UNIVERZITET U NOVOM SADU
FAKULTET TEHNIČKIH NAUKA

Ljubo Nedović

NEKI TIPOVI RASTOJANJA I FAZI MERA SA PRIMENOM U OBRADI SLIKA

DOKTORSKA DISERTACIJA

Novi Sad, 2016

УНИВЕРЗИТЕТ У НОВОМ САДУ ● **ФАКУЛТЕТ ТЕХНИЧКИХ НАУКА**
21000 НОВИ САД, Трг Доситеја Обрадовића 6

КЉУЧНА ДОКУМЕНТАЦИЈСКА ИНФОРМАЦИЈА

Редни број, **РБР**:	
Идентификациони број, **ИБР**:	
Тип документације, **ТД**:	Монографска документација
Тип записа, **ТЗ**:	Текстуални штампани материјал
Врста рада, **ВР**:	Докторска дисертација
Аутор, **АУ**:	Љубо Недовић
Ментор, **МН**:	Проф. др Небојша Ралевић
Наслов рада, **НР**:	Неки типови растојања и фази мера са применом у обради слика
Језик публикације, **ЈП**:	Српски
Језик извода, **ЈИ**:	Српски, Енглески
Земља публиковања, **ЗП**:	Република Србија
Уже географско подручје, **УГП**:	Војводина
Година, **ГО**:	2017
Издавач, **ИЗ**:	Ауторски репринт
Место и адреса, **МА**:	Нови Сад, Факултет техничких наука, Трг Доситеја Обрадовића 6
Физички опис рада, **ФО**: (поглавља/страна/цитата/табела/слика/графика/прилога)	5/128/50/35/22/17/0
Научна област, **НО**:	Примењена математика
Научна дисциплина, **НД**:	Фази математика
Предметна одредница/Kључне речи, **ПО**:	Функција растојања, метрика, фази операције, оператори агрегације, уопштене средине, сегментација слике, Fuzzy c-means algorithm
УДК	
Чува се, **ЧУ**:	Библиотека Факултета техничких наука, Трг Доситеја Обрадовића 6, Нови Сад
Важна напомена, **ВН**:	
Извод, **ИЗ**:	Докторска дисертација изучава примену фази операција, првенствено агрегационих оператора на функције растојања и метрике. Оригиналан допринос тезе је у конструкцији нових функција растојања и метрика применом агрегационих оператора на неке полазне функције растојања и метрике. За неке типове агрегационих оператора и полазних функција растојања и метрика су испитане особине овако конструисаних функција растојања и метрика. За неке од њих су испитане перформансе при примени у сегментацији слике „Fuzzy c-means“ алгоритмом.
Датум прихватања теме, **ДП**:	08.09.2016.
Датум одбране, **ДО**:	

Чланови комисије, **КО**:		
Председник:	др Ендре Пап, редовни професор у пензији	
Члан:	др Илија Ковачевић, редовни професор у пензији	
Члан:	др Раде Дорословачки, редовни професор	
Члан:	др Лидија Чомић, доцент	Потпис ментора
Члан:	др Марко Јанев, научни сарадник	
Члан, ментор:	др Небојша Ралевић, редовни професор	

УНИВЕРЗИТЕТ У НОВОМ САДУ ● **ФАКУЛТЕТ ТЕХНИЧКИХ НАУКА**
21000 НОВИ САД, Трг Доситеја Обрадовића 6

КЉУЧНА ДОКУМЕНТАЦИЈСКА ИНФОРМАЦИЈА

Accession number, **ANO**:		
Identification number, **INO**:		
Document type, **DT**:		Monographic publication
Type of record, **TR**:		Textual printed material
Contents code, **CC**:		PhD thesis
Author, **AU**:		Ljubo Nedović
Mentor, **MN**:		Professor Nebojša Ralević, PhD
Title, **TI**:		Some types of distance functions and fuzzy measures with application in image processing
Language of text, **LT**:		Serbian
Language of abstract, **LA**:		Serbian, English
Country of publication, **CP**:		Republic of Serbia
Locality of publication, **LP**:		Province of Vojvodina
Publication year, **PY**:		2017
Publisher, **PB**:		Author's reprint
Publication place, **PP**:		Novi Sad, Faculty of Technical Sciences, Trg Dositeja Obradovića 6
Physical description, **PD**: (chapters/pages/ref./tables/pictures/graphs/appendixes)		5/128/50/35/22/17/0
Scientific field, **SF**:		Applied Mathematics
Scientific discipline, **SD**:		Fuzzy Mathematics
Subject/Key words, **S/KW**:		Distance function, Metric, Fuzzy operations, Aggregation operators, Generalized means, Image segmentation, Fuzzy c-means algorithm
UC		
Holding data, **HD**:		Library of the Faculty of Technical Sciences, Trg Dositeja Obradovića 6, Novi Sad
Note, **N**:		
Abstract, **AB**:		This thesis studies application of fuzzy operations, especially aggregation operators, on distance functions and metrics. The contribution of the thesis is construction of new distance functions and metrics by application of aggregation operators on some basic distance functions and metrics. For some types of aggregation operators and basic distance functions and metrics, properties of distance functions and metrics constructed in this way are analyzed. For some of them, performances in application in Fuzzy c-means algorithm are analyzed.
Accepted by the Scientific Board on, **ASB**:		08.09.2016.
Defended on, **DE**:		
Defended Board, **DB**:	President:	Endre Pap, PhD, full professor in retirement
	Member:	Ilija Kovačević, PhD, full professor in retirement
	Member:	Rade Doroslovački, PhD, full professor
	Member:	Lidija Čomić, PhD, assistant professor
	Member:	Marko Janev, PhD, research assistant professor
	Member, Mentor:	Nebojša Ralević, PhD, full professor

Menthor's sign

Obrazac **Q2.HA.06-05**- Izdanje 1

Zahvalnica

Mojoj porodici

u znak zahvalnosti za toplinu i podršku koju mi pružaju.

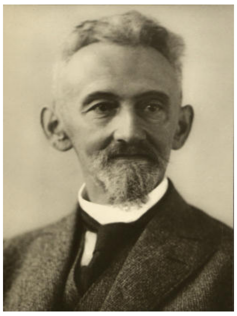
Zahvaljujem se profesoru Endreu Papu i profesoru Nebojši Raleviću na velikoj i dugogodišnjoj podršci u naučno-istraživačkom radu, i na to što su me usmerili u veoma zanimljive i aktualne oblasti matematike. Profesoru Radetu Doroslovačkom dugujem veliku zahvalnost na nesebično prenetom izuzetnom pedagoškom iskustvu. Zoranu Ovcinu se zahvaljujem na nesebičnoj pomoći u korišćenju računarskih alata. Hvala i svim ostalim kolegama na odličnoj saradnji u svim segmentima nastavnog i naučnog rada.

Istraživanje je finansijski podržano od strane Ministarstva prosvete, nauke i tehnološkog razvoja Vlade Republike Srbije, u okviru projekta TR34014.

Predgovor

Funkcije rastojanja, metrike i mere spadaju u fundamentalne matematičke pojmove. Koriste se u velikom broju oblasti matematike, a takođe imaju ogromnu ulogu u drugim naukama i njihovim primenama. Razvoj nauke i tehnike nametnuo je istraživanje raznovrsnih tipova ovakvih funkcija.

Nemački matematičar Felix Hausdorff je jedan od matematičara koji su dali najveće doprinose u proučavanju metrika i metričkih prostora.



Felix Hausdorff

Hausdorff-ova metrika na skupovima je i danas najpoznatija i često korišćena mera razlike dva skupa. Ipak, Hausdorff-ova metrika ima i neka, za primene loša svojstva, a to je prevelika osetljivost na male promene skupova na koje se primenjuje. Koliko je autoru poznato, do danas matematičari nisu uspeli da nađu značajno bolju metriku, u smislu dobrih osobina za primenu. Stoga se često konstruišu i proučavaju funkcije skupovnih rastojanja koje nisu metrike, tipično ne zadovoljavaju nejednakost trougla, ali imaju neke druge poželjne i dobre osobine. Navedeno važi ne samo za funkcije skupovnog rastojanja, već i generalno. Primena funkcija rastojanja diktira koje su njihove osobine potrebne ili poželjne. Konstrukcija i istraživanje osobina funkcija rastojanja pogodnih za neke vidove primene su tema ove disertacije.

U glavi 1 su date definicije nekih najvažnijih pojmova vezanih za funkcije rastojanja, kao i nekih drugih funkcija sličnog tipa poput npr. funkcija sličnosti. Naveden je niz raznih osobina koje ovakve funkcije mogu imati, a koje mogu imati manji ili veći značaj pri njihovoj primeni. Neke od navedenih osobina imaju značaj i u pojedinim teorijskim disciplinama kao što su npr. teorija grafova, teorija kodiranja, informatika itd. U glavi 1 je takođe naveden niz primera funkcija rastojanja. Razmotrena su i neka aktualna pitanja vezana za funkcije skupovnih rastojanja, što je takođe ilustrovano sa nekoliko primera.

U glavi 2 je dat prikaz nekih tipova fazi-operacija relevantnih za temu ove disertacije. U prvom delu su date definicije fazi-skupa i skupovnih fazi-operacija, njihova reprezentacija pomoću odgovarajućih operacija sa funkcijama pripadnosti fazi-skupova, uz odgovarajuće primere. U drugom delu je dat prikaz aritmetičkih binarnih operacija t-normi, t-konormi, i sa njima kompatibilnih unarnih operacija, koje zajedno predstavljaju jedan oblik reprezentacije skupovnih fazi-operacija. Navedene operacije se stoga i smatraju jednim tipom fazi-operacija. Prikazani su i mnogi važni primeri pomenutih operacija, njihove osobine, kao i reprezentacija putem monotonih generatora. Veliki doprinos u proučavanju ovakvih operacija, kao i na njima zasnovanih mera i integrala, dali su i prof. Endre Pap i drugi istraživači Univerziteta u Novom Sadu. U trećem delu glave 2 su ukratko prikazani neki osnovni pojmovi vezani za fazi-relacije. U četvrtom delu su navedene definicije, neke osnovne osobine, kao i važni primeri i klase operatora agregacije. Operatori agregacije su uopštenje pojmova t-normi i t-konormi, i u glavi 4 se koriste u konstrukciji novih funkcija rastojanja i metrika. Operatori agregacije se veoma često koriste i u raznim oblastima informatičkih nauka. Peti deo sadrži kratke napomene o defazifikaciji fazi-podataka.

U glavi 3 je opisan „Fuzzy c-Means Clustering Algorithm" (skraćeno FCM) algoritam za klasifikovanje podataka. FCM algoritam je fazifikovani oblik jednog od najpoznatijih algoritama za klasifikovanje, algoritma k unutrašnjih centara (Lloyd-ov algoritam). Osmišljen je 80-tih godina prošlog veka, prvobitno za potrebe geoloških istraživanja, a zatim je našao veliku primenu u segmentaciji raznih tipova slika i snimaka, npr. medicinskih rendgen-snimaka, meteoroloških snimaka itd. Za razliku od klasičnih algoritama za klasifikaciju, FCM algoritam umesto klasičnih klastera (skupova) formira odgovarajuće fazi-klastere (fazi-skupove), čijom se defazifikacijom dobijaju klasični klasteri klasifikovanih podataka. Kao i u svim algoritmima za klasifikaciju, i u FCM algoritmu se koriste odgovarajuće norme, metrike, ili funkcije rastojanja.

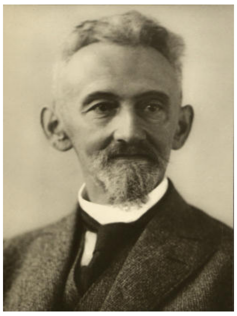
Sadržaj glave 4 je originalni doprinos ove disertacije. Prikazan je jedan način konstrukcije novih funkcija rastojanja i metrika, primenom operatora agregacije na neke polazne funkcije rastojanja i metrike. Razmotrene su neke od osobina iz glave 1 koje funkcije rastojanja mogu imati, a koje mogu biti značajne za primenu u FCM algoritmu i drugim vidovima klasifikacije podataka i obrade slika, kao i u drugim primenama. Istraženo je pod kojim uslovima i na koji način ovako konstruisane funkcije rastojanja nasleđuju osobine polaznih funkcija rastojanja. Razmotreni su neki tipovi operatora agregacije, i na koji način njihova svojstva utiču na svojstva konstruisanih funkcija rastojanja. Navedeni su primeri koji ilustruju ovako konstruisane metrike, a koje su pogodne za primenu u obradi slika.

U glavi 5 je prikazana primena u FCM algoritmu nekih funkcija rastojanja konstruisanih primenom operatora agregacije na neke pogodne polazne funkcije rastojanja. Izmerene su i uporeene neke performanse FCM algoritma sa pomenutim funkcijama rastojanja. Izvedeni su odgovarajući zaključci i predlozi za primenu.

Abstract

Distance functions, metrics and measure are fundamental mathematical notions. They are used in different areas of mathematics and also have an important role in science and applications. Development of science and technology has motivated investigation of different types of these functions.

Felix Hausdorff is one of mathematicians who gave the greatest contribution to study of metrics and metric spaces.



Felix Hausdorff

Hausdorff metrics on sets is the most famous one and it is often used as a measure of difference of two sets. However, this metrics has some bad properties when it comes to applications, as it is too sensitive to small changes of arguments. According to the author's knowledge, mathematicians have not found a significantly better metrics, in the sense of properties suitable for applications. Therefore, researchers often construct and study set distance functions that are not metrics and do not satisfy the triangle inequality, but have some other good properties. This holds not only for distance functions on sets, but in general, too. Application of distance functions dictates which properties of these functions are needed or considered "good". Construction and study of distance functions properties suitable for some applications are the main direction of research in this dissertation.

In Chapter 1 we give definitions of the most important notions related to distance functions, as well as some other functions of this type, such as similarity functions. We give a list of different properties that these functions can posses and that can have a significant role in some applications. Some of listed properties are important in theoretical disciplines, such as graph theory, coding theory, computer science. In Chapter 1 there is also a list of examples of distance functions. Some current questions related to distance functions on sets are considered and illustrated with several examples.

In Chapter 2 some types of fuzzy operations relevant for the topic of this dissertation are listed. The first part consists of definitions of fuzzy sets and fuzzy operations on sets, their representations through corresponding operati-

ons with membership functions, and examples. In the second part we recall arithmetic binary operations t-norms and t-conorms and compatible unary operations that together present a form of representation of set fuzzy operations. These operations are therefore considered to be a type of fuzzy operation. We give some important examples of these operations, their properties, as well as the representation through monotone generators. Prof. Endre Pap has given a great contribution in the study of these operations and corresponding measures and integrals, as well as other researchers from University of Novi Sad. In the third part of Chapter 2 we give in short some basic notions related to fuzzy relations. In the fourth part, definition, some basic properties and important examples and classes of aggregation operators are recalled. Aggregation operators are a generalization of t-norms and t-conorms and in Chapter 4 they are used in constructing new distance functions and metrics. Aggregation operators are often used in different areas of computer science.

In Chapter 3 we describe *Fuzzy c-Means Clustering Algorithm* (FCM) algorithm for data classification. FCM algorithm is a fuzzy-form of the one of the most famous algorithms for classification, Lloyd algorithm. It is developed in 80's, for some geological research and then it has found a great application in segmentation of different types of images and videos, in medicine, meteorology and so on. Differently than classical algorithms for classification, FCM algorithm instead of classical clusters (sets) forms corresponding fuzzy clusters (fuzzy sets) and through defuzzyfication obtains classical clusters of classified data. As in all algorithms for classifications FCM algorithm uses corresponding norms, metrics or distance functions.

Chapter 4 presents the original contribution of the dissertation. We present one way of constructing new distance functions and metrics, through application of aggregation operators to given distance functions and metrics. We study some properties from Chapter 1 that distance functions can have and that could be important for application in FCM algorithm and other forms of data classification and image processing. We investigate in what way and under what conditions constructed distance functions inherit some properties from original distance functions. We consider some types of aggregation operators and how their properties affect properties of constructed distance functions. Examples are given that illustrate metrics constructed in described way and that are suitable for application in image processing.

In Chapter 5 we show the application in FCM algorithm of some distance functions constructed by applying aggregation operators to some suitable distance functions. We studied some performances of FCM algorithm with mentioned distance functions. We gave some conclusions and suggestions for applications.

Sadržaj

Glava 1

Funkcija rastojanja

1.1 Funkcija rastojanja - definicija i osobine

Pojam funkcije rastojanja je uopštenje pojma metrike. Naime, za funkciju rastojanja ne mora da važi nejednakost trougla, ali se u mnogim primenama pojavljuje potreba za korišćenjem funkcija rastojanja koje, iako nemaju tu osobinu, imaju neka druga svojstva koja su bitna za određenu primenu. Polazeći od rastojanja dva elementa nekog prostora, definišu se i rastojanje elementa od skupa, rastojanje između dva skupa itd. Rastojanje između dva elementa se u nekim primenama može interpretirati i kao mera različitosti tih elemenata, a takođe se može definisati komplementarna mera sličnosti dva elementa. Mere različitosti i sličnosti elemenata se koriste npr. u prepoznavanju oblika, pri klasifikaciji (eng. *clustering*) elemenata u ***klastere***, gde se ovakve funkcije koriste za poređenje elementa kojeg treba svrstati u neki klaster sa već svrstanim elementima u klastere, ili sa celim klasterom kao skupom prethodno grupisanih elemenata, vidi [1]. Detaljan i obiman enciklopedijski prikaz ovakvih i srodnih funkcija i njihovih značajnih osobina se može naći u knjizi [10]. Većina osobina i tvrđenja koja nisu eksplicitno referencirana se mogu pronaći upravo u [10]. U ovoj knjizi su takođe opisane i neke primene funkcije rastojanja i sličnosti. Osim u teoriji prepoznavanja oblika, funkcije rastojanja i sličnosti se koriste u raznim vidovima obrade slika, obradi audio-signala, teoriji kodiranja, projektovanju internet i računarskih mreža, genetici, ekonomiji, kao i u raznim društvenim naukama.

Definicija 1.1.1 *Neka je $X \neq \emptyset$ proizvoljan neprazan skup.* ***Funkcija rastojanja*** *(eng.* distance function*) na skupu X je funkcija $d : X \times X \to [0, \infty)$ koja ima sledeće osobine* [1]*.*

[D1] $\forall x, y \in X,\ \ d(x, y) = d(y, x).$ (***simetričnost***)

[D2] $\forall x \in X,\ \ d(x, x) = 0.$ (***refleksivnost***)

[1] Po potrebi, za neke vidove primena, razmatraju se funkcije sa kodomenom $[0, \infty]$.

Uređeni par (X, d) *je* ***prostor sa rastojanjem****.*

Definicija 1.1.2 *Neka je* $X \neq \emptyset$ *proizvoljan neprazan skup.* ***Kvazi-rastojanje*** *(eng.* quasi-distance*) je funkcija* $d : X \times X \to [0, \infty)$ *koja zadovoljava samo osobinu* [D2]*.*

Osim navedene dve aksiome funkcije rastojanja, postoje mnoge druge važne osobine koje funkcije rastojanja mogu da imaju, i u zavisnosti od toga, neke funkcije rastojanja su metrike, funkcije sličnosti, itd. U sledećoj definiciji se navode neke od pomenutih važnih osobina.

Definicija 1.1.3 *Neka je* $X \neq \emptyset$*, i neka je* $d : X \times X \to [0, \infty)$*. Funkcija* d *može da ima sledeće važne osobine.*

[D3] $\forall x, y \in X,\ \ d(x, y) = 0 \ \Rightarrow\ x = y.$ (***identity of indiscernibles***)

[D4] $\forall x, y \in X,\ \ d(x, y) = 0 \ \Leftrightarrow\ x = y.$

[D5] $\forall x, y, z \in X,\ \ d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z).$ (***nejednakost trougla***)

[D6] $\forall x, y, z \in X,\ \ d(x, z) \leq \max(d(x, y), d(y, z)).$
(***ultrametrička nejednakost***)

[D7] $\forall x, y \in X,\ \ d(x, y) \leq d(x, x).$

[D8] $\forall x, y \in X,\ \ d(x, x) \leq d(x, y).$

[D9] $\forall x, y \in X,\ \ d(x, y) = d(x, x) \ \Leftrightarrow\ x = y.$

[D10] $\forall x, y, z \in X,\ \ d(x, y) + d(y, z) + d(z, x) = d(x, z) + d(z, y) + d(y, x).$
(***slaba simetričnost***)

[D11] $\exists w : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \forall x, y \in X,\ \ d(x, y) - d(y, x) = w(y) - w(x).$
(d ***is weightable***)

[D12] $\forall x, y, z \in X,\ \ d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) - d(z, z).$
(***sharp triangle inequality***)

[D13] *Za neku konstantu* $C \in [1, \infty)$ *važi*
$\forall x, y, z \in X,\ \ d(x, z) \leq C \cdot (d(x, y) + d(y, z)).$
(***C-nejednakost trougla***)

[D14] *Za neku konstantu* $C \in [1, \infty)$ *važi*
$\forall x, y, z \in X,\ \ x \neq z \ \Rightarrow\ 0 < d(x, z) \leq C \cdot \max\{d(x, y), d(y, z)\}.$
(***slaba C-ultrametrička nejednakost***)

[D15] *Za neke konstante* $\alpha \in (0, 1]$ *i* $\beta \in (0, \infty)$ *važi*
$\forall x, y, z \in X,\ \ |d(x, y) - d(x, z)| \leq \beta d^{\alpha}(y, z)(d(x, y) + d(x, z))^{1-\alpha}.$
(***Hölder-ova near-metric nejednakost***)

[D16] *Metrika* $d : X \times X \to [0, \infty)$ *se naziva* ***corse-path metric*** *ako za neku fiksnu konstantu* $C \in [0, \infty)$ *važi da za sve* $x, y \in X$ *postoji niz elemenata* $x = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_k = y$ *takvih da je*
$\forall i \in \{1, 2, \ldots, k\},\ \ d(x_{i-1}, x_i) \leq C,$
$d(x, y) \geq d(x_0, x_1) + d(x_1, x_2) + \cdots + d(x_{k-1}, x_k) - C.$

[D17] $\forall x, y, z, u \in X$,
$d(x,y) + d(z,u) \leq \max\{d(x,z) + d(y,u), d(x,u) + d(y,z)\}$.
(***four-point inequality***)

[D18] *Funkcija rastojanja d na skupu X se naziva* **Robinsonian rastojanje** *ili* **monotono rastojanje** *ako na skupu X postoji totalni poredak $\preceq$ kompatibilan sa d u smislu*

$$\forall x, y, z, u \in X, \quad x \preceq y \preceq z \preceq u \quad \Rightarrow \quad d(y,z) \leq d(x,u).$$

Ova implikacija je ekvivalentna sa

$$\forall x, y, z \in X, \quad x \preceq y \preceq z \quad \Rightarrow \quad d(x,y) \leq \max\{d(x,z), d(z,y)\}.$$

[D19] $\forall x, y, z, u \in X, \quad d(x,y)d(z,u) \leq d(x,z)d(y,u) + d(x,u)d(y,z)$.
(***Ptolemaic inequality***)

[D20] *Za $\delta \in [0, \infty)$ važi*

$\forall x, y, z, u \in X$,
$d(x,y) + d(z,u) \leq 2\delta + \max\{d(x,z) + d(y,u), d(x,u) + d(y,z)\}$.
(***Gromov δ-hyperbolic inequality***)

[D21] $\forall x, y, z, u \in X, \quad d(x,y) \leq d(x,z) + d(y,z) - d(x,z)d(z,y)$.
(***korelaciona nejednakost trougla***)

[D22] *Za sve različite elemente $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ i sve $m_1, m_2, \ldots, m_n \in \mathbb{Z}$ važi*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} m_i = 0 \ \wedge \ \sum_{i=1}^{n} |m_i| = 2k\right) \quad \Rightarrow \quad \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} m_i m_j d(x_i, x_j) \leq 0.$$

(**$2k$-gonalna nejednakost**)

[D23] *Za sve različite elemente $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ i sve $m_1, m_2, \ldots, m_n \in \mathbb{Z}$ važi*

$$\sum_{i=1}^{n} m_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} m_i m_j d(x_i, x_j) \leq 0.$$

(**negativna $2k$-gonalna nejednakost**)

[D24] *Za sve različite elemente $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ i sve $m_1, m_2, \ldots, m_n \in \mathbb{Z}$ važi*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} m_i = 1 \ \wedge \ \sum_{i=1}^{n} |m_i| = 2k+1\right) \quad \Rightarrow \quad \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} m_i m_j d(x_i, x_j) \leq 0.$$

(**$2k+1$-gonalna nejednakost**)

[D25] *Za sve različite elemente $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ i sve $m_1, m_2, \ldots, m_n \in \mathbb{Z}$ važi*

$$\sum_{i=1}^{n} m_i = 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} m_i m_j d(x_i, x_j) \leq 0.$$

(***hipermetrička nejednakost***)

[D26] $\forall x, y \in X, \quad d(x,y) = 0 \quad \Rightarrow \quad \forall z \in X, \ d(x,z) = d(y,z)$. (***istovrednost***)

U prepoznavanju oblika, funkciju rastojanja $d : X \times X \to [0, \infty)$ skupa X često interpretiramo kao ***funkciju različitosti*** na skupu X, tj. meru različitosti elemenata koje razmatramo, npr. pri klasifikaciji. Skup X elemenata koje treba razvrstati u klase (odnosno klasifikovati) je najčešće konačan, dakle $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, te se funkcija različitosti može predstaviti i ***matricom različitosti*** $M = [r_{i,j}]_{n \times n}$ gde je $r_{i,j} = d(x_i, x_j)$. Razvrstavanje (klasterovanje) elemenata skupa X se može shvatiti kao postupak kojim se na osnovu matrice različitosti parova elemenata skupa X formira neka particija skupa X. Pri tome se za ovu meru različitosti po potrebi zahteva da zadovoljava i neke od dodatnih uslova kao što su [D26], [D3], [D5] i [D6].

Funkcije rastojanja koje zadovoljavaju neke od dodatnih uslova iz definicije 1.1.3 imaju posebne nazive.

Definicija 1.1.4 *Neka je $X \neq \emptyset$. Funkcija rastojanja $d : X \times X \to [0, \infty)$ je* ***metrika*** *(eng.* metric*) na skupu X ukoliko za nju važi* identity of indiscernibles [D3] *i nejednakost trougla* [D5]*. Uređeni par (X, d) je tada* ***metrički prostor****.*

Definicija 1.1.5 *Neka je $X \neq \emptyset$. Funkcija $d : X \times X \to [0, \infty)$ je* ***kvazi-metrika*** *(eng.* quasi-metric*) na skupu X ukoliko za nju važi* [D4] *i* [D5]*. Uređeni par (X, d) je tada* ***kvazi-metrički prostor****.*

Za kvazi-metriku ne mora da važi simetričnost [D1]. Polazeći od kvazi-metrike, moguće je na razne načine konstruisati metriku, kao što je prikazano u sledećoj teoremi.

Teorema 1.1.1 *Ako je funkcija $d : X \times X \to [0, \infty)$ kvazi-metrika na skupu X, tada su funkcije*

- $d_1(x, y) = \max\{d(x, y), d(y, x)\}$
- $d_2(x, y) = \min\{d(x, y), d(y, x)\}$
- $d_3(x, y) = \frac{1}{2}(d^p(x, y) + d^p(y, x))^{\frac{1}{p}}, \quad p \in [1, \infty)$

ekvivalentne metrike, odnosno metrike koje indukuju istu topologiju na skupu X.

Definicija 1.1.6 *Neka je $X \neq \emptyset$. Funkcija $d : X \times X \to [0, \infty)$ je* ***semi-metrika*** *(eng.* semi-metric*) na skupu X ukoliko za nju važi refleksivnost* [D2]*,* identity of indiscernibles [D3] *(dakle* [D4]*), i simetričnost* [D1].

Za semi-metriku ne mora da važi nejednakost trougla [D5].

Definicija 1.1.7 *Neka je $X \neq \emptyset$. Funkcija $d : X \times X \to [0, \infty)$ je* ***pseudo-metrika*** *(eng.* pseudo-metric*) na skupu X ukoliko za nju važi simetričnost* [D1]*, refleksivnost* [D2]*, i nejednakost trougla* [D5].

Napomena 1.1.1 *Neka je d pseudo-metrika na skupu X. Binarna relacija $\sim$ skupa X definisana sa*

$$x \sim y \;\Leftrightarrow\; d(x, y) = 0$$

je relacija ekvivalencije. Na klasama ekvivalencije, tj. na faktor-skupu $X/\sim$ definisana funkcija

$$D([x], [y]) = d(x, y), \qquad [x], [y] \in X/\sim$$

je metrika na faktor-skupu $X/\sim$.

Napomena 1.1.2 *U literaturi postoji neusaglašenost u terminologiji u pogledu pojma semi-metrike. Neki autori pod pojmovima semi-metrike i pseudo-metrike podrazumevaju jedno isto.*

Definicija 1.1.8 *Neka je X vektorski prostor nad poljem $\mathbb{R}$, i neka je na njemu definisana funkcija rastojanja $d : X^2 \to [0, \infty)$.*

- *Funkcija rastojanja d je* ***pozitivno homogena*** *ako*

  $$\forall x, y \in X, \forall \alpha \in \mathbb{R}, \;\; d(\alpha x, \alpha y) = |\alpha| d(x, y).$$

- *Funkcija rastojanja d je* ***invarijantna u odnosu na translaciju*** *ako*

  $$\forall x, y \in X, \forall a \in X, \;\; d(x + a, y + a) = d(x, y).$$

- *Neka je $X = \mathbb{R}^n$. Funkcija rastojanja d je* ***invarijantna u odnosu na rotaciju*** *ako za svaku rotaciju ρ u prostoru $\mathbb{R}^n$ važi*

  $$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \;\; d(\rho(x), \rho(x)) = d(x, y).$$

Teorema 1.1.2 *Ako je X normirani vektorski prostor, tada je svaka metrika indukovana normom prostora X invarijantna u odnosu na translacije.*

Sledi prikaz nekih važnih primera funkcija rastojanja. Neke od njih su od univerzalnog značaja, a neke se intenzivno koriste u pojedinim naukama i oblastima primene. U primerima 1.1.1, 1.1.2, 1.1.3 i 1.1.4 su navedene dobro poznate i široko korišćene funkcije rastojanja i metrike.

Primer 1.1.1 (Euklidsko rastojanje između tačaka) *U vektorskom prostoru $\mathbb{R}^n$, za sve $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ i $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ je sa*

$$d_E(a, b) = \left|\overrightarrow{ab}\right| = \sqrt{(a - b) \cdot (a - b)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (a_i - b_i)^2}$$

definisana funkcija rastojanja na $\mathbb{R}^n$. Pri tome je ova funkcija rastojanja i metrika, pozitivno je homogena, i invarijantna je u odnosu na translacije i rotacije. Dodatno, ova metrika indukuje i euklidsku normu vektorsko-topološkog prostora $\mathbb{R}^n$. ☑

Primer 1.1.2 (Uopšteno euklidsko rastojanje između tačaka) *Neka je $W : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ linearna transformacija vektorskog prostora $\mathbb{R}^n$ sa matricom $W = [w_{i,j}]_{n\times n}$. Za $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ i $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ je sa*

$$d_{WE}(a, b) = d_E(W(a), W(b)) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} w_{k,j}(a_j - b_j)\right)^2}$$

definisana funkcija rastojanja prostora $\mathbb{R}^n$.

Ako je matrica W dijagonalna, tj. $w_{i,j} = 0$ za $i \neq j$, tada je d_{WE} „nehomogeno" rastojanje između tačaka x i y, što se koristi npr. kada različitim komponentama elemenata prostora $\mathbb{R}^n$ želimo dodeliti različite „težine", tj. kada komponente vektora iz $\mathbb{R}^n$ imaju različit značaj (uticaj) na rastojanje elemenata prostora $\mathbb{R}^n$. Ovakvi primeri funkcija rastojanja se koriste u teoriji prepoznavanja oblika pri klasifikaciji elemenata, vidi [1]. *U ovakvom slučaju je*

$$d_{WE}(a, b) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} w_{k,k}(a_k - b_k)^2}. \qquad \boxtimes$$

Primer 1.1.3 (L_p-metrika) *Posmatrajmo proizvoljno $p \in [1, \infty)$. Za vektore $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ i $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ vektorskog prostora $\mathbb{R}^n$ je sa*

$$d_{L_p}(a, b) = \|a - b\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i - b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

definisana funkcija rastojanja na $\mathbb{R}^n$. Pri tome je ova funkcija rastojanja i metrika, i indukuje L_p-normu vektorskog prostora $\mathbb{R}^n$.

Specijalno, za $p = 1$, metrika

$$d_{L_1}(a, b) = \|a - b\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |a_i - b_i|$$

je poznata u primenama i pod nazivima ***taxicab metric***, ***rectilinear distance***, ***city block distance*** *i* ***Manhattan distance***. *Invarijantna je u odnosu na translacije, i pozitivno je homogena.* $\boxtimes$

Primer 1.1.4 (L_∞-metrika) *Za proizvoljne tačke $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ i $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ vektorskog prostora $\mathbb{R}^n$ je sa*

$$d_{L_\infty}(a, b) = \|a - b\|_\infty = \max_{i\in\{1,\ldots,n\}} |a_i - b_i|$$

definisana funkcija rastojanja na $\mathbb{R}^n$. Metrika je, i indukuje L_∞-normu vektorskog prostora $\mathbb{R}^n$. Takođe je u primenama poznata i pod nazivima ***„Chebyshev distance"***, ***„chessboard distance"*** *i* ***„maximum metric"***. $\boxtimes$

Metrike d_{L_1}, d_E i d_{L_∞}, redom iz primera 1.1.1 i 1.1.4 su metrike od posebnog značaja. Indukovane su redom normama L_1, L_2 i L_∞ prostora $\mathbb{R}^n$. Metrike d_{L_1} i $d_E = d_{L_2}$ su, redom za $p = 1$ i $p = 2$ specijalni slučajevi d_{L_p} metrika iz primera 1.1.3, indukovanih L_p normom prostora $\mathbb{R}^n$ za $p \in [1, \infty)$. Metrika d_{L_∞} iz primera 1.1.4, indukovana L_∞ normom prostora $\mathbb{R}^n$ je granična vrednost L_p, $p \in [1, \infty)$ metrika, u smislu

$$d_{L_\infty}(a, b) = \max_{i \in \{1, \dots, n\}} |a_i - b_i| = \lim_{p \to \infty} \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i - b_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \lim_{p \to \infty} d_{L_p}(a, b).$$

Sledi primer jedne funkcije rastojanja koja se koristi u primenama teorije grafova.

Primer 1.1.5 (Graph metric / cost of the path) *Posmatrajmo neki neorijentisani težinski graf (X, E) sa funkcijom težina grana $c : E \to [0, \infty)$. Funkciju težina c možemo interpretirati kao cenu putovanja od jednog do drugog susednog čvora grafa (X, E). Za čvorove $a, b \in X$ i $x_i \in X$, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, označimo sa $\mathcal{P}(a, b) = (a = x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n = b)$ neku putanju između čvorova a i b, gde su svaka dva čvora $\{x_i, x_{i+1}\}$, $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ povezana tj. susedna u grafu. Označimo sa $\Pi(a, b)$ skup svih putanja između čvorova a i b, a sa Π skup svih putanja u grafu (X, E). Funkciju c možemo proširiti na skup X^2 na sledeći način. Za $\mathcal{P}(a, b) = (a = x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n = b)$, neka je $C(\mathcal{P}(a, b)) = \sum_{i=1}^{n-1} c(x_i, x_{i+1})$, i neka je funkcija $c : X^2 \to [0, \infty]$ definisana sa*

$$c(a, b) = \begin{cases} \inf \{ C(\mathcal{P}(a, b)) \mid \mathcal{P}(a, b) \in \Pi \} & , \ \exists \mathcal{P}(a, b) \in \Pi \\ \infty & , \ \textit{inače} \end{cases}.$$

Vrednost $C(\mathcal{P}(a, b))$ možemo interpretirati kao cenu putovanja od čvora a do čvora b po putanji $\mathcal{P}(a, b)$, a $c(a, b)$ kao minimalnu cenu putovanja od čvora a do čvora b. Za povezane različite čvorove a i b je $c(a, b) \in (0, \infty)$, za nepovezane $a \neq b$ je $c(a, b) = \infty$, i $c(a, a) = 0$. Stoga je $c : X^2 \to [0, \infty]$ funkcija rastojanja u proširenom smislu, tj. zadovoljava aksiome [D1] *i* [D2] *iako je skup njenih vrednosti $[0, \infty]$. U opštem slučaju nije metrika.*

Specijalno, ako za polaznu funkciju $c : E \to [0, \infty)$ imamo da je $c(a, b) = 1$ za povezane čvorove, i $c(a, b) = 0$ za nepovezane čvorove a i b, tada funkciju $c : X^2 \to [0, \infty]$ možemo interpretirati kao najkraći put između čvorova a i b. Pri tome je ova funkcija tada metrika na skupu X ako i samo ako je graf (X, E) povezan. ☑

U primerima 1.1.6 i 1.1.7 su navedene tri metrike koje su značajne u informatičkim i kompjuterskim naukama.

Primer 1.1.6 (Hamming distance) *Neka je S proizvoljan neprazan skup - alfabet, i neka je $X = S^n$ - skup svih reči iste fiksne dužine $n \in \mathbb{N}$ nad alfabetom S. Za reči $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in X$ i $b = (b_1, b_2, \dots, b_n) \in X$, njihovo* ***Hemingovo rastojanje*** *je definisano sa*

$$d_H(a, b) = |\{ i \mid i \in \{1, \dots, n\}, \ a_i \neq b_i \}|.$$

Vrednost $d_H(a, b)$ je broj komponenti tj. slova u rečima a i b u kojima se te reči razlikuju. Funkcija rastojanja $d_H(a, b)$ je metrika.

U teoriji kodiranja i informatičkim naukama uopšte, za $S = \{0,1\}$ *je* X *skup binarnih reči tj. binarnih kodova dužine* n*, a vrednost* $d_H(a,b)$ *je tada broj bitova u kojima se kodovi* a *i* b *razlikuju. Ova metrika se koristi npr. u kriptografiji, otkrivanju i korekciji grešaka pri skladištenju ili prenosu binarnih informacija, itd.* ☑

Primer 1.1.7 (Levenshtein-ovo rastojanje) *Neka je* S *skup svih računarskih stringova tj. konačnih nizova znakova iz nekog alfabeta* Σ*. Dakle, string* $a \in S$ *je neka uređena* n*-torka* $\left(a_1, a_2, \ldots, a_{|a|}\right)$ *znakova* $a_i \in \Sigma$*, gde je sa* $|a|$ *označena dužina (broj znakova) stringa* a*.* ***Levenshtein-ovo rastojanje*** $lev(a,b)$ *stringova* $a, b \in S$ *se definiše kao minimalan broj nekih od dole navedenih transformacija znakova stringa, kojima se string* a *može transformisati u string* b*. Transformacije znakova stringa su:*

[ct1] *brisanje jednog znaka* $a_i \in \Sigma$ *iz stringa, tj. transformacija nekog stringa* $a = \left(a_1, a_2, \ldots, a_{|a|}\right)$ *u string* $\overline{a} = \left(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_{|a|-1}\right)$,

[ct2] *umetanje jednog znaka* $c \in \Sigma$ *u string, odnosno transformacija stringa* $a = \left(a_1, a_2, \ldots, a_{|a|}\right)$ *u string* $\overline{a} = \left(a_1, \ldots, a_i, c, a_{i+1}, \ldots, a_{|a|+1}\right)$,

[ct3] *zamena jednog znaka* $a_i \in \Sigma$ *znakom* $\overline{a}_i \in \Sigma$ *u stringu, odnosno transformacija nekog stringa* $a = \left(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i, a_{i_1}, \ldots, a_{|a|}\right)$ *u novi string* $a = \left(a_1, \ldots, a_{i-1}, \overline{a}_i, a_{i_1}, \ldots, a_{|a|}\right)$.

Formalna definicija rastojanja $lev(a,b)$ *stringova* $a, b \in S$ *je data rekurzivnom definicijom*

$$lev(a,b) = lev(a,b)\left[|a|, |b|\right],$$

$$lev(a,b)[i,j] = \begin{cases} \max\{i,j\} & , \quad \min\{i,j\} = 0 \\ \min \begin{Bmatrix} lev(a,b)[i-1,j] + 1 \\ lev(a,b)[i,j-1] + 1 \\ lev(a,b)[i-1,j-1] + \chi_{a_i \neq b_j} \end{Bmatrix} & , \quad \min\{i,j\} > 0 \end{cases}$$

gde je

$$\chi_{a_i \neq b_j} = \begin{cases} 0 & , \quad a_i = b_j \\ 1 & , \quad a_i \neq b_j \end{cases}.$$

Vrednost $lev(a,b)[i,j]$ *je rastojanje između niza prvih* i *znakova stringa* a*, i prvih* j *znakova stringa* b*. Levenshtein-ovo rastojanje je metrika na skupu svih stringova. Poput Hemingovog rastojanja, koristi se u informatičkim i kompjuterskim naukama.*

Ako se transformacijama [ct1], [ct2] *i* [ct3] *znakova stringa doda još i transformacija*

[ct4] *zamena mesta dva susedna znaka (karaktera) u stringu, odnosno transformacija nekog stringa* $a = \left(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, a_{i+2}, \ldots, a_{|a|}\right)$ *u novi string* $\overline{a} = \left(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, a_i, a_{i+2}, \ldots, a_{|a|}\right)$,

tada se radi o tzv. ***Damerau–Levenshtein-ovom rastojanju****, koje je takođe metrika na skupu svih stringova.* ☑

Primer 1.1.8 (Fréchet-ovo rastojanje) *Neka je (X, d) metrički prostor, tj. d je metrika na skupu X. Neka je*

$$\mathcal{C} = \{\, A : [0,1] \to X \mid A \text{ je neprekidna funkcija}\}$$

skup svih „krivih" u prostoru X (npr. $X = \mathbb{R}^2$ ili $X = \mathbb{R}^3$, sa standardnom Euklidskom metrikom d), i neka je

$$\mathcal{P} = \{\, \alpha : [0,1] \to [0,1] \mid \alpha \text{ je neprekidna, rastuća f-ja, } \alpha(0) = 0,\ \alpha(1) = 1\}$$

skup svih „reparametrizacija" krivih. Funkcija $d_F : \mathcal{C} \to [0, \infty)$ definisana sa

$$d_F(A, B) = \inf_{\alpha, \beta \in \mathcal{P}} \sup_{t \in [0,1]} d(A(\alpha(t)), B(\beta(t))), \qquad A, B \in \mathcal{C}$$

je semi-metrika na skupu $\mathcal{C}$. Funkcija d_F nije metrika jer za nju ne važi nejednakost trougla. Ova funkcija rastojanja se koristi kao određena vrsta mere sličnosti (tj. različitosti) krivih u prostoru. ☑

1.2 Funkcije sličnosti

Funkcije sličnosti se koriste npr. pri klasifikaciji (klasterovanju) u prepoznavanju oblika, kada pripadnost nekog elementa (oblika) određenoj klasi (klasteru) određujemo na osnovu stepena sličnosti sa ostalim elementima posmatrane klase. Sličnost je u intuitivnom smislu pojam komplementaran pojmu rastojanja, jer rastojanje elemenata x i y možemo interpretirati i kao meru ***različitosti*** elemenata x i y.

