elastičnosti se može izračunati pomoću jedne od sledećih relacija:

$$E_e = \frac{\sum_{i=1}^{n} L_i}{\sum_{i=1}^{n} \frac{L_i}{E_i}} \tag{6.19}$$

$$E_e = \frac{\sum_{i=1}^{n} V_i}{\sum_{i=1}^{n} \frac{V_i}{E_i}} \tag{6.20}$$

Paralelna veza

Dav štapa od različitog materijala, istih dužina L a različitih površina porečnog preseka S_1 i S_2, postavljeni su jedan uz drugog (paralelno) kao na slici *6.5* . Krajevi štapova su čvrsto spojeni. Štapovi su zajedno opterećeni na istezanje pod dejstvom sile F koja izaziva deformaciju u oblasti važenja Hukovog zakona.

Slika 6.5 Paralelno spojeni štapovi

Apsolutne i relativne deformacije oba štapa su u ovom slučaju jednake ($\Delta L = \Delta L_1 = \Delta L_2$ i $\delta = \delta_1 = \delta_2$). Istezanje se razmatra pod pretpostavkom da za oba štapa važi Hukov zakon te, iz jednakosti relativnih deformacija, sledi da je količnik napona i Jangovog modula elastičnosti isti za oba materijala:

$$\frac{\sigma_1}{E_1} = \frac{\sigma_2}{E_2}. \tag{6.21}$$

Očigledno je da naponi u štapovima nisu jednaki pošto je njihov odnos jednak odnosu Jangovih modula elastičnosti ($\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{E_1}{E_2}$). Materijal većeg Jangovog modula elastičnosti je pod većim naponom.

Na štapove pojedinačno deluju sile F_1 i F_2 čiji zbir je jednak sili koja deluje na dvodelni štap ($F = F_1 + F_2$). Hukov zakon za štapove pojedinačno se može napisati na sledeći način:

$$\frac{F_1}{S_1} = E_1 \frac{\Delta L}{L}; \tag{6.22}$$

$$\frac{F_2}{S_2} = E_2 \frac{\Delta L}{L}. \tag{6.23}$$

Polazeći od rethodnih relacija dobijaju se izrazi za intenzitete sila F_1 i F_2:

$$F_1 = E_1 S_1 \frac{\Delta L}{L} \tag{6.24}$$

$$F_2 = E_2 S_2 \frac{\Delta L}{L} \tag{6.25}$$

Dvodelni štap se može posmatrati kao celina dužine L i površine porečnog preseka $S = S_1 + S_2$. Hukov zakon za ovaj ekvivalentni štap ima oblik[49]:

$$\frac{F}{S_1 + S_2} = E_e \frac{\Delta L}{L}. \tag{6.26}$$

S obzirom da je $F = F_1 + F_2$ prethodna relacija postaje:

$$\frac{E_1 S_1 \frac{\Delta L}{L} + E_2 S_2 \frac{\Delta L}{L}}{S_1 + S_2} = E_e \frac{\Delta L}{L}, \tag{6.27}$$

odakle sledi:

$$E_e = \frac{E_1 S_1 + E_2 S_2}{S_1 + S_2}. \tag{6.28}$$

Ekvivalentni modul elastičnosti se može izraziti i preko zapremina delova štapa. Ukoliko se imenilac i brojilac prethodne relacije pomnože sa L dobija se:

$$E_e = \frac{E_1 S_1 L + E_2 S_2 L}{S_1 L + S_2 L} = \frac{V_1 E_1 + V_2 E_2}{V_1 + V_2}, \tag{6.29}$$

gde su V_1 i V_2 zapremine pojedinih materijala.