Definicija 1.2.1 *Neka je $X \neq \emptyset$ proizvoljan neprazan skup.* ***Funkcija sličnosti*** *(eng.* distance similarity*) na skupu X je funkcija $s : X \times X \to [0, \infty)$ koja ima osobine* [D1]*,* [D7] *i* [D9]*, dakle*

- $\forall x, y \in X,\ \ s(x, y) = s(y, x).$
- $\forall x, y \in X,\ \ s(x, y) \leq s(x, x) \ \wedge\ (s(x, y) = s(x, x) \ \Leftrightarrow\ x = y).$

Neka je s funkcija sličnosti koja je ograničena odozgo, npr. sa 1, dakle neka je $s : X \times X \to [0, 1]$. Tada se određenim transformacijama funkcije s može dobiti funkcija rastojanja tj. različitosti. Najčešće korišćene transformacije kojima se od funkcije sličnosti dobija funkcija rastojanja (funkcija različitosti) su npr.

- $d(x, y) = 1 - s(x, y),\ \ x, y \in X,$
- $d(x, y) = \dfrac{1 - s(x, y)}{s(x, y)},\ \ x, y \in X,$
- $d(x, y) = \sqrt{1 - s(x, y)},\ \ x, y \in X,$
- $d(x, y) = \sqrt{2(1 - s^2(x, y))},\ \ x, y \in X,$
- $d(x, y) = \arccos(s(x, y)),\ \ x, y \in X,$
- $d(x, y) = -\ln(s(x, y)),\ \ x, y \in X.$

Slede dva dobro poznata primera funkcija sličnosti.

Primer 1.2.1 (Kosinusna mera sličnosti) *Za proizvoljne elemente tj. tačke $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ i $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ prostora $\mathbb{R}^n$ definišemo*

$$s_K(a,b) = \frac{a \cdot b}{\sqrt{a \cdot a} \cdot \sqrt{b \cdot b}} = \frac{a \cdot b}{|a| \cdot |b|},$$

gde je $a \cdot b$ skalarni proizvod tačaka tj. vektora a i b. Ovako definisana funkcija $s_K : X \times X \to [0, \infty)$ je funkcija sličnosti.

Ako je $a \cdot b$ standardni (Euklidski) skalarni proizvod, tada je vrednost

$$s_K(a,b) = \frac{|a| \cdot |b| \cdot \cos(\measuredangle(a,b))}{|a| \cdot |b|} = \cos(\measuredangle(a,b)),$$

dakle kosinus ugla pod kojim se vektor $\overrightarrow{ab}$, tj. odgovarajuća duž, „vidi" iz koordinatnog početka. U prepoznavanju oblika, ova mera sličnosti se može koristiti za formiranje grupa tj. klasa u odnosu na njihov „izgled" iz neke unapred utvrđene referentne tačke.

Takođe u prepoznavanju oblika, ako su $a, b \in \{0,1\}^n$ binarni vektori kod kojih jedinice/nule označavaju prisustvo/odsustvo odgovarajućih obeležja (osobine), tada je $a \cdot b$ broj zajedničkih obeležja (osobina) binarnih vektora a i b, a $\sqrt{a \cdot a} \cdot \sqrt{b \cdot b} = |a| \cdot |b|$ je geometrijska sredina brojeva obeležja binarnih vektora a i b. $\boxtimes$

Primer 1.2.2 (Tanimoto-ova mera sličnosti) *Za proizvoljne elemente (tačke) $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ i $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ prostora $\mathbb{R}^n$ definišemo*

$$s_T(a,b) = \frac{a \cdot b}{a \cdot a + b \cdot b - a \cdot b} = \frac{a \cdot b}{|a|^2 + |b|^2 - a \cdot b},$$

gde je $a \cdot b$ skalarni proizvod tačaka tj. vektora a i b. Ovako definisana funkcija $s_T : X \times X \to [0, \infty)$ je funkcija sličnosti.

U prepoznavanju oblika, za binarne vektore oblika $a, b \in \{0,1\}^n$, ovom merom je izražen odnos broja zajedničkih obeležja oblika a i b i ukupnog broja obeležja koja su prisutna kod bar jednog od ta dva vektora oblika. $\boxtimes$

1.3 Rastojanje između dva skupa

U ovoj sekciji je dat prikaz nekih definicija, osobina i primera funkcija rastojanja tačke $a \in X$ od skupa $A \subseteq X$, rastojanja između dva skupa $A \subseteq X$ i $B \subseteq X$, kao druge slične funkcije koje predstavljaju određene mere jednog skupa $A \subseteq X$. Sve ovakve funkcije su često zasnovane na funkciji rastojanja između elemenata (tačaka) skupa X. Funkcija rastojanja između dva podskupa skupa X je funkcija rastojanja elemenata (tačaka) skupa $\mathcal{P}(X)$. Slede primeri nekih najvažnijih i najčešće korišćenih funkcija rastojanja između tačke i skupa.

Primer 1.3.1 (Euklidsko rastojanje) *Za tačku $b \in \mathbb{R}^n$ i proizvoljan konačan skup $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_s\} \subseteq \mathbb{R}^n$ je sa*

$$d_E(b, A) = \sqrt{\frac{1}{s}\sum_{i=1}^{s} d_E^2(b, a_i)}$$

definisano rastojanje tačke b od skupa A, gde je $d_E(b, a_i)$ euklidsko rastojanje tačaka iz primera 1.1.1. ☑

Veoma često korišćena, i u mnogim primenama podrazumevana funkcija rastojanja između tačke i skupa je navedena u sledećem primeru. Ova funkcija se tipično koristi u obradi slike i srodnim oblastima.

Primer 1.3.2 (Inf-rastojanje) *Neka je $d : X^2 \to [0, \infty)$ proizvoljna funkcija rastojanja definisana na nekom skupu X. Za proizvoljnu tačku $x \in X$ i proizvoljan neprazan skup $A \subseteq X$ je sa*

$$d(x, A) = \inf\{\, d(x, a) \mid a \in A\}$$

definisana funkcija rastojanja $d : X \times (\mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}) \to [0, \infty)$ tačke od skupa, koja se naziva ***inf-rastojanje tačke od skupa****. Pri tome se po dogovoru obično definiše da je $d(x, \emptyset) = 1$ (ili $d(x, \emptyset) = \infty$).* ☑

Slede primeri nekih najvažnijih i najčešće korišćenih funkcija rastojanja između dva skupa.

Primer 1.3.3 (Euklidsko rastojanje) *Za proizvoljna dva konačna skupa $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\} \subseteq \mathbb{R}^n$ i $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_m\} \subseteq \mathbb{R}^n$ je sa*

$$d_E(A, B) = \sqrt{\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} d_E^2(b_j, A)} = \sqrt{\frac{1}{km}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m} d_E^2(b_j, a_i)}$$

definisano rastojanje skupa A od skupa B, gde je $d_E(b_j, A)$ euklidsko rastojanje tačke od skupa iz primera 1.3.1. ☑

Istorijski, prvo međuskupovno rastojanje je verovatno Hausdorff-ova metrika, koju je Hausdorff predstavio u svojoj knjizi [25].

Primer 1.3.4 (Hausdorff-ova metrika) *Neka je $d : X^2 \to [0, \infty)$ proizvoljna funkcija rastojanja definisana na nekom skupu X, i neka je $d(x, A)$ inf-rastojanje tačke $x \in X$ od skupa $A \in \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}$ iz primera* 1.3.2. *Za proizvoljne skupove $A, B \in \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}$ je sa*

$$d_H(A, B) = \max\{\sup\{\, d(a, B) \mid a \in A\}, \sup\{\, d(b, A) \mid b \in B\}\},$$

$$d_H(A, \emptyset) = d_H(\emptyset, A) = \infty,$$

$$d_H(\emptyset, \emptyset) = 0,$$

definisana funkcija $d_H : \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ rastojanja dva skupa. Ova funkcija je metrika, i naziva se ***Hausdorff-ova metrika****.* ☑

Hausdorff-ova metrika ima jedan značajan nedostatak pri primenama, naročito u obradi slika i srodnim disciplinama. Naime, $d_H(A, B)$ može da drastično povećava svoju vrednost ako skupu A pridodamo samo još jednu tačku koja je dovoljno udaljena od ostalih tačaka skupova A i B. To je pri korišćenju u obradi slika čini preosetljivom na „šumove", i stoga neprikladnom u takvim primenama. Stoga su u literaturi predlagane brojne modifikacije Hausdorff-ove metrike, u cilju uklanjanja odnosno smanjivanja uticaja opisane anomalije. U sledećem primeru, navedena je jedna ovakva modifikacija Hausdorff-ove metrike, definisana 1994. godine u radu [15].

Primer 1.3.5 (Modifikovano Hausdorff-ovo rastojanje) *Neka je funkcija* $d : X^2 \to [0,\infty)$ *proizvoljna funkcija rastojanja definisana na nekom skupu* X, *i neka je* $d(x,A)$ *inf-rastojanje tačke* $x \in X$ *od skupa* $A \in \mathcal{P}(X)$ *iz primera* 1.3.2. *Označimo sa* $|S|$ *kardinalni broj skupa* S, *a sa* $\mathcal{F}(X)$ *familiju svih konačnih podskupova skupa* X. *Za proizvoljne konačne skupove* $A, B \in \mathcal{F}(X)$ *je sa*

$$d_{MH}(A,B) = \max\left\{ \frac{1}{|A|}\sum_{a\in A} d(a,B), \frac{1}{|B|}\sum_{b\in B} d(b,A) \right\}$$

definisana funkcija $d_{MH} : \mathcal{F}(X) \times \mathcal{F}(X) \to [0,\infty)$ *rastojanja dva konačna skupa. Ova funkcija nije metrika jer ne zadovoljava nejednakost trougla (vidi* [15]*).* ☑

Funkcija rastojanja u sledećem primeru, tzv. ***suma minimalnih rastojanja*** (eng. *sum of minimal distances*), slična je modifikovanom Hausdorff-ovom rastojanju iz primera 1.3.5. Takođe je, u odnosu na Hausdorff-ovo rastojanje manje osetljiva na egzistenciju manjeg broja tačaka koje su veoma udaljene od većine tačaka skupa. U primenama to znači i da su manje osetljive na šum i male anomalije skupa. Suma minimalnih rastojanja je definisana i osobine su joj analizirane u radu [18].

Primer 1.3.6 (Suma minimalnih rastojanja) *Neka je* $d : X^2 \to [0,\infty)$ *proizvoljna funkcija rastojanja definisana na nekom skupu* X, *i neka je* $d(x,A)$ *inf-rastojanje tačke* $x \in X$ *od skupa* $A \in \mathcal{P}(X)$ *iz primera* 1.3.2. *Neka je* $|S|$ *kardinalni broj skupa* S, *a* $\mathcal{F}(X)$ *familija svih konačnih podskupova skupa* X. *Za proizvoljne konačne skupove* $A, B \in \mathcal{F}(X)$ *je sa*

$$d_{SMD}(A,B) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{|A|}\sum_{a\in A} d(a,B) + \frac{1}{|B|}\sum_{b\in B} d(b,A) \right)$$

definisana funkcija $d_{SMD} : \mathcal{F}(X) \times \mathcal{F}(X) \to [0,\infty)$ *rastojanja dva konačna skupa. Ova funkcija nije metrika jer ne zadovoljava nejednakost trougla.* ☑

Sledeća funkcija, ***chamfer-rastojanje*** poklapanja, bazirana je na korišćenju ruba skupa, odnosno, u obradi slika, konture nekog objekta. Naime, pri poređenju dva skupa, npr. dva objekta na slici, skupovi su reprezentovani svojim rubovima, tj. objekti na slici su reprezentovani svojim konturama. Prednost ove funkcije je njena manja računska zahtevnost, jer je za izračunavanje njenih vrednosti potrebno manje računskih operacija u poređenju sa mnogim drugim funkcijama rastojanja. S druge strane, ova funkcija je takođe osetljiva na šum, odnosno na postojanje malog broja tačaka veoma udaljenih od većine tačaka skupa ili njegovog ruba, vidi [31] i [9]. Definisana je u radu [6].

Neka je u narednim primerima i razmatranjima, sa ∂A označen ***rub skupa*** A, što može biti topološki rub skupa, ili na neki drugi sličan i pogodan za primenu način definisan pojam, poput npr. rub konveksne obvojnice skupa.

Primer 1.3.7 (Chamfer-rastojanje) *Neka je* $d : X^2 \to [0,\infty)$ *proizvoljna funkcija rastojanja definisana na nekom skupu* X*, i neka je* $d(x,A)$ *inf-rastojanje tačke* $x \in X$ *od skupa* $A \in \mathcal{P}(X)$ *iz primera* 1.3.2. *Neka je* ∂S *rub skupa* S*, a* $\mathcal{F}(X)$ *familija svih konačnih podskupova skupa* X*. Za proizvoljne konačne skupove* $A, B \in \mathcal{F}(X)$ *je sa*

$$d_{CH}(A,B) = \sum_{a\in\partial A} d(a,\partial B)$$

definisana funkcija $d_{CH} : \mathcal{F}(X) \times \mathcal{F}(X) \to [0,\infty)$ *kao jedna mera poklapanja dva skupa. Ova funkcija nije funkcija rastojanja jer nije simetrična, tj. ne zadovoljava* [D1]. ☑

Nedostatak simetričnosti [D1] funkcije d_{CH} je lako otklonjiv ako bismo je redefinisali sa

$$d_{CH}(A,B) = \frac{1}{2}\left(\sum_{a\in\partial A} d(a,\partial B) + \sum_{b\in\partial B} d(b,\partial A)\right)$$

ili

$$d_{CH}(A,B) = \min\left\{\sum_{a\in\partial A} d(a,\partial B), \sum_{b\in\partial B} d(b,\partial A)\right\}$$

ili na neki drugi sličan način. Neki autori pod chamfer-rastojanjem podrazumevaju upravo ovako redefinisanu funkciju d_{CH}, dok funkciju d_{CH} iz primera 1.3.7 nazivaju ***usmereno chamfer-rastojanje*** (eng. *directed chamfer distance*). U radu [6] je sa

$$d_{CH2}(A,B) = \sqrt{\sum_{a\in\partial A} d^2(a,\partial B)}$$

definisano i usmereno ***kvadratno chamfer-rastojanje*** (eng. *squared chamfer matching distance*), čiji se nedostatak simetričnosti [D1] takođe može otkloniti na neki od pomenutih načina. Utvrđeno je da se pri primeni u poklapanju uzoraka (eng. *pattern matching*) funkcija d_{CH2} nešto bolje ponaša u odnosu na funkciju d_{CH}. Chamfer-rastojanje je u tesnoj vezi sa sumom minimalih rastojanja d_{SMD} iz primera 1.3.6. Naime, vidi [8], za usmereno chamfer-rastojanje d_{CH} važi

$$d_{SMD}(\partial A,\partial B) = \frac{1}{2}(d_{CH}(A,B) + d_{CH}(B,A)).$$

Generalizujući ideju uvođenja kvadratnog chamfer-rastojanja, autori Lindblad, Ćurić i Sladoje su u radu [31] definisali ***generalizovanu sumu minimalnih rastojanja*** (eng. *generalized sum of minimal distances*) na sledeći način.

Neka je d standardna funkcija inf-rastojanja tačke od skupa iz primera 1.3.2, i neka je $r \in [1, \infty)$. Sa

$$\vec{d_r}(A, B) = \left(\sum_{a \in A} d^r(a, B) \right)^{\frac{1}{r}}$$

je definisano jedno ***usmereno rastojanje*** skupa A od skupa B (što je naglašeno strelicom), pri čemu $\vec{d_r}$ nije funkcija rastojanja jer nema osobinu simetričnosti [D1]. Pri tome je npr.

$$d_{CH}(A, B) = \vec{d_1}(\partial A, \partial B),$$
$$d_{CH2}(A, B) = \vec{d_2}(\partial A, \partial B),$$
$$d_{SMD}(A, B) = \frac{1}{2}\Big(\vec{d_1}(A, B) + \vec{d_1}(B, A)\Big),$$

gde je d_{CH} usmereno chamfer-rastojanje, a d_{CH2} usmereno kvadratno chamfer-rastojanje.

Primer 1.3.8 (Generalizovana suma minimalnih rastojanja) *Neka je $d : X^2 \to [0, \infty)$ proizvoljna funkcija rastojanja na skupu X, neka je $d(x, A)$ inf-rastojanje tačke $x \in X$ od skupa $A \in \mathcal{P}(X)$ iz primera* 1.3.2*, neka je $r \in [1, \infty)$, neka su A i B konačni podskupovi skupa X, i neka je*

$$\vec{d_r}(A, B) = \left(\sum_{a \in A} d^r(a, B) \right)^{\frac{1}{r}}.$$

Neka je $\mathcal{F}(X)$ familija svih konačnih podskupova skupa X. Za proizvoljne $A, B \in \mathcal{F}(X)$ je sa

$$d_{SMDr}(A, B) = \frac{1}{2}\Big(\vec{d_r}(A, B) + \vec{d_r}(B, A)\Big)$$

definisana funkcija rastojanja $d_{SMDr} : \mathcal{F}(X) \times \mathcal{F}(X) \to [0, \infty)$ između skupova. Kako je pri tome, vidi [31]*,*

$$\lim_{r \to \infty} \vec{d_r}(A, B) = \max_{a \in A} d(a, B),$$

za dovoljno velike brojeve r se funkcija d_{SMDr} ponaša slično kao Hausdorff-ova metrika. ☑

U prethodnim primerima, osim u primeru 1.3.3, rastojanje između dva skupa je definisano preko rastojanja tačke od skupa, najčešće preko inf-rastojanja tačke od skupa iz primera 1.3.2. Rastojanje dva skupa može biti definisano na razne načine i bez korišćenja rastojanja tačke od skupa. Jedan ovakav, verovatno najlakši i najčešće korišćen način je naveden u sledećem primeru.

Primer 1.3.9 (Inf-rastojanje skupova) *Neka je $d : X^2 \to [0, \infty)$ proizvoljna funkcija rastojanja na skupu X. Za proizvoljne skupove $A, B \in \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}$ je sa*

$$d_{INF}(A, B) = \inf\{\, d(a, b) \mid a \in A,\ b \in B\},$$
$$d_{INF}(A, \emptyset) = d_{INF}(\emptyset, A) = \infty,$$

$d_{INF}(\emptyset, \emptyset) = 0,$

definisana funkcija rastojanja $d_{INF} : \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ *između skupova. Ova funkcija rastojanja nije metrika jer za nju ne važi nejednakost trougla.* ☑

Funkcija iz prethodnog primera nije pogodna za poređenje skupova jer je npr. $d_{INF}(A, B) = 0$ za svaka dva skupa A i B sa nepraznim presekom, bez obzira na ostale karakteristike ovih skupova.

Funkcija rastojanja u sledećem primeru nema pomenuti glavni nedostatak funkcije d_{INF}. Definisali su je Klette i Rosenfeld, vidi [29].

Primer 1.3.10 (Simetrična razlika) *Neka je* $\mathcal{F}(X)$ *familija svih konačnih podskupova nekog skupa* X*, i neka je* $|S|$ *kardinalni broj skupa* S*. Za proizvoljne konačne skupove* $A, B \in \mathcal{F}(X)$ *je sa*

$d_{SD}(A, B) = |A \triangle B|$

definisana funkcija rastojanja $d_{SD} : \mathcal{F}(X) \times \mathcal{F}(X) \to [0, \infty)$ *između konačnih podskupova skupa* X*, gde je* $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ *simetrična razlika skupova* A *i* B*. Funkcija* d_{SD} *je metrika na familiji svih konačnih podskupova skupa* X*.*

Normalizovana funkcija d_{SD} *je funkcija* $d_{NSD} : \mathcal{F}(X) \times \mathcal{F}(X) \to [0, \infty)$ *definisana sa*

$$d_{SD}(A, B) = \frac{|A \triangle B|}{|A \cup B| + 1},$$

i ona je takođe metrika na skupu $\mathcal{F}(X)$*.*

Ako je na skupu X *definisana* σ*-algebra* Σ*, i ako je* μ *neka* σ*-konačna mera na merljivom prostoru* (X, Σ)*, tada je funkcija* $d_{SD,\mu} : \Sigma^2 \to [0, \infty]$ *definisana sa*

$d_{SD,\mu}(A, B) = \mu(A \triangle B)$

funkcija rastojanja na σ*-algebri* Σ*. Refleksivna je, simetrična, za nju važi nejednakost trougla* [D5]*, te je* $d_{SD,\mu}$ *pseudometrika, a nije metrika jer nema osobinu „identity of indiscernibles"* [D3]*. Ovaj nedostatak je lako otklonjiv uvođenjem na skupu* Σ *relacije ekvivalencije*

$\forall A, B \in \Sigma, \quad A \sim B \iff \mu(A \triangle B) = 0,$

i redefinisanjem funkcije $d_{SD,\mu} : (\Sigma/\sim)^2 \to [0, \infty]$*,*

$d_{SD,\mu}([A], [B]) = \mu(A \triangle B)$

na klasama ekvivalencije u odnosu na relaciju $\sim$*. Ovako redefinisana funkcija* $d_{SD,\mu}$ *je metrika na* $\Sigma/\sim$*.* ☑

Glavni nedostatak funkcije d_{SD} iz prethodnog primera je što ne uzima u obzir položaj tačaka od kojih se sastoje skupovi A i B, već samo njihov broj. Stoga je retko kad u primenama pogodna za upoređivanje dva objekta tj. skupa.

U odnosu na datu funkciju rastojanja d među skupovima, može se sa

$\overline{d}(A, B) = d\left(\overline{A}, \overline{B}\right)$

definisati nova ***komplementarna funkcija rastojanja*** među skupovima, gde je $\overline{S}$ komplement skupa S u odnosu na neki univerzalni skup X, vidi [31]. Naravno, funkcija rastojanja $\overline{d}$ daje neku novu informaciju samo ukoliko je $\overline{d} \neq d$. Na primer, važi da je $d_{SD} = \overline{d}_{SD}$ i $d_{SMD} \neq \overline{d}_{SMD}$. Funkcije d_{SMD} i $\overline{d}_{SMD}$ imaju dobre osobine u nekim primenama na obradu slika, naročito u registraciji slika (eng. *image registration*). Istražujući razne kombinacije funkcija d_{SMD} i $\overline{d}_{SMD}$ sa pomenutog aspekta registracije slika, vidi [31], autori Ćurić, Lindblad, Sladoje, Sarve i Borgefors su u radu [9] definisali jednu takvu kombinaciju koju su nazvali ***relativna suma minimalnih rastojanja u odnosu na komplement*** (eng. *complement weihted sum of minimal distances*), skraćeno CW-rastojanje. U radu [9] su dokazane neke, za registraciju slika bitne dobre osobine ove funkcije, pre svega u pogledu invarijantnosti u odnosu na translaciju i rotaciju. Ova funkcija rastojanja je prikazana u sledećem primeru.

Primer 1.3.11 (CW rastojanje) *Neka je $d : X^2 \to [0, \infty)$ proizvoljna funkcija rastojanja definisana na nekom skupu X, i neka je $d(x, A)$ inf-rastojanje tačke $x \in X$ od skupa $A \in \mathcal{P}(X)$ iz primera* 1.3.2. *Neka je $\mathcal{F}(X)$ familija svih konačnih podskupova posmatranog skupa X. Za konačne skupove $A, B \in \mathcal{F}(X)$ je sa*

$$d_{CW}(A, B) = \frac{1}{2}\left(\frac{\sum\limits_{a \in A} d(a, B) d\left(a, \overline{A}\right)}{\sum\limits_{a \in A} d\left(a, \overline{A}\right)} + \frac{\sum\limits_{b \in B} d(b, A) d\left(b, \overline{B}\right)}{\sum\limits_{b \in B} d\left(b, \overline{B}\right)} \right)$$

definisana funkcija rastojanja $d_{CW} : \mathcal{F}(X) \times \mathcal{F}(X) \to [0, \infty)$. Ova funkcija rastojanja je semimetrika, ali nije metrika jer za nju ne važi nejednakost trougla [D5]. ☑

1.4 Unutarskupovni parametri

Pri određivanju rastojanja između skupova, kao i pri karakterizaciji jednog skupa, od interesa su razni parametri skupa. Svakako, među njima su kardinalnost skupa, mera skupa u prostorima s merom, itd. U ovoj sekciji su navedeni neki takvi značajni parametri.

Definicija 1.4.1 (Euklidsko unutarskupovno rastojanje) *Za proizvoljan konačan skup $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\} \subseteq \mathbb{R}^n$ je sa*

$$d_E(A) = \sqrt{\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} d_E^2(a_i, A)} = \sqrt{\frac{1}{k(k-1)}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} d_E^2(a_i, a_j)}$$

definisana jedna mera rasutosti skupa A, gde je $d_E(a_i, A)$ euklidsko rastojanje tačke od skupa iz primera 1.3.1, *a $d_E(a_i, a_j)$ je euklidsko rastojanje tačaka iz primera* 1.1.1.

Definicija 1.4.2 (Težište / centroid konačnog skupa) *Za proizvoljan konačan skup $A = \{a_1, \ldots, a_k\} \subseteq \mathbb{R}^n$, **težište skupa** A, ili **centroid** skupa A, je tačka*

$$T_A = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} a_i.$$

Na isti način se može definisati težište konačnog skupa u bilo kojem vektorskom prostoru. Pri tome, tačka T_A ne mora pripadati skupu A. Na ovaj način je sa $T(A) = T_A$ definisana funkcija $T : \mathcal{F}(X) \to \mathbb{R}^n$ na skupu $\mathcal{F}(X)$ svih konačnih podskupova skupa $\mathbb{R}^n$. Težište skupa je tačka sa minimalnim Euklidskim rastojanjem od skupa A, odnosno

$$T_A = \underset{x\in\mathbb{R}^n}{\operatorname{argmin}}\, d_E(x, A),$$

gde je d_E rastojanje tačke od skupa iz primera 1.3.1.

Pod nekim dodatnim uslovima, težište skupa A je moguće definisati i za neke beskonačne skupove. Na primer, za merljiv skup $A \subseteq \mathbb{R}^2$ mere (površine) $m(A) = \iint\limits_A dxdy$, težište skupa A je tačka $T_A(T_x, T_y)$ sa koordinatama

$$T_x = \frac{1}{m(A)}\iint\limits_A x\, dxdy, \qquad T_y = \frac{1}{m(A)}\iint\limits_A y\, dxdy.$$

Definicija 1.4.3 (Dijametar skupa) *Neka je $d : X^2 \to [0, \infty]$ proizvoljna funkcija rastojanja na nekom skupu X. Za proizvoljno $A \subseteq X$ je sa*

$$D(A) = \sup_{x,y\in A} d(x, y)$$

definisana funkcija $D : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ na skupu svih podskupova skupa X.

Definicija 1.4.4 (Rub skupa) *Za skup X koji je opremljen topološkom strukturom, **rub skupa** $A \subseteq X$, u oznaci ∂A, je skup svih tačaka $x \in X$ za koje postoji neka okolina tačke x koja sadrži bar jednu tačku skupa A, i bar jednu tačku komplementa skupa A.*

Glava 2

Fazi-skupovi, fazi-operacije i fazi-relacije

Osnove teorije fazi-skupova i fazi-operacija je postavio Lotfi Zadeh u svom čuvenom radu [50]. Danas je fazi-teorija bogato razvijena, i postoji obilje literature vezane za nju, npr. [30]. Fazi-skupovi i raznovrsni tipovi fazi-operacija se definišu i primenjuju u velikom broju naučnih i inženjerskih disciplina. Fazi-skupovima i fazi-operacijama se po pravilu modeliraju pojave u kojima se pojavljuje određena vrsta neodređenosti, i praksa je pokazala velike prednosti u ovakvom pristupu modeliranju i obradi podataka. U ovoj glavi se navode neke osnovne definicije i svojstva nekih tipova fazi-skupova, fazi-operacija i fazi-relacija, sa akcentom na pojmove koji se koriste u glavama 4 i 5.

2.1 Fazi skupovi

Fazi-skupovi se u literaturi definišu na više načina, tj. postoji više tipova fazi-skupova, u zavisnosti od skupa vrednosti odgovarajuće funkcije pripadnosti. Sledi definicija osnovnog tipa fazi-skupa čija funkcija pripadnosti ima vrednosti u intervalu $[0,1]$.

Definicija 2.1.1 *Neka je X proizvoljan neprazan skup.* ***Fazi-skup*** *A sa vrednostima u intervalu $[0,1]$ na prostoru X je funkcija $\mu_A : X \to [0,1]$, odnosno uređeni par (X, μ_A). Funkciju μ_A nazivamo* ***funkcijom pripadnosti*** *(eng.* membership function*) fazi-skupa A. Familiju svih fazi-skupova na X sa vrednostima u $[0,1]$ ćemo označavati sa $\mathcal{F}(X,[0,1])$.*

Funkciju pripadnosti $\mu_A(x)$ često označavamo i sa $A(x)$, i poistovećujemo je sa samim fazi-skupom (X, μ_A). Vrednost $\mu_A(x)$ interpretiramo kao stepen pripadnosti elementa x skupu A. Prazan skup $\emptyset$ i ceo skup X modeliramo funkcijama pripadnosti

$\mu_{\emptyset}(x) = 0,\ x \in X, \qquad \mu_X(x) = 1,\ x \in X.$

Operacije sa fazi-skupovima je poželjno definisati na takav način da i za fazi-skupove važi što više dobrih osobina koje imaju obični skupovi i skupovne operacije. Istorijski prvi, i najjednostavniji način uvođenja fazi-skupovnih operacija je naveden u sledećoj definiciji.

Definicija 2.1.2 *Za fazi-skupove $A, B \in \mathcal{F}(X, [0,1])$ nad prostorom X, sa vrednostima u $[0,1]$, definišemo sledeće osnovne operacije.*

[FSO1] ***Fazi-komplement*** *$\overline{A}$ fazi-skupa A je fazi-skup $\mu_{\overline{A}} : X \to [0,1]$ koji je definisan sa*

$\forall x \in X, \quad \mu_{\overline{A}}(x) = 1 - \mu_A(x).$

[FSO2] ***Fazi-presek*** *$A \cap B$ fazi-skupova A i B je fazi-skup $\mu_{A\cap B} : X \to [0,1]$ koji je definisan sa*

$\forall x \in X, \quad \mu_{A\cap B}(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}.$

[FSO3] ***Fazi-unija*** *$A\cup$ fazi-skupova A i B je fazi-skup $\mu_{A\cup B} : X \to [0,1]$ koji je definisan sa*

$\forall x \in X, \quad \mu_{A\cup B}(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}.$

[FSO4] ***Fazi-inkluzija*** *fazi-skupova A i B, odnosno relacija $A \subseteq B$ je definisana sa*

$A \subseteq B \;\Leftrightarrow\; \forall x \in X, \quad \mu_A(x) \leq \mu_B(x).$

Za ovako definisane operacije sa fazi-skupovima važi većina (ne i sve) osobina koje važe za klasične skupove, npr.

$$
\begin{array}{rl}
\text{involutivnost komplementa:} & \overline{\overline{A}} = A, \\
\text{komutativnost:} & A\cap B = B\cap A, \quad A\cup B = B\cup A, \\
\text{asocijativnost:} & A\cap(B\cap C) = (A\cap B)\cap C, \\
 & A\cup(B\cup C) = (A\cup B)\cup C, \\
\text{distributivnost:} & A\cap(B\cup C) = (A\cap B)\cup(A\cap C), \\
 & A\cup(B\cap C) = (A\cup B)\cap(A\cup C), \\
\text{idempotentnost:} & A\cap A = A, \quad A\cup A = A, \\
\text{apsorpcija:} & A\cap(A\cup B) = A, \qquad A\cup(A\cap B) = A, \\
\text{apsorpcija sa } \emptyset \text{ i } X: & A\cap\emptyset = \emptyset, \qquad A\cup X = X, \\
\text{neutralni elementi:} & A\cup\emptyset = A, \quad A\cap X = A, \\
\text{De Morganovi zakoni:} & \overline{A\cup B} = \overline{A}\cap\overline{B}, \quad \overline{A\cap B} = \overline{A}\cup\overline{B}.
\end{array}
$$

Međutim, za fazi-skupove i operacije sa njima ne važe sve uobičajene skupovne osobine. Na primer, jednakosti $A\cap\overline{A} = \emptyset$ i $A\cup\overline{A} = X$ nisu tačne u opštem slučaju.

Fazi-skup A, tj. njegova funkcija pripadnosti μ_A može da se definiše i kao funkcija $\mu_A : X \to L$ sa vrednostima u nekoj mreži $\mathcal{L} = (L, \preceq)$, pri čemu se tada presek, unija i skupovna inkluzija definišu sa

$\forall x \in X, \quad \mu_{A\cap B}(x) = \inf\{\mu_A(x), \mu_B(x)\},$

$\forall x \in X, \quad \mu_{A\cup B}(x) = \sup\{\mu_A(x), \mu_B(x)\},$

$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x \in X, \quad \mu_A(x) \preceq \mu_B(x).$

Međutim, da bi mogao da se definiše skupovni komplement, potrebno je da mreža $\mathcal{L}$ bude komplementirana, i tada se skupovni komplement $\overline{A}$ skupa A definiše sa

$$\forall x \in X, \quad \mu_{\overline{A}}(x) = \overline{\mu_A(x)},$$

gde je $\overline{a}$ komplement elementa $a \in L$ u mreži $\mathcal{L}$. Takođe, da bi važilo što više skupovnih osobina koje važe za obične skupove, poput npr. De Morganovih zakona i distributivnosti, obično se uzima da je $\mathcal{L} = (L, \preceq)$ Bulova mreža, gde su tada inf i sup binarne operacije Bulove algebre. Familiju svih fazi-skupova sa vrednostima u mreži ili Bulovoj algebri $\mathcal{L}$ ćemo označavati sa $\mathcal{F}(X, \mathcal{L})$.

Osim fazi-skupova sa vrednostima funkcije pripadnosti u $[0,1]$ ili mreži (Bulovoj algebri), u literaturi se razmatraju i fazi-skupovi čije funkcije pripadnosti imaju za vrednosti intervale realnih brojeva, fazi-brojeve, i slično.

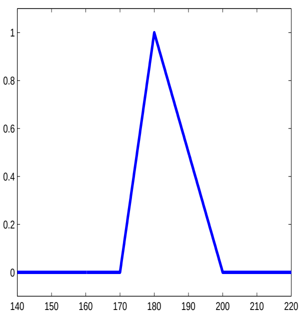
Definicija 2.1.3 *Za fazi-skupove A i B kažemo da su* ***disjunktni*** *ukoliko je $A \cap B = \emptyset$.*

Osim standardnih, od interesa su i mnoge druge operacije fazi-komplementa, fazi-preseka i fazi-unije, od kojih su u nastavku (vidi sekciju 2.2) navedeni neki tipovi fazi-operacija.

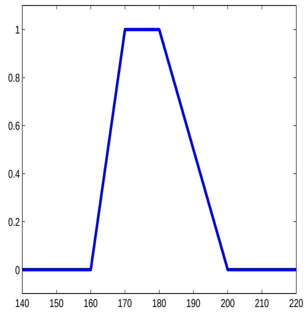
U praksi se veoma često koriste tzv. ***trougaoni*** i ***trapezoidni*** fazi-skupovi nad $\mathbb{R}$ sa vrednostima u $[0,1]$, čiji nazivi potiču od oblika grafika njihove funkcije pripadnosti. Ilustrovani su u sledećem primeru.

Primer 2.1.1 *Neka je A fazi-skup koji modelira pojam „čovek srednje visine”. Dakle, za određenu visinu $x \in X = \mathbb{R}$ centimetara, vrednost $A(x)$ predstavlja stepen u kojem čovek visine x pripada skupu „srednje visokih ljudi”. Sledeće funkcije pripadanja A_i, $i \in \{1,2,3\}$ mogu da posluže kao model skupa „srednje visokih ljudi”. Pri tome je A_1 trougaoni, a A_2 trapezoidni fazi-skup.*

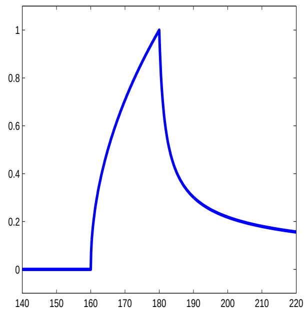
$$A_1(x) = \begin{cases} \frac{1}{10}x - 17 \ , & x \in [170, 180] \\ -\frac{1}{20}x + 10, & x \in (180, 200] \ , \\ 0 \quad , & x \notin [170, 200] \end{cases}$$



$$A_2(x) = \begin{cases} \frac{1}{10}x - 16\ , & x \in [160, 170) \\ 1 \ , & x \in [170, 180] \\ -\frac{1}{20}x + 10, & x \in (180, 200] \\ 0 \ , & x \notin [160, 200] \end{cases},$$



$$A_3(x) = \begin{cases} 0 \ , & x \notin [-\infty, 160] \\ \sqrt{\frac{x-160}{20}}, & x \in [160, 180] \\ \frac{1}{\sqrt{x-179}}\ , & x \in (180, \infty) \end{cases},$$



$\boxtimes$

Nadalje, ako drugačije nije naglašeno, podrazumevamo da se razmatraju fazi-skupovi sa vrednostima u $[0,1]$. Slede definicije nekih osnovnih karakteristika fazi-skupa.

Definicija 2.1.4 *Neka je A fazi-skup nad X, sa vrednostima u $[0,1]$, i neka je $\alpha \in [0,1]$.*

- ***Visina*** *(eng.* height*) fazi-skupa A je broj iz intervala $[0,1]$ definisan sa*

  $h(A) = \sup_{x \in X} A(x)$.

  Za fazi-skup A kažemo da je ***normalan*** *ako je $h(A) = 1$, odnosno* ***sub-normalan*** *ako je $h(A) < 1$.*
- ***Nosač*** *(eng.* support*) fazi-skupa A je podskup skupa X definisan sa*

  $\mathrm{supp}(A) = \{x \in X \mid A(x) > 0\}$.
- ***Jezgro*** *(eng.* core *ili* kernel*) fazi-skupa A je podskup skupa X definisan sa*

  $\mathrm{core}(A) = \{x \in X \mid A(x) = 1\}$.
- ***Nivo-skup*** *(eng.* level set*) fazi-skupa A je podskup intervala $[0,1]$ definisan sa*

  $\Lambda(A) = A(X) = \{A(x) \mid x \in X\}$.

Izuzetno važan pojam α-rezova vezan za fazi-skup je dat u sledećoj definiciji.

Definicija 2.1.5 *Neka je A fazi-skup nad X sa vrednostima u $[0,1]$, i neka je $\alpha \in [0,1]$.*

- ***α-rez*** *(eng. α-cut) fazi-skupa A je podskup skupa X definisan sa*

  ${}^{\alpha}A = \{\, x \in X \mid A(x) \geq \alpha \}.$
- ***Strogi α-rez*** *(eng. strong α-cut) fazi-skupa A je podskup skupa X definisan sa*

  ${}^{\alpha+}A = \{\, x \in X \mid A(x) > \alpha \}.$

α-rezovi su obični skupovi. Primetimo da je ${}^{0+}A = \operatorname{supp}(A)$ i ${}^{1}A = \operatorname{core}(A)$, kao i ${}^{0}A = X$ i ${}^{1+}A = \emptyset$. Kao što ćemo videti, ovi pojmovi se koriste za reprezentaciju fazi-skupova. Takođe se pomoću njih definišu i reprezentuju aritmetičke operacije sa fazi-brojevima.

Primer 2.1.2 *Za fazi-skupove iz primera* 2.1.1 *imamo sledeće njihove karakteristike.*

$[A_1]$ $h(A_1) = 1,\ \operatorname{supp}(A_1) = (170, 200),\ \operatorname{core}(A_1) = \{180\},\ \Lambda(A_1) = [0,1],$

$${}^{\alpha}A_1 = [10\alpha + 170, 200 - 20\alpha],\ \alpha \in (0,1],$$
$${}^{\alpha+}A_1 = (10\alpha + 170, 200 - 20\alpha),\ \alpha \in [0,1).$$

$[A_2]$ $h(A_2) = 1,\ \operatorname{supp}(A_2) = (160, 200),\ \operatorname{core}(A_2) = [170, 180],\ \Lambda(A_2) = [0,1],$

$${}^{\alpha}A_2 = [10\alpha + 160, 200 - 20\alpha],\ \alpha \in (0,1), \qquad {}^{1}A_2 = \operatorname{core}(A_2) = [170, 180],$$
$${}^{\alpha+}A_2 = (10\alpha + 160, 200 - 20\alpha),\ \alpha \in [0,1).$$

$[A_3]$ $h(A_3) = 1,\ \operatorname{supp}(A_3) = (160, \infty),\ \operatorname{core}(A_3) = \{180\},\ \Lambda(A_3) = [0,1],$

$${}^{\alpha}A_3 = \left[20\alpha^2 + 160, \frac{1}{\alpha^2} + 179\right],\ \alpha \in (0,1],$$
$${}^{\alpha+}A_3 = \left(20\alpha^2 + 160, \frac{1}{\alpha^2} + 179\right),\ \alpha \in (0,1), \qquad {}^{0+}A_3 = (160, \infty). \qquad \boxtimes$$

Za α-rezove očigledno važi da su monotono nerastući skupovi u odnosu na $\alpha \in [0,1]$, tj. za sve $\alpha_1 < \alpha_2$ imamo

$${}^{\alpha_1}A \supseteq {}^{\alpha_2}A \quad \wedge \quad {}^{\alpha_1+}A \supseteq {}^{\alpha_2+}A.$$

Za ovako definisane fazi-skupove, njihove α-rezove i skupovne operacije važe još i sledeća zanimljiva i značajna svojstva.

Teorema 2.1.1 *Za $\alpha, \beta \in [0,1]$ i fazi-skupove $A, B \in \mathcal{F}([0,1])$ je:*

- ${}^{\alpha+}A \subseteq {}^{\alpha}A,$
- ${}^{\alpha}(A \cap B) = {}^{\alpha}A \cap {}^{\alpha}B, \qquad {}^{\alpha+}(A \cap B) = {}^{\alpha+}A \cap {}^{\alpha+}B,$
- ${}^{\alpha}(A \cup B) = {}^{\alpha}A \cup {}^{\alpha}B, \qquad {}^{\alpha+}(A \cup B) = {}^{\alpha+}A \cup {}^{\alpha+}B,$

- ${}^{\alpha}\left(\overline{A}\right) = {}^{(1-\alpha)+}\overline{A}$.

U opštem slučaju je ${}^{\alpha}\left(\overline{A}\right) \neq \overline{{}^{\alpha}A}$ *i* ${}^{\alpha+}\left(\overline{A}\right) \neq \overline{{}^{\alpha+}A}$.

Za $\alpha \in [0,1]$ *i familiju* $A_i \in \mathcal{F}([0,1])$, $i \in I$ *fazi-skupova, gde je* I *proizvoljan skup indeksa važi:*

- $\displaystyle\bigcup_{i\in I} {}^{\alpha}A_i \subseteq {}^{\alpha}\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right), \qquad \bigcup_{i\in I} {}^{\alpha+}A_i = {}^{\alpha+}\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right),$
- $\displaystyle\bigcap_{i\in I} {}^{\alpha}A_i = {}^{\alpha}\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right), \qquad \bigcap_{i\in I} {}^{\alpha+}A_i \subseteq {}^{\alpha+}\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right).$

U opštem slučaju, u prethodne dve osobine ne važi jednakost na mestu skupovnih inkluzija.

Jednakost i inkluziju fazi-skupova možemo okarakterisati na sledeći način. Za $A, B \in \mathcal{F}([0,1])$ *je:*

- $A \subseteq B \;\Leftrightarrow\; \forall\alpha \in [0,1],\ {}^{\alpha}A \subseteq {}^{\alpha}B,$
  $A \subseteq B \;\Leftrightarrow\; \forall\alpha \in [0,1],\ {}^{\alpha+}A \subseteq {}^{\alpha+}B,$
- $A = B \;\Leftrightarrow\; \forall\alpha \in [0,1],\ {}^{\alpha}A = {}^{\alpha}B,$
  $A = B \;\Leftrightarrow\; \forall\alpha \in [0,1],\ {}^{\alpha+}A = {}^{\alpha+}B.$

α*-rezovi se mogu predstaviti i na sledeći način. Za* $A \in \mathcal{F}([0,1])$ *i* $\alpha, \beta \in [0,1]$ *je:*

- $\displaystyle {}^{\alpha}A = \bigcap_{\beta<\alpha} {}^{\beta}A = \bigcap_{\beta<\alpha} {}^{\beta+}A,$
- $\displaystyle {}^{\alpha+}A = \bigcup_{\alpha<\beta} {}^{\beta}A = \bigcup_{\alpha<\beta} {}^{\beta+}A.$

Za fazi-skup $A \in \mathcal{F}(X,[0,1])$ i $\alpha \in [0,1]$, na sledeći način definišemo njemu odgovarajuće fazi-skupove ${}_{\alpha}A \in \mathcal{F}(X,[0,1])$ i ${}_{\alpha+}A \in \mathcal{F}(X,[0,1])$, koji se takođe koriste pri raznim vidovima reprezentacije fazi-skupa A.

- ${}_{\alpha}A(x) = \alpha \cdot {}^{\alpha}A(x) = \alpha \cdot \chi_{{}^{\alpha}A}(x), \quad x \in X,$
- ${}_{\alpha+}A(x) = \alpha \cdot {}^{\alpha+}A(x) = \alpha \cdot \chi_{{}^{\alpha+}A}(x), \quad x \in X,$

gde je χ_S standardna karakteristična funkcija skupa S.

Primer 2.1.3 *Na primer, za fazi-skup* A_1 *iz primera* 2.1.1 *i njemu odgovarajuće* α*-rezove*

$${}^{\alpha}A_1 = [10\alpha + 170, 200 - 20\alpha], \;\; \alpha \in (0,1], \qquad {}^{0}A_1 = X,$$
$${}^{\alpha+}A_1 = (10\alpha + 170, 200 - 20\alpha), \;\; \alpha \in [0,1), \qquad {}^{1+}A_1 = \emptyset,$$

iz primera 2.1.2*, dobijamo da je*

$$_{\alpha}A_1(x) = \begin{cases} \alpha & , \quad x \in [10\alpha + 170, 200 - 20\alpha] \\ 0 & , \quad x \notin [10\alpha + 170, 200 - 20\alpha] \end{cases}, \quad \alpha \in (0,1],$$

$$_{0}A_1(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$_{\alpha+}A_1(x) = \begin{cases} \alpha & , \quad x \in (10\alpha + 170, 200 - 20\alpha) \\ 0 & , \quad x \notin (10\alpha + 170, 200 - 20\alpha) \end{cases}, \quad \alpha \in [0,1),$$

$$_{1+}A_1(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

☑

Fazi-skup A se može predstaviti kao fazi-unija fazi-skupova $_{\alpha}A$ i $_{\alpha+}A$ kao što je navedeno u sledećoj teoremi o reprezentaciji.

Teorema 2.1.2 *Za fazi-skup* $A \in \mathcal{F}(X,[0,1])$ *je*

- $A = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} {}_{\alpha}A,$
- $A = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} {}_{\alpha+}A,$
- $A = \bigcup_{\alpha \in \Lambda(A)} {}_{\alpha}A,$

gde je $\cup$ *standardna fazi-unija.*

2.2 Fazi operacije

Umesto standardnih skupovnih fazi-operacija

$$\forall x \in X, \quad \mu_{\overline{A}}(x) = 1 - \mu_A(x),$$
$$\forall x \in X, \quad \mu_{A\cap B}(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\},$$
$$\forall x \in X, \quad \mu_{A\cup B}(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\},$$

za fazi-skupove $A, B \in \mathcal{F}(X,[0,1])$, od interesa je definisati i razmotriti i neke druge operacije, koje su uopštenja standardnih fazi-operacija. U ovoj sekciji su date opšte definicije fazi-komplementa, fazi-preseka i fazi-unije.

Operacije fazi-preseka su još poznate i pod nazivom t-norme, a operacije fazi-unije pod nazivom t-konorme. Do začetka njihovog istraživanja je došlo 50-tih i 60-tih godina 20-og veka u radovima Aczéla, Kolokoltsova i Maslova. Do intenzivnog razvoja istraživanja ovih operacija, njihovog korišćenja u raznorodnim disciplinama i praksi, kao i uobličavanja teorije je došlo 80-tih godina. Među najzaslužnijim za istraživanje ovih operacija su, osim prethodno pomenutih autora, još i npr. D. Dubois, H. Prade, R. Yager, M. Sugeno, E. Pap, R. Mesiar, E. P. Klement, J. Fodor itd. vidi npr. [2], [14], [33], [28], [30], [24], [12], [26], [27], [36], [37], [41], [42].

Fundamentalne teoreme o reprezentaciji t-normi i t-konormi daju karakterizaciju ovih operacija, kao i metod generisanja ovakvih operacija pomoću funkcija koje su striktno monotone na intervalu $[0,1]$, tzv. generatora t-normi i t-konormi. U tu svrhu se uvodi pojam pseudo-inverznih funkcija ovakvih generatora.

Definicija 2.2.1 *Neka je* $f : [0,1] \to [0,\infty)$ *neprekidna i striktno monotona funkcija.*

- ➘ *Ako je funkcija* f *striktno monotono opadajuća i* $f(1) = 0$*, tada se ona naziva* **opadajući generator**. *Njena* **pseudo-inverzna funkcija** *je funkcija* $f^{(-1)} : \mathbb{R} \to [0,1]$ *definisana sa*

$$f^{(-1)}(x) = \begin{cases} 1 & , \ x \in (-\infty, 0) \\ f^{-1}(x) & , \ x \in [0, f(0)] \\ 0 & , \ x \in (f(0), \infty) \end{cases},$$

  gde je funkcija $f^{-1} : [0, f(0)] \to [0,1]$ *obična inverzna funkcija funkcije* $f : [0,1] \to [0, f(0)]$.

- ➚ *Ako je funkcija* f *striktno monotono rastuća i* $f(0) = 0$*, tada se ona naziva* **rastući generator**. *Njena* **pseudo-inverzna funkcija** *je funkcija* $f^{(-1)} : \mathbb{R} \to [0,1]$ *definisana sa*

$$f^{(-1)}(x) = \begin{cases} 0 & , \ x \in (-\infty, 0) \\ f^{-1}(x) & , \ x \in [0, f(1)] \\ 1 & , \ x \in (f(1), \infty) \end{cases},$$

  gde je funkcija $f^{-1} : [0, f(1)] \to [0,1]$ *obična inverzna funkcija funkcije* $f : [0,1] \to [0, f(1)]$.

Teorema 2.2.1 *Generator i njegova pseudo-inverzna funkcija se na intervalu* $[0,1]$ *ponašaju kao uzajamno inverzne funkcije u sledećem smislu.*

- ➘ *Za striktno monotono opadajući generator* f *i njegovu pseudo-inverznu funkciju* $f^{(-1)}$ *važi*

$$\forall x \in [0,1], \quad f^{(-1)}(f(x)) = x,$$

$$f\left(f^{(-1)}(x)\right) = \begin{cases} 0 & , \ x \in (-\infty, 0) \\ x & , \ x \in [0, f(0)] \\ f(0) & , \ x \in (f(0), \infty) \end{cases}.$$

- ➚ *Za striktno monotono rastući generator* f *i njegovu pseudo-inverznu funkciju* $f^{(-1)}$ *važi*

$$\forall x \in [0,1], \quad f^{(-1)}(f(x)) = x,$$

$$f\left(f^{(-1)}(x)\right) = \begin{cases} 0 & , \ x \in (-\infty, 0) \\ x & , \ x \in [0, f(1)] \\ f(1) & , \ x \in (f(1), \infty) \end{cases}.$$

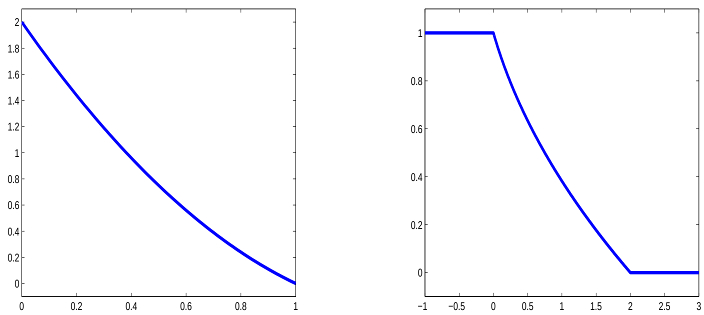
Sledi po jedan primer opadajućeg i rastućeg generatora.

Primer 2.2.1 *Za opadajući generator*

$$f : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2 - 3x + 2, \ \ x \in [0,1],$$

njegova pseudo-inverzna funkcija $f^{(-1)} : \mathbb{R} \to [0,1]$ *je definisana sa*

$$f^{(-1)}(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x \in (-\infty, 0) \\ \dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{2}\sqrt{4x+1}, & \quad x \in [0, 2] \\ 0 & , \quad x \in (2, \infty) \end{cases} \quad .$$



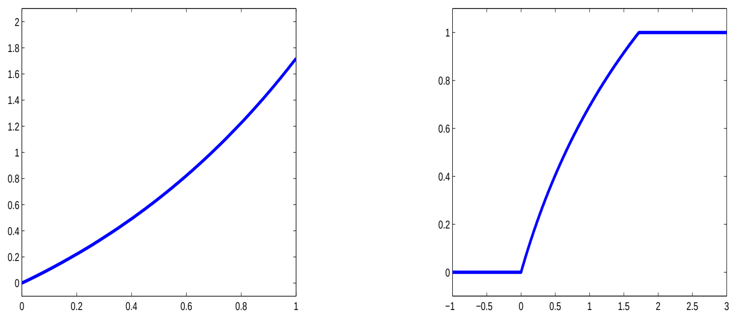
☑

Primer 2.2.2 *Za rastući generator*

$g : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad g(x) = e^x - 1, \;\; x \in [0,1],$

njegova pseudo-inverzna funkcija $g^{(-1)} : \mathbb{R} \to [0,1]$ *je definisana sa*

$$g^{(-1)}(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \in (-\infty, 0) \\ \ln(x+1), & \quad x \in [0, e-1] \\ 1 & , \quad x \in (e-1, \infty) \end{cases} \quad ,$$



☑

Lema 2.2.1 *Rastući i opadajući generator se mogu jedan preko drugog izraziti na sledeći način.*

❒ *Neka je* f *opadajući generator. Tada je funkcija*

$$g(x) = f(0) - f(x)$$

rastući generator, pri čemu je $g(1) = f(0)$, *a njena pseudo-inverzna funkcija je definisana sa*

$$g^{(-1)}(x) = f^{(-1)}(f(0) - x).$$

❒ *Neka je g rastući generator. Tada je funkcija*

$$f(x) = g(1) - g(x)$$

rastući generator, pri čemu je $f(0) = g(1)$, a njena pseudo-inverzna funkcija je definisana sa

$$f^{(-1)}(x) = g^{(-1)}(g(1) - x).$$

Definicije, svojstva, reprezentacija i primeri fazi-komplementa, fazi-preseka i fazi-unije su dati redom u odeljcima 2.2.1, 2.2.2 i 2.2.3.

2.2.1 Fazi-komplement

Umesto osnovne operacije fazi-komplementa

$$c : [0,1] \to [0,1], \quad c(x) = 1 - x, \ x \in [0,1],$$

se mogu koristiti i neke druge funkcije sa određenim osobinama koje za posledicu imaju poželjna svojstva skupovnog fazi-komplementa. U ovom odeljku su dati definicija, svojstva i primeri ovakvih operacija. Slede aksiome fazi-komplementa, vidi [30].

Definicija 2.2.2 ***Fazi-komplement*** *je funkcija $c : [0,1] \to [0,1]$ za koju važi*

[FC1] $c(0) = 1 \ \wedge \ c(1) = 0,$ *(rubni uslovi)*

[FC2] $\forall x, y \in [0,1], \quad x \leq y \ \Rightarrow \ c(x) \geq c(y).$ *(monotonost)*

Osim ovih osnovnih, fazi-komplement može da ima i sledeće dodatne važne i poželjne osobine

[FC3] *c je neprekidna funkcija,*

[FC4] $\forall x \in [0,1], \quad c(c(x)) = x.$ *(involutivnost)*

Funkciju sa osobinama [FC1] *i* [FC2] *ćemo nazivati* ***fazi-komplement u širem smislu****, a funkciju sa osobinama* [FC1], [FC2], [FC3] *i* [FC4] *ćemo nazivati* ***fazi-komplement u užem smislu****.*

Ako nije drugačije naglašeno, pod fazi-komplementom podrazumevamo fazi-komplement u širem smislu. Za ovako definisanu operaciju c se skupovni fazi-komplement definiše na sledeći način.

Definicija 2.2.3 *Neka je c fazi-komplement iz definicije* 2.2.2*, i neka je X proizvoljan skup. Za fazi-skup $A \in \mathcal{F}(X, [0,1])$, fazi-komplement $\overline{A}^c$ skupa A je fazi-skup $\overline{A}^c \in \mathcal{F}(X, [0,1])$ definisan sa*

$$\overline{A}^c(x) = c(A(x)), \ x \in X.$$

Aksiome fazi-komplementa nisu nezavisne. Sledeća teorema daje jednu bitnu vezu između ovih aksioma.

Teorema 2.2.2 *Ako funkcija $c : [0,1] \to [0,1]$ zadovoljava aksiome* [FC2] *i* [FC4]*, tada zadovoljava i aksiome* [FC1] *i* [FC3]*, pri čemu je u tom slučaju funkcija c i bijektivna.*

Dakle, na osnovu teoreme 2.2.2 sledi da je klasa involutivnih fazi-komplemenata podklasa klase neprekidnih fazi-komplemenata (koja je podklasa klase svih fazi-komplemenata).

Za neku tačku $x \in X$, funkcije pripadnosti fazi-skupova $A \in \mathcal{F}(X, [0,1])$ i $\overline{A}^c \in \mathcal{F}(X, [0,1])$ mogu imati istu vrednost, odnosno tačka $x \in X$ može u jednakoj meri da pripada i skupu A i njegovom komplementu $\overline{A}^c$.

Definicija 2.2.4 *Tačka $e_c \in [0,1]$ je* ***ekvilibrijum*** *(eng.* equilibrium*) fazi-komplementa $c : [0,1] \to [0,1]$ ako je e_c nepokretna tačka funkcije c, odnosno tačka za koju važi $c(e_c) = e_c$.*

Definicija 2.2.5 *Broj ${}^d x \in [0,1]$ je* ***dualna tačka*** *tačke $x \in [0,1]$ u odnosu na fazi-komplement c ako je $c\left({}^d x\right) - {}^d x = x - c(x)$.*

Teorema 2.2.3 *Fazi-komplement c može da ima najviše jedan ekvilibrijum.*

Teorema 2.2.4 *Neprekidan fazi-komplement c ima jedinstven ekvilibrijum.*

Teorema 2.2.5 *Ako fazi-komplement c ima ekvilibrijum e_c, tada je ${}^d e_c = e_c$.*

Dakle, fazi-komplement c može da ima jedan ili nijedan ekvilibrijum, pri čemu za taj ekvilibrijum, ako postoji, važi sledeće svojstvo.

Teorema 2.2.6 *Ako fazi-komplement c ima (jedinstven) ekvilibrijum e_c, tada za sve $x \in [0,1]$ važi*

- $x \leq e_c \;\Rightarrow\; x \leq c(x)$,
- $x \geq e_c \;\Rightarrow\; x \geq c(x)$.

Teorema 2.2.7 *Dualne tačke ${}^d x \in [0,1]$ tačaka $x \in [0,1]$ se poklapaju sa fazi-komplementima $c(x)$ ako i samo ako je fazi-komplement c involutivan, tj. važi*

$$\forall x \in [0,1], \quad {}^d x = c(x) \;\Leftrightarrow\; c(c(x)) = x.$$

Ako fazi-komplement c nije involutivan, tada dualne tačke ${}^d x$ ili ne postoje, ili se ne poklapaju sa komplementima $c(x)$.

Involutivni komplementi su u primenama veoma značajna klasa fazi-komplemenata. Sledeće dve teoreme daju karakterizacije fazi-komplemenata pomoću kojih možemo konstruisati neograničen broj fazi-komplemenata (vidi primer 2.2.3).

Teorema 2.2.8 *Funkcija $c : [0,1] \to [0,1]$ je involutivan fazi-komplement ako i samo ako postoji neprekidna i strogo monotono rastuća funkcija $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ takva da je*

- $g(0) = 0$,
- $\forall x \in [0,1]\,, \quad c(x) = g^{-1}(g(1) - g(x))$.

Funkciju g nazivamo **rastućim generatorom** *fazi-komplementa c.*

Teorema 2.2.9 *Funkcija $c : [0,1] \to [0,1]$ je involutivan fazi-komplement ako i samo ako postoji neprekidna i strogo monotono opadajuća funkcija $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ takva da je*

- $f(1) = 0$,
- $\forall x \in [0,1]\,, \quad c(x) = f^{-1}(f(0) - f(x))$.

Funkciju f nazivamo **opadajućim generatorom** *fazi-komplementa c.*

Napomena 2.2.1 *Ako je funkcija g rastući generator fazi-komplementa c, tada je funkcija*

$$f(x) = g(1) - g(x),\ x \in [0,1]$$

opadajući generator fazi-komplementa c. I obrnuto, ako je funkcija f opadajući generator fazi-komplementa c, tada je funkcija

$$g(x) = f(0) - f(x),\ x \in [0,1]$$

rastući generator fazi-komplementa c.

U sledećem primeru su navedeni neki fazi-komplementi, neki od njih zajedno sa svojim generatorima, vidi [30], [12], [39], [43]. U primenama su naročito značajni i često korišćeni Sugenovi i Yagerovi komplementi.

Primer 2.2.3 *Neki od važnijih primera fazi-komplemenata su sledeći.*

① ***Threshold funkcija****: neka je $t_0 \in [0,1]$ i*

$$c(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x \le t_0 \\ 0 & , \quad x > t_0 \end{cases}.$$

Funkcija c je fazi-komplement koji nije ni neprekidan ni involutivan.

② *Funkcija*

$$c(x) = \begin{cases} 1 - x & , \quad 0 \le x \le 0.3 \\ 0.7 & , \quad 0.3 < x < 1 \\ 0 & , \quad x = 1 \end{cases}.$$

je fazi-komplement koji nije ni neprekidan ni involutivan.

③ *Funkcije*

$$c(x) = \frac{1}{2}(1 + \cos(\pi x)),\ x \in [0,1],$$

$$c(x) = 1 - \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right),\ x \in [0,1]$$

su fazi-komplementi koji su neprekidni, ali nisu involutivni.

④ *Standardni fazi-komplement*

$c_S(x) = 1 - x,\ x \in [0,1]$

je neprekidan i involutivan fazi-komplement. Njegov ekvilibrijum je tačka $e_{c_S} = 0.5$. *Funkcija* $g(x) = x,\ x \in [0,1]$ *je njen rastući, a* $f(x) = 1 - x$, $x \in [0,1]$ *njen opadajući generator.*

⑤ *Funkcija*

$c(x) = 1 - x^2,\ x \in [0,1]$

je neprekidan fazi-komplement, ali nije involutivan. Njegov ekvilibrijum je tačka $e_c = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

⑥ *Funkcija*

$c(x) = \sqrt{1 - x^2},\ x \in [0,1]$

je neprekidan i involutivan fazi-komplement. Njegov ekvilibrijum je tačka $e_c = \frac{1}{\sqrt{2}}$. *Funkcija* $g(x) = x^2,\ x \in [0,1]$ *je njen rastući, a* $f(x) = 1 - x^2$, $x \in [0,1]$ *njen opadajući generator.*

⑦ *Za proizvoljno* $\lambda \in (-1, \infty)$ *je* ***Sugeno-ova klasa fazi-komplemenata*** *definisana sa*

$$c_{S,\lambda}(x) = \frac{1 - x}{1 + \lambda x},\ x \in [0,1].$$

Za sve $\lambda \in (-1, \infty)$ *je* c_λ *neprekidan i involutivan fazi-komplement, sa ekvilibrijumom*

$$e_{c_{S,\lambda}} = \begin{cases} 0.5 & ,\ \lambda = 0 \\ \dfrac{\sqrt{1+\lambda} - 1}{\lambda} & ,\ \lambda \neq 0 \end{cases},$$

rastućim generatorom

$$g_\lambda(x) = \frac{1}{\lambda} \ln(1 + \lambda x),\ x \in [0,1]$$

za $\lambda \neq 0$, *i opadajućim generatorom*

$$f_\lambda(x) = \ln(1 + x) - \frac{1}{\lambda} \ln(1 + \lambda x),\ x \in [0,1]$$

za $\lambda \neq 0$. *Primetimo da je* $c_{S,0}(x) = 1 - x,\ x \in [0,1]$ *standardni fazi-komplement iz primera pod ④, kao i da je funkcija*

$$g_0(x) = \lim_{\lambda \to 0} g_\lambda(x) = x,\ x \in [0,1]$$

rastući generator standardnog fazi-komplementa $c_{S,0} = c_S$.

⑧ *Za proizvoljno* $\omega \in (0, \infty)$ *je* **Yager-ova klasa fazi-komplemenata** *definisana sa*

$$c_{Y,\omega}(x) = (1 - x^\omega)^{\frac{1}{\omega}}.$$

Za sve $\omega \in (0, \infty)$ *je* $c_{Y,\omega}$ *neprekidan i involutivan fazi-komplement, sa ekvilibrijumom* $e_{c_{Y,\omega}} = \dfrac{1}{\sqrt[\omega]{2}}$, *rastućim generatorom*

$g_\omega(x) = x^\omega,\ x \in [0,1],$

i opadajućim generatorom

$f_\omega(x) = 1 - x^\omega,\ x \in [0,1].$

Primetimo da za $\omega = 1$ dobijamo standardni fazi-komplement iz primera pod ④, a za $\omega = 2$ dobijamo fazi-komplement iz primera pod ⑥.

⑨ *Za $\lambda \in (-1,\infty)$ i $\omega \in (0,\infty)$ je sa*

$$c_{\lambda,\omega}(x) = \left(\frac{1-x^\omega}{1+\lambda x^\omega}\right)^{\frac{1}{\omega}},\ x \in [0,1]$$

definisana klasa fazi-komplemenata sa rastućim generatorom

$$g_{\lambda,\omega}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda}\ln(1+\lambda x^\omega),\ x \in [0,1] & ,\quad \lambda \neq 0 \\ x^\omega,\ x \in [0,1] & ,\quad \lambda = 0 \end{cases}.$$

Za $\omega = 1$ je to Sugeno-ova klasa, a za $\lambda = 0$ Yager-ova klasa fazi-komplemenata.

⑩ *Za $\gamma \in (0,\infty)$ je sa*

$$c_\gamma(x) = \frac{\gamma^2(1-x)}{x+\gamma^2(1-x)},\ x \in [0,1]$$

definisana klasa fazi-komplemenata sa rastućim generatorom

$$g_\gamma(x) = \frac{x}{\gamma+(1-\gamma)x},\ x \in [0,1],$$

i opadajućim generatorom

$$f_\gamma(x) = \frac{\gamma(1-x)}{\gamma+(1-\gamma)x},\ x \in [0,1].$$

☑

2.2.2 Fazi-presek odnosno t-norme

Umesto osnovne operacije min fazi-preseka se mogu koristiti i neke druge binarne operacije sa svojstvima koje za posledicu daju poželjna svojstva skupovnog fazi-preseka. To su tzv. t-norme. U ovom odeljku su dati definicija, osobine, karakterizacija i primeri ovakvih operacija, vidi [30], [28].

Definicija 2.2.6 ***Trougaona norma*** *(skraćeno* ***t-norma****) ili* ***fazi-presek****, je binarna operacija $T : [0,1]^2 \to [0,1]$ takva da za sve $x, y, z \in [0,1]$ važi*

[tN1] $T(x,y) = T(y,x),$ *(komutativnost)*

[tN2] $T(x, T(y,z)) = T(T(x,y),z),$ *(asocijativnost)*

[tN3] $y \leq z \Rightarrow T(x,y) \leq T(x,z),$ *(monotonost)*

[tN4] $T(x,1) = x.$ *(granični uslov)*

Postoji neprebrojivo mnogo t-normi.

✎ Binarnu operaciju t-norme T možemo induktivno proširiti na operaciju $T : \bigcup_{n=2}^{\infty} [0,1]^n \to [0,1]$ na sledeći prirodan način. Za svako $n \geq 3$ i sve $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in [0,1]^n$ definišimo

$$T(x_1, x_2, \ldots, x_n) = T(T(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}), x_n). \tag{2.2.1}$$

Zahvaljujući komutativnosti i asocijativnosti t-normi, za svaku permutaciju p skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$ važi

$$T(x_1, x_2, \ldots, x_n) = T\left(x_{p(1)}, x_{p(2)}, \ldots, x_{p(n)}\right),$$

odnosno, redosled operanada u $T(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ je nebitan.

✎ Uvedimo sledeću prirodnu relaciju poretka za proizvoljne t-norme T_1 i T_2:

$$T_1 \leq T_2 \quad \Leftrightarrow \quad \forall x, y \in [0,1],\ T_1(x,y) \leq T_2(x,y).$$

Svaka t-norma indukuje jednu operaciju skupovnog fazi-preseka. Stoga, za fazi-skupove sa vrednostima u $[0,1]$, možemo poistovetiti pojmove t-norme i fazi-preseka.

Definicija 2.2.7 *Neka je T proizvoljna t-norma, i neka je X proizvoljan skup. Za proizvoljne fazi-skupove $A, B \in \mathcal{F}(X, [0,1])$, njihov fazi-presek je fazi-skup $A \cap B \in \mathcal{F}(X, [0,1])$ definisan sa*

$$(A \cap B)(x) = T(A(x), B(x)),\ x \in X.$$

Dakle, svaka t-norma predstavlja jednu skupovnu operaciju fazi-preseka, i postalo je opšteprihvaćeno da su pojmovi fazi-preseka i t-norme ekvivalentni. Definicija t-norme za direktnu posledicu daje da za fazi-presek $\cap$ i fazi-skupove $A, B, C \in \mathcal{F}(X, [0,1])$ važi

$$\begin{array}{ll} A \cap B = B \cap A, & A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C, \\ B \subseteq C \ \Rightarrow \ A \cap B \subseteq A \cap C, & A \cap X = A, \end{array}$$

gde je fazi-skup X definisan sa $X(x) = 1,\ x \in X$.

Teorema 2.2.10 *Standardni fazi-presek, odnosno odgovarajuća t-norma* min*, je jedina idempotentna t-norma.*

Teorema 2.2.11 *Važe sledeće osnovne osobine t-normi.*

(a) *Za svako $x \in [0,1]$ važi*

$$T(0,x) = T(x,0) = 0 \quad \wedge \quad T(1,x) = T(x,1) = x,$$

tj. sve t-norme se poklapaju na rubovima intervala $[0,1]$.

(b) *Svaka t-norma je monotona po obe komponente, odnosno*

$$(x_1 \leq y_1 \ \wedge\ x_2 \leq y_2) \ \Rightarrow\ T(x_1, x_2) \leq T(y_1, y_2).$$

(c) *Za sve* $x, y \in [0,1]$ *važi*

$$T(x,y) \leq x \quad \wedge \quad T(x,y) \leq y,$$

tj.

$$T(x,y) \leq \min(x,y),$$

odnosno $T \leq \min$. *Dakle, operacija* min *je maksimalna* t*-norma.*

(d) $T(0,0) = 0 \;\; \wedge \;\; T(1,1) = 1.$

Za t-normu je često od interesa zahtevati još neke dodatne osobine. Najvažnije od tih dodatnih osobina su navedene u sledećoj definiciji.

Definicija 2.2.8 *t-norma T može da ima neke od sledećih dodatnih osobina.*

[tN5] *T je neprekidna funkcija.* *(neprekidnost)*

[tN6] $\forall x \in (0,1)\,,\;\; T(x,x) < x.$ *(subidempotentnost)*

[tN7] $(x_1 < y_1 \;\wedge\; x_2 < y_2) \;\Rightarrow\; T(x_1,x_2) < T(y_1,y_2).$ *(striktna monotonost)*

*Neprekidna i subidempotentna t-norma se naziva **Arhimedovska t-norma**, a ako je još pri tome i striktno monotona, tada se naziva **striktna Arhimedovska t-norma**.*

t-norma koja ima neku od ovih, ili još neku drugu osobinu, generiše fazi-presek koji ima još neke poželjne osobine.

Čuvena teorema o reprezentaciji Arhimedovskih t-normi Schweizer-a i Sklar-a iz 1963. godine daje karakterizaciju Arhimedovskih t-normi pomoću opadajućih generatora. Naime, svaka Arhimedovska t-norma se može konstruisati pomoću nekog opadajućeg generatora, i obratno, svaki opadajući generator definiše jednu t-normu, vidi [38] i [37].

Teorema 2.2.12 (Schweizer i Sklar) *Neka je T binarna operacija intervala $[0,1]$. Operacija T je Arhimedovska t-norma ako i samo ako postoji opadajući generator f takav da je*

$$\forall x, y \in [0,1]\,, \quad T(x,y) = f^{(-1)}\left(f(x) + f(y)\right).$$

Polazeći od poznate t-norme i odgovarajuće funkcije g iz $[0,1]$ u $[0,1]$, može se generisati nova t-norma na sledeći način.

Teorema 2.2.13 *Neka je T proizvoljna t-norma, i neka je $g : [0,1] \to [0,1]$ strogo rastuća funkcija koja je neprekidna na $(0,1)$, takva da je $g(0) = 0$ i $g(1) = 1$. Tada je funkcija $T_g : [0,1]^2 \to [0,1]$ definisana sa*

$$T_g(x,y) = g^{(-1)}\left(T\left(g(x), g(y)\right)\right), \quad x, y \in [0,1]$$

takođe t-norma, gde je $g^{(-1)}$ pseudo-inverzna funkcija funkcije g.

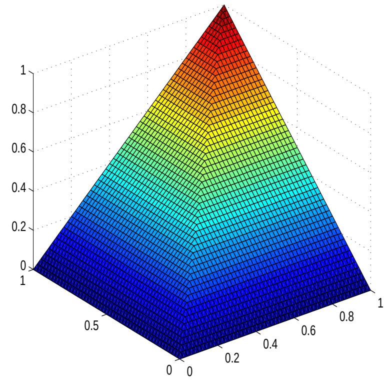
Slede važni primeri t-normi, od kojih se neke intenzivno koriste u raznim inženjerskim disciplinama. Za neke od njih je naveden i odgovarajući opadajući generator iz teoreme 2.2.12 o reprezentaciji.

Primer 2.2.4

- ***Standardni presek*** *odnosno* min *funkcija:*

  $$\forall x, y \in [0,1], \quad T_{\min}(x,y) = \min(x,y)$$

  je jedina idempotentna t-norma. Nije Arhimedovska.



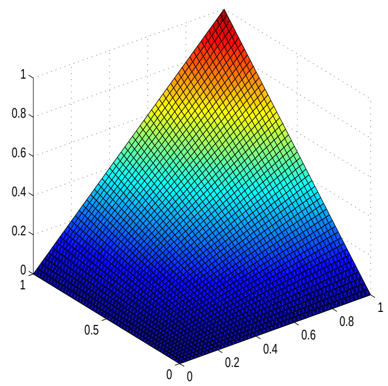
- ***Algebarski proizvod****:*

  $$\forall x, y \in [0,1], \quad T_P(x,y) = x \cdot y$$

  je t-norma koja je Arhimedovska, i generisana je opadajućim generatorom $f : [0,1] \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$*, uz njegovu odgavarajuću pseudo-inverznu funkciju* $f^{(-1)} : \mathbb{R} \cup \{\infty\} \to [0,1]$*, koje su definisane sa*

  $$f(x) = \begin{cases} \infty, & x = 0 \\ -\ln x, & x \in (0,1] \end{cases},$$

  $$f^{(-1)}(x) = \begin{cases} 1, & x \in (-\infty, 0) \\ e^{-x}, & x \in [0,\infty) \\ 0, & x = \infty \end{cases}.$$

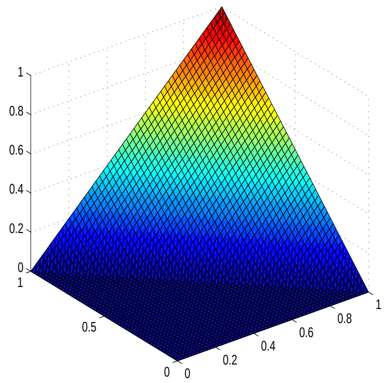


- ***Ograničena razlika*** *ili* **Lukasiewich-eva** *t-norma:*

$$\forall x, y \in [0,1], \quad T_L(x,y) = \max(0, x+y-1)$$

je t-norma koja je Arhimedovska, i generisana je sledećim opadajućim generatorom $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, uz njegovu odgavarajuću pseudo-inverznu funkciju $f^{(-1)} : \mathbb{R} \to [0,1]$

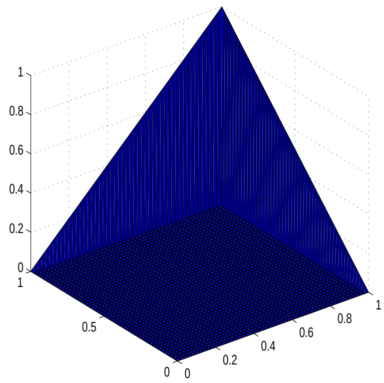
$$f(x) = 1 - x, \quad x \in [0,1],$$
$$f^{(-1)}(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x \in (-\infty, 0) \\ 1-x & , \quad x \in [0,1] \\ 0 & , \quad x \in (1, \infty) \end{cases} .$$



⚃ ***Drastični presek***:

$$T_D(x,y) = \begin{cases} x & , \quad y = 1 \\ y & , \quad x = 1 \\ 0 & , \quad x \neq 1 \wedge y \neq 1 \end{cases} .$$

T_D je jedina t-norma T koja zadovoljava uslov $T(x,x) = 0$, $x \in [0,1)$. Nije Arhimedovska.



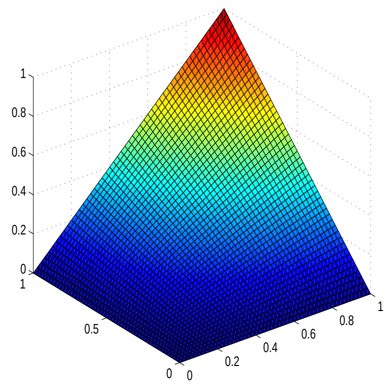
⚄ *t-norma definisana sa*

$$T(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x+y-xy} & , \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

je takođe Arhimedovska t-norma koja je generisana opadajućim generatorom $f : [0,1] \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$*, uz njegovu odgavarajuću pseudo-inverznu funkciju* $f^{(-1)} : \mathbb{R} \cup \{\infty\} \to [0,1]$*, koje su definisane sa*

$$f(x) = \begin{cases} \infty & , \quad x = 0 \\ \dfrac{1-x}{x} & , \quad x \in (0,1] \end{cases},$$

$$f^{(-1)}(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x \in (-\infty, 0) \\ \dfrac{1}{1+x} & , \quad x \in [0,\infty) \\ 0 & , \quad x = \infty \end{cases}.$$



☑

Osim što su navedene t-norme u primeru 2.2.4 istorijski značajne, i što su od najčešće korišćenih u primenama, za njih važi i poredak naveden u sledećoj teoremi.

Teorema 2.2.14 *Neka su* $T_{\min}$*,* T_L*,* T_P *i* T_D *u primeru* 2.2.4 *navedene t-norme. Za njih važi sledeći poredak:*

- $T_D \leq T_L \leq T_P \leq T_{\min}$,
- *za svaku Athimedovsku t-normu* T *je*

  $$T_D \leq T \leq T_{\min}.$$

Primer 2.2.5 *Značajni primeri parametarskih t-normi (fazi-preseka) su sledeći.*

❶ ***Schweizer-Sklar 1*** *(1963): za svako* $p \neq 0$ *je sa*

$$T_{SS1,p}(x,y) = (\max(0, x^p + y^p - 1))^{\frac{1}{p}}$$

definisana familija Arhimedovskih t-normi, čiji su opadajući generatori i njima odgovarajuće pseudo-inverzne funkcije

$f_p\,(x) = 1 - x^p,\;\; x \in [0,1],$

$$f_p^{(-1)}\,(x) = \begin{cases} 1 & , \;\; x \in (-\infty, 0) \\ (1-x)^{\frac{1}{p}} & , \;\; x \in [0,1] \\ 0 & , \;\; x \in (1, \infty) \end{cases} .$$

Pri tome se

- ➥ *za* $p \to 0$ *dobija* T_P *norma* ⚁ *iz primera* 2.2.4,
- ➥ *za* $p = 1$ *se dobija* T_L *norma* ⚂ *iz primera* 2.2.4,
- ➥ *za* $p = -1$ *se dobija* T *norma* ⚄ *iz primera* 2.2.4,
- ➥ *za* $p \to \infty$ *se dobija* T_D *norma* ⚃ *iz primera* 2.2.4,
- ➥ *za* $p \to -\infty$ *se dobija* $T_{\min}$ *norma* ⚀ *iz primera* 2.2.4.

❷ **Yager** *(1980): za svako* $\omega \in (0, \infty)$ *je sa*

$$T_{Y,\omega}\,(x,y) = 1 - \min\left(1, \left((1-x)^{\omega} + (1-y)^{\omega}\right)^{\frac{1}{\omega}}\right)$$

definisana familija Arhimedovskih t-normi, čiji su opadajući generatori i njima odgovarajuće pseudo-inverzne funkcije

$f_\omega\,(x) = (1-x)^{\omega},\;\; x \in [0,1],$

$$f_\omega^{(-1)}\,(x) = \begin{cases} 1 & , \;\; x \in (-\infty, 0) \\ 1 - x^{\frac{1}{\omega}} & , \;\; x \in [0,1] \\ 0 & , \;\; x \in (1, \infty) \end{cases} .$$

Pri tome se

- ➥ *za* $\omega \to 0$ *dobija* T_D *norma* ⚃ *iz primera* 2.2.4,
- ➥ *za* $\omega = 1$ *se dobija* T_L *norma* ⚂ *iz primera* 2.2.4,
- ➥ *za* $\omega \to -\infty$ *se dobija* $T_{\min}$ *norma* ⚀ *iz primera* 2.2.4.

❸ **Frank** *(1979): za svako* $s > 0$, $s \neq 1$ *je sa*

$$T_{F,s}\,(x,y) = \log_s\left(1 + \frac{(s^x - 1)(s^y - 1)}{s-1}\right)$$

definisana jedna familija Arhimedovskih t-normi, čiji su opadajući generatori $f_s : [0,1] \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ *i njima odgovarajuće pseudo-inverzne funkcije* $f_s^{(-1)} : \mathbb{R} \cup \{\infty\} \to [0,1]$ *definisani sa*

$$f_s\,(x) = \begin{cases} \infty & , \;\; x = 0 \\ -\ln \dfrac{s^x - 1}{s - 1} & , \;\; x \in (0,1] \end{cases} ,$$

$$f_s^{(-1)}\,(x) = \begin{cases} 1 & , \;\; x \in (-\infty, 0) \\ \log_s\left((s-1)e^{-x} + 1\right) & , \;\; x \in [0, \infty) \\ 0 & , \;\; x = \infty \end{cases} .$$

Pri tome se

- ➥ *za* $s \to 0$ *dobija* T_{min} *norma* ⚀ *iz primera* 2.2.4,
- ➥ *za* $s \to 1$ *se dobija* T_P *norma* ⚁ *iz primera* 2.2.4,

- ➥ *za* $s \to -\infty$ *ili* $s \to \infty$ *se dobija* T_L *norma* ⚂ *iz primera* 2.2.4.

❹ **Hamacher** *(1978): za svako* $r > 0$ *je sa*

$$T_{H,r}(x,y) = \frac{xy}{r + (1-r)(x+y-xy)}$$

definisana jedna familija Arhimedovskih t-normi, čiji su opadajući generatori $f_r : [0,1] \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ *i njima odgovarajuće pseudo-inverzne funkcije* $f_r^{(-1)} : \mathbb{R} \cup \{\infty\} \to [0,1]$ *definisani sa*

$$f_r(x) = \begin{cases} \infty & , \ x = 0 \\ -\ln \dfrac{x}{r + (1-r)x} & , \ x \in (0,1] \end{cases},$$

$$f_r^{(-1)}(x) = \begin{cases} 1 & , \ x \in (-\infty, 0) \\ \dfrac{re^{-x}}{1 + (r-1)e^{-x}} & , \ x \in [0, \infty) \\ 0 & , \ x = \infty \end{cases}.$$

Pri tome se

- ➥ *za* $r \to 0$ *dobija* T *norma* ⚄ *iz primera* 2.2.4,
- ➥ *za* $r = 1$ *se dobija* T_P *norma* ⚁ *iz primera* 2.2.4,
- ➥ *za* $r \to \infty$ *se dobija* T_D *norma* ⚃ *iz primera* 2.2.4.

❺ **Dubois i Prade** *(1980): za svako* $\alpha \in (0,1]$ *je sa*

$$T_{DP,\alpha}(x,y) = \frac{xy}{\max(x,y,\alpha)}$$

definisana jedna familija t-normi koje nisu Arhimedovske. Pri tome se

- ➥ *za* $\alpha \to 0$ *dobija* $T_{\min}$ *norma* ⚀ *iz primera* 2.2.4,
- ➥ *za* $\alpha = 1$ *se dobija* T_P *norma* ⚁ *iz primera* 2.2.4.

❻ **Schweizer-Sklar 2**: *za svako* $p > 0$ *je sa*

$$T_{SS2,p}(x,y) = 1 - ((1-x)^p + (1-y)^p - (1-x)^p(1-y)^p)^{\frac{1}{p}}$$

definisana familija Arhimedovskih t-normi.

❼ **Aczél-Alsina** / **Schweizer-Sklar 3**: *za svako* $p > 0$ *je sa*

$$T_{AA,p}(x,y) = \begin{cases} 0 & , \ x = 0 \ \vee \ y = 0 \\ e^{-(|\ln x|^p + |\ln y|^p)^{\frac{1}{p}}} & , \ x \in (0,1] \end{cases}$$

definisana familija Arhimedovskih t-normi.