Elastična deformacila n međusobno paralalenih štapova, iste dužine i različitih površina poprečnog preseka koji su spojeni na krajevima kao što je prikazano na slici, u oblasti

[49] Apsolutna deformacija ekvivalentnog štapa pod dejstvom sile F je jednaka je apsolutnoj deformaciji štapova pojedinačno i iznosi ΔL.

važenja Hukovog zakona može se opisati ekavivalentnim modulom elastičnosti koji se računa na sledeći način:

$$E_e = \frac{\sum_{i=1}^{n} E_i S_i}{\sum_{i=1}^{n} S_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} V_i\, E_i}{\sum_{i=1}^{n} V_i}\,. \qquad (6.30)$$

Kompoziti

Kompozitni materijali (kompoziti), predstavljaju kombinaciju dva ili više materijala sa različitim svojstvima. Primer kompozitnih materijala koji se koriste u građevinarstvu su beton, malter, stakloplastika (fiberglas), armirani beton[50], ojačano staklo, šperploča itd.. Kombinovanje različitih materijala se vrši u cilju dobijanja kompozita željenih karakteristika, npr. male gustine i velike čvrstoće. Kompoziti mogu biti: ojačani česticama, ojačani vlaknima, laminatni i kombinovani. Kompozit ojačan česticama je beton. Primer kompozita ojačanog vlaknima je stakloplastika gde su u polimernu matricu ubačena staklena vlakna. Šperploča je laminatni kompozit koji se sastoji od unakrsno lepljenih furnira drveta.

U pogledu fizičkih osobina kompoziti mogu biti izotropni i anizotropni. Ukoliko su čestice raspoređene ravnomerno, kompoziti ojačani česticama su izotropni. Kompoziti ojačani vlaknima su najčešće anizotropni, dok su laminatni kompoziti anizotropni.

Elastična svojstva kompozita zavise od elastičnih svojstava materijala koji se kombinuju, njihovih zapreminskog odnosa ali i od drugih faktora. Na primer, kod kompozita ojačanih vlaknima modul elastičnosti zavisi od orijentacije vlakana u odnosu na pravac delovanja sile. Ukoliko su vlakna orijentisana u pravcu delovanja sile modul elastičnosti dvokomponentnog kompozita se određuje pomoću izraza[51]:

$$E_{c\|} = \frac{V_v E_v + V_m E_m}{V_v + V_m} = v_v E_v + v_m E_m\,, \qquad (6.31)$$

[50] U poslednje vreme se čelična armatura zamenjuje armaturom od kompozitnog materijala.

[51] Pošto izraz istog oblika važi za paralelnu vezu dva štapa iste dužine (relacija 6.29) sledi zaključak da su vlakna i matrica pod različitim naponima pri deformaciji istezanja u pravcu vlakana.

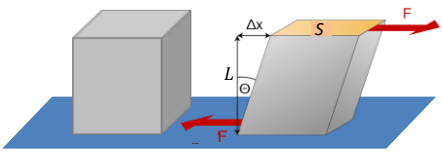
u kom $v_v = \frac{V_v}{V_v+V_m}$ i $v_m = \frac{V_m}{V_v+V_m}$ predstavljaju zapreminski udeo vlakana i osnove (matrice), respektivno, dok su E_v i E_m njihovi moduli elastičnosti. Ako je opterećenje normalno na pravac vlakana, modul elastičnosti kompozita se računa pomoću izraza[52]:

$$\frac{1}{E_{c\perp}} = \frac{\frac{V_v}{E_v} + \frac{V_m}{E_m}}{V_v + V_m} = \frac{v_v}{E_v} + \frac{v_v}{E_v}. \tag{6.32}$$

Kompoziti ojačani vlaknima u jednom pravcu su anizotropni, najveći modul elastičnosti je u pravcu vlakana. U tom pravcu se povećavaju čvrstoća i krutost. U pravcu normale na vlakna su pomenuta svojstva loša, modul elastičnosti je znatno manji, ponekad manji i od modula elastičnosti same matrice. Da bi se postigla optimalna svojstva u više pravaca, kompoziti često sadrže slojeve sa različitom orijentacijom vlakana. Ukoliko je orijentacija vlakana slučajna kompoziti se pri deformaciji ponašaju izotropno, ali je ojačanje malo.

6.3 Smicanje

Do smicanja dolazi pod dejstvom sprega[53] sila kao što je prikazano na slici *6.6* . Sile koje izazivaju smicanje deluju tangencijalno na površine te se u materijalu javlja tangencijalni napon $\sigma_\tau = \frac{F}{S}$, definisan preko količinika intenziteta sile F i površine S. Kod smicanja dolazi do paralelnog pomeranja tankih slojeva u unutrašnjosti tela. Slojevi se pomeraju, jedan u odnosu na drugog, paralelno pravcima dejstva spoljašnjih sila. Deformacija smicanja se prvenstveno ispoljava preko promene oblika tela, kao što je prikazano na slici *6.6* na kojoj je prikazano nedeformisano telo oblika pravouglog paralelopipeda i isto telo nakon deformacije smicanja.