❽ **Schweizer-Sklar 4**: *za svako* $p > 0$ *je sa*

$$T_{SS4,p}(x,y) = \begin{cases} 0 & , \ x = 0 \ \vee \ y = 0 \\ \dfrac{xy}{(x^p + y^p - x^p y^p)^{\frac{1}{p}}} & , \ x \in (0,1] \end{cases}$$

definisana familija Arhimedovskih t-normi.

❾ ***Dombi*** *(1982): za svako $\lambda > 0$ je sa*

$$T_{Do,\lambda}(x,y) = \begin{cases} 0 & , \quad x = 0 \vee y = 0 \\ \dfrac{1}{1 + \left(\left(\frac{1}{x} - 1\right)^{\lambda} + \left(\frac{1}{y} - 1\right)^{\lambda} \right)^{\frac{1}{\lambda}}} & , \quad x \in (0,1] \end{cases}$$

definisana familija Arhimedovskih t-normi.

❿ ***Sugeno-Weber / Weber*** *(1983): za svako $\lambda > -1$ je sa*

$$T_{W,\lambda}(x,y) = \max\left(0, \frac{x + y + \lambda xy - 1}{1 + \lambda}\right)$$

definisana familija Arhimedovskih t-normi.

❶❶ **Yu** *(1985): za svako $\lambda > -1$ je sa*

$$T_{Yu,\lambda}(x,y) = \max\left(0, (1+\lambda)(x+y-1) - \lambda xy\right)$$

definisana familija Arhimedovskih t-normi.

☑

2.2.3 Fazi-unija odnosno t-konorme

Umesto osnovne operacije max fazi-unije se mogu koristiti i neke druge binarne operacije sa svojstvima koje za posledicu daju poželjna svojstva skupovnog fazi-preseka. To su tzv. t-konorme, koje su dualne t-normama u smislu sličnom uzajamnom odnosu klasičnih operacija skupovnog preseka i unije. U ovom odeljku su dati definicija, osobine, karakterizacija i primeri t-konormi, vidi [30], [28].

Definicija 2.2.9 ***Trougaona konorma*** *(skraćeno t-**konorma**) ili **fazi-unija**, je binarna operacija $S : [0,1]^2 \to [0,1]$ takva da za sve $x, y, z \in [0,1]$ važi*

[tK1] $S(x,y) = S(y,x)$, *(komutativnost)*

[tK2] $S(x, S(y,z)) = S(S(x,y), z)$, *(asocijativnost)*

[tK3] $y \le z \;\Rightarrow\; S(x,y) \le S(x,z)$, *(monotonost)*

[tK4] $S(x,0) = x$. *(granični uslov)*

Primetimo da se t-konorma od t-norme razlikuje samo u graničnom uslovu [tK4]. Postoji neprebrojivo mnogo t-konormi.

✎ Kao i kod t-normi, binarnu operaciju t-konorme S možemo induktivno, za sve $n \ge 3$, proširiti na operaciju $S : \bigcup\limits_{n=2}^{\infty} [0,1]^n \to [0,1]$ definisanu sa

$$S(x_1, x_2, \ldots, x_n) = S(S(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}), x_n), \tag{2.2.2}$$

pri čemu je, zbog komutativnosti i asocijativnosti t-konormi, redosled operanada u $S(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ nebitan.

✎ Uvedimo sledeću prirodnu relaciju poretka za proizvoljne t-konorme S_1 i S_2:

$$S_1 \leq S_2 \quad \Leftrightarrow \quad \forall x, y \in [0,1]\,,\ S_1\,(x,y) \leq S_2\,(x,y).$$

Svaka t-konorma indukuje jednu operaciju skupovne fazi-unije. Stoga, za fazi-skupove sa vrednostima u $[0,1]$, možemo poistovetiti pojmove t-konorme i fazi-unije.

Definicija 2.2.10 *Neka je S proizvoljna t-konorma, i neka je X proizvoljan skup. Za proizvoljne fazi-skupove $A, B \in \mathcal{F}\,(X,[0,1])$, njihova fazi-unija je fazi-skup $A \cup B \in \mathcal{F}\,(X,[0,1])$ definisan sa*

$$(A \cup B)\,(x) = S\,(A\,(x), B\,(x)),\ x \in X.$$

Dakle, svaka t-konorma predstavlja jednu skupovnu operaciju fazi-unije, i postalo je opšteprihvaćeno da su pojmovi fazi-unije i t-konorme ekvivalentni. Definicija t-konorme za direktnu posledicu daje da za fazi-uniju $\cup$ i fazi-skupove $A, B, C \in \mathcal{F}\,(X,[0,1])$ važi

$$\begin{array}{ll} A \cup B = B \cup A, & A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C, \\ B \subseteq C \ \Rightarrow \ A \cup B \subseteq A \cup C, & A \cup \emptyset = A, \end{array}$$

gde je fazi-skup $\emptyset$ definisan sa $\emptyset\,(x) = 0,\ x \in X$.

Teorema 2.2.15 *Standardna fazi-unija, tj. odgovarajuća t-konorma* max*, je jedina idempotentna t-konorma.*

Teorema 2.2.16 *Važe sledeće osnovne osobine t-konormi.*

(a) *Za svako $x \in [0,1]$ važi*

$$S\,(1,x) = S\,(x,1) = 1 \quad \wedge \quad S\,(0,x) = S\,(x,0) = x,$$

tj. sve t-konorme se poklapaju na rubovima intervala $[0,1]$.

(b) *Svaka t-konorma je monotona po obe komponente, odnosno*

$$(x_1 \leq y_1 \ \wedge \ x_2 \leq y_2) \ \Rightarrow \ S\,(x_1,x_2) \leq S\,(y_1,y_2).$$

(c) *Za sve $x, y \in [0,1]$ važi*

$$x \leq S\,(x,y) \quad \wedge \quad y \leq S\,(x,y),$$

tj.

$$\max\,(x,y) \leq S\,(x,y),$$

odnosno $\max \leq S$. *Dakle, operacija* max *je minimalna t-konorma.*

(d) $S\,(0,0) = 0 \ \wedge \ S\,(1,1) = 1.$

Za t-konormu je često od interesa zahtevati još neke dodatne osobine. Najvažnije od tih dodatnih osobina su navedene u sledećoj definiciji.

Definicija 2.2.11 *t-konorma S može da ima neke od sledećih dodatnih osobina.*

[tK5] *S je neprekidna funkcija.* *(neprekidnost)*

[tK6] $\forall x \in (0,1)\,,\ \ S(x,x) > x.$ *(superidempotentnost)*

[tK7] $(x_1 < y_1 \ \wedge\ x_2 < y_2) \ \Rightarrow\ S(x_1,x_2) < S(y_1,y_2).$ *(striktna monotonost)*

Neprekidna i superidempotentna t-konorma se naziva ***Arhimedovska t-konorma****, a ako je još pri tome i striktno monotona, tada se naziva* ***striktna Arhimedovska t-konorma****.*

t-konorma koja ima neku od ovih, ili još neku drugu osobinu, generiše fazi-uniju koja ima još neke poželjne osobine.

Analogno t-normama, Arhimedovske t-konorme se mogu reprezentovati pomoću rastućih generatora.

Teorema 2.2.17 (Schweizer i Sklar) *Neka je S binarna operacija intervala $[0,1]$. Operacija S je Arhimedovska t-konorma ako i samo ako postoji rastući generator g takav da je*

$$\forall x,y \in [0,1]\,,\quad S(x,y) = g^{(-1)}\left(g(x) + g(y)\right).$$

Analogno kao kod t-normi, nove t-konorme se mogu generisati na sledeći način.

Teorema 2.2.18 *Neka je S proizvoljna t-konorma, i neka je $g : [0,1] \to [0,1]$ strogo rastuća funkcija koja je neprekidna na $(0,1)$, takva da je $g(0) = 0$ i $g(1) = 1$. Tada je funkcija $S_g : [0,1]^2 \to [0,1]$ definisana sa*

$$S_g(x,y) = g^{(-1)}\left(S\left(g(x), g(y)\right)\right),\quad x,y \in [0,1]$$

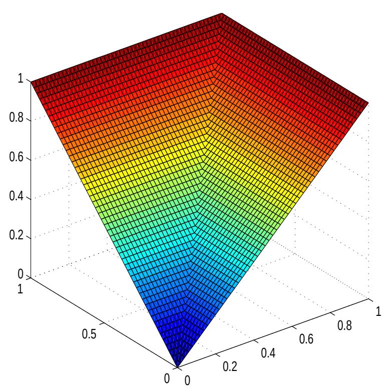
takođe t-konorma, gde je $g^{(-1)}$ pseudo-inverzna funkcija funkcije g.

Primer 2.2.6 *Neki od važnijih primera t-konormi (fazi-unija) su sledeći.*

- ***Standardna unija*** *odnosno* max *funkcija:*

  $$\forall x,y \in [0,1]\,,\quad S_{\max}(x,y) = \max(x,y)$$

  je jedina idempotentna t-konorma. Nije Arhimedovska.



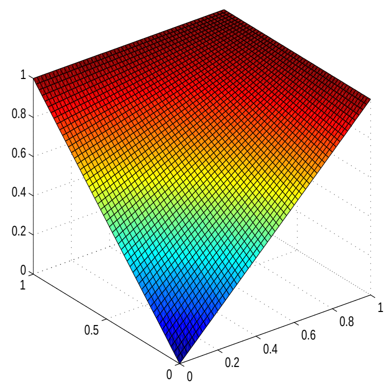
⚁ ***Algebarska suma*** *ili* ***probabilistička suma****:*

$$\forall x, y \in [0,1], \quad S_P(x,y) = x + y - x \cdot y$$

je t-konorma koja je Arhimedovska, i generisana je rastućim generatorom $g : [0,1] \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$*, uz njegovu odgavarajuću pseudo-inverznu funkciju* $g^{(-1)} : \mathbb{R} \cup \{\infty\} \to [0,1]$*, koje su definisane sa*

$$g(x) = \begin{cases} -\ln(1-x), & x \in [0,1) \\ \infty, & x = 1 \end{cases},$$

$$g^{(-1)}(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, 0) \\ 1 - e^{-x}, & x \in [0,\infty) \\ 1, & x = \infty \end{cases}.$$



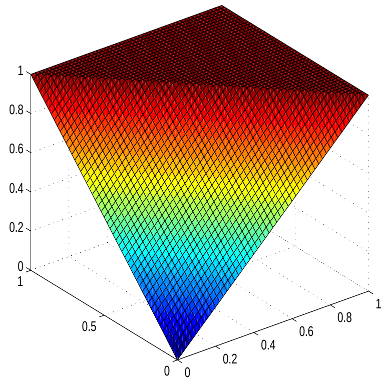
⚂ ***Ograničena suma****:*

$$\forall x, y \in [0,1], \quad S_L(x,y) = \min(1, x + y)$$

je t-konorma koja je Arhimedovska, i generisana je sledećim rastućim generatorom $g : [0,1] \to \mathbb{R}$*, uz njegovu odgavarajuću pseudo-inverznu funkciju* $g^{(-1)} : \mathbb{R} \to [0,1]$

$$g(x) = x, \quad x \in [0,1],$$

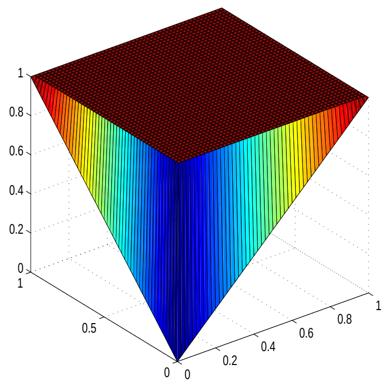
$$g^{(-1)}(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, 0) \\ x, & x \in [0,1] \\ 1, & x \in (0,\infty) \end{cases}.$$



⁙ ***Drastična unija***:

$$S_D\,(x,y)=\begin{cases} x & , \quad y=0 \\ y & , \quad x=0 \\ 1 & , \quad x\neq 0 \wedge y\neq 0 \end{cases}.$$

Nije Arhimedovska.



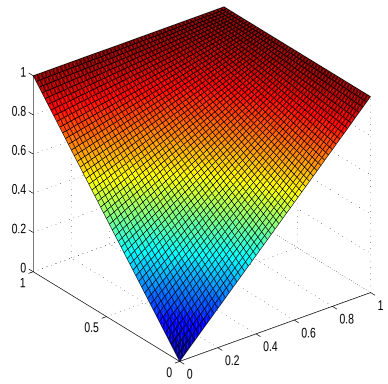
⁙ *t-konorma definisana sa*

$$S\,(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x+y-2xy}{1-xy} & , \quad (x,y)\neq(1,1) \\ 1 & , \quad (x,y)=(1,1) \end{cases}$$

je Arhimedovska t-konorma, i generisana je sledećim rastućim generatorom $g:[0,1]\rightarrow\mathbb{R}$*, uz njegovu odgavarajuću pseudo-inverznu funkciju* $g^{(-1)}:\mathbb{R}\rightarrow[0,1]$

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1-x}, & x \in [0,1) \\ \infty, & x = 1 \end{cases},$$

$$g^{(-1)}(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, 0) \\ \dfrac{x}{1+x}, & x \in [0, \infty) \\ 1, & x = \infty \end{cases}.$$



☑

Analogno kao kod t-normi, za t-konorme važi sledeća teorema o njihovom poretku.

Teorema 2.2.19 *Neka su $S_{\max}$, S_L, S_P i S_D u primeru* 2.2.6 *navedene t-konorme. Za njih važi sledeći poredak.*

❍ $S_{\max} \leq S_P \leq S_L \leq S_D$.

❍ *Za svaku Athimedovsku t-konormu S je*

$$S_{\max} \leq S \leq S_D.$$

Primer 2.2.7 *Značajni primeri parametarskih t-konormi (fazi-unija) su sledeći.*

❶ ***Schweizer-Sklar 1*** *(1963): za svako $p \neq 0$ je sa*

$S_{SS1,p}(x, y) = 1 - (\max(0, (1-x)^p + (1-y)^p - 1))^{\frac{1}{p}}$

definisana familija Arhimedovskih t-konormi, čiji su rastući generatori i njima odgovarajuće pseudo-inverzne funkcije

$g_p(x) = 1 - (1-x)^p, \ x \in [0, 1],$

$$g_p^{(-1)}(x) = \begin{cases} 1, & x \in (-\infty, 0) \\ 1 - (1-x)^{\frac{1}{p}}, & x \in [0, 1] \\ 0, & x \in (1, \infty) \end{cases}.$$

Pri tome se

➥ *za $p \to 0$ dobija S_P konorma* ⚁ *iz primera* 2.2.6*,*

- ➥ *za* $p = 1$ *se dobija* S_L *konorma* ⚂ *iz primera* 2.2.6,
- ➥ *za* $p = -1$ *se dobija* S *lpnorma* ⚄ *iz primera* 2.2.6,
- ➥ *za* $p \to \infty$ *se dobija* S_D *konorma* ⚃ *iz primera* 2.2.6,
- ➥ *za* $p \to -\infty$ *se dobija* $S_{\max}$ *konorma* ⚀ *iz primera* 2.2.6.

❷ **Yager** *(1980): za svako* $\omega \in (0, \infty)$ *je sa*

$$S_{Y,\omega}(x, y) = \min\left(1, (x^\omega + y^\omega)^{\frac{1}{\omega}}\right)$$

definisana familija Arhimedovskih t-konormi, čiji su rastući generatori i njima odgovarajuće pseudo-inverzne funkcije

$$g_\omega(x) = x^\omega, \ \ x \in [0, 1],$$

$$g_\omega^{(-1)}(x) = \begin{cases} 1 & , \ \ x \in (-\infty, 0) \\ x^{\frac{1}{\omega}} & , \ \ x \in [0, 1] \\ 0 & , \ \ x \in (1, \infty) \end{cases}.$$

Pri tome se

- ➥ *za* $\omega \to 0$ *dobija* S_D *konorma* ⚃ *iz primera* 2.2.6,
- ➥ *za* $\omega = 1$ *se dobija* S_L *konorma* ⚂ *iz primera* 2.2.6,
- ➥ *za* $\omega \to -\infty$ *se dobija* $S_{\max}$ *konorma* ⚀ *iz primera* 2.2.6.

❸ **Frank** *(1979): za svako* $s > 0, \ s \neq 1$ *je sa*

$$S_s(x, y) = 1 - \log_s\left(1 + \frac{\left(s^{1-x} - 1\right)\left(s^{1-y} - 1\right)}{s - 1}\right)$$

definisana jedna familija Arhimedovskih t-konormi, čiji su rastući generatori $g_s : [0, 1] \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ *i njima odgovarajuće pseudo-inverzne funkcije* $g_s^{(-1)} : \mathbb{R} \cup \{\infty\} \to [0, 1]$ *definisani sa*

$$g_s(x) = \begin{cases} -\ln \dfrac{s^{1-x} - 1}{s - 1} & , \ \ x \in [0, 1) \\ \infty & , \ \ x = 1 \end{cases},$$

$$g_s^{(-1)}(x) = \begin{cases} 0 & , \ \ x \in (-\infty, 0) \\ 1 - \log_s\left((s - 1)e^{-x} + 1\right) & , \ \ x \in [0, \infty) \\ 1 & , \ \ x = \infty \end{cases}.$$

Pri tome se

- ➥ *za* $s \to 0$ *dobija* S_{min} *konorma* ⚀ *iz primera* 2.2.6,
- ➥ *za* $s \to 1$ *se dobija* S_P *konorma* ⚁ *iz primera* 2.2.6,
- ➥ *za* $s \to -\infty$ *ili* $s \to \infty$ *se dobija* S_L *konorma* ⚂ *iz primera* 2.2.6.

❹ **Hamacher** *(1978): za svako* $r > 0$ *je sa*

$$S_{H,r}(x, y) = \frac{x + y + (r - 2)xy}{1 + (r - 1)xy}$$

definisana jedna familija Arhimedovskih t-konormi, čiji su rastući generatori $g_r : [0,1] \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ *i njima odgovarajuće pseudo-inverzne funkcije* $g_r^{(-1)} : \mathbb{R} \cup \{\infty\} \to [0,1]$ *definisani sa*

$$g_r(x) = \begin{cases} -\ln \dfrac{1-x}{r+(1-r)(1-x)} & , \quad x \in [0,1) \\ \infty & , \quad x = 1 \end{cases} ,$$

$$g_r^{(-1)}(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \in (-\infty,0) \\ \dfrac{1-e^{-x}}{1+(r-1)e^{-x}} & , \quad x \in [0,\infty) \\ 1 & , \quad x = \infty \end{cases} .$$

Pri tome se

- ➥ *za* $r \to 0$ *dobija S konorma* ⚄ *iz primera* 2.2.6*,*
- ➥ *za* $r = 1$ *se dobija* S_P *konorma* ⚁ *iz primera* 2.2.6*,*
- ➥ *za* $r \to \infty$ *se dobija* S_D *konorma* ⚃ *iz primera* 2.2.6*.*

❺ ***Dubois i Prade*** *(1980): za svako* $\alpha \in (0,1]$ *je sa*

$$S_{DP,\alpha}(x,y) = \frac{(1-x)(1-y)}{\max(1-x,1-y,\alpha)}$$

definisana jedna familija t-konormi koje nisu Arhimedovske. Pri tome se

- ➥ *za* $\alpha \to 0$ *dobija* $S_{\max}$ *konorma* ⚀ *iz primera* 2.2.6*,*
- ➥ *za* $\alpha = 1$ *se dobija* S_P *konorma* ⚁ *iz primera* 2.2.6*.*

❻ ***Schweizer-Sklar 2****: za svako* $p > 0$ *je sa*

$$S_{SS2,p}(x,y) = (x^p + y^p - x^p y^p)^{\frac{1}{p}}$$

definisana familija Arhimedovskih t-konormi.

❼ ***Aczél-Alsina / Schweizer-Sklar 3****: za svako* $p > 0$ *je sa*

$$S_{AA,p}(x,y) = \begin{cases} 1 - e^{-(|\ln(1-x)|^p + |\ln(1-y)|^p)^{\frac{1}{p}}} & , \quad x \in [0,1) \\ 1 & , \quad x = 1 \ \vee \ y = 1 \end{cases}$$

definisana familija Arhimedovskih t-konormi.

❽ ***Schweizer-Sklar 4****: za svako* $p > 0$ *je sa*

$$S_{SS4,p}(x,y) =$$

$$= \begin{cases} 1 - \dfrac{(1-x)(1-y)}{((1-x)^p + (1-y)^p - (1-x)^p(1-y)^p)^{\frac{1}{p}}} & , \quad x \in [0,1) \\ 1 & , \quad x = 1 \ \vee \ y = 1 \end{cases}$$

definisana familija Arhimedovskih t-konormi.

❾ ***Dombi*** *(1982): za svako* $\lambda > 0$ *je sa*

$$S_{Do,\lambda}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{1+\left(\left(\frac{1}{x}-1\right)^{-\lambda}+\left(\frac{1}{y}-1\right)^{-\lambda}\right)^{-\frac{1}{\lambda}}} & , \quad x \in [0,1) \\ 1 & , \quad x = 1 \vee y = 1 \end{cases}$$

definisana familija Arhimedovskih t-konormi.

❿ ***Sugeno-Weber** / **Weber** (1983): za svako $\lambda > -1$ je sa*

$$S_{W,\lambda}(x,y) = \min\left(1, x+y-\frac{\lambda}{1-\lambda}xy\right)$$

definisana familija Arhimedovskih t-konormi.

❶❶ ***Yu** (1985): za svako $\lambda > -1$ je sa*

$$S_{Yu,\lambda}(x,y) = \min(1, x+y+\lambda xy)$$

definisana familija Arhimedovskih t-konormi. ☑

2.2.4 Kompatibilne skupovne fazi-operacije

U klasičnoj teoriji, skupovni presek i skupovna unija su dualne operacije u odnosu na skupovni komplement, u smislu De Morganovih zakona

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}, \qquad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}.$$

Stoga je poželjno da to važi i za fazi-skupovne operacije.

Definicija 2.2.12 *Fazi-presek (t-norma) T i fazi-unija (t-konorma) S su **dualne**, odnosno **kompatibilne** u odnosu na fazi-komplement c ukoliko za sve $x, y \in [0,1]$ važi*

$$c(T(x,y)) = S(c(x), c(y)), \qquad c(S(x,y)) = T(c(x), c(y)).$$

*U tom slučaju kažemo da je (T, S, c) **dualna**, odnosno **kompatibilna** trojka fazi-operacija.*

☞ Međutim, ni za kompatibilne fazi-operacije, tj. za dualnu trojku (T, S, c) fazi-operacija ne moraju da važe sve relacije koje važe za klasične skupove. Na primer, za fazi-skupove $A, B, C \in \mathcal{F}(X, [0,1])$ definisane na prostoru X, i skupovne fazi-operacije definisane dualnom trojkom (T, S, c) fazi-operacija (definicije 2.2.3, 2.2.7 i 2.2.10), ne moraju da važe sledeće relacije:

$$\begin{aligned} \text{zakon kontradikcije:} \quad & A \cap \overline{A} = \emptyset, \\ \text{zakon isključenja trećeg:} \quad & A \cup \overline{A} = X, \\ \text{distributivnost:} \quad & A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C), \\ & A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C). \end{aligned}$$

U nastavku slede primeri kompatibilnih operacija, kao i nekoliko načina njihovog konstruisanja.

Primer 2.2.8 *Slede neki primeri dualnih fazi-operacija, gde je $c_s(x) = 1 - x$, $x \in X$ standardni fazi-komplement, a $T_{\min}$, T_P, T_L, T_D, $S_{\max}$, S_P, S_L, S_D, su t-norme i t-konorme iz primera 2.2.4 i 2.2.6.*

(a) $(T_{\min}, S_{\max}, c_s)$, (c) (T_L, S_L, c_s),
(b) (T_P, S_P, c_s), (d) (T_D, S_D, c_s). $\boxslash$

Drugim rečima, važi

$$S_{\max}(x,y) = 1 - T_{\min}(1-x, 1-y), \quad (x,y) \in [0,1],$$
$$S_P(x,y) = 1 - T_P(1-x, 1-y), \quad (x,y) \in [0,1],$$
$$S_L(x,y) = 1 - T_L(1-x, 1-y), \quad (x,y) \in [0,1],$$
$$S_D(x,y) = 1 - T_D(1-x, 1-y), \quad (x,y) \in [0,1].$$

Ove relacije su zapravo specijalan slučaj sledećeg tvrđenja koje nam omogućava da, polazeći od proizvoljne t-norme (t-konorme) i standardnog fazi-komplementa, konstruišemo odgovarajuću t-konormu (t-normu) koja je kompatibilna sa polaznom t-normom (t-konormom) u odnosu na standardni fazi-komplement.

Teorema 2.2.20 *Neka je c_S standardni fazi-komplement, tj. $c_S(x) = 1 - x$, $x \in [1,0]$.*

$\overset{c_S}{\hookrightarrow}$ *Za proizvoljnu t-normu T, funkcija $S : [0,1]^2 \to [0,1]$ definisana sa $S(x,y) = 1 - T(1-x, 1-y)$ je t-konorma dualna t-normi T, tj. takva da je (T, S, c_S) dualna trojka fazi-operacija.*

$\overset{c_S}{\hookleftarrow}$ *Za proizvoljnu t-konormu S, funkcija $T : [0,1]^2 \to [0,1]$ definisana sa $T(x,y) = 1 - S(1-x, 1-y)$ je t-norma dualna t-konormi S, tj. takva da je (T, S, c_S) dualna trojka fazi-operacija.*

Tako na primer, odgovarajući (po nazivu i numeraciji) parovi fazi-operacija iz primera 2.2.5 i 2.2.7 su dualni u odnosu na standardni fazi-komplement.

Osim dualnosti u odnosu na standardni fazi-komplement, postoji niz pravilnosti vezanih i za druge fazi-komplemente, naročito involutivne. Neke od tih pravilnosti su navedene u sledećim teoremama. Te teoreme nam daju i nekoliko konstruktivnih metoda za generisanje dualnih trojki fazi-operacija.

Teorema 2.2.21 *Za svaki fazi-komplement c su $(T_{\min}, S_{\max}, c)$ i (T_D, S_D, c) dualne trojke fazi-operacija.*

Sledeća teorema je uopštenje, za involutivne fazi-komplemente, teoreme 2.2.20.

Teorema 2.2.22 *Neka je c proizvoljan involutivan fazi-komplement.*

$\overset{c}{\hookrightarrow}$ *Za proizvoljnu t-normu T, funkcija $S : [0,1]^2 \to [0,1]$ definisana sa $S(x,y) = c(T(c(x), c(y)))$ je t-konorma dualna t-normi T, tj. takva da je (T, S, c_S) dualna trojka fazi-operacija.*

$\overset{c}{\hookleftarrow}$ *Za proizvoljnu t-konormu S, funkcija $T : [0,1]^2 \to [0,1]$ definisana sa $T(x,y) = c(S(c(x), c(y)))$ je t-norma dualna t-konormi S, tj. takva da je (T, S, c_S) dualna trojka fazi-operacija.*

Sledi primer koji ilustruje konstrukciju dualne trojke fazi-operacija primenom prethodne teoreme.

Primer 2.2.9 *Polazeći od t-norme* $T_P(x,y) = x \cdot y$ *iz primera* 2.2.4 *pod* ⚁, *i klase involutivnih Sugenovih fazi-komplemenata* $c_{S,\lambda}(x) = \dfrac{1-x}{1+\lambda x}$ *(za* $\lambda > -1$*) iz primera* 2.2.3 *pod* ⑦, *primenom prethodne teoreme dobijamo Hamacher-ovu klasu t-konormi*

$$S_\lambda(x,y) = \frac{x+y+(\lambda-1)xy}{1+\lambda xy} = \frac{x+y+((\lambda+1)-2)xy}{1+((\lambda+1)-1)xy} = S_{H,\lambda+1}(x,y)$$

gde je $\lambda + 1 > 0$. *Dakle,* $(T_P, S_{H,\lambda+1}, c_{S,\lambda})$ *je trojka dualnih fazi-operacija. Na primer, za* $\lambda = 1$ *dobijamo* $(T_P, S_{H,2}, c_{S,1}) = \left(xy, \dfrac{x+y}{1+xy}, \dfrac{1-x}{1+x}\right)$. ⧄

Kompatibilna, tj. dualna trojka fazi-operacija se može generisati i polazeći samo od involutivnog fazi-komplementa, koji na osnovu teoreme 2.2.8 ima svoj rastući generator.

Teorema 2.2.23 *Neka je* c *involutivan fazi-komplement sa monotono rastućim generatorom* g. *Tada za t-normu* T *i t-konormu* S *koji su generisani rastućim generatorom* g, *važi da je* (T, S, c) *dualna trojka fazi-operacija.*

Napomena 2.2.2 *Teorema* 2.2.23 *nam zapravo omogućuje da polazeći od neprekidne i monotono rastuće funkcije* $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ *(tj.* $g : [0,1] \to [0, g(1)]$*) sa osobinom* $g(0) = 0$, *izgenerišemo celu trojku* (T, S, c) *kompatibilnih fazi-operacija na sledeći način:*

$$c(x) = g^{-1}(g(1) - g(x)), \quad x \in [0,1],$$
$$T(x,y) = g^{(-1)}(g(x) + g(y) - g(1)), \quad x, y \in [0,1],$$
$$S(x,y) = g^{(-1)}(g(x) + g(y)), \quad x, y \in [0,1],$$

gde je $g^{(-1)}$ *pseudo-inverzna funkcija funkcije* g.

Primer 2.2.10 *Posmatrajmo, za proizvoljno* $\lambda \in (-1,0) \cup (0,\infty)$, *familiju funkcija* $g_\lambda : [0,1] \to \mathbb{R}$ *definisanih sa*

$$g_\lambda(x) = \frac{1}{\lambda}\ln(1+\lambda x), \quad x \in [0,1].$$

Za svako $\lambda \in (-1,0) \cup (0,\infty)$ *je funkcija* $g_\lambda : [0,1] \to \mathbb{R}$ *rastući generator sa inverznom funkcijom*

$$g_\lambda^{-1}(x) = \frac{1}{\lambda}\left(e^{\lambda x} - 1\right), \quad x \in \left[0, \frac{1}{\lambda}\ln(1+\lambda)\right]$$

i pseudo-inverznom funkcijom

$$g_\lambda^{(-1)}(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \in (-\infty, 0) \\ \dfrac{1}{\lambda}\left(e^{\lambda x} - 1\right) & , \quad x \in \left[0, \dfrac{1}{\lambda}\ln(1+\lambda)\right] \\ 1 & , \quad x \in \left(\frac{1}{\lambda}\ln(1+\lambda), \infty\right) \end{cases}.$$

Primenom teoreme 2.2.23, *odnosno napomene* 2.2.2, *redom dobijamo međusobno kompatibilne fazi-operacije.*

[c_λ] *Za svako* $x \in [0,1]$ *je*

$$c_\lambda(x) = \frac{1-x}{1+\lambda x} = c_{S,\lambda}(x),$$

što je Sugeno-va klasa fazi-komplemenata iz primera 2.2.3 *pod* ⑦.

[T_λ] *Za sve* $x, y \in [0,1]$ *je*

$$T_\lambda(x,y) = \max\left(0, \frac{x+y+\lambda xy}{1+\lambda}\right) = T_{W,\lambda}(x,y),$$

što je Weber-va klasa t-normi iz primera 2.2.5 *pod* ❿.

[S_λ] *Za sve* $x, y \in [0,1]$ *je*

$$S_\lambda(x,y) = \min(1, x+y+\lambda xy) = S_{Yu,\lambda}(x,y),$$

što je Yu-ova klasa t-konormi iz primera 2.2.7 *pod* ❶❶. ☑

Dualne fazi-operacije dobijene primenom teoreme 2.2.23, tj. generisane rastućim generatorom g po formulama iz napomene 2.2.2, zadovoljavaju zakon kontradikcije i zakon isključenja trećeg, ali ne i distributivne zakone. Šta više, dualne fazi-operacije koje zadovoljavaju zakon kontradikcije i zakon isključenja trećeg, ne zadovoljavaju distributivne zakone. Naime, važe sledeće dve teoreme.

Teorema 2.2.24 *Za svaki rastući generator* g *i dualnu trojku* (T, S, c) *fazi-operacija*

$$c(x) = g^{-1}(g(1) - g(x)), \quad x \in [0,1],$$
$$T(x,y) = g^{(-1)}(g(x) + g(y) - g(1)), \quad x, y \in [0,1],$$
$$S(x,y) = g^{(-1)}(g(x) + g(y)), \quad x, y \in [0,1],$$

generisanih funkcijom g *- teorema* 2.2.23 *i napomena* 2.2.2, *dualne fazi-operacije* (T, S, c) *zadovoljavaju zakon kontradikcije i zakon isključenja trećeg, tj. za njih važi*

$$T(x, c(x)) = 0, \quad x \in [0,1],$$
$$S(x, c(x)) = 1, \quad x \in [0,1].$$

Teorema 2.2.25 *Ako za dualnu trojku fazi-operacija* (T, S, c) *važi*

$$T(x, c(x)) = 0, \quad x \in [0,1],$$
$$S(x, c(x)) = 1, \quad x \in [0,1],$$

tada za njih ne važe zakoni distributivnosti

$$T(x, S(y,z)) = S(T(x,y), T(x,z)), \quad x, y, z \in [0,1],$$
$$S(x, T(y,z)) = T(S(x,y), S(x,z)), \quad x, y, z \in [0,1].$$

Dakle, za fazi-skupove, fazi-komplement, fazi-presek i fazi-uniju ne samo da ne važe iste osobine kao za klasične skupove i skupovne operacije, već se neke od veoma važnih takvih osobina čak i međusobno isključuju.

2.3 Fazi relacije

Kao što je, u klasičnoj teoriji, n-arna relacija na skupovima $X_1, \ldots, X_n$ neki podskup Dekartovog proizvoda $X_1 \times \cdots \times X_n$, tako je n-arna fazi-relacija fazi-skup na prostoru $X_1 \times \cdots \times X_n$, koji tada poistovećujemo sa njegovom funkcijom pripadnosti, vidi [30].

Definicija 2.3.1 *Za proizvoljne skupove $X_1, \ldots, X_n$,* ***n-arna fazi-relacija*** *ρ skupova $X_1, \ldots, X_n$ je fazi-skup ρ na prostoru $X_1 \times \cdots \times X_n$, odnosno njegova funkcija pripadanja $\mu_\rho : X_1 \times \cdots \times X_n \to [0, 1]$.*

✎ Fazi-relaciju, naravno, opet poistovećujemo sa njenom funkcijom pripadanja, i često umesto $\mu_\rho (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ pišemo $\rho (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

U klasičnoj teoriji, za relaciju ρ činjenica $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \rho$ znači da su elementi $x_1, x_2, \ldots, x_n$, redom, povezani (u relaciji) po kriterijumu ρ. Za fazi-relaciju ρ na $X_1 \times \cdots \times X_n$, vrednost $\rho (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ interpretiramo kao stepen odnosno meru povezanosti elemenata $x_1, x_2, \ldots, x_n$, redom, po kriterijumu ρ.

Nadalje će reči biti samo o binarnim fazi-relacijama, dakle fazi skupovima ρ na nekom polaznom prostoru $X \times Y$. U pogledu binarnih fazi-relacija, od značaja su sledeći pojmovi.

Definicija 2.3.2 *Neka je ρ binarna fazi-relacija na $X \times Y$.*

- ❑ ***Domen*** *(eng.* domain*) odnosno* **prva projekcija** *fazi-relacije ρ, u oznaci* $\operatorname{dom} \rho$*, je fazi-skup na X definisan sa*

  $$(\operatorname{dom} \rho)(x) = \sup_{y \in Y} \rho (x, y), \qquad x \in X.$$

- ❑ ***Rang*** *(eng.* range*) odnosno* **druga projekcija** *fazi-relacije ρ, u oznaci* $\operatorname{rang} \rho$*, je fazi-skup na Y definisan sa*

  $$(\operatorname{rang} \rho)(y) = \sup_{x \in X} \rho (x, y), \qquad y \in Y.$$

- ❑ ***Visina*** *(eng.* height*) fazi-relacije ρ je visina fazi-skupa ρ, dakle*

  $$h (\rho) = \sup_{x \in X, y \in Y} \rho (x, y).$$

- ❑ ***Inverzna relacija*** *fazi-relacije ρ, u oznaci ρ^{-1}, je fazi-relacija na $Y \times X$ definisana sa*

  $$\rho^{-1} (y, x) = \rho (x, y), \qquad (y, x) \in Y \times X.$$

Vrednost $(\operatorname{dom} \rho)(x)$ je maksimalni stepen povezanosti elementa $x \in X$ sa elementima skupa Y. Vrednost $(\operatorname{rang} \rho)(y)$ je maksimalni stepen povezanosti elementa $y \in Y$ sa elementima skupa X.

✎ Kao i kod klasičnih relacija, postoji više zgodnih načina predstavljanja fazi-relacija. Jedan od njih je npr. putem označenih grafova. U praktičnim primenama tj. u računarskim algoritmima, naročito pogodan način je putem tzv.

matrice pripadnosti (eng. *membership matrix*) Naime, za konačne skupove $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ i $Y = \{y_1, \ldots, y_m\}$, ***matrica pripadnosti*** fazi-relacije ρ je matrica $M_\rho = [r_{ij}]$ formata $n \times m$, čiji su elementi $r_{ij} = \rho(x_i, y_j) \in [0, 1]$. Primetimo da, ako je fazi-relacija ρ na $X \times Y$ predstavljena matricom pripadnosti $M_\rho = [r_{ij}]_{n \times m}$, tada

- ✰ za svako $x_i \in X$ je

  $(\mathrm{dom}\,\rho)(x_i) = \max\limits_{j \in \{1,\ldots,m\}} r_{ij}$

  maksimalni element u i-toj vrsti,

- ✰ za svako $y_j \in X$ je

  $(\mathrm{rang}\,\rho)(y_j) = \max\limits_{i \in \{1,\ldots,n\}} r_{ij}$

  maksimalni element u j-toj koloni,

- ✰ $h(\rho) = \max\limits_{\substack{i \in \{1,\ldots,n\} \\ j \in \{1,\ldots,m\}}} r_{ij}$

  maksimalni element matrice,

- ✰ $M_{\rho^{-1}} = M_\rho^T$

  tj. matrica pripadnosti inverzne relacije je jednaka transponovanoj matrici pripadnosti polazne relacije.

Analogno kao za klasične relacije, definiše se kompozicija jedne binarne fazi-relacije na $X \times Y$ sa drugom binarnom fazi-relacijom na $Y \times Z$ (sa zajedničkim skupom Y). Kompoziciju fazi-relacija je moguće definisati na više načina. Sledi definicija tzv. standardne kompozicije zasnovane na operacijama min i max.

Definicija 2.3.3 *Neka je ρ fazi-relacija na $X \times Y$, i neka je σ fazi-relacija na $Y \times Z$. **Standardna kompozicija**, ili* $\min - \max$ ***kompozicija**, fazi-relacija ρ i σ je fazi-relacija θ na $X \times Z$, u oznaci $\theta = \rho \circ \sigma$, definisana svojom funkcijom pripadnosti*

$$\theta(x, z) = [\rho \circ \sigma](x, z) = \sup_{y \in Y} \min(\rho(x, y), \sigma(y, z)), \qquad (x, y) \in X \times Z.$$

✰ Primetimo sledeće. Ako su X, Y i Z konačni skupovi, a fazi-relacije ρ na $X \times Y$, i σ na $Y \times Z$ su predstavljene redom svojim matricama pripadnosti $M_\rho = [r_{ij}]_{n \times k}$ i $M_\sigma = [s_{ij}]_{k \times m}$, tada je fazi-relacija $\theta = \rho \circ \sigma$ na $X \times Z$ određena svojom matricom pripadnosti $M_\theta = [t_{ij}]_{n \times m}$ čije elemente izračunavamo na sledeći način:

$$t_{ij} = \max_{l \in \{1,\ldots,k\}} \min(r_{il}, s_{lj})$$

za sve $i \in \{1, \ldots, n\}$ i $j \in \{1, \ldots, m\}$. Primetimo da element t_{ij} dobijamo koristeći i-tu vrstu matrice M_ρ i j-tu kolonu matrice M_σ, analogno kao pri množenju matrica, ali koristeći operacije min i max umesto redom množenja i sabiranja brojeva.

Napomena 2.3.1 *Osim standardne kompozicije fazi-relacija, kompozicija fazi-relacija se može definisati i na druge načine, koristeći neke druge operacije umesto* min *i* max*. Na primer, operacije* min *i* max*, odnosno* inf *i* sup*, u definiciji standardne kompozicije se mogu zameniti, redom, nekom t-normom i nekom t-konormom.*

Kao i za klasične relacije i njihovu kompoziciju, za standardnu kompoziciju fazi-relacija važe sledeće osobine.

Teorema 2.3.1 *Neka je ρ fazi-relacija na $X \times Y$, neka je σ fazi-relacija na $Y \times Z$, i neka je θ fazi-relacija na $Z \times W$. Tada je*

- $(\rho \circ \sigma)^{-1} = \sigma^{-1} \circ \rho^{-1}$,
- $(\rho \circ \sigma) \circ \theta = \rho \circ (\sigma \circ \theta)$,

gde je $\circ$ standardna kompozicija fazi-relacija.

Za kompoziciju fazi-relacija zasnovanu na nekim drugim operacijama umesto min i max, prethodno navedene osobine ne moraju da važe.

Primer 2.3.1 *Neka je $X = \{x_1, x_2\}$, $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$ i $Z = \{z_1, z_2, z_3, z_4\}$. Neka su fazi-relacije ρ na $X \times Y$, i σ na $Y \times Z$ definisane svojim matricama pripadnosti*

$$M_\rho = \begin{bmatrix} 0.3 & 0 & 0.1 \\ 0.2 & 0.9 & 0.5 \end{bmatrix}, \quad M_\sigma = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.6 & 1 & 0.3 \\ 0.4 & 0.4 & 0.7 & 0.5 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Tada je

$$\operatorname{dom}\rho = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ 0.3 & 0.9 \end{pmatrix}, \qquad \operatorname{rang}\rho = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 0.7 & 1 \end{pmatrix}, \qquad h(\rho) = 0.9,$$

$$\operatorname{dom}\sigma = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ 0.3 & 0.9 & 0.5 \end{pmatrix}, \quad \operatorname{rang}\sigma = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ 1 & 0.6 & 1 & 0.5 \end{pmatrix}, \quad h(\sigma) = 1,$$

$$M_{\rho^{-1}} = M_\rho^T = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.2 \\ 0 & 0.9 \\ 0.1 & 0.5 \end{bmatrix}, \qquad M_{\sigma^{-1}} = M_\sigma^T = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.4 & 1 \\ 0.6 & 0.4 & 0 \\ 1 & 0.7 & 1 \\ 0.3 & 0.5 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\rho \circ \sigma = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.3 & 0.3 & 0.3 \\ 0.5 & 0.4 & 0.7 & 0.5 \end{bmatrix},$$

$\sigma \circ \rho$ nije definisano. ☑

Nadalje se, kao najznačajnije, razmatraju binarne fazi-relacije nekog skupa X, tj. binarne fazi-relacije na $X \times X$. Primetimo najpre da su u tom slučaju definisane obe kompozicije $\rho \circ \sigma$ i $\sigma \circ \rho$ za proizvoljne binarne fazi-relacije ρ i σ skupa X. Za ovakve fazi-relacije je moguće, i od interesa, razmatrati i druga svojstva i operacije sa njima. Analogno svojstvima refleksivnosti, simetričnosti, antisimetričnosti i tranzitivnosti klasičnih relacija se definišu odgovarajući pojmovi za fazi-relacije. Ipak, naročito u pogledu pojma tranzitivnosti, postoji značajna razlika u ovim definicijama kod fazi-relacija u poređenju sa tim pojmovima kod klasičnih relacija.

Definicija 2.3.4 *Neka je X proizvoljan skup, i neka je ρ binarna fazi-relacija skupa X. Fazi-relacija ρ na skupu X može da ima sledeće važne osobine.*

Ⓡ ***Refleksivnost:***

$\forall x \in X, \ \ \rho(x,x) = 1.$

Ⓢ ***Simetričnost:***

$\forall x, y \in X, \ \ \rho(x,y) = \rho(y,x).$

Ⓐ ***Antisimetričnost:***

$\forall x, y \in X, \ \ (\rho(x,y) > 0 \ \wedge \ \rho(y,x) > 0) \ \ \Rightarrow \ \ x = y.$

Ⓣ $\max - \min$ ***tranzitivnost:***

$\forall x, z \in X, \ \ \rho(x,z) \geq \sup\limits_{y \in X} \inf(\rho(x,y), \rho(y,z)).$

Ⓡ$_\varepsilon$ ***ε-refleksivnost:*** *za $\varepsilon \in (0,1)$ je*

$\forall x \in X, \ \ \rho(x,x) > 1 - \varepsilon.$

Napomena 2.3.2 *Umesto ovako definisane tranzitivnosti zasnovane na operacijama* min *i* max*, odnosno* inf *i* sup*, moguće je definisati tranzitivnost i preko nekih drugih t-normi i t-konormi umesto operacija* inf *i* sup.

Napomena 2.3.3 *U praksi se pojavljuju fazi-relacije koje nisu refleksivne, ali su „skoro refleksivne" u smislu da su ε-refleksivne za neko malo $\varepsilon > 0$. Stoga, u praksi, ε-refleksivnu fazi-relaciju možemo interpretirati kao refleksivnu.*

☞ Uočimo sličnost pojmova iz definicije 2.3.4 sa nekim osobinama funkcija rastojanja iz definicija 1.1.1 i 1.1.3. Ova sličnost potiče otud što rastojanje od elementa x do elementa y nekog prostora možemo interpretirati kao stepen povezanosti elementa x sa elementom y.

Analogno kao kod klasičnih relacija, za fazi-relaciju koja nije tranzitivna možemo definisati njeno tranzitivno zatvaranje.

Napomena 2.3.4 *Neka je ρ binarna fazi-relacija na skupu X.* ***Tranzitivno zatvaranje****, ili* **min-max tranzitivno zatvaranje** *binarne fazi-relacije ρ na skupu X, je fazi-relacija ρ^{T} sa minimalnom funkcijom pripadnosti koja je tranzitivna i*

$\forall x, y \in X, \quad \rho(x,y) \leq \rho^{\mathsf{T}}(x,y),$

odnosno $\rho \subseteq \rho^{\mathsf{T}}$, i ne postoji tranzitivna relacija $\sigma \neq \rho^{\mathsf{T}}$ takva da je $\rho \subseteq \sigma \subseteq \rho^{\mathsf{T}}$.

Ako fazi-relacija ρ jeste tranzitivna, tada je $\rho^{\mathsf{T}} = \rho$, a inače ρ^{T} konstruišemo istim algoritmom kao kod klasičnih relacija:

[1]: $\rho^{\mathsf{T}} := \rho$;

[2]: IF IsTransitive(ρ^{T}) THEN GOTO [5];

[3]: $\rho^{\mathsf{T}} := \rho^{\mathsf{T}} \cup \left(\rho^{\mathsf{T}} \circ \rho^{\mathsf{T}}\right)$;

[4]: GOTO [2];

[5]: END;

Definicija 2.3.5 *Binarna fazi-relacija ρ na skupu X je* ***relacija sličnosti*** *ili* ***fazi-relacija ekvivalencije*** *ako je* Ⓡ*efleksivna,* Ⓢ*imetrična i* Ⓣ*ranzitivna.*

Klasične relacije ekvivalencije skupa X predstavljaju ujednačavanje po nekom kriterijumu. Putem klasa ekvivalencije generišu particiju skupa X, čiji su elementi klase, tj. skupovi onih elemenata skupa X koji su „isti" po kriterijumu definisanom relacijom ekvivalencije. Fazi-relacije ekvivalencije ne generišu klase ekvivalentnih tj. „istih" elemenata, već klase „sličnih" elemenata.

Definicija 2.3.6 *Neka je X proizvoljan skup, i neka je ρ relacija sličnosti na skupu X. Za svako $x \in X$ je sa*

$$C_x : X \to [0,1], \quad C_x(y) = \rho(x,y)$$

definisana ***klasa sličnosti*** *elementa $x \in X$.*

Primetimo da je klasa sličnosti C_x elementa x fazi-skup na skupu X, koji svakom elementu $y \in X$ dodeljuje meru povezanosti, tj. sličnosti $\rho(x,y)$ elementa $y \in T$ sa elementom x. Za relaciju sličnosti ρ na konačnom skupu X, koja je predstavljena matricom pripadnosti, klasu C_x elementa x predstavlja vrsta elementa x u matrici pripadnosti.

☞ Klase sličnosti nisu disjunktne, te familija fazi-skupova $\{C_x \mid x \in X\}$ ne reprezentuje particiju skupa X.

Međutim, α-rezovi klasa sličnosti imaju interesantnu interpretaciju. Naime, za svako $\alpha \in [0,1]$, α-rez klase C_x je skup, u klasičnom smislu, svih onih elemenata $y \in Y$ čiji je stepen sličnosti sa elementom x bar α. Pri tome, specijalno za $\alpha = 1$ su α-rezovi ${}^{\alpha}C_x$ klase ekvivalencije u klasičnom smislu, tj. familija običnih skupova $\left\{{}^{1}C_x \mid x \in X\right\}$ je jedna particija skupa X. Ova particija generiše klasičnu relaciju ekvivalencije $\sim$ na X definisanu sa

$$\forall x, y \in X, \quad x \sim y \iff \rho(x,y) = 1$$

(elementi x i y su „isti" ukoliko su „maksimalno slični").

Takođe, α-rezovi same relacije sličnosti ρ imaju zanimljivo svojstvo i interpretaciju.

Teorema 2.3.2 *Ako je ρ relacija sličnosti na skupu X, tada je α-rez ${}^{\alpha}\rho$ klasična relacija ekvivalencije za svako $\alpha \in [0,1]$.*

Napomena 2.3.5 *Za svako fiksno $\alpha \in [0,1]$, relacija ekvivalencije ${}^{\alpha}\rho$ je klasična relacija ekvivalencije za koju su u relaciji (ekvivalentni su) svaka dva elementa x i y čija je mera „sličnosti" najmanje α.*

Ako za $\alpha \in [0,1]$, sa $\pi\left({}^{\alpha}\rho\right)$ označimo faktor-skup skupa X u odnosu na relaciju ekvivalencije, uočimo da za ove faktor-skupove koji predstavljaju klasične relacije ekvivalencije važi:

- ✰ $\alpha \leq \beta \quad \Rightarrow \quad \pi\left({}^{\alpha}\rho\right) \subseteq \pi\left({}^{\beta}\rho\right)$,
- ✰ $\pi\left({}^{0}\rho\right) = \{X\}$,
- ✰ $\pi\left({}^{1}\rho\right) = \left\{ {}^{1}C_x \;\middle|\; x \in X \right\}$ je faktor-skup koji odgovara relaciji ekvivalencije kod koje su ekvivalentni oni elementi x i y koji su maksimalne sličnosti, tj. sličnosti $\rho(x,y) = 1$.

S obzirom na teoremu 2.1.2 o reprezentaciji fazi-skupova, imamo da je

$$\rho = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} {}_{\alpha}\rho,$$

odnosno

$$\rho(x,y) = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} \alpha \cdot {}^{\alpha}\rho(x,y)$$

za sve $(x,y) \in X^2$, gde je ${}^{\alpha}\rho$ klasična karakteristična funkcija klasične relacije ekvivalencije ${}^{\alpha}\rho$. Dakle, relaciju sličnosti možemo na ovaj način predstaviti preko odgovarajuće familije ${}^{\alpha}\rho$, $\alpha \in [0,1]$ klasičnih relacija ekvivalencije ${}^{\alpha}\rho$.

Osim relacija sličnosti, mogu se izdvojiti i još neki tipovi fazi-relacija. Ilustracije radi, u sledećoj definiciji su navedeni neki takvi tipovi.

Definicija 2.3.7 *Neka je ρ binarna fazi-relacija na skupu X.*

- ✪ *Fazi-relacija ρ je* ***relacija kvazi-ekvivalencije*** *(eng.* quasi-equivalence*) ako je Ⓢimetrična i Ⓣranzitivna, a nije Ⓡefleksivna.*
- ✪ *Fazi-relacija ρ je* ***relacija kompatibilnosti*** *(eng.* compatibility relation / tolerance relation*) ako je Ⓡefleksivna i Ⓢimetrična.*
- ✪ *Fazi-relacija ρ je* ***relacija fazi-poretka*** *(eng.* fuzzy partial ordering*) ako je Ⓡefleksivna, Ⓐntisimetrična i Ⓣranzitivna.*

Sledeća definicija daje jedan od osnovnih pojmova vezanih za FCM algoritam opisan u glavi 3. To je pojam ***pseudoparticije*** nekog skupa. Pseudoparticija skupa nije generisana relacijom sličnosti, i ne treba je mešati sa klasama sličnosti neke relacije sličnosti.

Definicija 2.3.8 *Neka je $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ proizvoljan konačan skup, neka je $c \in \mathbb{N}$, i neka je $\mathcal{P} = \{A_1, A_2, \ldots, A_c\}$ familija fazi-skupova na prostoru X. Familija $\mathcal{P}$ je* **pseudoparticija** *ili* **fazi c-particija** *skupa X ukoliko važi*

[PP1] $\forall k \in \{1,2,\ldots,n\}, \quad \sum_{i=1}^{c} A_i(x_k) = 1.$

[PP2] $\forall i \in \{1,2,\ldots,c\}, \quad 0 < \sum_{k=1}^{n} A_i(x_k) < n.$

Pojam pseudoparticije se može uopštiti i na beskonačan skup X. Pseudoparticiju $\mathcal{P} = \{A_1, A_2, \ldots, A_c\}$ konačnog skupa $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, kao i binarnu fazi-relaciju, je takođe pogodno predstaviti ***matricom pripadnosti*** $P = [p_{i,j}]_{c \times n}$ čiji element

$$p_{i,j} = A_i(x_j), \quad i \in \{1, \ldots, c\}, \quad j \in \{1, \ldots, n\}$$

predstavlja stepen pripadnosti elementa x_j fazi-skupu A_i pseudoparticije $\mathcal{P}$. Pri tome je

(1) $\forall j \in \{1, 2, \ldots, n\}, \ \sum_{i=1}^{c} A_i(x_j) = 1,$

tj. ukupna mera pripadnosti svakog elementa x_j svim fazi-skupovima A_i je tačno 1,

(2) $\forall i \in \{1, 2, \ldots, c\}, \ 0 < \sum_{j=1}^{n} A_i(x_j) < n,$

tj. svaki fazi-skup A_i pseudoparticije $\mathcal{P}$ sadrži „bar malo" bar neki element x_j, ali ne sadrži maksimalno sve njih.

2.4 Operatori agregacije

Operacije agregacije su uopštenje pojmova t-norme i t-konorme. Takođe su, sa aspekta skupovnih operacija, matematički model objedinjavanja nekoliko fazi-skupova u jedan fazi-skup. Našle su bogatu primenu u brojnim inženjerskim disciplinama, naročito u informatičkim naukama, vidi [20], [11], [14], [13].

2.4.1 Opšti pojmovi i osobine

Aksiomatika operatora agregacije u literaturi nije jedinstveno usvojena, te razni autori u definiciji navode manje ili više uslova koje neka funkcija treba da zadovoljava da bi bila operator agregacije. Za potrebe ove doktorske disertacije tj. rezultata predstavljenih u glavi 4, usvojen je minimalan skup od dve aksiome koje su opšte prihvaćene.

Definicija 2.4.1 ***Operacija agregacije*** *je funkcija* $A : \bigcup_{n=2}^{\infty} [0,1]^n \to [0,1]$ *sa sledećim osobinama.*

[Ag1] *Za svako $n \geq 2$, i sve n-torke $(0, 0, \ldots, 0)$ i $(1, 1, \ldots, 1)$ važe* ***granični uslovi***

$$A(0, 0, \ldots, 0) = 0 \ \wedge \ A(1, 1, \ldots, 1) = 1.$$

[Ag2] *Funkcija A je* ***monotono neopadajuća*** *po svim komponentama, odnosno za svako $n \geq 2$ i sve $(x_1, x_2, \ldots, x_n), (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in [0,1]^n$ važi*

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\}, \ x_i \leq y_i \ \Rightarrow \ A(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq A(y_1, y_2, \ldots, y_n).$$

Osim ovih, funkcija A može da ima i sledeće poželjne osobine.

[Ag3] *Funkcija A je* ***neprekidna****.*

[Ag4] *Funkcija A je* ***simetrična*** *po svim komponentama, odnosno za sve $n \geq 2$, svaku n-torku $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in [0,1]^n$, i za svaku permutaciju p skupa $\{1, \ldots, n\}$ važi*

$$A(x_1, x_2, \ldots, x_n) = A\left(x_{p(1)}, x_{p(2)}, \ldots, x_{p(n)}\right).$$

[Ag5] *Funkcija A je* ***idempotentna****, odnosno za svako $n \geq 2$ i svaku n-torku $(a, a, \ldots, a) \in [0,1]^n$ važi*

$$A(a, a, \ldots, a) = a.$$

☞ Osobina [Ag4] predstavlja uopštenje komutativnosti i asocijativnosti binarnih operacija.

Polazeći od operacije agregacije A, možemo definisati tzv. ***agregacione skupovne fazi-operacije*** na sledeći način. Za fazi-skupove S_i, $i \in \mathbb{N}$ na nekom skupu X, dakle $S_i \in \mathcal{F}(X, [0,1])$, $i \in \mathbb{N}$ sa

$$S(x) = A(S_1(x), \ldots, S_n(x)), \quad x \in X, \quad n \geq 2$$

je definisan fazi-skup $S \in \mathcal{F}(X, [0,1])$ svojom funkcijom pripadnosti. Dakle, između ostalog, i agregacione funkcije možemo, u određenom smislu, poistovećivati sa skupovnim fazi-operacijama.

Definicije t-norme T i t-konorme S se mogu induktivno proširiti na operacije na domenu $\bigcup\limits_{n=2}^{\infty} [0,1]^n$, vidi (2.2.1) i (2.2.2) na stranama 33 i 40. Ovako definisane operacije $T : \bigcup\limits_{n=2}^{\infty} [0,1]^n \to [0,1]$ i $S : \bigcup\limits_{n=2}^{\infty} [0,1]^n \to [0,1]$ su očigledno monotono neopadajuće, i za njih važi $T(0, \ldots, 0) = 0$ i $T(1, \ldots, 1) = 1$ odnosno $S(0, \ldots, 0) = 0$ i $S(1, \ldots, 1) = 1$ (vidi teoreme 2.2.11 i 2.2.16), tj. zadovoljavaju aksiome [Ag1] i [Ag2] operacija agregacije. Stoga su sve t-norme i t-konorme agregacione funkcije, i to simetrične, zahvaljujući komutativnosti i asocijativnosti t-normi i t-konormi. Neprekidne, npr. Arhimedovske t-norme i t-konorme na ovaj način generišu neprekidne agregacione operatore.

Primer 2.4.1 *Slede neki važni primeri operacija agregacije.*

① ***Operacija*** min

$$A_{\min}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \min(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

je neprekidna, simetrična i idempotentna operacija agregacije.

② ***Operacija*** max

$$A_{\max}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \max(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

je neprekidna, simetrična i idempotentna operacija agregacije.

③ ***Aritmetička sredina***

$$A_{ma}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)$$

je neprekidna, simetrična i idempotentna operacija agregacije.

④ ***Geometrijska sredina***

$$A_{mg}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_n)^{\frac{1}{n}}$$

je neprekidna, simetrična i idempotentna operacija agregacije.

⑤ ***Harmonijska sredina***

$$A_{mh}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{cases} \dfrac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}} & , \ \forall i \in \{1, \ldots, n\}, \ x_i \neq 0 \\ 0 & , \ \exists i \in \{1, \ldots, n\}, \ x_i = 0 \end{cases}$$

je neprekidna, simetrična i idempotentna operacija agregacije.

⑥ *Svaka Arhimedovska t-norma iz primera* 2.2.4 *i* 2.2.5*, i svaka Arhimedovska t-konorma iz primera* 2.2.6 *i* 2.2.7*, je neprekidna i simetrična operacija agregacije.* ☑

Aritmetička A_{ma}, geometrijska A_{mg} i harmonijska sredina A_{mh} iz primera 2.4.1 su specijalan slučaj jedne važne klase operacija agregacija.

Primer 2.4.2 *Za svako $\alpha > 0$ je sa*

$$A_{m,\alpha}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \left(\frac{x_1^\alpha + x_2^\alpha + \cdots + x_n^\alpha}{n} \right)^{\frac{1}{\alpha}},$$

a za $\alpha < 0$ sa

$$A_{m,\alpha}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{cases} \left(\dfrac{x_1^\alpha + x_2^\alpha + \cdots + x_n^\alpha}{n} \right)^{\frac{1}{\alpha}} & , \ \forall i \in \{1, \ldots, n\}, \ x_i > 0 \\ 0 & , \ \exists i \in \{1, \ldots, n\}, \ x_i = 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{n^{\frac{1}{-\alpha}}}{\left(\frac{1}{x_1^{\frac{1}{-\alpha}}} + \cdots + \frac{1}{x_n^{\frac{1}{-\alpha}}} \right)^{\frac{1}{-\alpha}}} & , \ \forall i \in \{1, \ldots, n\}, \ x_i > 0 \\ 0 & , \ \exists i \in \{1, \ldots, n\}, \ x_i = 0 \end{cases},$$

definisana jedna neprekidna, simetrična i idempotentna operacija agregacije. Operacije klase agregacija $A_{m,\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ se nazivaju ***uopštene sredine*** *(eng.* average operators *ili* root-power operators*). Pri tome se*

- *za $\alpha = 1$ dobija aritmetička sredina A_{ma} iz primera* 2.4.1*,*
- *za $\alpha = -1$ se dobija harmonijska sredina A_{mh} iz primera* 2.4.1*,*
- *za $\alpha \to 0$ ova operacija konvergira ka geometrijskoj sredini A_{mg} iz primera* 2.4.1*.* ☑

Još jedna klasa operacija agregacije sličnih uopštenim sredinama, navedena je u sledećem primeru.

Primer 2.4.3 *Za proizvoljne* $\alpha_i \in (0,1]$, $i \in \mathbb{N}$ *i* $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots)$ *je sa*

$$A_\alpha(x_1, \dots, x_n) = \min(x_1^{\alpha_1}, \dots, x_n^{\alpha_n}), \quad x_i \in [0,1], \quad n \geq 2$$

definisana klasa neprekidnih operacija agregacije koje nisu niti simetrične niti idempotentne, tj. za njih ne važe [Ag4] *i* [Ag5]. ☑

Sledeća teorema daje jednu karakterizaciju operacija agregacije iz prethodnog primera.

Teorema 2.4.1 *Neka je* $h : [0,1]^n \to [0,1]$ *funkcija za koju važe granični uslovi* [Ag1], *koja je neprekidna, i ima osobine*

(1) $h(\min(x_1, y_1), \dots, \min(x_n, y_n)) = \min(h(x_1, \dots, x_n), h(y_1, \dots, y_n))$,

(2) $$h\left(1, \dots, 1, \underbrace{x \cdot y}_{i\text{-ta poz.}}, 1, \dots, 1\right) = h\left(1, \dots, 1, \underbrace{x}_{i\text{-ta poz.}}, 1, \dots, 1\right) \cdot h\left(1, \dots, 1, \underbrace{y}_{i\text{-ta poz.}}, 1, \dots, 1\right),$$

(3) $$h\left(1, \dots, 1, \underbrace{0}_{i\text{-ta poz.}}, 1, \dots, 1\right) = 0,$$

za sve $x_i, y_i, x, y \in [0,1]$, $i \in \{1, \dots, n\}$. *Tada postoje* $\alpha_i \in [0,1]$, $i \in \{1, \dots, n\}$ *takvi da je*

$$h(x_1, \dots, x_n) = \min(x_1^{\alpha_1}, \dots, x_n^{\alpha_n})$$

za sve $x_1, \dots, x_n \in [0,1]$.

Polazeći od nekih operacija agregacije, mogu se na razne načine konstruisati nove. Jedan od načina za ovakvu konstrukciju je naveden u sledećoj teoremi.

Teorema 2.4.2 *Ako su* $A_0, A_1, A_2, \dots, A_k$ *proizvoljne operacije agregacije, tada je sa*

$$A(x_1, \dots, x_n) = A_0(A_1(x_1, \dots, x_n), \dots, A_k(x_1, \dots, x_n))$$

za sve $n \leq 2$ *i sve* $(x_1, \dots, x_n) \in [0,1]^n$, *definisana takođe operacija agregacije* $A : \bigcup_{n=2}^{\infty} [0,1]^n \to [0,1]$. *Pri tome,*

- (s) *ako su sve operacije* A_i, $i \in \{1, \dots, k\}$ *simetrične, tada je i* A *simetrična operacija,*
- (i) *ako su sve operacije* A_i, $i \in \{1, \dots, k\}$ *idempotentne, tada je i* A *idempotentna operacija.*
- (n) *ako su sve operacije* A_i, $i \in \{1, \dots, k\}$ *neprekidne, tada je i* A *neprekidna operacija.*

2.4.2 OWA operatori

Izuzetno važnu klasu operacija agregacije, navedenu u sledećem primeru, definisao je Ronald R. Yager. Ove operacije se intenzivno koriste u raznim granama računarskih nauka i veštačke inteligencije, vidi [48], [44], [47], [46], [45].

Primer 2.4.4 *Klasa* **OWA** ***agregacionih operacija*** *(eng.* ordered weighted averaging operations*) je definisana sa*

$$A_{W,\mathbf{w}}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = w_1 x_{p(1)} + w_2 x_{p(2)} + \cdots + w_n x_{p(n)},$$

gde je $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \ldots, w_n) \in [0,1]^n$, $\sum\limits_{i=1}^{n} w_i = 1$, *a* p *je ona permutacija skupa* $\{1, 2, \ldots, n\}$ *za koju je* $x_{p(1)} \geq x_{p(2)} \geq \cdots \geq x_{p(n)}$. *Pri tome se* $\mathbf{w}$ *naziva* ***vektor težina*** *(eng.* weighting vector*) operatora* $A_{W,\mathbf{w}}$. ☑

Napomena 2.4.1 *Za svako* $\mathbf{w}$ *je* OWA *operacija* $A_{W,\mathbf{w}}$ *neprekidna, simetrična i idempotentna, i važi*

$$A_{\min} \leq A_{W,\mathbf{w}} \leq A_{\max}.$$

Specijalno,

- *za* $\mathbf{w} = (0, \ldots, 0, 1)$ *se dobija* $A_{\min}$ *operaciju iz primera* 2.4.1 *pod* ①,
- *za* $\mathbf{w} = (1, 0, \ldots, 0)$ *se dobija* $A_{\max}$ *operaciju iz primera* 2.4.1 *pod* ②,
- *za* $\mathbf{w} = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}\right)$ *se dobija aritmetička sredina* A_{ma} *iz primera* 2.4.1 *pod* ③.

Sledeća teorema opisuje jednu klasu OWA operatora, ujedno dajući i način njihove konstrukcije.

Teorema 2.4.3 *Neka je* $h : [0,1]^n \to [0, \infty)$ *funkcija koja zadovoljava granične uslove* [Ag1]*, koja je monotono neopadajuća tj. zadovoljava* [Ag2]*, i koja je aditivna, tj. za sve* $x_i, y_i \in [0,1]$ *za koje je* $x_i + y_i \in [0,1]$*, važi*

$$h(x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n) = h(x_1, \ldots, x_n) + h(y_1, \ldots, y_n).$$

Tada postoje koeficijenti $w_{n,i} \geq 0$, $i \in \{1, \ldots, n\}$ *takvi da je*

$$h(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} w_{n,i} x_i,$$

gde je

$$w_{n,i} = h\left(0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{i\text{-ta poz.}}, 0, \ldots, 0\right), \quad i \in \{1, \ldots, n\}.$$

Ako je pri tome h *idempotentna funkcija tj. zadovoljava aksiomu* [Ag5]*, i ako je* $\sum\limits_{i=1}^{n} w_{n,i} = 1$ *za sve* $n \geq 2$*, tada je* h *agregaciona funkcija* OWA *tipa.*

Ako u definiciji OWA agregacione operacije zamenimo $+$ i $\cdot$ redom sa max i min, dobijamo funkciju koja je, u određenom smislu, min-max analogon OWA operacija.

Primer 2.4.5 *Za fiksno $n \geq 2$ i proizvoljne $w_i \in [0,1]$, $i \in \{1,\ldots,n\}$ sa osobinom* $\max(w_1,\ldots,w_n) = 1$, *i* $\mathbf{w} = (w_1,\ldots,w_n)$, *je sa*

$$A_{\mathbf{w}}(x_1,\ldots,x_n) = \max(\min(w_1,x_1),\ldots,\min(w_n,x_n)), \quad x_i \in [0,1]$$

definisana klasa neprekidnih operacija agregacije koje nisu niti simetrične niti idempotentne, tj. za njih ne važe [Ag4] *i* [Ag5]. ☑

Sledeća teorema daje jednu karakterizaciju ovakvih funkcija.

Teorema 2.4.4 *Neka je $h : [0,1]^n \to [0,1]$ funkcija za koju važe granični uslovi* [Ag1], *koja je neprekidna i ima osobine*

(1) $h(\max(x_1,y_1),\ldots,\max(x_n,y_n)) = \max(h(x_1,\ldots,x_n), h(y_1,\ldots,y_n))$

za sve $x_i, y_i \in [0,1]$,

(2) $\forall i \in \{1,\ldots,n\}, \quad h_{n,i}(h_{n,i}(x_i)) = h_{n,i}(x_i)$

za sve $x_i \in [0,1]$, gde je

$$h_{n,i}(x_i) = h\left(0,\ldots,0, \underbrace{x_i}_{i\text{-ta poz.}}, 0,\ldots,0\right), \quad i\,\{1,\ldots,n\}.$$

Tada za brojeve $w_{n,i} = h_{n,i}(1)$, $i \in \{1,\ldots,n\}$ važi da je

$$h(x_1,\ldots,x_n) = \max(\min(w_1,x_1),\ldots,\min(w_n,x_n))$$

za sve $x_1,\ldots,x_n \in [0,1]$.

2.4.3 Norma-operatori agregacije

Uočimo da se t-norma i t-konorma razlikuju samo u rubnom uslovu. Pojmovi t-norme i t-konorme se mogu uopštiti, i pomoću tih uopštenih pojmova možemo dobiti još jednu klasu operacija agregacije, vidi [19], [49].

Definicija 2.4.2 *Binarna operacija $N : [0,1]^2 \to [0,1]$ je* ***norma-operacija*** *(eng.* norm-operation*), ukoliko za sve $x,y,z \in [0,1]$ važi*

[N1] $N(x,y) = N(y,x)$, *(komutativnost)*

[N2] $N(x,N(y,z)) = N(N(x,y),z)$, *(asocijativnost)*

[N3] $y \leq z \;\Rightarrow\; N(x,y) \leq N(x,z)$, *(monotonost)*

[N4] $N(0,0) = 0 \quad \wedge \quad N(1,1) = 1$. *(granični uslov)*

Specijalno, norma-operacija N je ***uninorma*** *ukoliko za nju postoji* ***neutralni element*** *$e \in [0,1]$ takav da*

[N5] $\forall x \in [0,1]\,,\ \ N(x,e) = x.$ *(neutralni element)*

☞ Dakle, t-norma je uninorma sa neutralnim elementom 1, a t-konorma je uninorma sa neutralnim elementom 0.

Poput t-normi i t-konormi, i norma-operacije se mogu induktivno proširiti na operaciju $N : \bigcup\limits_{n=2}^{\infty} [0,1]^n \to [0,1]$ na sledeći prirodan način. Za svako $n \geq 3$ i sve $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in [0,1]^n$ definišimo

$$N(x_1, x_2, \ldots, x_n) = N(N(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}), x_n). \tag{4.2.3}$$

Zahvaljujući komutativnosti i asocijativnosti funkcije N, za svaku permutaciju p skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$ važi

$$N(x_1, x_2, \ldots, x_n) = N\left(x_{p(1)}, x_{p(2)}, \ldots, x_{p(n)}\right),$$

odnosno, redosled operanada u $N(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ je nebitan, te je i N simetrična operacija. Stoga norma-operacija predstavlja jednu simetričnu operaciju agregacije.

U sledećem primeru je data jedna familija norma-operacija koje nisu niti t-norme niti t-konorme.

Primer 2.4.6 *Neka je $\lambda \in (0,1)$, i neka su T i S redom proizvoljna t-norma i proizvoljna t-konorma. Funkcije $h_{T,S,\lambda} : [0,1]^2 \to [0,1]$ definisane sa*

$$h_{T,S,\lambda}(x,y) = \begin{cases} \min(\lambda, S(x,y)) & , \ x \in [0,\lambda] \ \wedge \ y \in [0,\lambda] \\ \max(\lambda, T(x,y)) & , \ x \in [\lambda,1] \ \wedge \ y \in [\lambda,1] \\ 0 & , \ inače \end{cases}$$

*su norma-operacije koje se nazivaju **λ-sredine** (eng.* λ-averages*).* ☑

U sledećem primeru je opisan još jedan tip norma-operacija koje su u literaturi poznate pod nazivom ***medijane***.

Primer 2.4.7 *Za proizvoljno $\lambda \in [0,1]$, funkcija $h_\lambda : [0,1]^2 \to [0,1]$ definisana sa*

$$h_\lambda(x,y) = \begin{cases} \max(x,y) & , \ x \in [0,\lambda] \ \wedge \ y \in [0,\lambda] \\ \min(x,y) & , \ x \in [\lambda,1] \ \wedge \ y \in [\lambda,1] \\ \lambda & , \ inače \end{cases}$$

*je norma-operacija koja se naziva **medijana** (eng.* median*).* ☑

Sledeća teorema daje egzistenciju i karakterizaciju norma-operacija tipa medijana.

Teorema 2.4.5 *Ako je norma operacija $h : [0,1]^2 \to [0,1]$ neprekidna i idempotentna operacija, tada postoji $\lambda \in [0,1]$ takvo da je*

$$h(x,y) = \begin{cases} \max(x,y) & , \ x \in [0,\lambda] \ \wedge \ y \in [0,\lambda] \\ \min(x,y) & , \ x \in [\lambda,1] \ \wedge \ y \in [\lambda,1] \\ \lambda & , \ inače \end{cases},$$

tj. h je norma-operacija tipa medijana za neko $\lambda \in [0,1]$.

2.5 Defazifikacija

Nakon obrade fazikovanih podataka (fazi-skupova, fazi-brojeva, itd.) putem standardnih ili fazi-transformacija, po pravilu je potrebno izvršiti njihovu defazifikaciju. Defazifikacija je proces pretvaranja fazi-podataka u klasične podatke (skupove, brojeve, itd.), ili preciznije, proces pretvaranja funkcije pripadanja (fazi-skupa, fazi-broja, itd.) u odgovarajući klasični objekat. Način defazifikacije nije jednoznačno određen. On zavisi od tipa podataka, od interpretacije polaznih i dobijenih podataka, cilja obrade podataka, ali takođe i od intuitivne interpretacije. Generalno uzevši, neki od najpoznatijih i najčešće korišćenih metoda su

- ➩ metod maksimalne pripadnosti,
- ➩ metod centra oblasti,
- ➩ metod centra najveće oblasti,
- ➩ metod centra maksimuma,
- ➩ metod proseka maksimuma,
- ➩ metod centra suma, itd.

Tip primenjene i poželjne metode defazifikacije može veoma da zavisi od oblasti primene.

Glava 3

FCM algoritam za segmentaciju slike

S pojavom računara, otvorila se i mogućnost automatskog i brzog klasifikovanja podataka. Teorija prepoznavanja oblika ima jednu od ključnih uloga u tome. Tako se već 60-tih godina prošlog veka počela uobličavati teorija prepoznavanja oblika, i razvijati algoritmi za automatsku klasifikaciju raznih vrsta podataka, vidi npr. [1], [3], [16] [40], [21], [22], [23], [34]. Neki od tada konstruisanih algoritama za klasifikaciju se i danas intenzivno koriste, razvijaju i prilagođavaju savremenim potrebama, kao i mogućnostima današnjih računara i sistema za računarsku obradu podataka. Neki od najpoznatijih algoritama za automatsku klasifikaciju podataka su:

- algoritam fiksnog praga,
- algoritam maksimalno-minimalnog rastojanja,
- algoritam k unutrašnjih centara (Lloyd-ov algoritam),
- ISODATA algoritam,
- QMODEL algoritam,
- FCM algoritam,
- FUZZY QMODEL algoritam,
- algoritam hijerarhijskog razvrstavanja,
- razni algoritmi za grafovsko razvrstavanje, itd.

Verovatno najpoznatiji i najkorišćeniji algoritam za klasifikaciju podataka je ISODATA algoritam (eng. *self-organizing data analysis technique*), kojeg su osmislili Geoffrey H. Ball i David J. Hall 1965. godine, vidi [3], [1].

Cilj klasifikacije podataka, tj. elemenata nekog skupa $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ je generisanje neke particije $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_c\}$ skupa X koja dobro reprezentuje strukturu tih podataka, u smislu da su svi elementi jedne klase A_i slični između sebe po nekom kriterijumu, a svaka dva elementa koji pripadaju različitim klasama A_i i A_j su različiti po posmatranom kriterijumu. Svi gore pomenuti algoritmi osim FCM i FUZZY QMODEL algoritama za rezultat daju klasičnu particiju skupa, i uglavnom imaju jedan značajan nedostatak, tj. problem za uspešno klasifikovanje. Naime, na rezultat klasifikacije, tj. dobijenu particiju skupa X značajno utiču tzv. *outliers*, a to su malobrojni i izolovani elementi skupa koji se veoma razlikuju od većine dobro grupisanih elemenata skupa X. To su obično elementi koji predstavljaju npr. šum, koji su rezultat greške pri merenju, i slično. Naravno, poželjno je da takvi elementi što manje utiču na rezultat klasifikacije. FCM algoritam uspešno otklanja pomenuti nedostatak. Rezultat klasičnih algoritama za klasifikovanje je klasična particija skupa X čije elemente želimo klasifikovati, dok je rezultat FCM algoritma tzv. pseudoparticija skupa X iz sekcije 2.3. Elementi pseudoparticije su fazi-skupovi koji bolje i preciznije reprezentuju pripadnost klasifikovanih elemenata skupa X dobijenim klasama (klasterima).

FCM algoritam

FCM *algoritam* (eng. *Fuzzy c-Means Clustering Algorithms*) je jedna modifikacija algoritma k unutrašnjih centara. Razvijen je od strane autora J.C. Dunn-a godine 1973., vidi [17], a unapredio ga je J.C. Bezdek čije se ime najviše vezuje za ovaj algoritam. Usavršavan je i prilagođavan za specifične potrebe od strane raznih autora, vidi [4], [5] i [7]. Koristi se prvenstveno za segmentaciju slike. Prvobitno je konstruisan za potrebe geoloških istraživanja, a zatim primenjivan, uz odgovarajuće prilagođavanje, u raznim naukama i disciplinama kao što su npr. medicina, meteorologija itd. Zbog široke i česte upotrebe, ugrađen je i u programski paket MATLAB. Sledi kratak opis FCM algoritma preuzet iz [30].

Neka je $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ neki dati skup podataka, na primer piksela neke slike koji su predstavljeni kao elementi prostora $\mathbb{R}^p$. Neka je c unapred zadani broj klastera u koje će biti razvrstani elementi skupa X, npr. pikseli slike. Neka je dalje $\mathcal{P}^{(0)} = \left\{A_1^{(0)}, A_2^{(0)}, \ldots, A_c^{(0)}\right\}$ polazna pseudoparticija skupa X iz sekcije 2.3, dakle familija fazi-skupova na X za koju važi

$$\forall k \in \{1, 2, \ldots, n\}, \quad \sum_{i=1}^{c} A_i^{(0)}(x_k) = 1,$$

$$\forall i \in \{1, 2, \ldots, c\}, \quad 0 < \sum_{k=1}^{n} A_i^{(0)}(x_k) < n.$$

Cilj FCM algoritma je da nađe pseudoparticiju $\mathcal{P} = \{A_1, A_2, \ldots, A_c\}$ tj. skup klastera i pridruženih centara $v_1, v_2, \ldots, v_c \in \mathbb{R}^p$ ovih klastera koji najbolje reprezentuju strukturu datih podataka - elemenata skupa X. FCM algoritam je iterativan postupak u kojem se u iterativnim koracima menjaju

- ✪ elementi $A_i^{(k)}$, $k \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ tekuće pseudoparticije $\mathcal{P}^{(k)}$ koji predstavljaju klastere, počevši od polazne $\mathcal{P}^{(0)}$,

- pridruženi centri $v_i^{(k)}$, $k \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ tekućih klastera.

Kao što smo videli u sekciji 2.3, pseudoparticiju $\mathcal{P} = \{A_1, A_2, \ldots, A_c\}$ možemo predstaviti matricom pripadnosti $U = [u_{ij}]_{c\times n}$ čiji svaki element $u_{ij} = A_i(x_j)$, $i \in \{1, \ldots, c\}$, $j \in \{1, \ldots, n\}$ predstavlja stepen pripadnosti elementa x_j fazi-skupu A_i pseudoparticije $\mathcal{P}$. Pri tome je $\sum_{i=1}^{c} u_{ij} = 1$ i $0 < \sum_{j=1}^{n} u_{ij} < n$ za sve $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ i sve $i \in \{1, 2, \ldots, c\}$. Neka je $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_c\}$ skup pridruženih centara klastera $\mathcal{P} = \{A_1, A_2, \ldots, A_c\}$.

Klasterovanje je uspešno ukoliko je veza elemenata unutar istog klastera jaka, a veza između elemenata iz različitih klastera je slaba. Kao mera uspešnosti klasifikovanja, odnosno kao kriterijum dobre klasifikacije, tj. za identifikaciju „optimalne" pseudoparticije, u literaturi je predlagano više kriterijuma, od kojih je kao glavni i najčešće korišćen funkcija zvana ***indeks performanse*** (eng. *perfomance index*), u literaturi poznata još pod nazivima ***generalizovana funkcija najmanje kvadratne greške*** (eng. *generalized least-squared error functional*) ili ***težinska funkcija najmanjih kvadrata*** (eng. *weighted least-squares functional*), definisana sa

$$J_m(U,V) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{c} (u_{ik})^m \|x_k - v_i\|^2,$$

odnosno

$$J_m(U,V) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{c} (u_{ik})^m \|x_k - v_i\|_A^2,$$

gde je $m \in (1, \infty)$, $\|\cdot\|$ je neka norma prostora $\mathbb{R}^p$, odnosno A je neka pozitivno definitna matrica formata $n \times n$, a $\|\cdot\|_A$ je norma prostora $\mathbb{R}^p$ indukovana matricom A. Umesto standardne norme $\|\cdot\|$, moguće je koristiti druge razne funkcije rastojanja na elementima prostora $\mathbb{R}^p$. Manja vrednost funkcije $J_m(U,V)$ predstavlja bolju pseudoparticiju $\mathcal{P}$, te je cilj minimizacija funkcije $J_m(U,V)$. Dakle, cilj klasterovanja je optimizacioni problem, čije rešenje daje FCM algoritam, vidi [4].

Optimalno klasifikovanje se definiše kao uređeni par $\left(\hat{U}, \hat{V}\right)$, gde je $\hat{U}$ pseudoparticija skupa X a $\hat{V}$ skup pridruženih centara klastera, sa kojim se dostiže minimum indeksa performanse $J_m(U,V)$, lokalno za fiksne vrednosti ulaznih parametara m i c. Dokazano je da postupak konvergira ka optimalnom $\left(\hat{U}, \hat{V}\right)$ za svako $m \in (1, \infty)$ (vidi [5], [30]), a numerička konvergencija se obično dostiže u 10 do 25 iteracija. Za $m \in (1, \infty)$, pri $\forall i, j$, $x_j \neq \hat{v}_i$, sledeći uslovi su potrebni (ne i dovoljni) da bi par $\left(\hat{U}, \hat{V}\right)$ predstavljao optimalno klasifikovanje:

- za sve $i \in \{1, \ldots, c\}$ je

$$\hat{v}_i = \frac{1}{\sum\limits_{j=1}^{n} (\hat{u}_{ij})^m} \sum_{j=1}^{n} (\hat{u}_{ij})^m x_j,$$

➢ za sve $i \in \{1, \ldots, c\}$ i sve $j \in \{1, \ldots, n\}$ je

$$\hat{u}_{ij} = \left(\sum_{k=1}^{c} \left(\frac{\|x_j - \hat{v}_i\|_A}{\|x_j - \hat{v}_k\|_A} \right)^{\frac{2}{m-1}} \right)^{-1}.$$

Sledi diskusija o parametrima m i A algoritma, kao i o dodatnoj analizi dobijene „optimalne” klasifikacije.

❑ Težinski eksponent $m \in (1, \infty)$ se iskustveno određuje i ne postoji neka teorijska osnova za izbor optimalne vrednosti parametra m. On predstavlja relativnu težinu kvadratnih odstupanja $\|x_k - v_i\|_A^2$. Za $m = 1$ se minimizacijom indeksa performanse $J_m(U, V)$ dobija klasična particija skupa X, a odgovarajući centri klasa v_i su tada geometrijski centroidi klasa A_i, vidi [5]. Odgovarajuća matrica U tada ima u svakoj koloni jednu jedinicu, a ostali elementi kolone su nule. Pri $m \to 1$ dobijamo pseudoparticije koje konvergiraju ka klasičnoj particiji skupa X. Pri $m \to \infty$ se dobija pseudoparticija kojoj odgovara matrica čiji svi elementi konvergiraju ka $\frac{1}{c}$. Iskustveno je utvrđeno da upotrebljive vrednosti parametra m leže u intervalu $[1, 30]$, pri čemu se za većinu podataka, dobri rezultati dobijaju za vrednosti parametra $m \in [1.5, 3]$.

❑ Pozitivno definitna matrica A određuje geometrijski oblik dobijenih optimalnih klastera. U praksi se, po značaju, izdvajaju matrice određenog tipa.

❍$_1$ Jedinična matrica $A = I$ generiše standardnu Euklidsku L_2 normu, pri čemu se dobijaju klasteri hipersferičnog oblika.

❍$_2$ Neka je $c_X = \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} x_k$ srednja vrednost elemenata x_k koje želimo klasifikovati, i neka je

$$C_X = \sum_{k=1}^{n} (x_k - c_X) \cdot (x_k - c_X)^T$$

kovarijansna matrica elemenata x_k, gde je $(x_k - c_X)^T$ transponovana matrica matrice-kolone $(x_k - c_X)$. Matrica $A = C_X^{-1}$ generiše tzv. ***Mehalobis***-ovu normu, pri čemu se dobijaju klasteri hiperelipsoidnog oblika čije su poluose proporcionalne karakterističnim korenima matrice A.