Slika 6.6 Deformacija smicanja

[52] Izraz istog oblika važi za rednu vezu dva štapa iste površine poprečnog preseka (relacija 6.20).

[53] Spreg sila obrazuju dve međusobno paralelne sile, istih intenziteta i suprotnog smera, koje imaju različite napadne tačke na posmatranom telu.

U prikazanom primeru smicanja došlo je do pomeranja dve međusobno paralelne stranice paralelograma za Δx koje predstavlja apsolutnu deformaciju pri smicanju. Relativna deformacija pri smicanju je količnik apsolutne deformacije i međusobnog rastojanja paralelnih stranica. Sa slike *6.6* se vidi da relativna deformacija pri smicanju (pomenuti odnos $\frac{\Delta x}{L}$) predstavlja trigonometrijsku funkciju ugla θ:

$$\mathrm{tg}\theta = \frac{\Delta x}{L}. \tag{6.33}$$

Pri smicanju je relativna deformacija srazmerna tangencijalnom naponu:

$$\sigma_\tau = E_s \frac{\Delta x}{L}, \tag{6.34}$$

gde je E_s modul smicanja. U tabeli *6.2* su date brojne vrednosti modula smicanja za različite materijale.

Modul smicanja je povezan sa Jangovim modulom elastičnosti preko Poasonovog koeficijenta (definisanog izrazom 6.7) sledećom relacijom:

$$E_s = \frac{E}{2(1+\mu)}. \tag{6.35}$$

Tabela 6.2 Modul smicanja pojedinih materijala

materijal	E_s [GPa]	materijal	E_s [GPa]
aluminijum	25	beton	2,6-3,5
čelik	83	bakar	42
gvožđe	77	olovo	54

6.4 Zapreminska deformacija

Ukoliko je telo potopljeno u tečnost dolazi do zapreminske deformacije odnosno do smanjenja zapremine za ΔV u odnosu na zapreminu V u vazduhu. Ukoliko se slojevi

tečnosti ne kreću jedan u odnosu na drugog do zapreminske deformacije dolazi pod dejstvom hidrostatičkog pritiska. Pri zapreminskoj deformaciji je relativna deformacija je srazmerna hidrostatičkom pritisku kojim tečnost deluje na telo:

$$p = B\frac{\Delta V}{V}, \tag{6.36}$$

gde je B zapreminski modul stišljivosti. U tabeli *6.3* su date brojne vrednosti zapreminskog modula stišljivosti.

Tabela 6.3 Zapreminski modul stišljivosti pojedinih materijala

materijal	B [GPa]	materijal	B [GPa]
aluminijum	71	dijamant	443
čelik	140	najlon	6,1
gvožđe	160	bakar	130
pireks staklo	26	voda	2,2

6.5 Termičko širenje i naponi

Do promena dimenzija tela može doći ne samo pod dejstvom sila već i usled promene temperature tela. Pri zagrevanju se dimenzije tela povećavaju, dok je pri hlađenju obrnuto[54]. Posmatrajmo šipku dužine L koja se nalazi na temperaturi T. Ukoliko se temperatura šipke promeni za ΔT, promena njene dužine iznosi:

$$\Delta L = L\alpha\Delta T, \tag{6.37}$$

gde je α koeficijent linearnog širenja čija je jedinica u SI sistemu $\frac{1}{°C}$. Koeficijent linearnog širenja zavisi od vrste materijala i od temperature. Promena α sa temperaturom se u proračunima zanemaruje ukoliko promena temperature nije velika. U tabeli *6.4* su date brojne vrednosti temperaturskog koeficijenta linearnog širenja pojedinih materijala.

[54] Izuzetak je klasa materijala sa negativnim koeficijentom linearnog širenja u određenom temperaturskom intervalu, npr. voda u temperaturskom intervalu $0 - 4°C$.