❍$_3$ Neka su a_i, $i \in \{1, \ldots, p\}$ karakteristični koreni matrice C_X iz ❍$_2$ (svi karakteristični koreni kovarijansne matrice su realni brojevi), i neka je D_X dijagonalna matrica sa elementima a_i na dijagonali. Matricom $A = D_X^{-1}$ je generisana tzv. dijagonalna norma prostora $\mathbb{R}^p$, pri čemu se opet dobijaju klasteri hiperelipsoidnog oblika.

- Minimizacijom indeksa performanse $J_m(U,V)$ dobijena „optimalna" pseudoparticija $\hat{U} = [\hat{u}_{ij}]$ ne mora biti sasvim vizuelno zadovoljavajuća. Kao dodatna verifikacija kvaliteta „optimalnih" pseudoparticija $\hat{U}$ dobijenih FCM algoritmom sa raznim ulaznim parametrima m i c, koristi se nekoliko funkcija (eng. *cluster validity functionals*) od kojih su najpopularnije sledeće dve.
  - ***Koeficijent pseudoparticije***:
    $$F_{c,m}\left(\hat{U}\right) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{c}\left(\hat{u}_{ij}\right)^2.$$
  - ***Entropija pseudoparticije***:
    $$H_{c,m}\left(\hat{U}\right) = -\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{c}\left(\hat{u}_{ij}\log_a\left(\hat{u}_{ij}\right)\right)$$
    sa nekom bazom logaritma $a \in (1,\infty)$.

  Pri tome je $F_{c,m}\left(\hat{U}\right) \in \left[\frac{1}{c},1\right]$ i $H_{c,m}\left(\hat{U}\right) \in [0,\log_a(c)]$, a poželjno je da vrednost $F_{c,m}\left(\hat{U}\right)$ bude što veća, a vrednost $H_{c,m}\left(\hat{U}\right)$ što manja. Specijalno, za granične vrednosti ove dve funkcije važi:
  - $F_{c,m}\left(\hat{U}\right) = 1 \quad\Leftrightarrow\quad H_{c,m}\left(\hat{U}\right) = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \forall i,j,\ \hat{u}_{ij} \in \{0,1\}$
    tj. dobijena pseudoparticija je u stvari klasična particija skupa X, odnosno, dobijeni su klasični klasteri,
  - $F_{c,m}\left(\hat{U}\right) = \frac{1}{c} \quad\Leftrightarrow\quad H_{c,m}\left(\hat{U}\right) = \log_a(c) \quad\Leftrightarrow\quad \forall i,j,\ \hat{u}_{ij} = \frac{1}{c},$
    tj. dobijeni su maksimalno neodređeni klasteri.

Sledi kratak opis FCM algoritma.

Korak 1: Izbor inicijalnih vrednosti:

$t = 0$	- brojač iteracija,
$\mathcal{P}^{(0)}$	- proizvoljna početna pseudoparticija,
c	- unapred zadani željeni broj klastera,
m	- iskustveno zadana vrednost parametra $m \in (1,\infty)$,
ε	- unapred zadani mali pozitivni broj koji služi kao kriterijum za završetak iteracija.

Korak 2: Izračunavanje centara $v_i^{(t)}$ klastera $A_i^{(t)}$ opisanih pseudoparticijom $\mathcal{P}^{(t)}$ po formuli

$$v_i^{(t)} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\left(A_i^{(t)}(x_k)\right)^m x_k}{\sum\limits_{k=1}^{n}\left(A_i^{(t)}(x_k)\right)^m}$$

Korak 3: $t := t + 1$

Korak 4: Generisanje nove pseudoparticije $\mathcal{P}^{(t)}$ po sledećoj proceduri

FOR $k := 1$ TO n
BEGIN
$$I = \left\{ i \in \{1, 2, \ldots, c\} \mid \left\| x_k - v_i^{(t-1)} \right\|^2 = 0 \right\}$$
IF $I = \emptyset$
THEN
FOR $i := 1$ TO c
BEGIN
$$A_i^{(t)}(x_k) = \left[\sum_{j=1}^{c} \left(\frac{\left\| x_k - v_i^{(t-1)} \right\|^2}{\left\| x_k - v_j^{(t-1)} \right\|^2} \right)^{\frac{1}{m-1}} \right]^{-1}$$
END
ELSE
FOR $i := 1$ TO c
IF $i \in I$
THEN
$$A_i^{(t)}(x_k) = \frac{1}{|I|}$$
/* umesto $\frac{1}{|I|}$ se mogu dodeliti bilo koji nenegativni brojevi
/* takvi da je $\sum_{i \in I} A_i^{(t)}(x_k) = 1$
ELSE
$$A_i^{(t)}(x_k) = 0$$
ENDIF
ENDIF
END

Korak 5: Ispitivanje završetka iteracija:

Ako je $\left| \mathcal{P}^{(t)} - \mathcal{P}^{(t-1)} \right| = \max_{i \in \{1,\ldots,c\},\ k \in \{1,\ldots,n\}} \left| A_i^{(t)}(x_k) - A_i^{(t-1)}(x_k) \right| \leq \varepsilon$,
tada je postupak završen, a inače se prelazi na **Korak 2**.

Napomena 3.0.1 *Umesto funkcije matričnog rastojanja*
$$\left| \mathcal{P}^{(t)} - \mathcal{P}^{(t-1)} \right| = \max_{i \in \{1,\ldots,c\},\ k \in \{1,\ldots,n\}} \left| A_i^{(t)}(x_k) - A_i^{(t-1)}(x_k) \right|$$
se mogu koristiti i neke druge funkcije rastojanja među pseudoparticijama, tj. odgovarajućim matricama kao elementima prostora $\mathbb{R}^{n \times c}$. U praksi se koriste uobičajene matrične norme.

Defazifikacija pseudoparticije

Dobijena pseudoparticija $\mathcal{P}^{(t)}$ iz poslednje iteracije algoritma predstavlja fazi-klasterizovan skup X (npr. sliku), gde je svaki element dobijene pseudoparticije jedan fazi-skup koji predstavlja jedan fazi-klaster. Nakon dobijanja konačne pseudoparticije $\mathcal{P}^{(t)}$ u algoritmu, potrebno je još izvršiti njenu defazifikaciju. Proces defazifikacije je formiranje klasičnih klastera tj. klasične particije skupa X.

Ako je npr. X skup piksela neke slike, tada se u prikazu segmentirane slike svi pikseli iz jednog klastera prikazuju istom bojom, te na segmentiranoj slici vidimo oblasti obojene sa c boja, gde je c unapred zadani broj željenih klastera.

U defazifikaciji FCM algoritmom dobijene pseudoparticije je moguće koristiti različite metode, ali najčešće korišćena i uobičajena metoda je metod maksimalne pripadnosti. Tom metodom se na osnovu dobijene pseudoparticije $\mathcal{P} = \{A_1, A_2, \ldots, A_c\}$ formira klasična particija $\mathcal{X} = \{X_1, X_2, \ldots, X_c\}$ skupa X tako što se svaki element $x_k \in X$ raspoređuje u onu klasu X_i za koji se kod odgovarajućeg elementa A_i pseudoparticije $\mathcal{P}$ dostiže maksimalan stepen pripadnosti elementa $x_k \in X$. Dakle

$$i^* = \operatorname*{argmax}_{i \in \{1,\ldots,c\}} u_{ik} \quad \Rightarrow \quad x_k \in X_{i^*},$$

a ukoliko vrednost $i^* = \operatorname*{argmax}_{i \in \{1,\ldots,c\}} u_{ik}$ nije jednoznačno određena, tj. funkcija $\operatorname*{argmax}_{i \in \{1,\ldots,c\}} u_{ik}$ daje za rezultat nekoliko indeksa $i_1^*, i_2^*, \ldots, i_j^*$, tada za i^* možemo uzeti bilo koji, na primer najmanji od njih.

Glava 4

Neke nove funkcije rastojanja

U ovoj glavi je definisan jedan nov način konstrukcije funkcija rastojanja pogodan za neke oblike njihovih primena. Navedeni rezultati, kao i ilustracija primene u FCM algoritmu su objavljeni u [35]. Pomenuti novi način konstrukcije funkcija rastojanja i metrika se zasniva na primeni operatora agregacije na poznate polazne funkcije rastojanja i metrike, što predstavlja jedan način objedinjavanja više polaznih funkcija rastojanja u jednu. Na ovaj način možemo dobiti nove funkcije rastojanja i metrike sa osobinama koje se nasleđuju od polaznih, ili sa novim ili poboljšanim osobinama u odnosu na polazne funkcije. Za neke tipove i primere operatora agregacije je analizirano koja od dole navedenih svojstava polaznih funkcija rastojanja i metrika se očuvavaju ovakvom konstrukcijom. Pri tome, upotrebne vrednosti funkcija rastojanja korišćenih u primeni su npr. brzina njihovog izračunavanja, njihova reprezentativnost u primeni tj. pogodnost za modeliranje pojave u kojoj se primenjuje, razne performanse obradom dobijenih rezultata i slično.

Svaka funkcija rastojanja $d : X^2 \to [0, \infty)$, funkcija sličnosti, metrika itd. može da ima razne dobre ili loše teorijske ili upotrebne osobine. Od teorijskih, to su osobine navedene u definicijama 1.1.1 i 1.1.3, kao i druge osobine. Po svom značaju za primenu u obradi slika i klasifikaciji podataka, kao i u pogledu rezultata istraživanja disertacije se izdvajaju sledeće osobine:

[D1] $\forall x, y \in X,\ \ d(x,y) = d(y,x),$ *(simetričnost)*

[D2] $\forall x \in X,\ \ d(x,x) = 0,$ *(refleksivnost)*

[D3] $\forall x, y \in X,\ \ d(x,y) = 0 \ \Rightarrow\ x = y,$ *(identity of indiscernibles)*

[D5] $\forall x, y, z \in X,\ \ d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z),$ *(nejednakost trougla)*

[D6] $\forall x, y, z \in X,\ \ d(x,z) \leq \max(d(x,y), d(y,z)),$
(ultrametrička nejednakost)

[D7] $\forall x, y \in X,\ \ d(x,y) \leq d(x,x),$

[D8] $\forall x, y \in X,\ \ d(x,x) \leq d(x,y),$

[D9] $\forall x, y \in X,\ \ d(x,y) = d(x,x) \ \Leftrightarrow\ x = y,$

[D13] za neku konstantu $C \in [1,\infty)$ važi

$$\forall x, y, z \in X,\ \ d(x,z) \le C(d(x,y) + d(y,z)), \qquad \textit{(C-nejednakost trougla)}$$

[D26] $\forall x, y \in X,\ \ d(x,y) = 0 \ \Rightarrow\ \forall z \in X,\ d(x,z) = d(y,z).$ *(istovrednost)*

Pri tome za primenu može biti veoma značajno i da li funkcija rastojanja ima ograničene vrednosti na posmatranom skupu X, tj.

[D27] $d : X^2 \to [0,1] \quad \vee \quad \exists a > 0,\ d : X^2 \to [0,a].$ *(ograničenost)*

4.1 Pozitivna linearna kombinacija funkcija rastojanja

U ovoj sekciji je definisan jedan specijalan i jednostavan način objedinjavanja nekoliko funkcija rastojanja u jednu, i ispitana su neka svostva tako dobijene funkcije rastojanja. Definisani pojmovi i dobijeni rezultati su objavljeni u radu [35].

Definicija 4.1.1 *Neka je X proizvoljan skup, i neka su $d_i : X^2 \to [0,\infty)$, $i \in \{1,2,\ldots,n\}$ proizvoljne funkcije*[1]*. Za skalare $\lambda_i > 0$, $i \in \{1,2,\ldots,n\}$ ćemo funkciju $d_{[n]} : X^2 \to [0,\infty)$ definisanu sa*

$$d_{[n]}(x,y) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i d_i(x,y)$$

nazivati ***pozitivna linearna kombinacija*** *funkcija d_i. Ako su još pri tome d_i ograničene funkcije, dakle $d_i : X^2 \to [0,1]$ ili $d_i : X^2 \to [0,a]$ za neko $a > 0$, i ako je pri tome $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$, tada ćemo funkciju $d_{[n]}(x,y) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i d_i(x,y)$ nazivati* ***konveksna kombinacija*** *funkcija d_i.*

Analizirajmo osobine [D1], [D2], [D3], [D5], [D6], [D7], [D8], [D9], [D13], [D26], [D27] koje funkcija $d_{[n]}$ može da ima ako funkcije d_i imaju neke od razmatranih osobina. Funkcije d_i mogu biti funkcije rastojanja ili funkcije nekih od tipova funkcija navedenih u glavi 1, kao što su funkcije sličnosti, metrike i slično. U sledećoj teoremi je pokazano na koji način i pod kojim dodatnim uslovima se navedene osobine prenose sa funkcija d_i na funkciju $d_{[n]}$.

Teorema 4.1.1 *Neka su $d_i : X^2 \to [0,\infty)$, $i \in \{1,\ldots,n\}$ proizvoljne funkcije definisane na nekom prostoru $X \ne \emptyset$, neka su $\lambda_i > 0$, $i \in \{1,\ldots,n\}$ proizvoljni pozitivni realni brojevi, i neka je funkcija $d_{[n]} : X^2 \to [0,\infty)$ pozitivna linearna kombinacija funkcija d_i, odnosno $d_{[n]}(x,y) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i d_i(x,y)$.*

[1] Umesto $d_i : X^2 \to [0,\infty)$ se mogu razmatrati i funkcije sa vrednostima u $[0,\infty]$.

[PLK1] *Ako su sve funkcije d_i ograničene funkcije sa vrednostima u odgovarajućim intervalima $[0, a_i]$ za neke $a_i > 0$, tada je i pozitivna linearna kombinacija $d_{[n]}$ ograničena funkcije sa vrednostima u intervalu $[0, a]$, gde je $a = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i$. Ako su sve d_i ograničene funkcije sa vrednostima u intervalu $[0, 1]$, i ako je pri tome $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$, tada je konveksna kombinacija $d_{[n]}$ takođe ograničena funkcija sa vrednostima u intervalu $[0, 1]$. Dakle, pozitivna linearna kombinacija kao i konveksna kombinacija prenosi svojstvo* [D27] *sa funkcija d_i na funkciju $d_{[n]}$.*

[PLK2] *Ako svaka od funkcija d_i ima osobinu simetričnosti* [D1]*, dakle za svako $i \in \{1, \ldots, n\}$ važi da je*

$$\forall x, y \in X,\ d_i(x, y) = d_i(y, x),$$

tada i pozitivna linearna kombinacija $d_{[n]}$, pa i konveksna, ima osobinu [D1]*, odnosno*

$$\forall x, y \in X,\ d_{[n]}(x, y) = d_{[n]}(y, x).$$

[PLK3] *Ako svaka od funkcija d_i ima osobinu refleksivnosti* [D2] *dakle za svako $i \in \{1, \ldots, n\}$ važi da je*

$$\forall x \in X,\ d_i(x, x) = 0,$$

tada i pozitivna linearna kombinacija $d_{[n]}$ ima osobinu [D2]*, odnosno*

$$\forall x \in X,\ d_{[n]}(x, x) = 0.$$

[PLK4] *Ako bar jedna od funkcija d_i ima osobinu* [D3] *(identity of indiscernibles), tj. ako za neko $i_0 \in \{1, \ldots, n\}$ važi*

$$\forall x, y \in X,\ d_{i_0}(x, y) = 0 \ \Rightarrow\ x = y,$$

tada i pozitivna linearna kombinacija $d_{[n]}$ ima osobinu [D3]*, dakle*

$$\forall x, y \in X,\ d_{[n]}(x, y) = 0 \ \Rightarrow\ x = y.$$

[PLK5] *Ako svaka od funkcija d_i ima osobine* [D2] *i* [D3]*, što je osobina* [D4] *iz sekcije* 1.1*, dakle*

$$\forall x, y \in X,\ \ d_i(x, y) = 0 \ \Leftrightarrow\ x = y$$

za sve $i \in \{1, \ldots, n\}$, tada i pozitivna linearna kombinacija $d_{[n]}$ ima osobine [D2] *i* [D3]*, dakle osobinu* [D4]*, odnosno*

$$\forall x, y \in X,\ \ d_{[n]}(x, y) = 0 \ \Leftrightarrow\ x = y.$$

[PLK6] *Ako svaka od funkcija d_i ima osobinu C-nejednakosti trougla* [D13]*, tj. za svako $i \in \{1, \ldots, n\}$ postoji $C_i \in [1, \infty)$ takvo da*

$$\forall x, y, z \in X,\ \ d_i(x, z) \le C_i(d_i(x, y) + d_i(y, z)),$$

tada i pozitivna linearna kombinacija $d_{[n]}$ ima osobinu C-nejednakosti trougla [D13] *sa odgovarajućom konstantom $C = \max\{C_1, \ldots, C_n\}$, tj. važi*

$$\forall x, y, z \in X,\ \ d_{[n]}(x, z) \le C\big(d_{[n]}(x, y) + d_{[n]}(y, z)\big).$$

[PLK7] *Ako svaka od funkcija d_i zadovoljava nejednakost trougla* [D5]*, tj. za svako $i \in \{1, \ldots, n\}$ je*

$\forall x, y, z \in X, \;\; d_i(x, z) \leq d_i(x, y) + d_i(y, z),$

tada i pozitivna linearna kombinacija $d_{[n]}$ zadovoljava nejednakost trougla [D5]*, tj.*

$\forall x, y, z \in X, \;\; d_{[n]}(x, z) \leq d_{[n]}(x, y) + d_{[n]}(y, z).$

[PLK8] *Ako svaka od funkcija d_i zadovoljava nejednakost sličnosti* [D7]*, tj. za svako $i \in \{1, \ldots, n\}$ je*

$\forall x, y \in X, \;\; d_i(x, y) \leq d_i(x, x),$

tada i pozitivna linearna kombinacija $d_{[n]}$ zadovoljava nejednakost sličnosti [D7]*, tj.*

$\forall x, y \in X, \;\; d_{[n]}(x, y) \leq d_{[n]}(x, x).$

[PLK9] *Ako svaka od funkcija d_i ima osobinu* [D8]*, tj. za svako $i \in \{1, \ldots, n\}$ važi*

$\forall x, y \in X, \;\; d_i(x, x) \leq d_i(x, y),$

tada i pozitivna linearna kombinacija $d_{[n]}$ zadovoljava osobinu [D8]*, tj.*

$\forall x, y \in X, \;\; d_{[n]}(x, x) \leq d_{[n]}(x, y).$

[PLK10] *Ako svaka od funkcija d_i ima osobinu istovrednosti* [D26]*, tj. za svako $i \in \{1, \ldots, n\}$ važi*

$\forall x, y \in X, \;\; d_i(x, y) = 0 \;\; \Rightarrow \;\; \forall z \in X, \; d_i(x, z) = d_i(y, z),$

tada i pozitivna linearna kombinacija $d_{[n]}$ ima osobinu [D26]*, tj.*

$\forall x, y \in X, \;\; d_{[n]}(x, y) = 0 \;\; \Rightarrow \;\; \forall z \in X, \; d_{[n]}(x, z) = d_{[n]}(y, z).$

[PLK11] *Ako je prostor X opremljen topološkom strukturom, i ako je svaka od funkcija d_i, $i \in \{1, \ldots, n\}$ neprekidna na X^2, tada je i pozitivna linearna kombinacija $d_{[n]}$ neprekidna funkcija na X^2.*

Dokaz:

[PLK1] Iz $d_i(x, y) \in [0, a_i]$, $i \in \{1, \ldots, n\}$ i $\lambda_i > 0$, $i \in \{1, \ldots, n\}$ očigledno sledi $d_{[n]}(x, y) \geq 0$, kao i $d_{[n]}(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i d_i(x, y) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i = a$ za pozitivno $a = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i$, dakle $d_{[n]}(x, y) \in [0, a]$ za sve $x, y \in X$. Specijalno, u slučaju $d_i(x, y) \in [0, 1]$, $i \in \{1, \ldots, n\}$ i $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ dobijamo $a = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot 1 = 1$, te je tada $d_{[n]}(x, y) \in [0, 1]$ za sve $x, y \in X$.

[PLK2] $d_{[n]}(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i d_i(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i d_i(y, x) = d_{[n]}(y, x).$

[PLK3] $d_{[n]}(x,x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i d_i(x,x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot 0 = 0.$

[PLK4] Posmatrajmo proizvoljne $x, y \in X$. Zbog $\lambda_i > 0$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, iz $d_{[n]}(x,y) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i d_i(x,y) = 0$ sledi $d_i(x,y) = 0$ za sve $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, pa i za $i = i_0$, a zbog osobine [D3] funkcije d_{i_0} tada dobijamo $x = y$.

[PLK5] Sledi iz [PLK3] i [PLK4].

[PLK6] Neka je

$$\forall x, y, z \in X, \quad d_i(x,z) \leq C_i(d_i(x,y) + d_i(y,z))$$

za svako $i \in \{1, \ldots, n\}$ sa odgovarajućom konstantom $C_i \in [1, \infty)$, i neka je $C = \max\{C_1, \ldots, C_n\}$. Tada za sve $x, y, z \in X$ važi

$$\begin{aligned}
d_{[n]}(x,z) &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i d_i(x,z) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i C_i(d_i(x,y) + d_i(y,z)) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i C_i d_i(x,y) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i C_i d_i(y,z) \\
&\leq C \sum_{i=1}^{n} \lambda_i d_i(x,y) + C \sum_{i=1}^{n} \lambda_i d_i(y,z) \\
&= C\big(d_{[n]}(x,y) + d_{[n]}(y,z)\big).
\end{aligned}$$

[PLK7] Sledi iz [PLK6] sa $C_1 = \cdots = C_n = 1$ i $C = 1$.

[PLK8] Ako je $\forall x, y \in X,\ d_i(x,y) \leq d_i(x,x)$ za sve $i \in \{1, \ldots, n\}$, tada zbog $\lambda_i > 0$, za proizvoljne $x, y \in X$ imamo

$$d_{[n]}(x,y) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i d_i(x,y) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i d_i(x,x) = d_{[n]}(x,x).$$

[PLK9] Ako je $\forall x, y \in X,\ d_i(x,x) \leq d_i(x,y)$ za sve $i \in \{1, \ldots, n\}$, tada zbog $\lambda_i > 0$, za proizvoljne $x, y \in X$ imamo

$$d_{[n]}(x,x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i d_i(x,x) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i d_i(x,y) = d_{[n]}(x,y).$$

[PLK10] Neka za sve $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ i sve $x, y \in X$ važi

$$d_i(x,y) = 0 \ \Rightarrow\ \forall z \in X,\ d_i(x,z) = d_i(y,z).$$

Kako je $\lambda_i > 0$, $i \in \{1, \ldots, n\}$, za proizvoljne $x, y \in X$ dobijamo

$$\begin{aligned}
d(x,y) = 0 \quad &\Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i d_i(x,y) = 0 \\
&\Rightarrow \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\}, \ \ d_i(x,y) = 0
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\}, \; \forall z \in X, \;\; d_i(x,z) = d_i(y,z)$$
$$\Rightarrow \quad \forall z \in X, \;\; \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i d_i(x,z)}_{d_{[n]}(x,z)} = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i d_i(y,z)}_{d_{[n]}(y,z)}$$
$$\Rightarrow \quad \forall z \in X, \;\; d_{[n]}(x,z) = d_{[n]}(y,z).$$

[PLK11] Očigledno, $d_{[n]}$ je kompozicija neprekidnih funkcija. ¶

Na osnovu tvrđenja navedenih u teoremi 4.1.1 možemo zaključiti i sledeće.

Posledica 4.1.1 *Neka su funkcije $d_i : X^2 \to [0, \infty)$, $i \in \{1, \ldots, n\}$ proizvoljne funkcije definisane na skupu $X \neq \emptyset$, i neka je $d_{[n]} : X^2 \to [0, \infty)$ konveksna kombinacija funkcija d_i.*

(a) *Ako su sve funkcije d_i, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ funkcije rastojanja na skupu X, tada je i njihova konveksna kombinacija $d_{[n]}$ takođe funkcija rastojanja na skupu X.*

(b) *Ako su sve funkcije d_i, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ metrike na skupu X, tada je i njihova konveksna kombinacija $d_{[n]}$ takođe metrika na skupu X.*

Dokaz: Tvrđenje (a) sledi iz [PLK2] i [PLK3], a tvrđenje (b) sledi iz [PLK2], [PLK5] i [PLK7]. ¶

Za razliku od osobina navedenih u teoremi 4.1.1, pozitivna linearna kombinacija funkcija $d_i : X^2 \to [0, \infty)$, $i \in \{1, \ldots, n\}$ ne nasleđuje osobinu ultrametričke nejednakosti [D6]

$$\forall x, y, z \in X, \;\; d(x,z) \le \max(d(x,y), d(y,z))$$

funkcija d_i, što pokazuje sledeći primer.

Primer 4.1.1 *Neka je $X = \{a, b, c\}$, i neka su funkcije $d_1 : X^2 \to [0, \infty)$ i $d_2 : X^2 \to [0, \infty)$ definisane sa*

$$d_1(a,a) = d_1(b,b) = d_1(c,c) = 0,$$
$$d_1(a,b) = d_1(b,a) = 1, \quad d_1(a,c) = d_1(c,a) = 2, \quad d_1(b,c) = d_1(c,b) = 2,$$

$$d_2(a,a) = d_2(b,b) = d_2(c,c) = 0,$$
$$d_2(a,b) = d_2(b,a) = 4, \quad d_2(a,c) = d_2(c,a) = 4, \quad d_2(b,c) = d_2(c,b) = 3.$$

Neposrednom proverom se utvrđuje da su d_1 i d_2 funkcije rastojanja, i da obe zadovoljavaju ultrametričku nejednakost, tj.

$$\forall x, y, z \in X, \;\; d_i(x,z) \le \max(d_i(x,y), d_i(y,z)), \qquad i \in \{1, 2\}.$$

Međutim, pozitivna linearna kombinacija $d_{[2]} : X^2 \to [0, \infty)$ funkcija d_1 i d_2 sa $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, dakle funkcija definisana sa

$$d_{[2]}(x,y) = d_1(x,y) + d_2(x,y), \qquad x, y \in X$$

je funkcija rastojanja koja ne zadovoljava ultrametričku nejednakost jer je npr.

$$d_{[2]}\,(a,c) = d_1\,(a,c) + d_2\,(a,c) = 2+4 = 6,$$
$$\max\left\{d_{[2]}\,(a,b), d_{[2]}\,(b,c)\right\} = \max\left\{d_1\,(a,b) + d_2\,(a,b), d_1\,(b,c) + d_2\,(b,c)\right\}$$
$$= \max\{1+4, 2+3\} = 5,$$
dakle $d_{[2]}\,(a,c) > \max\left\{d_{[2]}\,(a,b), d_{[2]}\,(b,c)\right\}$. ☑

Kao što možemo videti u sledećem primeru, ni osobina [D9]

$$\forall x,y \in X,\ \ d\,(x,y) = d\,(x,x) \ \Leftrightarrow\ x = y$$

se ne prenosi sa funkcija $d_i : X^2 \to [0,\infty)$, $i \in \{1,\dots,n\}$ na njihovu pozitivnu linearnu kombinaciju.

Primer 4.1.2 *Neka je* $X = \{a,b,c\}$, *i neka su funkcije* $d_1 : X^2 \to [0,\infty)$ *i* $d_2 : X^2 \to [0,\infty)$ *definisane sa*

$$d_1\,(a,a) = d_1\,(b,b) = d_1\,(c,c) = 2,$$
$$d_1\,(a,b) = d_1\,(b,a) = 3, \quad d_1\,(a,c) = d_1\,(c,a) = 1, \quad d_1\,(b,c) = d_1\,(c,b) = 3,$$

$$d_2\,(a,a) = d_2\,(b,b) = d_2\,(c,c) = 3,$$
$$d_2\,(a,b) = d_2\,(b,a) = 4, \quad d_2\,(a,c) = d_2\,(c,a) = 4, \quad d_2\,(b,c) = d_2\,(c,b) = 1.$$

Neposrednom proverom se utvrđuje da obe funkcije d_1 *i* d_2, *koje nisu funkcije rastojanja, imaju osobinu* [D9], *tj.*

$$\forall x,y \in X,\ \ d_i\,(x,y) = d_i\,(x,x) \ \Leftrightarrow\ x = y, \quad i \in \{1,2\}.$$

Međutim, pozitivna linearna kombinacija $d_{[2]} : X^2 \to [0,\infty)$ *funkcija* d_1 *i* d_2 *sa* $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, *dakle*

$$d_{[2]}\,(x,y) = d_1\,(x,y) + d_2\,(x,y), \quad x,y \in X$$

nema osobinu [D9] *jer je npr.*

$$d_{[2]}\,(a,c) = d_1\,(a,c) + d_2\,(a,c) = 1+4 = 5,$$
$$d_{[2]}\,(c,c) = d_1\,(c,c) + d_2\,(c,c) = 2+3 = 5,$$
dakle za $a \neq c$ *je* $d_{[2]}\,(a,c) = d_{[2]}\,(c,c)$. ☑

Sledeći primer ilustruje konstrukciju nove funkcije rastojanja putem konveksne kombinacije poznatih funkcija rastojanja, sa mogućnošću primene u npr. obradi slika i klasifikaciji podataka.

Primer 4.1.3 *Neka je* S *slika u boji predstavljena u* RGB *tehnici, formata* $m\times n$ *piksela, reprezentovana matricom (*raster*)* $P = [p_{ij}]_{m\times n}$, *gde je* p_{ij} *piksel sa prostornim koordinatama* $(i,j) \in \{\,(v,h) \mid v \in \{1,\dots,m\},\ h \in \{1,\dots,n\}\}$ *(vertikalna pozicija* v *i horizontalna pozicija* h *piksela) i* RGB *komponentama boje* $p_{ij} \in \{\,(r,g,b) \mid r,g,b \in \{0,\dots,255\}\}$ *(crvena* r, *zelena* g *i plava* b *komponenta boje). Piksele slike* S *možemo posmatrati kao uređene petorke*

$$(r,g,b,i,j) \in X = \{0,\dots,255\}^3 \times \{1,\dots,m\} \times \{1,\dots,n\}.$$

Pri određivanju rastojanja tj. mere razlikovanja dva piksela, veću ili manju ulogu mogu imati s jedne strane njihova prostorna udaljenost, a s druge strane njihova *razlika u boji. I za određivanje prostorne udaljenosti, kao i za određivanje razlike u boji možemo koristiti neku od za to uobičajenih funkcija rastojanja i metrika. Na primer, funkcija $d_1 : X^2 \to [0, \infty)$ definisana sa*

$$d_1\left((r_1, g_1, b_1, i_1, j_1), (r_2, g_2, b_2, i_2, j_2)\right) = |r_1 - r_2| + |g_1 - g_2| + |b_1 - b_2|$$

je L_1 metrika prostora RGB *komponenti boja (r_1, g_1, b_1) i (r_2, g_2, b_2) piksela $p_{i_1 j_1} = (r_1, g_1, b_1, i_1, j_1)$ i $p_{i_2 j_2} = (r_2, g_2, b_2, i_2, j_2)$, a funkcija $d_2 : X^2 \to [0, \infty)$ definisana sa*

$$d_2\left((r_1, g_1, b_1, i_1, j_1), (r_2, g_2, b_2, i_2, j_2)\right) = \sqrt{(i_1 - i_2)^2 + (j_1 - j_2)^2}$$

je Euklidsko prostorno rastojanje (L_2 metrika) koordinata (i_1, j_1) i (i_2, j_2) piksela $p_{i_1 j_1} = (r_1, g_1, b_1, i_1, j_1)$ i $p_{i_2 j_2} = (r_2, g_2, b_2, i_2, j_2)$. Međutim, funkcije d_1 i d_2 nisu metrike već samo funkcije rastojanja na skupu X, jer za njih ne važi osobina [D3].

Neka je $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, i neka je funkcija $d_{[2]} : X^2 \to [0, \infty)$ definisana sa

$$d_{[2]}\left(p^{(1)}, p^{(2)}\right) = \lambda_1 d_1\left(p^{(1)}, p^{(2)}\right) + \lambda_2 d_2\left(p^{(1)}, p^{(2)}\right)$$

za svaka dva piksela $p^{(1)} = (r_1, g_1, b_1, i_1, j_1) \in X$ i $p^{(2)} = (r_2, g_2, b_2, i_2, j_2) \in X$. Na osnovu teoreme 4.1.1*, odnosno njene posledice* 4.1.1*, sledi da je funkcija $d_{[2]}$ funkcija rastojanja na skupu X. Pri tome je i metrika na X jer očigledno ima osobinu* [D3]*, i takođe se lako proverava da zadovoljava nejednakost trougla* [D5] *jer nejednakost trougla važi za L_1 metriku prostora $\{0, \ldots, 255\}^3$ komponenti boja, kao i za L_2 metriku prostora $\{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, n\}$ koordinata piksela.*

Pogodnim izborom parametara λ_1 i λ_2 možemo odrediti meru uticaja razlike u boji d_1 i prostornog rastojanja d_2 na ukupnu meru $d_{[2]}$ razlike dva piksela. U zavisnosti od cilja i načina obrade slike S, na ovaj način možemo staviti veći akcenat na prostornu udaljenost ili na razliku u boji. ☑

4.2 Agregirane funkcije rastojanja

U ovom odeljku je, kao uopštenje pozitivne linearne kombinacije funkcija $d_i : X^2 \to [0, \infty)$, $i \in \mathbb{N}$ definisana, i sa stanovišta posmatranih osobina ispitana funkcija konstruisana primenom nekog proizvoljnog operatora agregacije na polazne funkcije $d_i : X^2 \to [0, \infty)$. Dobijeni rezultati su objavljeni u [35].

Razmotrimo prvo pitanje ograničenosti polaznih funkcija. Posmatrajmo niz $\tilde{d}_i : X^2 \to [0, a_i]$, $i \in \mathbb{N}$ ograničenih funkcija na nekom prostoru $X \neq \emptyset$, gde je $a_i > 0$, $i \in \mathbb{N}$, koje mogu biti funkcije rastojanja, metrike, funkcije sličnosti, itd. Funkcije d_i definisane sa $d_i(x, y) = \frac{1}{a_i} \tilde{d}_i(x, y)$, $x, y \in X$ su tada funkcije sa vrednostima u intervalu $[0, 1]$. Pri tome, s obzirom na teoremu 4.1.1, funkcija d_i nasleđuje od funkcije $\tilde{d}_i$ osobine [D1]. [D2], [D3], [D4], [D5], [D7], [D8], [D13] i [D26] definisane u sekciji 1.1. Lako se proverava da funkcija d_i nasleđuje od funkcije $\tilde{d}_i$ i osobine [D6] i [D9], za koje smo u primerima 4.1.1 i 4.1.2 videli da se, u opštem slučaju, ne nasleđuju pozitivnom linearnom kombinacijom. Naime, ako za funkciju $\tilde{d}_i$ važi ultrametrička nejednakost [D6], tada je i

$$\begin{aligned} d_i(x,z) = \frac{1}{a_i}\tilde{d}_i(x,z) &\le \frac{1}{a_i}\max\left(\tilde{d}_i(x,y), \tilde{d}_i(y,z)\right) \\ &= \max\left(\frac{1}{a_i}\tilde{d}_i(x,y), \frac{1}{a_i}\tilde{d}_i(y,z)\right) \\ &= \max\left(d_i(x,y), d_i(y,z)\right) \end{aligned}$$

za sve $x, y, z \in X$, tj. ultrametrička nejednakost [D6] važi i za d_i. Takođe, ako za funkciju $\tilde{d}_i$ važi osobina [D9], tada je i

$$\begin{aligned} d_i(x,y) = d_i(x,x) &\Rightarrow \frac{1}{a_i}\tilde{d}_i(x,y) = \frac{1}{a_i}\tilde{d}_i(x,x) \\ &\Rightarrow \tilde{d}_i(x,y) = \tilde{d}_i(x,x) \\ &\Rightarrow x = y \end{aligned}$$

za sve $x, y \in X$, tj. osobina [D9] važi i za d_i. Dakle, sa stanovišta razmatranih osobina, ispitivanje ograničenih funkcija $\tilde{d}_i$ možemo svesti na ispitivanje funkcija d_i sa vrednostima u intervalu $[0,1]$.

Jedan od načina da polazeći od metrike sa neograničenim vrednostima, a za primenu dobrim ili poželjnim osobinama konstruišemo ograničenu metriku sa tim osobinama je naveden u sledećoj teoremi.

Teorema 4.2.1 *Neka je funkcija* $d : X^2 \to [0,\infty)$ *metrika na skupu* X. *Tada je funkcija* $\overline{d} : X^2 \to [0,1]$ *definisana sa* $\overline{d}(x,y) = \min\{d(x,y), 1\}$, $x, y \in X$ *ograničena metrika na* X, *sa vrednostima u intervalu* $[0,1]$.

Dokaz: Vrednosti funkcije $\overline{d}$ su očigledno u intervalu $[0,1]$. Iz osobina

1. $d(x,x) = 0$,
2. $d(x,y) = 0 \Rightarrow x = y$,
3. $d(x,y) = d(y,x)$,

funkcije d, redom slede odgovarajuće osobine funkcije $\overline{d}$:

1. $\overline{d}(x,x) = \min\{d(x,x), 1\} = \min\{0,1\} = 0$,
2. $\overline{d}(x,y) = \min\{d(x,y), 1\} = 0 \Rightarrow d(x,y) = 0 \Rightarrow x = y$,
3. $\overline{d}(x,y) = \min\{d(x,y), 1\} = \min\{d(y,x), 1\} = \overline{d}(y,x)$.

Dokaz nejednakosti trougla se zasniva na nejednakosti

$$\min\{a+b, 1\} \le \min\{a, 1\} + \min\{b, 1\}$$

koja važi za sve $a, b \in [0,\infty)$. Naime, diskusijom po mogućim slučajevima dobijamo

(a) za $a \ge 1$ je i $a + b \ge 1$, te je

$$\min\{a+b, 1\} = 1 \le 1 + \min\{b, 1\} = \min\{a, 1\} + \min\{b, 1\},$$

(b) za $b \ge 1$ nejednakost važi iz istih razloga,

(c) za $a < 1$, $b < 1$ i $a + b \le 1$ je

$$\min\{a+b, 1\} = a + b = \min\{a, 1\} + \min\{b, 1\},$$

(d) za $a < 1$, $b < 1$ i $a + b > 1$ je

$$\min\{a+b,1\} = 1 < a+b = \min\{a,1\} + \min\{b,1\}.$$

Takođe je funkcija min monotona, odnosno važi

$$a \leq b \;\Rightarrow\; \min\{a,1\} \leq \min\{b,1\}$$

jer diskusijom po mogućim slučajevima dobijamo

(a) za $a \leq b \leq 1$ je

$$\min\{a,1\} = a \leq b = \min\{b,1\},$$

(b) za $a \leq 1 \leq b$ je

$$\min\{a,1\} = a \leq 1 = \min\{b,1\},$$

(c) za $1 \leq a \leq b$ je

$$\min\{a,1\} = 1 = \min\{b,1\}.$$

Sada iz nejednakosti trougla $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ za funkciju d dobijamo nejednakost trougla za funkciju $\overline{d}$:

$$\begin{aligned}\overline{d}(x,z) &= \min\{d(x,z),1\} \leq \min\{d(x,y)+d(y,z),1\} \\ &\leq \min\{d(x,y),1\} + \min\{d(y,z),1\} = \overline{d}(x,y) + \overline{d}(y,z).\end{aligned}$$ ¶

Neka su nadalje $d_i : X^2 \to [0,1]$, $i \in \mathbb{N}$ ograničene funkcije (funkcije rastojanja, sličnosti, metrike i slično) sa vrednostima u intervalu $[0,1]$, i neka su $\lambda_{n,i} > 0$, $n \in \mathbb{N}$, $i \in \{1,\ldots,n\}$ pozitivni realni brojevi takvi da je $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_{n,i} = 1$ za sve $n \in \mathbb{N}$. U sekciji 4.1 smo videli da je pozitivna linearna kombinacija

$$d_{[n]}(x,y) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_{n,i} d_i(x,y), \qquad x,y \in X$$

ograničena funkcija $d_{[n]} : X^2 \to [0,1]$ sa vrednostima u intervalu $[0,1]$, za svako $n \in \mathbb{N}$. U teoremi 4.1.1 i njenoj posledici 4.1.1 smo videli koje od razmatranih osobina se sa funkcija d_i prenose na funkciju $d_{[n]}$. Takođe, u primerima 4.1.1 i 4.1.2 smo videli da se ultrametrička nejednakost [D6], kao i osobina [D9] ne prenose sa funkcija d_i na funkciju $d_{[n]}$.

Neka su i nadalje $\lambda_{n,i} > 0$, $n \in \mathbb{N}$, $i \in \{1,\ldots,n\}$ pozitivni realni brojevi takvi da je $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_{n,i} = 1$ za sve $n \in \mathbb{N}$. Neka je $A_{kk} : \bigcup\limits_{n=2}^{\infty} [0,1]^n \to [0,1]$ funkcija definisana sa

$$A_{kk}(x_1,x_2,\ldots,x_n) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_{n,i} x_i, \qquad n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}, \qquad \forall i,\ x_i \in [0,1].$$

Funkcija A_{kk} je neprekidan operator agregacije. Naime, vrednosti funkcije A_{kk} su očigledno u intervalu $[0,1]$ i važe granični uslovi $A_{kk}(0,0,\ldots,0) = 0$ i $A_{kk}(1,1,\ldots,1) = 1$ zbog $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_{n,i} = 1$. Neprekidna je, i monotono je rastuća po svim komponentama zbog $\lambda_{n,i} > 0$. Pri tome je i idempotentna zbog

$\sum_{i=1}^{n} \lambda_{n,i} = 1$, a u opštem slučaju nije simetrična. Operator agregacije A_{kk} je simetričan samo u specijalnom slučaju $\lambda_{n,i} = \frac{1}{n}$, $i \in \{1, \ldots, n\}$, kada je u pitanju aritmetička sredina ③ iz primera 2.4.1. Operator agregacije A_{kk} je u literaturi na Engleskom jeziku poznat i po nazivima ***weighted arithmetic mean*** i ***weighted average***.

Posmatrajmo sada proizvoljne ograničene funkcije $d_i : X^2 \to [0,1]$, $i \in \mathbb{N}$, i neka je $d : X^2 \times \mathbb{N} \setminus \{1\} \to [0,1]$ funkcija definisana sa

$$d(x, y; n) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_{n,i} d_i(x, y)$$

za sve $x, y \in X$ i sve $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Dakle, to je funkcija dobijena primenom operatora agregacije A_{kk} na ograničene funkcije d_i sa vrednostima u intervalu $[0,1]$. Na osnovu posledice 4.1.1, za funkcije $d_{[n]} : X^2 \to [0,1]$ definisane sa $d_{[n]}(x, y) = d(x, y; n)$, $x, y \in X$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ važi:

- ❑ Ako su sve funkcije d_i, $i \in \mathbb{N}$ funkcije rastojanja na skupu X, tada su i funkcije $d_{[n]}$ takođe funkcija rastojanja na skupu X.
- ❑ Ako su sve funkcije d_i, $i \in \mathbb{N}$ metrike na skupu X, tada su i funkcije $d_{[n]}$ takođe metrike na skupu X.

Razmotrimo sada konstrukciju funkcije $d : X^2 \to [0,1]$ primenom, umesto A_{kk}, nekog drugog operatora agregacije na ograničene funkcije $d_i : X^2 \to [0,1]$, $i \in \mathbb{N}$. Neka su nadalje sve funkcije d_i, $i \in \mathbb{N}$ ograničene funkcije rastojanja na skupu X, tj. svaka od njih je simetrična i refleksivna:

[D1] $\forall x, y \in X, \ \ d_i(x, y) = d(y, x)$,

[D2] $\forall x \in X, \ \ d_i(x, x) = 0$.

Neka je A proizvoljan operator agregacije, i neka je $d : X^2 \times \mathbb{N} \setminus \{1\} \to [0,1]$ funkcija definisana sa

$$d(x, y; n) = A(d_1(x, y), \ldots, d_n(x, y)), \quad x, y \in X, \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}.$$

Označimo sa $d_{[n]}$ ponovo funkcije $d_{[n]} : X^2 \to [0,1]$ definisane sa

$$d_{[n]}(x, y) = d(x, y; n) = A(d_1(x, y), \ldots, d_n(x, y)), \quad x, y \in X,$$

za svako $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$.

Teorema 4.2.2 *Neka su $d_i : X^2 \to [0,1]$, $i \in \mathbb{N}$ proizvoljne funkcije rastojanja, i neka je A proizvoljan operator agregacije. Tada za funkcije $d_{[n]} : X^2 \to [0,1]$, $d_{[n]}(x, y) = A(d_1(x, y), \ldots, d_n(x, y))$, $x, y \in X$, za svako $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ važi sledeće.*

[ADF1] *Funkcija $d_{[n]}$ je funkcija rastojanja.*

[ADF2] *Ako za sve funkcije rastojanja d_i, $i \in \mathbb{N}$ važi osobina* identity of indiscernibles [D3], *dakle*

$\forall i \in \mathbb{N},\ \forall x, y \in X, \quad d_i(x, y) = 0 \ \Rightarrow\ x = y,$

i ako operator agregacije A ima svojstvo da za sve $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ i sve $a_i \in [0,1]$, $i \in \mathbb{N}$ važi implikacija

$A(a_1, \ldots, a_n) = 0 \ \Rightarrow\ \exists i \in \{1, \ldots, n\},\ a_i = 0,$

tada funkcija $d_{[n]}$ takođe ima osobinu [D3].

[ADF3] *Ukoliko bar jedna od funkcija rastojanja d_i, $i \in \{1, \ldots, n\}$ ima osobinu* identity of indiscernibles [D3], *dakle*

$\exists i \in \{1, \ldots, n\},\ \forall x, y \in X, \quad d_i(x, y) = 0 \ \Rightarrow\ x = y,$

i ako operator agregacije A ima svojstvo da za sve $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ i sve $a_i \in [0,1]$, $i \in \mathbb{N}$ važi

$A(a_1, \ldots, a_n) = 0 \ \Rightarrow\ \forall i \in \{1, \ldots, n\},\ a_i = 0,$

tada funkcija $d_{[n]}$ takođe ima osobinu identity of indiscernibles [D3].

[ADF4] *Neka su sve funkcije d_i, $i \in \mathbb{N}$ metrike. Neka je $A : \bigcup\limits_{n=2}^{\infty} [0, \infty)^n \to [0, \infty)$ subaditivna funkcija čija je restrikcija na skup $\bigcup\limits_{n=2}^{\infty} [0,1]^n$ operator agregacije, dakle za sve $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ i sve $a_i, b_i \in [0,1]$, $i \in \mathbb{N}$ je*

$$A(a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n) \le A(a_1, \ldots, a_n) + A(b_1, \ldots, b_n),$$

i neka operator agregacije A ima svojstvo da za sve $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ i sve $a_i \in [0,1]$, $i \in \mathbb{N}$ važi implikacija

$A(a_1, \ldots, a_n) = 0 \ \Rightarrow\ \exists i \in \{1, \ldots, n\},\ a_i = 0.$

Tada je takođe i svaka funkcija $d_{[n]}$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ metrika.

[ADF5] *Neka za sve funkcije d_i, $i \in \mathbb{N}$ važi C-nejednakost trougla* [D13] *sa odgovarajućom konstantom C_i. Neka je $A : \bigcup\limits_{n=2}^{\infty} [0, \infty)^n \to [0, \infty)$ funkcija čija je restrikcija na skup $\bigcup\limits_{n=2}^{\infty} [0,1]^n$ operator agregacije sa svojstvima*

$$A(a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n) \le A(a_1, \ldots, a_n) + A(b_1, \ldots, b_n), \qquad \text{❶},$$

$$A(ta_1, \ldots, ta_n) \le tA(a_1, \ldots, a_n), \qquad \text{❷},$$

za sve $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, sve $a_i, b_i \in [0,1]$, $i \in \mathbb{N}$ i sve $t \ge 0$.

Tada za svaku od funkcija $d_{[n]}$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ važi C-nejednakost trougla [D13], *sa odgovarajućom konstantom $C_{[n]} = \max\{C_1, \ldots, C_n\}$.*

[ADF6] *Neka je A neprekidan operator agregacije. Ako je prostor X opremljen topološkom strukturom, i ako je pri tome svaka od funkcija rastojanja d_i, $i \in \{1, \ldots, n\}$ neprekidna na X^2, tada je i funkcija rastojanja $d_{[n]}$ neprekidna na X^2.*

Dokaz:

[ADF1] Iz osobina

1. $\forall i \in \mathbb{N},\ d_i(x,y) = d_i(y,x),\ \ x,y \in X,$
2. $\forall i \in \mathbb{N},\ d_i(x,x) = 0,\ \ x \in X,$

funkcija d_i, slede odgovarajuće osobine funkcija $d_{[n]}$:

1. za sve $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ i sve $x, y \in X$ je
$$\begin{aligned} d_{[n]}(x,y) &= A(d_1(x,y), \ldots, d_n(x,y)) \\ &= A(d_1(y,x), \ldots, d_n(y,x)) \\ &= d_{[n]}(y,x), \end{aligned}$$
2. za sve $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ i sve $x \in X$ je
$$\begin{aligned} d_{[n]}(x,x) &= A(d_1(x,x), \ldots, d_n(x,x)) \\ &= A(0, \ldots, 0) = 0. \end{aligned}$$

[ADF2] Iz $d_{[n]}(x,y) = A(d_1(x,y), \ldots, d_n(x,y)) = 0$ i pretpostavke o operatoru agregacije A sledi da je $d_{i_0}(x,y) = 0$ za neko $i_0 \in \{1, \ldots, n\}$, a tada iz svojstva [D3] funkcije d_{i_0} sledi $x = y$.

[ADF3] Neka je za $i_0 \in \{1, \ldots, n\}$ funkcija d_{i_0} ona koja ima svojstvo [D3]. Tada iz $d_{[n]}(x,y) = A(d_1(x,y), \ldots, d_n(x,y)) = 0$ i pretpostavke o operatoru agregacije A sledi da je $d_i(x,y) = 0$ za sve $i \in \{1, \ldots, n\}$, pa i za $i = i_0$, a tada iz osobine [D3] funkcije d_{i_0} sledi $x = y$.

[ADF4] Osobine

[m_1] $d_{[n]}(x,y) = d_{[n]}(y,x),\ \ x,y \in X,$

[m_2] $d_{[n]}(x,x) = 0,\ \ x \in X,$

funkcija $d_{[n]}$ slede iz tvrđenja [ADF1], a iz [ADF2] sledi osobina

[m_3] $d_{[n]}(x,y) = 0 \ \Rightarrow\ x = y,\ \ x,y \in X.$

Preostaje da se dokaže da za funkcije $d_{[n]}$ važi nejednakost trougla za proizvoljne $x, y, z \in X$.

[m_4]
$$\begin{aligned} d_{[n]}(x,z) &= A(d_1(x,z), \ldots, d_n(x,z)) \\ &\overset{[1]}{\leq} A(d_1(x,y) + d_1(y,z), \ldots, d_n(x,y) + d_n(y,z)) \\ &\overset{[2]}{\leq} A(d_1(x,y), \ldots, d_n(x,y)) + A(d_1(y,z), \ldots, d_n(y,z)) \\ &= d_{[n]}(x,y) + d_{[n]}(y,z), \end{aligned}$$

koristeći

[1] - svaka od funkcija d_i zadovoljava nejednakost trougla, a operator agregacije je monotono neopadajući po svakoj svojoj komponenti,

[2] - operator agregacije A je subaditivan.

[ADF5] Neka za svaku od funkcija d_i, $i \in \mathbb{N}$ važi C-nejednakost trougla [D13] sa konstantom $C_i \in [1, \infty)$, dakle za sve $i \in \mathbb{N}$ je

$$\forall x, y, z \in X, \quad d_i(x, z) \leq C_i(d_i(x, y) + d_i(y, z)).$$

Neka je $C_{[n]} = \max\{C_1, \ldots, C_n\}$. Sledi

$$\begin{aligned}
d_{[n]}(x, z) &= A(d_1(x, z), \ldots, d_n(x, z)) \\
&\overset{[1]}{\leq} A(C_1(d_1(x, y) + d_1(y, z)), \ldots, C_n(d_n(x, y) + d_n(y, z))) \\
&= A(C_1 d_1(x, y) + C_1 d_1(y, z), \ldots, C_n d_n(x, y) + C_n d_n(y, z)) \\
&\overset{❶}{\leq} A(C_1 d_1(x, y), \ldots, C_n d_n(x, y)) + A(C_1 d_1(y, z), \ldots, C_n d_n(y, z)) \\
&\overset{[2]}{\leq} A\big(C_{[n]} d_1(x, y), \ldots, C_{[n]} d_n(x, y)\big) + A\big(C_{[n]} d_1(y, z), \ldots, C_{[n]} d_n(y, z)\big) \\
&\overset{❷}{\leq} C_{[n]} A(d_1(x, y), \ldots, d_n(x, y)) + C_{[n]} A(d_1(y, z), \ldots, d_n(y, z)) \\
&= C_{[n]} d_{[n]}(x, y) + C_{[n]} d_{[n]}(y, z) \\
&= C_{[n]}\big(d_{[n]}(x, y) + d_{[n]}(y, z)\big),
\end{aligned}$$

koristeći

[1] - za svaku od funkcija d_i važi C-nejednakost trougla sa koeficijentom C_i, a operator agregacije je monotono neopadajući po svakoj svojoj komponenti,

[2] - jer je $C_{[n]} = \max\{C_1, \ldots, C_n\}$, a operator agregacije je monotono neopadajući po svakoj svojoj komponenti,

dok su ❶ i ❷ svojstva operatora agregacije A navedena u formulaciji tvrđenja [ADF5] na strani 86.

Dakle, za svaku od funkcija $d_{[n]}$ važi C-nejednakost trougla [D13] sa koeficijentom $C_{[n]} = \max\{C_1, \ldots, C_n\}$.

[ADF6] Očigledno, jer je $d_{[n]}$ kompozicija neprekidnih funkcija. ¶

Napomena 4.2.1 *Svojstva operatora agregacije A*

$$A(a_1, \ldots, a_n) = 0 \;\Rightarrow\; \exists i \in \{1, \ldots, n\},\ a_i = 0,$$
$$A(a_1, \ldots, a_n) = 0 \;\Rightarrow\; \forall i \in \{1, \ldots, n\},\ a_i = 0,$$
$$A(a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n) \leq A(a_1, \ldots, a_n) + A(b_1, \ldots, b_n),$$
$$A(ta_1, \ldots, ta_n) \leq tA(a_1, \ldots, a_n),$$

navedena kao uslovi u tvrđenjima [ADF2], [ADF3], [ADF5] *i* [ADF4] *teoreme* 4.2.2*, zadovoljena su za mnoge operatore agregacije.*

Sledeći primer pokazuje da ako su funkcije d_i, $i \in \mathbb{N}$ metrike, a pri tome operator agregacije A nije subaditivan, funkcije

$$d_{[n]}(x, y) = A(d_1(x, y), \ldots, d_n(x, y)), \quad x, y \in X$$

ne moraju biti metrike jer za njih ne mora biti zadovoljena nejednakost trougla [D5].

Primer 4.2.1 *Neka je funkcija* $A : \bigcup_{n=2}^{\infty} [0,1]^n \to [0,1]$ *definisana sa*

$$A(a_1, \ldots, a_n) = \begin{cases} 0 & , \quad a_1 + \cdots + a_n < n-1 \\ a_1 + \cdots + a_n - n + 1 & , \quad a_1 + \cdots + a_n \geq n-1 \end{cases}.$$

Funkcija A *je operator agregacije jer su aksiome* [Ag1] *i* [Ag2] *očigledno zadovoljene. Neprekidan je i simetričan (važi* [Ag3] *i* [Ag4]*), ali nije idempotentan (ne važi* [Ag5]*). Pri tome, ovaj operator agregacije nije subaditivan jer npr. za* $(a_1, a_2) = (0.1, 0.7)$ *i* $(b_1, b_2) = (0.6, 0.2)$ *dobijamo da je*

$$A(a_1 + b_1, a_2 + b_2) = A(0.7, 0.9) = 0.6 > A(a_1, a_2) + A(b_1, b_2) = 0 + 0 = 0.$$

Polazeći od L_1 *i* L_2 *metrika na prostoru* $\mathbb{R}^2$*, primenom teoreme* 4.2.1 *dobijamo da su funkcije* $d_1 : \mathbb{R}^2 \to [0,1]$ *i* $d_2 : \mathbb{R}^2 \to [0,1]$ *definisane sa*

$$d_1((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \min\{|x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|, 1\},$$

$$d_2((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \min\left\{\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}, 1\right\},$$

za sve $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$*, ograničene metrike na* $\mathbb{R}^2$ *sa vrednostima u* $[0,1]$*.*

Posmatrajmo sada funkciju $d_{[2]} : \mathbb{R}^2 \to [0,1]$ *definisanu sa*

$$d_{[2]}(x, y) = A(d_1(x, y), d_2(x, y)), \quad x, y \in \mathbb{R}^2.$$

Za funkciju $d_{[2]}$ *ne važi nejednakost trougla, dakle* $d_{[2]}$ *nije metrika, jer npr. za* $x = (0, 0.1)$*,* $y = (0.2, 0.3)$ *i* $z = (0.8, 0.8)$ *dobijamo da je*

$$\begin{aligned} d_{[2]}(x, z) &= A(d_1(x, z), d_2(x, z)) = A(1, 1) = 1 \\ &> d_{[2]}(x, y) + d_{[2]}(y, z) \\ &= A(d_1(x, y), d_2(x, y)) + A(d_1(y, z), d_2(y, z)) \\ &\approx A(0.4, 0.2828) + A(1, 0.7810) = 0 + 0.7810 \\ &= 0.7810. \end{aligned}$$

Primetimo da navedeni operator agregacije A *nema ni osobinu*

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}, \ \forall a_i \in [0,1], \ \forall t \geq 0, \quad A(ta_1, \ldots, ta_n) \leq tA(a_1, \ldots, a_n), \qquad ❷,$$

jer npr. za $n = 2$*,* $(a_1, a_2) = (0.3, 0.4)$ *i* $t = 2$ *dobijamo*

$$A(ta_1, ta_2) = A(0.6, 0.8) = 0.4 > tA(a_1, a_2) = 2A(0.3, 0.4) = 2 \cdot 0 = 0. \qquad ☑$$

Dakle, ako su funkcije d_i metrike, a pri tome operator agregacije A nije subaditivan, funkcije $d_{[n]}$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ ne moraju biti metrike, tj. za njih ne mora biti zadovoljena nejednakost trougla [D5].

Razmotrimo sada koje od osobina

❶ $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}, \ \forall a_i, b_i \in [0,1], \ i \in \mathbb{N},$
$A(a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n) \leq A(a_1, \ldots, a_n) + A(b_1, \ldots, b_n),$

❷ $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}, \ \forall a_i \in [0,1], \ i \in \mathbb{N}, \ \forall t \geq 0,$
$A(ta_1, \ldots, ta_n) \leq tA(a_1, \ldots, a_n),$

❸ $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}, \ \forall a_i \in [0,1], \ i \in \mathbb{N},$
$A(a_1, \ldots, a_n) = 0 \ \Rightarrow \ \forall i \in \{1, \ldots, n\}, \ a_i = 0,$

❹ $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}, \ \forall a_i \in [0,1], \ i \in \mathbb{N},$

$A(a_1, \ldots, a_n) = 0 \quad \Rightarrow \quad \exists i \in \{1, \ldots, n\}, \ a_i = 0,$

imaju neki operatori agregacije iz sekcije 2.4.1, ako ih posmatramo kao restrikcije funkcija $A : \bigcup\limits_{n=2}^{\infty} [0, \infty)^n \to [0, \infty)$ na skup $\bigcup\limits_{n=2}^{\infty} [0,1]^n$.

[AE1] Posmatrajmo neprekidni agregacioni operator

$A(a_1, \ldots, a_n) = \min(a_1, \ldots, a_n).$

❶ NE, jer npr. za $(a_1, a_2) = (0.01, 0.30)$ i $(b_1, b_2) = (0.40, 0.02)$ imamo

$$\begin{aligned} \min(a_1 + b_1, a_2 + b_2) &= \min(0.41, 0.32) = 0.32 \\ &> \min(a_1, a_2) + \min(b_1, b_2) \\ &= 0.01 + 0.02 = 0.03. \end{aligned}$$

❷ DA:

Neka je $t \geq 0$ i $\min(a_1, \ldots, a_n) = a_p$ za neko $p \in \{1, \ldots, n\}$. Tada je $0 \leq a_p \leq a_i$, $i \in \{1, \ldots, n\}$ i $0 \leq ta_p \leq ta_i$, $i \in \{1, \ldots, n\}$, te sledi $\min(ta_1, \ldots, ta_n) = ta_p = t\min(a_1, \ldots, a_n)$.

❸ NE, očigledno, jer je npr. $\min(0, 0.6) = 0$.

❹ DA, očigledno, jer je $0 \leq a_i$, $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Dakle, agregacioni operator min može u teoremi 4.2.2 da se primeni u tvrđenjima [ADF1], [ADF2] i [ADF6], a ne može u tvrđenjima [ADF3], [ADF4] i [ADF5].

[AE2] Posmatrajmo neprekidni agregacioni operator

$A(a_1, \ldots, a_n) = \max(a_1, \ldots, a_n).$

❶ DA:

Neka je $\max(a_1, \ldots, a_n) = a_p$ za neko $p \in \{1, \ldots, n\}$, i neka je $\max(b_1, \ldots, b_n) = b_q$ za neko $q \in \{1, \ldots, n\}$. Tada dobijamo

$$\begin{aligned} & \forall i \in \{1, \ldots, n\}, \quad a_i \leq a_p \ \wedge \ b_i \leq b_q \\ \Rightarrow \quad & \forall i \in \{1, \ldots, n\}, \quad a_i + b_i \leq a_p + b_q \\ \Rightarrow \quad & \max(a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n) \leq a_p + b_q \\ & \qquad = \max(a_1, \ldots, a_n) + \max(b_1, \ldots, b_n). \end{aligned}$$

❷ DA, sa istom argumentacijom kao za ❷ u [AE1].

❸ DA, za $a_i \in [0,1]$ je očigledno

$\max(a_1, \ldots, a_n) = 0 \quad \Rightarrow \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\}, \ a_i = 0.$

❹ DA, sledi iz ❸.

Dakle, agregacioni operator max može u teoremi 4.2.2 da se primeni u svim navedenim tvrđenjima.

[AE3] Posmatrajmo neprekidni agregacioni operator (geometrijska sredina)

$A(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n)^{\frac{1}{n}}.$

❶ NE, npr. za $n = 2$, $(a_1, a_2) = (0.1, 0.2)$ i $(b_1, b_2) = (0.8, 0.1)$ je

$$\begin{aligned} A(a_1 + b_1, a_2 + b_2) &= A(0.9, 0.3) = \sqrt{0.9 \cdot 0.3} \approx 0.5196 \\ &> A(a_1, a_2) + A(b_1, b_2) \\ &= \sqrt{0.1 \cdot 0.2} + \sqrt{0.8 \cdot 0.1} \\ &\approx 0.1414 + 0.2828 = 0.4243. \end{aligned}$$

❷ DA:

$$\begin{aligned} A(ta_1, \ldots, ta_n) &= ((ta_1) \cdot \cdots \cdot (ta_n))^{\frac{1}{n}} \\ &= (t^n a_1 \cdot \cdots \cdot a_n)^{\frac{1}{n}} = t(a_1 \cdot \cdots \cdot a_n)^{\frac{1}{n}} \\ &= tA(a_1, \ldots, a_n). \end{aligned}$$

❸ NE, npr. za $n = 2$ i $(a_1, a_2) = (0.4, 0)$ je $(a_1 \cdot a_2)^{\frac{1}{2}} = 0$ i $a_1 \neq 0$.

❹ DA, očigledno je

$$(a_1 \cdot \cdots \cdot a_n)^{\frac{1}{n}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \exists i \in \{1, \ldots, n\}\,,\ a_i = 0.$$

Dakle, agregacioni operator *geometrijska sredina* može u teoremi 4.2.2 da se primeni u tvrđenjima [ADF1], [ADF2] i [ADF6], a ne može da se primeni u [ADF3], [ADF4] i [ADF5].

[AE4] Posmatrajmo neprekidni agregacioni operator (uopštene sredine)

$$A(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \left(\frac{a_1^\alpha + a_2^\alpha + \cdots + a_n^\alpha}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

za $\alpha \geq 1$.

❶ DA, za $\alpha \geq 1$, sve $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ i sve $a_i, b_i \in [0, 1]$, $i \in \mathbb{N}$ je

$$\begin{aligned} & A(a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n) \leq A(a_1, \ldots, a_n) + A(b_1, \ldots, b_n) \\ \Leftrightarrow\ & \left(\frac{(a_1 + b_1)^\alpha + \cdots + (a_n + b_n)^\alpha}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \leq \\ & \qquad \leq \left(\frac{a_1^\alpha + \cdots + a_n^\alpha}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}} + \left(\frac{b_1^\alpha + \cdots + b_n^\alpha}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \\ \Leftrightarrow\ & ((a_1 + b_1)^\alpha + \cdots + (a_n + b_n)^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} \leq \\ & \qquad \leq (a_1^\alpha + \cdots + a_n^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} + (b_1^\alpha + \cdots + b_n^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}, \end{aligned}$$

a poslednje je dobro poznata nejednakost Minkovskog, odnosno nejednakost trougla L_p, $p \geq 1$ normi u vektorskom prostoru $\mathbb{R}^n$.

❷ DA:

$$\begin{aligned} A(ta_1, \ldots, ta_n) &= \left(\frac{(ta_1)^\alpha + \cdots + (ta_n)^\alpha}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \\ &= \left(\frac{t^\alpha(a_1^\alpha + \cdots + a_n^\alpha)}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \\ &= tA(a_1, \ldots, a_n). \end{aligned}$$

❸ DA:

$$\left(\frac{a_1^\alpha + \cdots + a_n^\alpha}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}} = 0 \quad \Rightarrow \quad a_1^\alpha + \cdots + a_n^\alpha = 0$$

$$\Rightarrow \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\}, \; a_i = 0.$$

❹ DA, sledi iz ❸.

Dakle, agregacioni operator *uopštena sredina* za $\alpha \geq 1$ može u teoremi 4.2.2 da se primeni u svim navedenim tvrđenjima.

Specijalno za $\alpha = 1$ je A operator *aritmetička sredina* koji, kao što smo ranije videli, primenjen na funkcije rastojanja i metrike daje njihovu specijalnu konveksnu kombinaciju sa jednakim koeficijentima.

[AE5] Razmotrimo neprekidni agregacion operator (uopštene sredine)

$$A(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \left(\frac{a_1^\alpha + a_2^\alpha + \cdots + a_n^\alpha}{n} \right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

za $\alpha \in (0, 1)$.

❶ NE, npr. za $\alpha = 0.8$, $n = 2$, $(a_1, a_2) = (0.1, 0.2)$ i $(b_1, b_2) = (0.8, 0.1)$ dobijamo

$$\begin{aligned} A(a_1 + b_1, a_2 + b_2) &= A(0.9, 0.3) \approx 0.5841 \\ &> A(a_1, a_2) + A(b_1, b_2) \\ &\approx 0.1482 + 0.4178 = 0.5660. \end{aligned}$$

Osobine ❷, ❸ i ❹ važe iz istih razloga kao u [AE4]. Dakle, agregacioni operator *uopštena sredina* za $\alpha \in (0, 1)$ može u teoremi 4.2.2 da se primeni u tvrđenjima [ADF1], [ADF2], [ADF3] i [ADF6], a ne može da se primeni u [ADF4] i [ADF5].

[AE6] Razmotrimo neprekidni agregacioni operator (uopštene sredine)

$$A(a_1, \ldots, a_n) = \begin{cases} \left(\dfrac{a_1^\alpha + \cdots + a_n^\alpha}{n} \right)^{\frac{1}{\alpha}} & , \; \forall i \in \{1, \ldots, n\}, \; a_i > 0 \\ \quad 0 & , \; \exists i \in \{1, \ldots, n\}, \; a_i = 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{n^{\frac{1}{-\alpha}}}{\left(\dfrac{1}{a_1^{\frac{1}{-\alpha}}} + \cdots + \dfrac{1}{a_n^{\frac{1}{-\alpha}}} \right)^{\frac{1}{-\alpha}}} & , \; \forall i \in \{1, \ldots, n\}, \; a_i > 0 \\ \quad 0 & , \; \exists i \in \{1, \ldots, n\}, \; a_i = 0 \end{cases}$$

za $\alpha < 0$.

❶ NE, npr. za $\alpha = -2$, $n = 2$, $(a_1, a_2) = (0.1, 0.2)$ i $(b_1, b_2) = (0.8, 0.1)$ dobijamo

$$\begin{aligned} A(a_1 + b_1, a_2 + b_2) &= A(0.9, 0.3) \approx 0.4025 \\ &> A(a_1, a_2) + A(b_1, b_2) \\ &\approx 0.1265 + 0.1403 = 0.2668. \end{aligned}$$

Sa istim vrednostima $(a_1, a_2) = (0.1, 0.2)$ i $(b_1, b_2) = (0.8, 0.1)$ se dobija da je $A(a_1 + b_1, a_2 + b_2) > A(a_1, a_2) + A(b_1, b_2)$ i za $\alpha = -\dfrac{1}{2}$, $\alpha = -1$ itd.

❷ DA, jer u slučaju kada je $t > 0$ i $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$, $a_i > 0$ jednakost $A(ta_1, \ldots, ta_n) = tA(a_1, \ldots, a_n)$ važi iz istih razloga kao u [AE4], a za $t = 0$ ili $\exists i \in \{1, \ldots, n\}$, $a_i = 0$ je
$A(ta_1, \ldots, ta_n) = tA(a_1, \ldots, a_n) = 0.$

Osobine ❸ i ❹ očigledno važe zbog definicije funkcije A. Dakle, isto kao i za $\alpha \in (0, 1)$, agregacioni operator *uopštena sredina* za $\alpha < 0$ može u teoremi 4.2.2 da se primeni u tvrđenjima [ADF1], [ADF2], [ADF3] i [ADF6], a ne može da se primeni u [ADF4] i [ADF5]. Za $\alpha = -1$ je A operator *harmonijska sredina*.

U sledećoj tabeli su sumarno prikazani rezultati ispitivanja osobina ❶, ❷, ❸ i ❹ razmatranih operatora [AE1], [AE2], [AE3], [AE4], [AE5], [AE6].

	❶	❷	❸	❹
[AE1]	NE	DA	NE	DA
[AE2]	DA	DA	DA	DA
[AE3]	NE	DA	NE	DA
[AE4]	DA	DA	DA	DA
[AE5]	NE	DA	DA	DA
[AE6]	NE	DA	DA	DA

Razmotrimo sada konstrukciju novih funkcija rastojanja, primenom operatora agregacije na polazne funkcije rastojanja, na Dekartovom proizvodu prostora na kojima su definisane funkcije rastojanja. Neka su $d_i : X_i^2 \to [0, 1]$, $i \in \mathbb{N}$ proizvoljne ograničene funkcije, koje mogu biti funkcije rastojanja ili funkcije nekog sličnog tipa, i neka je

$$X_{[n]} = X_1 \times \cdots \times X_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Neka je A proizvoljan operator agregacije, ili funkcija $A : \bigcup_{n=2}^{\infty} [0, \infty)^n \to [0, \infty)$ čija je restrikcija na skup $\bigcup_{n=2}^{\infty} [0, 1]^n$ operator agregacije. Za $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ posmatrajmo ograničene funkcije $d_{[n]} : X_{[n]}^2 \to [0, 1]$ dobijene primenom operatora agregacije A na ograničene funkcije $d_i : X_i^2 \to [0, 1]$, $i \in \mathbb{N}$, tj. funkcije definisane sa

$$d_{[n]}(x, y) = A(d_1(x_1, y_1), \ldots, d_n(x_n, y_n))$$

za proizvoljne $x = (x_1, \ldots, x_n) \in X_{[n]}$ i $y = (y_1, \ldots, y_n) \in X_{[n]}$, odnosno proizvoljne $x_i, y_i \in X_i$, $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Za ovako konstruisane funkcije $d_{[n]}$ dobijamo analogne, ne i potpuno iste osobine kao za funkcije $d_{[n]}$ u teoremi 4.2.2. Naime, tvrđenja [ADF2] i [ADF3] ne važe, već osobinu *identity of indiscernibles* [D3] funkcija $d_{[n]}$ sada ima samo pod objedinjenim uslovima iz tvrđenja [ADF2] i [ADF3], te je i $d_{[n]}$ metrika samo pod jačim uslovom

$$A(a_1,\ldots,a_n)=0 \;\;\Rightarrow\;\; \forall i\in\{1,\ldots,n\},\; a_i=0$$

za operator agregacije A. Preciznije, važi sledeća teorema. Dokaz ove teoreme je analogan dokazu teoreme 4.2.2.

Teorema 4.2.3 *Neka su* $d_i : X_i^2 \to [0,1]$, $i\in\mathbb{N}$ *proizvoljne ograničene funkcije rastojanja na odgovarajućim skupovima* $X_i \neq \emptyset$, *neka je* $X_{[n]} = X_1\times\cdots\times X_n$, *i neka je* A *proizvoljan operator agregacije ili funkcija* $A : \bigcup_{n=2}^{\infty}[0,\infty)^n \to [0,\infty)$ *čija je restrikcija na skup* $\bigcup_{n=2}^{\infty}[0,1]^n$ *operator agregacije. Tada za sve funkcije* $d_{[n]} : X_{[n]}^2 \to [0,1]$, $n\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$ *definisane sa*

$$d_{[n]}(x,y) = A(d_1(x_1,y_1),\ldots,d_n(x_n,y_n))$$

za sve $x=(x_1,\ldots,x_n)\in X_{[n]}$ *i* $y=(y_1,\ldots,y_n)\in X_{[n]}$, *odnosno sve* $x_i,y_i\in X_i$, $i\in\{1,\ldots,n\}$, *važi sledeće.*

[ADFX1] *Funkcija* $d_{[n]}$ *je ograničena funkcija rastojanja.*

[ADFX2] *Ukoliko za sve funkcije rastojanja* d_i, $i\in\mathbb{N}$ *važi osobina* identity of indiscernibles [D3]*:*

$$\forall i\in\mathbb{N},\ \forall x,y\in X_i,\quad d_i(x,y)=0 \;\Rightarrow\; x=y,$$

i ako operator agregacije A *ima svojstvo da za sve* $n\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$ *važi*

$$A(a_1,\ldots,a_n)=0 \;\Leftrightarrow\; \forall i\in\{1,\ldots,n\},\; a_i=0,$$

tada za $d_{[n]}$ *važi* identity of indiscernibles [D3].

[ADFX3] *Neka su sve funkcije* d_i, $i\in\mathbb{N}$ *metrike. Neka je* $A : \bigcup_{n=2}^{\infty}[0,\infty)^n \to [0,\infty)^n$ *subaditivna funkcija čija je restrikcija na skup* $\bigcup_{n=2}^{\infty}[0,1]^n$ *operator agregacije, dakle za sve* $n\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$ *i sve* $a_i,b_i\in[0,1]$, $i\in\mathbb{N}$ *je*

$$A(a_1+b_1,\ldots,a_n+b_n) \le A(a_1,\ldots,a_n)+A(b_1,\ldots,b_n),$$

i neka operator agregacije A *ima svojstvo da za sve* $n\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$ *i sve* $a_i\in[0,1]$, $i\in\mathbb{N}$ *važi*

$$A(a_1,\ldots,a_n)=0 \;\Leftrightarrow\; \forall i\in\{1,\ldots,n\},\; a_i=0.$$

Tada je takođe i svaka funkcija $d_{[n]}$, $n\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$ *metrika.*

[ADFX4] *Neka za sve funkcije* d_i, $i\in\mathbb{N}$ *važi C-nejednakost trougla* [D13] *sa odgovarajućim konstantama* C_i. *Neka je* A *funkcija sa svojstvima*

$$A(a_1+b_1,\ldots,a_n+b_n) \le A(a_1,\ldots,a_n)+A(b_1,\ldots,b_n), \qquad ❶,$$

$$A(ta_1,\ldots,ta_n) \le tA(a_1,\ldots,a_n), \qquad ❷,$$

za sve $n\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$, *sve* $a_i,b_i\in[0,1]$, $i\in\mathbb{N}$, *i sve* $t\ge 0$. *Tada za svaku od funkcija* $d_{[n]}$ *važi C-nejednakost trougla* [D13] *sa njoj odgovarajućom konstantom* $C_{[n]} = \max\{C_1,\ldots,C_n\}$.

[ADFX5] *Neka je A neprekidan operator agregacije. Ako je svaki od prostora X_i, $i \in \{1, \ldots, n\}$ opremljen topološkom strukturom, i ako je pri tome svaka od funkcija rastojanja d_i, $i \in \{1, \ldots, n\}$ neprekidna na skupu X_i^2, tada je i funkcija rastojanja $d_{[n]}$ neprekidna na topološkom proizvodu $X_{[n]}^2$.*

Primer 4.1.3 upravo ilustruje ovakvu konstrukciju funkcije d odnosno $d_{[n]}$, gde bismo ga prilagodili razmatranoj konstrukciji uzimajući

$$X_1 = [0, 255]^3, \quad X_2 = \{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, n\}, \quad X = X_1 \times X_2,$$

a funkcije $d_1 : X_1^2 \to [0, 1]$ i $d_2 : X_2^2 \to [0, 1]$ su definisane sa

$$d_1\left((r_1, g_1, b_1), (r_2, g_2, b_2)\right) = \frac{1}{3 \cdot 255}\left(|r_1 - r_2| + |g_1 - g_2| + |b_1 - b_2|\right),$$

$$d_2\left((i_1, j_1), (i_2, j_2)\right) = \frac{1}{\sqrt{(m-1)^2 + (n-1)^2}} \sqrt{(i_1 - i_2)^2 + (j_1 - j_2)^2},$$

za sve $(r_1, g_1, b_1), (r_2, g_2, b_2) \in X_1$ i sve $(i_1, j_1), (i_2, j_2) \in X_2$.

Zbog koeficijenata $\dfrac{1}{3 \cdot 255}$ i $\dfrac{1}{\sqrt{(m-1)^2 + (n-1)^2}}$ su vrednosti funkcija d_1 i d_2 u intervalu $[0, 1]$, a s obzirom na razmatranje sa početka ove sekcije sledi da su d_1 i d_2 ograničene metrike sa vrednostima u intervalu $[0, 1]$. Za proizvoljne $\lambda_1, \lambda_2 \in (0, 1)$ sa osobinom $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ je funkcija $A(a_1, a_2) = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2$, $a_1, a_2 \in [0, 1]$ agregacioni operator tipa *konveksna kombinacija* iz sekcije 4.1. Za proizvoljne $x = (x_1, x_2) \in X$ i $y = (y_1, y_2) \in X$, odnosno $x_1, y_1 \in X_1$ i $x_2, y_2 \in X_2$, je funkcija

$$d_{[2]}(x, y) = A\left(d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2)\right) = \lambda_1 d_1(x_1, y_1) + \lambda_2 d_2(x_2, y_2)$$

tada ograničena metrika na skupu X.

Glava 5

Primena funkcija rastojanja u segmentaciji slike

U ovoj glavi su prikazani rezultati primene agregiranih funkcija rastojanja i metrika iz glave 4, u FCM algoritmu. Dve slike u boji, kao i jedna crno-bela slika je segmentirana FCM algoritmom sa nekoliko zadanih vrednosti broja željenih klastera c, nekoliko zadanih vrednosti težinskog parametra m, i sa nekoliko polaznih i agregacijom dobijenih funkcija rastojanja (metrika). U svim navedenim primerima su, kao dodatni parametri FCM algoritma zadani

`MaxIter = 40`	-	zadani maksimalana broj iteracija u algoritmu,
`epsilon = 0.01`	-	zadani prag razlike dve poslednje matrice pripadanja u algoritmu,
d	-	funkcija rastojanja korišćena u algoritmu.

Radi poređenja performansi primenjene segmentacije, prikazani su rezultati primene nekih polaznih funkcija rastojanja, kao i rezultati primene funkcija rastojanja konstruisanih od polaznih primenom nekih operatora agregacije, pre svega primenom konveksne kombinacije. Kao parametri za poređenje rezultata primene FCM algoritma, navedeni su:

PI	-	vrednost dobijenog indeksa performanse FCM algoritma, $\mathsf{PI} = J_m(U,V) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{c}(u_{ik})^m d^2(x_k, v_i), \quad x_k, v_i \in X,$ gde je d neka norma ili funkcija rastojanja na prostoru X podataka koji se klasifikuju,
Iter	-	broj izvršenih iteracija u FCM algoritmu,
ERROR	-	dostignuta razlika normi dve poslednje matrice pripadanja u algoritmu.
RT	-	vreme izvršenja algoritma, u sekundama.

Vrednost indeksa performanse predstavlja meru jačine grupisanosti piksela u dobijenim klasterima, pri čemu manja vrednost indeksa performanse znači jaču grupisanost. Kao što smo videli u glavi 3, postoje i drugi parametri kvaliteta

FCM algoritmom dobijene segmentacije, poput npr. *koeficijenta pseudoparticije* i *entropije pseudoparticije*. Takođe postoje i opštiji indikatori kvaliteta segmentacije koja može biti dobijena bilo kojim algoritmom, kao što je, na primer, „***dice similarity coefficient***" DSC, vidi na primer [32]. I pored raznih egzaktnih pokazatelja, subjektivan sud odgovarajućeg stručnjaka koji koristi dobijenu segmentaciju je, po mišljenju autora, jako važan, možda i presudan.

Radi uporedivosti dobijenih vrednosti indeksa performanse su sve metrike normirane, tj. na prostoru piksela slike one uzimaju vrednosti u intervalu $[0,1]$. Za poređenje razlike dve poslednje iteracijom dostignute matrice pripadanja $U(t-1) = [u_{i,j}(t-1)]_{c\times n}$ i $U(t) = [u_{i,j}(t)]_{c\times n}$ u algoritmu, u svim navedenim segmentacijama slika je korišćena L_∞ tj. „maksimum norma", dakle

$$\|U(t) - U(t-1)\|_\infty = \max_{i\in\{1,\ldots,c\},\, j\in\{1,\ldots,n\}} |u_{i,j}(t) - u_{i,j}(t-1)|.$$

U sekcijiama 5.1 i 5.2 su prikazani rezultati obrade jedne slike u boji, a u sekciji 5.3 rezultati obrade jedne crno-bele slike. U sekciji 5.4 je formulisan zaključak, sa predlozima za primenu u FCM algoritmu agregiranih funkcija rastojanja.

Primenjeni FCM algoritam je kodiran u programskom paketu MATLAB, verzija R2012b, 32-bit (win32). Testiranje je izvršeno na PC računaru sa procesorom Intel(R) processor Core(TM)2 Duo CPU E8400 3.00 GHz, 3.25 GB of RAM, i operativnim sistemom Microsoft Windows XP, Professional, Version 2002.

5.1 Segmentacija slike u boji - prvi primer

Primenom nekih polaznih, kao i nekih agregacijom konstruisanih funkcija rastojanja (metrika) je obrađena sledeća slika u boji, načinjena od strane autora na mobilnom telefonu.

Slika je snimljena u RGB tehnici i BMP formatu, što znači da je boja svakog piksela predstavljena kao uređena trojka $(r,g,b) \in \{0..255\}^3$, gde je $r \in \{0..255\}$ crvena komponenta, $g \in \{0..255\}$ zelena komponenta, a $b \in \{0..255\}$ plava komponenta boje piksela. Tehničke karakteristike obrađene slike su sledeće.

- Veličina fajla: 202554 bajtova.
- Visina matrice piksela: $n = 225$.

- Širina matrice piksela: $m = 300$.
- Ukupan broj piksela: $n \cdot m = 67500$.
- Tip kompresije: nema kompresije.
- Boja piksela: 256^3 varijacija nivoa (3 bajta = 24 bita) crvene, zelene i plave boje.

Dakle, FCM algoritam klasifikuje piksele slike u c klastera, pri čemu je svaki piksel $p_{i,j}$ u i-toj vrsti i j-toj koloni BMP matrice piksela predstavljen kao uređena trojka $p_{i,j} = (r, g, b) \in \{0 \dots 255\}^3$ crvene, zelene i plave komponente boje piksela. Dakle, kao prostor elemenata koji se razvrstavaju, možemo posmatrati skup $X = [0, 255]^3$. Primenom FCM algoritma sa odabranom funkcijom rastojanja na elemente prostora X, oni se razvrstavaju u klastere.

Slika je najpre segmentirana korišćenjem polaznih normalizovanih metrika $d_r : X^2 \to [0, 1]$, $d_g : X^2 \to [0, 1]$ i $d_b : X^2 \to [0, 1]$ definisanih sa

$$\langle d_r \rangle \quad d_r\left((r_1, g_1, b_1), (r_2, g_2, b_2)\right) = \frac{1}{255}|r_1 - r_2|,$$

$$\langle d_g \rangle \quad d_g\left((r_1, g_1, b_1), (r_2, g_2, b_2)\right) = \frac{1}{255}|g_1 - g_2|,$$

$$\langle d_b \rangle \quad d_b\left((r_1, g_1, b_1), (r_2, g_2, b_2)\right) = \frac{1}{255}|b_1 - b_2|,$$

za sve $(r_1, g_1, b_1), (r_2, g_2, b_2) \in X$, koje redom daju segmentaciju po kriterijumu razlike u crvenoj, zelenoj i plavoj komponenti boje. Za zadane brojeve klastera $c \in \{3, 4\}$ i vrednosti težinskog parametra $m \in \{1.5, 2.0, 2.5, 3.0\}$ su dobijene vrednosti izlaznih parametara PI, Iter, ERROR i RT koje su prikazane u sledećim tabelama.

$\langle d_r \rangle$ Primenom metrike d_r sa $c = 3$:

$d_r,\ c = 3$	$m = 1.5$	$m = 2.0$	$m = 2.5$	$m = 3.0$
PI:	309.6295	239.6156	165.4192	107.4785
Iter:	18	16	17	19
ERROR:	0.0088	0.0100	0.0076	0.0080
RT:	49	40	46	49

Primenom metrike d_r sa $c = 4$:

$d_r,\ c = 4$	$m = 1.5$	$m = 2.0$	$m = 2.5$	$m = 3.0$
PI:	190.5564	147.4538	94.5519	54.8884
Iter:	40	27	25	40
ERROR:	0.0136	0.0099	0.0093	0.0109
RT:	141	86	89	130

$\langle d_g \rangle$ Primenom metrike d_g sa $c = 3$:

$d_g,\ c = 3$	$m = 1.5$	$m = 2.0$	$m = 2.5$	$m = 3.0$
PI:	297.1668	229.0792	156.8808	101.0910
Iter:	13	14	16	19
ERROR:	0.0093	0.0062	0.0058	0.0075
RT:	38	38	47	51

Primenom metrike d_g sa $c = 4$:

$d_g,\ c = 4$	$m = 1.5$	$m = 2.0$	$m = 2.5$	$m = 3.0$
PI:	186.5882	141.8972	88.9756	51.2516
Iter:	40	21	21	25
ERROR:	0.0272	0.0098	0.0081	0.0090
RT:	150	71	78	81

$\langle d_b \rangle$ Primenom metrike d_b sa $c = 3$:

$d_b,\ c = 3$	$m = 1.5$	$m = 2.0$	$m = 2.5$	$m = 3.0$
PI:	223.9768	179.2275	127.2796	84.1998
Iter:	20	20	21	23
ERROR:	0.0083	0.0091	0.0080	0.0082
RT:	55	50	57	58

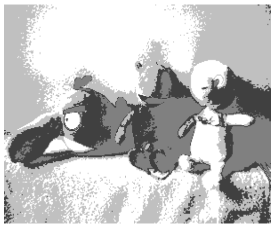
Primenom metrike d_b sa $c = 4$:

$d_b,\ c = 4$	$m = 1.5$	$m = 2.0$	$m = 2.5$	$m = 3.0$
PI:	138.6065	105.4255	69.0874	41.2964
Iter:	20	25	30	40
ERROR:	0.0084	0.0089	0.0096	0.0140
RT:	69	77	105	129

Ilustracije radi, na sledećim slikama su prikazani rezultati segmentacije primenom metrika d_r, d_g i d_b redom, sa $c = 4$ i $m = 2.0$:

$d_r: \ c = 4, \ m = 2.0$

$d_g: \ c = 4, \ m = 2.0$



$d_b: \ c = 4, \ m = 2.0$

Zatim je ista slika segmentirana korišćenjem nekoliko normalizovanih metrika konstruisanih primenom operatora agregacije tipa *konveksna kombinacija*, kao i operatora agregacije max, na polazne normalizovane metrike d_r, d_g i d_b:

$\langle d_{0.6,0.2,0.2} \rangle$ $d_{0.6,0.2,0.2} : X^2 \to [0,1]$, $\forall p_1 = (r_1, g_1, b_1) \in X$, $\forall p_2 = (r_2, g_2, b_2) \in X$,

$$\begin{aligned} d_{0.6,0.2,0.2}\,(p_1,p_2) &= 0.6 \cdot d_r\,(p_1,p_2) + 0.2 \cdot d_g\,(p_1,p_2) + 0.2 \cdot d_b\,(p_1,p_2) \\ &= \frac{0.6}{255}|r_1 - r_2| + \frac{0.2}{255}|g_1 - g_2| + \frac{0.2}{255}|b_1 - b_2|, \end{aligned}$$

$\langle d_{0.7,0.2,0.1} \rangle$ $d_{0.7,0.2,0.1} : X^2 \to [0,1]$, $\forall p_1 = (r_1, g_1, b_1) \in X$, $\forall p_2 = (r_2, g_2, b_2) \in X$,

$$\begin{aligned} d_{0.7,0.2,0.1}\,(p_1,p_2) &= 0.7 \cdot d_r\,(p_1,p_2) + 0.2 \cdot d_g\,(p_1,p_2) + 0.1 \cdot d_b\,(p_1,p_2) \\ &= \frac{0.7}{255}|r_1 - r_2| + \frac{0.2}{255}|g_1 - g_2| + \frac{0.1}{255}|b_1 - b_2|, \end{aligned}$$

$\langle d_{0.2,0.3,0.5} \rangle$ $d_{0.2,0.3,0.5} : X^2 \to [0,1]$, $\forall p_1 = (r_1, g_1, b_1) \in X$, $\forall p_2 = (r_2, g_2, b_2) \in X$,

$$\begin{aligned} d_{0.2,0.3,0.5}\,(p_1,p_2) &= 0.2 \cdot d_r\,(p_1,p_2) + 0.3 \cdot d_g\,(p_1,p_2) + 0.5 \cdot d_b\,(p_1,p_2) \\ &= \frac{0.2}{255}|r_1 - r_2| + \frac{0.3}{255}|g_1 - g_2| + \frac{0.5}{255}|b_1 - b_2|. \end{aligned}$$

$\langle d_{\max} \rangle$ $d_{\max} : X^2 \to [0,1]$, $\forall p_1 = (r_1, g_1, b_1) \in X$, $\forall p_2 = (r_2, g_2, b_2) \in X$,

$$\begin{aligned} d_{\max}\,(p_1,p_2) &= \max\left(d_r\,(p_1,p_2), d_g\,(p_1,p_2), d_b\,(p_1,p_2)\right) \\ &= \frac{1}{255}\max\left(|r_1 - r_2|, |g_1 - g_2|, |b_1 - b_2|\right). \end{aligned}$$

Dobijene vrednosti izlaznih parametara PI, Iter, ERROR i RT, za zadane vrednosti $c \in \{3,4\}$ i $m \in \{1.5, 2.0, 2.5, 3.0\}$, su prikazane u sledećim tabelama.

$\langle d_{0.6,0.2,0.2} \rangle$ Primenom metrike $d_{0.6,0.2,0.2}$ sa $c = 3$:

$d_{0.6,0.2,0.2}, \ c = 3$	$m = 1.5$	$m = 2.0$	$m = 2.5$	$m = 3.0$
PI:	414.6130	308.1734	206.9712	131.8669
Iter:	11	13	15	17
ERROR:	0.0040	0.0068	0.0065	0.0080
RT:	50	57	69	76

Primenom metrike $d_{0.6,0.2,0.2}$ sa $c = 4$:

$d_{0.6,0.2,0.2},\ c = 4$	$m = 1.5$	$m = 2.0$	$m = 2.5$	$m = 3.0$
PI:	312.4400	215.4354	129.8911	72.8765
Iter:	26	16	19	40
ERROR:	0.0093	0.0093	0.0081	0.0268
RT:	158	90	148	240

$\langle d_{0.7,0.2,0.1} \rangle$ Primenom metrike $d_{0.7,0.2,0.1}$ sa $c = 3$:

$d_{0.7,0.2,0.1},\ c = 3$	$m = 1.5$	$m = 2.0$	$m = 2.5$	$m = 3.0$
PI:	381.2169	288.3765	196.1222	126.0731
Iter:	12	13	15	17
ERROR:	0.0070	0.0095	0.0076	0.0087
RT:	33	28	34	37

Primenom metrike $d_{0.7,0.2,0.1}$ sa $c = 4$:

$d_{0.7,0.2,0.1},\ c = 4$	$m = 1.5$	$m = 2.0$	$m = 2.5$	$m = 3.0$
PI:	281.9739	198.8406	121.9845	69.3849
Iter:	14	16	18	40
ERROR:	0.0097	0.0076	0.0086	0.0197
RT:	43	54	74	184

$\langle d_{0.2,0.3,0.5} \rangle$ Primenom metrike $d_{0.2,0.3,0.5}$ sa $c = 3$:

$d_{0.2,0.3,0.5},\ c = 3$	$m = 1.5$	$m = 2.0$	$m = 2.5$	$m = 3.0$
PI:	383.4920	280.7806	187.1505	118.6375
Iter:	17	15	15	17
ERROR:	0.0090	0.0094	0.0095	0.0099
RT:	80	67	71	80

Primenom metrike $d_{0.2,0.3,0.5}$ sa $c = 4$:

$d_{0.2,0.3,0.5},\ c = 4$	$m = 1.5$	$m = 2.0$	$m = 2.5$	$m = 3.0$
PI:	289.4790	192.3846	114.2950	63.8937
Iter:	15	17	20	26
ERROR:	0.0097	0.0077	0.0097	0.0099
RT:	96	106	123	153

$\langle d_{\max} \rangle$ Primenom metrike $d_{\max}$ sa $c = 3$:

$d_{\max},\ c = 3$	$m = 1.5$	$m = 2.0$	$m = 2.5$	$m = 3.0$
PI:	1054.2	740.5700	474.2949	291.4624
Iter:	29	24	21	23
ERROR:	0.0094	0.0087	0.0100	0.0100
RT:	113	107	106	127

Primenom metrike $d_{\max}$ sa $c = 4$:

$d_{\max},\ c = 4$	$m = 1.5$	$m = 2.0$	$m = 2.5$	$m = 3.0$
PI:	831.3882	526.6364	298.1141	160.6182
Iter:	21	18	19	24
ERROR:	0.0097	0.0097	0.0095	0.0082
RT:	168	148	101	154

Ilustracije radi, na sledećim slikama su prikazani rezultati segmentacije primenom agregacijom dobijenih metrika $d_{0.6,0.2,0.2}$, $d_{0.7,0.2,0.1}$, $d_{0.2,0.3,0.5}$ i $d_{\max}$ redom, sa $c = 4$ i $m = 2.0$:

	
$d_{0.6,0.2,0.2}:\ c=4,\ m=2.0$	$d_{0.7,0.2,0.1}:\ c=4,\ m=2.0$
	
$d_{0.2,0.3,0.5}:\ c=4,\ m=2.0$	$d_{\max}:\ c=4,\ m=2.0$

Možemo uočiti da primenom navedenih, agregacijom konstruisanih metrika u FCM algoritmu, ni u jednom slučaju nije dobijena manja (bolja) vrednost indeksa performanse. Međutim, vrednost indeksa performanse nije jedini pokazatelj koliko je dobra primenjena metrika u FCM algoritmu. Osim vrednosti indeksa performanse postoje i druge numeričke karakteristike dobijene segmentacije, i što je još važnije, veoma je važno koliko primenjena metrika odgovara željenom kriterijumu segmentacije. Agregiranjem nekih polaznih metrika na odgovarajući način, možemo modelirati kriterijum segmentacije. Na primer, za $\alpha, \beta, \gamma \in [0,1]$ za koje je $\alpha+\beta+\gamma=1$, funkcija $d_{\alpha,\beta,\gamma} : X^2 \to [0,1]$ definisana sa

$$\begin{aligned} d_{\alpha,\beta,\gamma}(p_1,p_2) &= \alpha \cdot d_r(p_1,p_2) + \beta \cdot d_g(p_1,p_2) + \gamma \cdot d_b(p_1,p_2) \\ &= \frac{\alpha}{255}|r_1-r_2| + \frac{\beta}{255}|g_1-g_2| + \frac{\gamma}{255}|b_1-b_2|, \end{aligned}$$

za sve $p_1=(r_1,g_1,b_1) \in X$ i $p_2=(r_2,g_2,b_2) \in X$, je metrika dobijena primenom agregacionog operatora tipa *konveksna kombinacija*. Za pogodno odabrane α, β i γ, funkcijom $d_{\alpha,\beta,\gamma}$ možemo modelirati kriterijum segmentacije u kojem je stepen prisutnosti tj. uticaja crvene, zelene i plave boje određen koeficijentima α, β i γ redom. Nekim drugim agregacionim operatorima možemo modelirati razne druge kriterijume segmentacije.

Iz prikazanih tabela sa podacima o vremenu izvršavanja algoritma i broju izvršenih iteracija, može se još primetiti da se sa nekim od primenjenih metrika $d_{0.6,0.2,0.2}$, $d_{0.7,0.2,0.1}$, $d_{0.2,0.3,0.5}$ i $d_{\max}$ postiže u nekim slučajevima brže izvršavanje algoritma uz manji broj iteracija, u odnosu na iste posmatrane performanse sa primenjenim polaznim metrikama d_r, d_g i d_b.

5.2 Segmentacija slike u boji - drugi primer

Sa istim ulaznim i izlaznim parametrima je obrađena još jedna, sledeća slika u boji.

Prikazana slika je test-slika za segmentaciju preuzeta sa internet adrese `https://www2.eecs.berkeley.edu/Research/Projects/CS/vision/bsds/`, *Berkeley University of California*, *Department of Electrical Engineering and Computer Sciences*, *Computer Vision Group*, *segmentation dataset - training images*, vidi [32]. Slika je takođe snimljena u RGB tehnici i BMP formatu. Tehničke karakteristike obrađene slike su sledeće.

- Veličina fajla: 463740 bajtova.
- Visina matrice piksela: $n = 481$.
- Širina matrice piksela: $m = 321$.
- Ukupan broj piksela: $n \cdot m = 154401$.
- Tip kompresije: nema kompresije.
- Boja piksela: 256^3 varijacija nivoa crvene, zelene i plave boje.

Slika je segmentirana korišćenjem istih polaznih i konstruisanih metrika kao u sekciji 5.1. Za polazne metrike d_r, d_g i d_b su dobijeni izlazni podaci prikazani u sledećim tabelama.

$\langle d_r \rangle$ Primenom metrike d_r sa $c = 3$:

$d_r,\ c = 3$	$m = 1.5$	$m = 2.0$	$m = 2.5$	$m = 3.0$
PI:	947.2947	783.2102	582.6591	402.1912
Iter:	19	19	21	26
ERROR:	0.0080	0.0093	0.0093	0.0096
RT:	55	41	68	74

Primenom metrike d_r sa $c = 4$:

$d_r,\ c = 4$	$m = 1.5$	$m = 2.0$	$m = 2.5$	$m = 3.0$
PI:	567.6556	457.6516	313.0569	188.7941
Iter:	28	26	24	34
ERROR:	0.0093	0.0098	0.0098	0.0090
RT:	192	206	138	184

$\langle d_g \rangle$ Primenom metrike d_g sa $c = 3$:

$d_g,\ c = 3$	$m = 1.5$	$m = 2.0$	$m = 2.5$	$m = 3.0$
PI:	641.0598	533.5223	395.9667	271.5664
Iter:	11	13	15	18
ERROR:	0.0078	0.0039	0.0075	0.0067
RT:	51	63	64	63

Primenom metrike d_g sa $c = 4$:

$d_g,\ c = 4$	$m = 1.5$	$m = 2.0$	$m = 2.5$	$m = 3.0$
PI:	394.0889	320.9715	223.9824	139.6399
Iter:	20	21	23	30
ERROR:	0.0094	0.0087	0.0091	0.0090
RT:	120	81	145	234

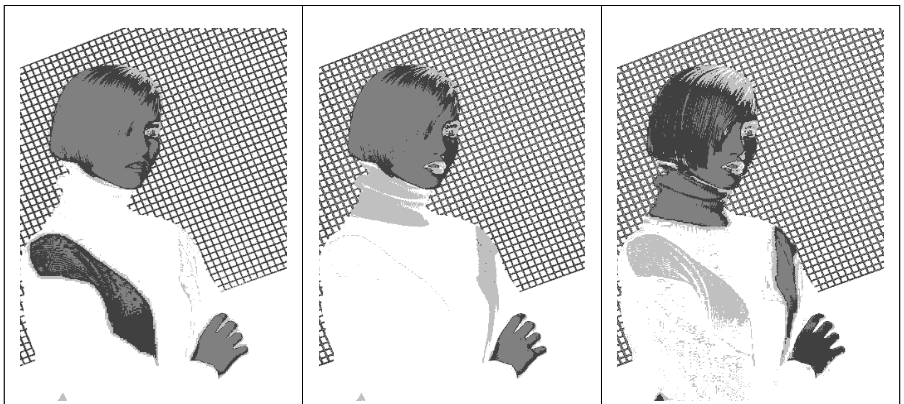
$\langle d_b \rangle$ Primenom metrike d_b sa $c = 3$:

$d_b,\ c = 3$	$m = 1.5$	$m = 2.0$	$m = 2.5$	$m = 3.0$
PI:	469.7776	389.8825	290.5821	200.6945
Iter:	19	18	19	25
ERROR:	0.0080	0.0089	0.0094	0.0085
RT:	126	103	134	162

Primenom metrike d_b sa $c = 4$:

$d_b,\ c=4$	$m=1.5$	$m=2.0$	$m=2.5$	$m=3.0$
PI:	295.6338	234.1837	153.6174	92.1252
Iter:	17	19	36	34
ERROR:	0.0097	0.0093	0.0092	0.0095
RT:	132	149	326	269

Ilustracije radi, na sledećim slikama su prikazani rezultati segmentacije primenom metrika d_r, d_g i d_b redom, sa $c = 4$ i $m = 2.0$:



$d_r:\ c=4,\ m=2.0$ | $d_g:\ c=4,\ m=2.0$ | $d_b:\ c=4,\ m=2.0$

Zatim je ta slika segmentirana korišćenjem istih normalizovanih metrika $d_{0.6,0.2,0.2}$, $d_{0.7,0.2,0.1}$ i $d_{0.2,0.3,0.5}$ kao u sekciji . Dobijeni izlazni podaci su prikazani u sledećim tabelama.

$\langle d_{0.6,0.2,0.2} \rangle$ Primenom metrike $d_{0.6,0.2,0.2}$ sa $c = 3$:

$d_{0.6,0.2,0.2},\ c=3$	$m=1.5$	$m=2.0$	$m=2.5$	$m=3.0$
PI:	1201.7	931.7699	2100.8	1212.9
Iter:	17	14	2	2
ERROR:	0.0087	0.0071	0.0059	0.0038
RT:	256	208	31	21

Primenom metrike $d_{0.6,0.2,0.2}$ sa $c = 4$:

$d_{0.6,0.2,0.2},\ c=4$	$m=1.5$	$m=2.0$	$m=2.5$	$m=3.0$
PI:	893.9020	629.2586	394.6850	229.7990
Iter:	19	20	20	24
ERROR:	0.0083	0.0087	0.0091	0.0081
RT:	331	351	307	637

$\langle d_{0.7,0.2,0.1}\rangle$ Primenom metrike $d_{0.7,0.2,0.1}$ sa $c=3$:

$d_{0.7,0.2,0.1},\ c=3$	$m=1.5$	$m=2.0$	$m=2.5$	$m=3.0$
PI:	1143.5	906.6431	2272.6	1312.1
Iter:	12	16	2	2
ERROR:	0.0072	0.0090	0.0094	0.0061
RT:	170	83	17	14

Primenom metrike $d_{0.7,0.2,0.1}$ sa $c=4$:

$d_{0.7,0.2,0.1},\ c=4$	$m=1.5$	$m=2.0$	$m=2.5$	$m=3.0$
PI:	807.0982	591.8375	380.1972	222.4169
Iter:	18	18	18	32
ERROR:	0.0094	0.0073	0.0097	0.0095
RT:	298	315	380	667

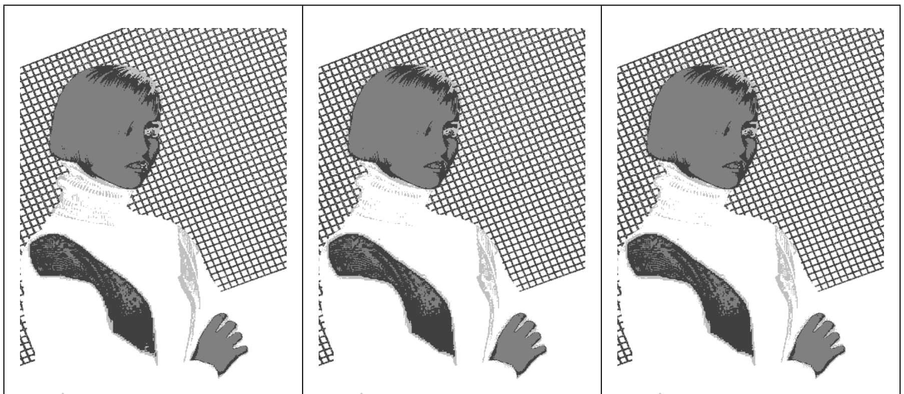
$\langle d_{0.2,0.3,0.5}\rangle$ Primenom metrike $d_{0.2,0.3,0.5}$ sa $c=3$:

$d_{0.2,0.3,0.5},\ c=3$	$m=1.5$	$m=2.0$	$m=2.5$	$m=3.0$
PI:	962.0136	2783.4	1607.0	927.7893
Iter:	13	14	2	2
ERROR:	0.0070	0.0077	0.0044	0.0028
RT:	73	14	14	20

Primenom metrike $d_{0.2,0.3,0.5}$ sa $c=4$:

$d_{0.2,0.3,0.5}$, $c = 4$	$m = 1.5$	$m = 2.0$	$m = 2.5$	$m = 3.0$
PI:	734.3342	538.6824	334.1280	193.4514
Iter:	38	18	21	25
ERROR:	0.0094	0.0100	0.0079	0.0091
RT:	729	352	436	618

Ilustracije radi, na sledećim slikama su prikazani rezultati segmentacije primenom agregacijom dobijenih metrika $d_{0.6,0.2,0.2}$, $d_{0.7,0.2,0.1}$ i $d_{0.2,0.3,0.5}$ redom, sa $c = 4$ i $m = 2.0$:

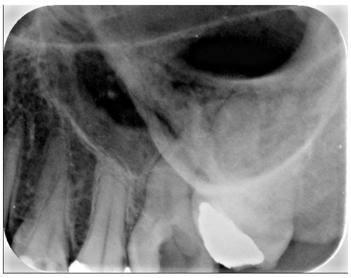


$d_{0.6,0.2,0.2}$: $c = 4$, $m = 2.0$	$d_{0.7,0.2,0.1}$: $c = 4$, $m = 2.0$	$d_{0.2,0.3,0.5}$: $c = 4$, $m = 2.0$

Iz prikazanih tabela sa podacima o performansama rada algoritma sa ovom obrađenom slikom, mogu se izvesti isti zaključci kao u sekciji 5.1.

5.3 Segmentacija crno-bele slike

Primenom dve polazne, kao i nekih agregacijom tipa *konveksna kombinacija* konstruisanih funkcija rastojanja (metrika) je obrađena sledeća crno-bela slika



kod koje je boja, odnosno nijansa sive boje svakog piksela zapisana kao broj $s \in \{0..255\}$ tj. podatak tipa 1 bajt. Slika predstavlja rentgenski snimak dela vilice. Tehničke karakteristike obrađene slike su sledeće.

- Tip zapisa slike: BMP.
- Veličina fajla: 293726 bajtova.
- Visina matrice piksela: $n =$ 466.
- Širina matrice piksela: $m =$ 628.
- Ukupan broj piksela: $n \cdot m =$ 292648.
- Tip kompresije: nema kompresije.
- Boja piksela: $0, \ldots, 255$ nivoa (1 bajt = 8 bitova) sive boje.

Analogno kao u sekcijama 5.1 i 5.2, prirodno je sliku segmentirati po kriterijumu nijanse boje piksela, što je za slike ovog tipa, tj. crno-bele slike, i jedini prirodan način segmentacije u kojem se kao kriterijum koristi samo boja piksela. Naime, vektori koje klasifikujemo su jednodimenzionalni elementi, a u $\mathbb{R}^1$ su sve L_p, $p \geq 1$ metrike ekvivalentne. Radi uporedivosti vrednosti indeksa performanse je opet korišćena ograničena metrika sa vrednostima u intervalu $[0, 1]$, tj. metrika dobijena normiranjem L_1 metrike, vidi glavu 4. Dakle, kao prostor elemenata koji se razvrstavaju možemo posmatrati skup $X = [0, 255]$, a metrika koja odgovara opisanom kriterijumu segmentacije je funkcija $d_s : X^2 \to [0, 1]$ definisana sa

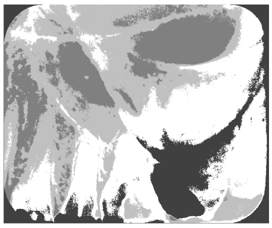
$$d_s(s_1, s_2) = \frac{1}{255}|s_1 - s_2|,$$

za sve $s_1, s_2 \in X$. Prema tome, svaki piksel $p_{i,j}$ u i-toj vrsti i j-toj koloni matrice piksela je pretstavljen kao broj $p_{i,j} = s \in \{0 \ldots 255\}$ koji reprezentuje nijansu sive boje piksela. Za zadane brojeve klastera $c \in \{3, 4\}$ i vrednosti težinskog parametra $m \in \{1.5, 2.0, 2.5, 3.0\}$ su, primenom metrike d_s u FCM algoritmu dobijene vrednosti izlaznih parametara PI, Iter, ERROR i RT koje su prikazane u sledećim tabelama.

$d_s,\ c = 3$	$m = 1.5$	$m = 2.0$	$m = 2.5$	$m = 3.0$
PI:	2416.3	1932.9	1359.3	884.8059
Iter:	33	25	22	27
ERROR:	0.0092	0.0096	0.0090	0.0093
RT:	53	28	35	36

$d_s,\ c=4$	$m=1.5$	$m=2.0$	$m=2.5$	$m=3.0$
PI:	1302.2	1007.5	668.3871	401.3836
Iter:	25	24	27	36
ERROR:	0.0088	0.0082	0.0098	0.0086
RT:	58	40	65	64

Ilustracije radi, na sledećoj slici je prikazan rezultat segmentacije primenom metrike d_s sa $c = 4$ i $m = 1.5$:



$d_s: \ \ c = 4,\ m = 1.5$

Pri ovakvoj vrsti segmentacije, pozicija tj. koordinate piksela uglavnom nemaju nikakav, ili imaju mali uticaj na kriterijum klasifikacije piksela u klastere. Ukoliko želimo u kriterijum klasifikacije uključiti i neki stepen uticaja pozicije piksela, prirodno je da za prostorno rastojanje između dva piksela koristimo npr. Euklidsku L_2 metriku njihovih koordinata. Pri obradi slike iz navedenog primera, prostor koordinata je tada skup $Y = \{(i,j) \mid i \in \{466\},\ i \in \{628\}\}$, gde je $n = 466$ visina (broj vrsta), a $m = 628$ širina (broj kolona) matrice piksela. Normirana Euklidska L_2 metrika sa vrednostima u intervalu $[0,1]$ za određivanje prostornog rastojanja dva piksela je tada funkcija $d_E : Y^2 \to [0,1]$ definisana sa

$$d_E\left((i_1,j_1),(i_2,j_2)\right) = \frac{1}{3\sqrt{67706}}\sqrt{\left(i_1-i_2\right)^2+\left(j_1-j_2\right)^2},$$

za sve $(i_1,j_1),(i_2,j_2) \in Y$, tj. za svaka dva piksela $p_{i_1j_1}$ i $p_{i_2j_2}$ slike, gde je $\sqrt{(n-1)^2+(m-1)^2} = \sqrt{465^2+627^2} = 3\sqrt{67706}$ maksimalna vrednost prostornog rastojanja dva piksela, odnosno rastojanje piksela u gornjem levom, i piksela u donjem desnom uglu slike.

Dekartov proizvod $Z = X \times Y$ predstavlja objedinjen prostor boja i koordinata piksela. Na njemu, konstrukcijom prikazanom u sekciji 4.2, tj. primenom teoreme 4.2.3, možemo definisati agregiranu funkciju rastojanja koja će pri segmentaciji slike u kriterijum segmentacije uključiti i razliku u boji i prostorno rastojanje dva piksela. Jedan od prirodnih načina objedinjavanja (agregiranja) ova dva kriterijuma u jedan je putem *konveksne kombinacije* rastojanja boja d_s i prostornog rastojanja d_E dva piksela.

Neka je $\alpha, \beta \in [0,1]$ i $\alpha + \beta = 1$, gde je α stepen uticaja razlike boja, a β stepen uticaja prostornog rastojanja piksela u željenom kriterijumu segmentacije. Funkcija rastojanja koja modelira opisani kriterijum segmentacije je funkcija $d_{\alpha,\beta} : Z^2 \to [0,1]$ definisana na sledeći način. Neka su $p_1 = (s_1, (i_1, j_1)) \in Z$ i $p_2 = (s_2, (i_2, j_2)) \in Z$ pikseli slike, gde $s_1, s_2 \in X$ predstavljaju redom njihove boje, a $(i_1, j_1), (i_2, j_2) \in Y$ redom njihove prostorne koordinate. Funkcija rastojanja (metrika) $d : Z^2 \to [0,1]$ je definisana sa

$$d_{\alpha,\beta}(p_1, p_2) = \alpha \cdot d_s(s_1, s_2) + \beta \cdot d_E((i_1, j_1), (i_2, j_2)),$$

za sve $p_1, p_2 \in Z$. Izborom parametara α i β određujemo koliko će koja od metrika d_s i d_E uticati na način tj. kriterijum segmentacije. Za navedeni primer medicinske rengenske slike i problem segmentacije takve slike, prirodno je da prostorno Euklidsko rastojanje igra malu (ili nikakvu) ulogu u kriterijumu za segmentaciju. Stoga je, ilustracije radi, navedeni rengenski snimak segmentiran za vrednosti parametara $(\alpha, \beta) = (0.8, 0.2)$, $(\alpha, \beta) = (0.9, 0.1)$ i $(\alpha, \beta) = (0.95, 0.05)$. Za navedene vrednosti parametara α i β, zadane brojeve klastera $c \in \{3, 4\}$ i vrednosti težinskog parametra $m \in \{1.5, 2.0, 2.5, 3.0\}$ su, primenom metrike $d_{\alpha,\beta}$ u FCM algoritmu dobijene vrednosti izlaznih parametara PI, Iter, ERROR i RT koje su prikazane u sledećim tabelama.

$\langle d_{0.8,0.2} \rangle$ Primenom metrike $d_{0.8,0.2}$ sa $c = 3$:

$d_{0.8,0.2},\ c = 3$	$m = 1.5$	$m = 2.0$	$m = 2.5$	$m = 3.0$
PI:	2558.0	4301.0	2483.2	1433.7
Iter:	27	2	2	2
ERROR:	0.0091	0.0074	0.0037	0.0023
RT:	1020	56	51	62

Primenom metrike $d_{0.8,0.2}$ sa $c = 4$:

$d_{0.8,0.2},\ c = 4$	$m = 1.5$	$m = 2.0$	$m = 2.5$	$m = 3.0$
PI:	6451.5	3225.7	1612.9	806.4335
Iter:	2	2	2	2
ERROR:	0.0086	0.0025	0.0013	0.0008
RT:	62	84	101	60

$\langle d_{0.9,0.1} \rangle$ Primenom metrike $d_{0.9,0.1}$ sa $c = 3$:

$d_{0.9,0.1}$, $c = 3$	$m = 1.5$	$m = 2.0$	$m = 2.5$	$m = 3.0$
PI:	2470.8	1956.1	2757.3	1591.9
Iter:	30	23	2	2
ERROR:	0.0094	0.0098	0.0085	0.0054
RT:	1166	893	67	68

Primenom metrike $d_{0.9,0.1}$ sa $c = 4$:

$d_{0.9,0.1}$, $c = 4$	$m = 1.5$	$m = 2.0$	$m = 2.5$	$m = 3.0$
PI:	1447.1	3581.8	1790.9	895.4447
Iter:	27	2	2	2
ERROR:	0.0088	0.0057	0.0029	0.0019
RT:	1421	59	61	59

$\langle d_{0.95,0.05} \rangle$ Primenom metrike $d_{0.95,0.05}$ sa $c = 3$:

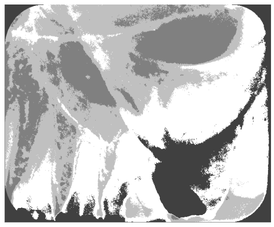
$d_{0.95,0.05}$, $c = 3$	$m = 1.5$	$m = 2.0$	$m = 2.5$	$m = 3.0$
PI:	2439.0	1942.6	1358.4	880.7336
Iter:	32	24	22	27
ERROR:	0.0092	0.0098	0.0093	0.0092
RT:	1263	915	893	1065

Primenom metrike $d_{0.95,0.05}$ sa $c = 4$:

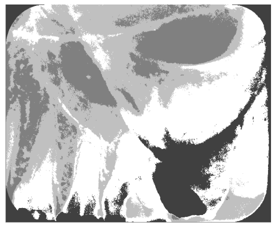
$d_{0.95,0.05}$, $c = 4$	$m = 1.5$	$m = 2.0$	$m = 2.5$	$m = 3.0$
PI:	1369.6	1053.7	1886.1	943.0483
Iter:	26	25	2	2
ERROR:	0.0096	0.0091	0.0055	0.0036
RT:	1376	1322	81	78

Ilustracije radi, na sledećim slikama su prikazani rezultati segmentacije primenom metrika $d_{0.8,0.2}$, $d_{0.9,0.1}$ i $d_{0.95,0.05}$ redom, sa $c = 4$ i $m = 1.5$:

$d_{0.8,0.2}: \; c = 4, \; m = 1.5$



$d_{0.9,0.1}: \; c = 4, \; m = 1.5$



$d_{0.95,0.05}: \; c = 4, \; m = 1.5$

U pogledu performansi rada algoritma sa obrađenom crno-belom slikom, mogu se izvesti veoma slični zaključci kao u sekcijama 5.1 i 5.2.

5.4 Zaključak

U glavi 4 je prikazana konstrukcija novih funkcija rastojanja i metrika primenom operatora agregacije na neke polazne funkcije rastojanja i metrike. U zavisnosti od svojstava polaznih funkcija rastojanja s jedne strane, i svojstava primenjenog operatora agregacije s druge strane, možemo dobiti nove funkcije rastojanja i metrike sa raznim dobrim osobinama.

S jedne strane, to mogu biti dobre osobine u teorijskom smislu, npr. osobine simetričnosti, nejednakosti trougla i slično. Sa navedenog aspekta su razmotreni agregacioni operatori tipa *pozitivna linearna kombinacija*, *konveksna kombinacija*, operatori min i max, kao i agregacioni operatori tipa *uopštene sredine*. Kao jedan od ciljeva budućih istraživanja se nameće istraživanje drugih agregacionih operatora, kao što su npr. OWA operatori, agregacioni operatori generisani raznim t-normama i t-konormama navedenim u podsekcijama 2.2.2 i 2.2.3, itd.

S druge strane, osim u smislu teorijskih osobina, ovako konstruisane funkcije rastojanja i metrike mogu imati i dobre ili poželjne osobine u upotrebnom smislu, tj. osobine koje su poželjne za određene vidove primena. U ovoj glavi je prikazana konstrukcija i primena agregiranih funkcija rastojanja i metrika u segmentaciji slike FCM algoritmom. Postoje razni pokazatelji kvaliteta dobijene segmentirane slike. Od egzaktnih, numeričkih pokazatelja najvažniji je vrednost indeksa performanse. Ni u jednom od navedenih primera nije dobijena bolja tj. manja vrednost indeksa performanse u odnosu na vrednost indeksa performanse koja je dobijena primenom polaznih metrika. Međutim, to ne znači da je odgovarajuća metrika sa većom vrednošću indeksa performanse lošija od polaznih metrika sa manjom vrednošću indeksa performanse. Naime, osim numeričkih pokazatelja, izuzetno važnu ulogu za ocenu kvaliteta dobijene segmentacije imaju i još neki kriterijumi. S jedne strane, subjektivna procena kvaliteta dobijene segmentirane slike od strane „eksperta" (korisnika dobijene segmentacije, npr. lekara koji će na osnovu segmentirane slike izvesti određene zaključke) ima možda i ključnu ulogu. S druge strane, ovakav način konstrukcije funkcije rastojanja za primenu u segmentiranju slike nam omogućava dobar način modeliranja kriterijuma za segmentaciju. Pogodnim izborom

☞ polaznih funkcija rastojanja i

☞ agregacionog operatora

možemo na dobar način matematički modelirati intuitivno definisan kriterijum za segmentiranje slike.

Osim u primeni u FCM algoritmu, ovako konstruisane funkcije rastojanja je moguće primeniti i u drugim algoritmima za segmentaciju slike, kao i u drugim algoritmima za klasifikaciju podataka raznih tipova. Takođe, osim u klasifikaciji podataka, funkcije rastojanja i metrike imaju značajnu ulogu i u drugim vidovima obrade slika, kao što su uklanjanje šuma, registracija slika, razne geometrijske transformacije objekata u slici, itd. Osim u obradi slika, funkcije rastojanja imaju ključnu ulogu i u ostalim primenama teorije prepoznavanja oblika koja je danas vrlo dinamična oblast nauke sa mnogobrojnim primenama u meteoroligiji, geologiji, saobraćaju, pretraživanju računarskih baza podataka, sistemima bezbednosti, teoriji kodiranja, antropologiji, itd. Mnogobrojni mogući pravci primene, sa svojim specifičnostima, otvaraju široko polje za daljnja istaživanja.

Indeks

Bibliografija

[1] Dragan Acketa. *Odabrana poglavlja teorije prepoznavanja oblika sa primenama*. Institut za matematiku, Prirodno-matematički fakultet u Novom Sadu, Novi Sad, 1986.

[2] Joseph Aczél. *Lectures on functional equations and their applications*, volume 19. Academic press, 1966.

[3] Geoffrey H. Ball and David J. Hall. Isodata, a novel method of data analysis and pattern classification, 1965.

[4] James C Bezdek. *Pattern Recognition with Fuzzy Objective Function Algorithms*. Kluwer Academic Publishers Norwell, MA, USA, 1981.

[5] James C. Bezdek, Robert Ehrlich, and William Full. Fcm: The fuzzy c-means clustering algorithm. *Computers & Geosciences*, 10(2-3):191–203, 1984.

[6] Gunilla Borgefors. Hierarchical chamfer matching: A parametric edge matching algorithm. *IEEE Transactions on pattern analysis and machine intelligence*, 10(6):849–865, 1988.

[7] Robert L. Cannon, Dave V. Jitendra, and James C. Bezdek. Efficient implementation of the fuzzy c-means clustering algorithms. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2:248–255, 1986.

[8] Vladimir Ćurić. *Distance Functions and Their Use in Adaptive Mathematical Morphology*. PhD thesis, Uppsala, 2014.

[9] Vladimir Ćurić, Joakim Lindblad, Nataša Sladoje, Hamid Sarve, and Gunilla Borgefors. A new set distance and its application to shape registration. *Pattern Analysis and Applications*, 17(1):141–152, 2014.

[10] Michel M. Deza and Elena Deza. *Encyclopedia of Distances*. Springer, Berlin Heidelberg, 2009.

[11] József Dombi. Basic concepts for a theory of evaluation: The aggregative operator. *European Journal of Operational Research*, 10(3):282–293, 1982.

[12] József Dombi. A general class of fuzzy operators, the demorgan class of fuzzy operators and fuzziness measures induced by fuzzy operators. *Fuzzy Sets and Systems*, 8(2):149–163, 1982.

[13] Didier Dubois and Henri Prade. On the use of aggregation operations in information fusion processes. *Fuzzy Sets and Systems*, 142(1):143–161, 2004.

[14] Didier J. Dubois. *Fuzzy sets and systems: theory and applications*, volume 144. Academic press, 1980.

[15] Marie-Pierre Dubuisson and Anil K. Jain. A modified hausdorff distance for object matching. In *Pattern Recognition, 1994. Vol. 1-Conference A: Computer Vision & Image Processing., Proceedings of the 12th IAPR International Conference on*, volume 1, pages 566–568. IEEE, 1994.

[16] Richard O. Duda and Peter E. Hart. *Pattern Classification and Scene Analysis.* Wiley-Interscience, New York, 1973.

[17] Joseph C. Dunn. A fuzzy relative of the isodata process and its use in detecting compact well-separated clusters. *Cybernetics and Systems*, 3(3):32–57, 1973.

[18] Thomas Eiter and Heikki Mannila. Distance measures for point sets and their computation. *Acta Informatica*, 34(2):109–133, 1997.

[19] János Fodor, Ronald R. Yager, and Alexander Rybalov. Structure of uninorms. *Int. J. of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, 5:411–427, 1997.

[20] Michel Grabish, Jean-Luc Marichal, Radko Mesiar, and Endre Pap. *Aggregation Functions.* Cambridge University Press, Cambridge, 2009.

[21] Ulf Grenander. *Lectures in Pattern Theory, Volume 1: Pattern Synthesis.* Springer-Verlag, Berlin, 1976.

[22] Ulf Grenander. *Lectures in Pattern Theory, Volume 2: Pattern Analysis.* Springer-Verlag, Berlin, 1978.

[23] Ulf Grenander. *Lectures in Pattern Theory, Volume 3: Regular Structures.* Springer-Verlag, New York, 1981.

[24] Petr Hájek. *Metamathematics of Fuzzy Logic.* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1998.

[25] Felix Hausdorff. *Grundzüge der Mengenlehre.* Veit, Leipzig, 1914.

[26] Sándor Jenei and János C. Fodor. On continuous triangular norms. *Fuzzy Sets and Systems*, 100(1-3):273–282, 1998.

[27] Erich Peter Klement, Radko Mesiar, and Endre Pap. A characterization of the ordering of continuous t-norms. *Fuzzy Sets and Systems*, 86(2):189–195, 1997.

[28] Erich Peter Klement, Radko Mesiar, and Endre Pap. *Triangular Norms.* Springer Science & Business Media, Dordrecht, 2013.

[29] Reinhard Klette and Azriel Rosenfeld. *Digital Geometry: geometric methods for digital picture analysis.* Morgan Kaufmann, 2004.

[30] George J. Klir and Bo Yuan. *Fuzzy sets and fuzzy logic, theory and applications.* Prentice Hall, New Jersey, 1995.

[31] Joakim Lindblad, Vladimir Ćurić, and Nataša Sladoje. On set distances and their application to image registration. page 449–454, 2009.

[32] David Martin, Charless Fowlkes, Doron Tal, and Jitendra Malik. A database of human segmented natural images and its application to evaluating segmentation algorithms and measuring ecological statistics. In *Proc. 8th Int'l Conf. Computer Vision*, volume 2, pages 416–423, July 2001.

[33] Victor Pavlovich Maslov and S. N. Samborskij. Idempotent analysis. *Advances in Soviet Mathematics*, 13, 1992.

[34] Alfred T. Miesch. Q-mode factor analysis of geochemical and petrologic data matrices with constant row-sums. Technical report, US Govt. Print. Off., 1976.

[35] Ljubo Nedović, Nebojša Ralević, and Ivan Pavkov. Aggregated distance functions and their application in image processing. *Soft Computing*, In print.

[36] Hung T. Nguyen, Vladik Kreinovich, and Piotr Wojciechowski. Strict archimedean t-norms and t-conorms as universal approximators. *International Journal of Approximate Reasoning*, 18(3-4):239–249, 1998.

[37] Berthold Schweizer and Abe Sklar. Associative functions and abstract semigroups. *Publ. Math. Debrecen*, 10:69–81, 1963.

[38] Berthold Schweizer and Abe Sklar. *Probabilistic Metric Spaces.* Elsevier - North Holland, New York, 1983.

[39] Takanori Sugeno. *Fuzzy Measures and Fuzzy Integrals.* Elsevier - North Holland, Amsterdam, 1977.

[40] Julius T. Tou and Rafael C. Gonzalez. *Pattern recognition principles.* Addison-Wesley, 1974.

[41] Siegfried Weber. A general concept of fuzzy connectives, negations and implications based on t-norms and t-conorms. *Fuzzy sets and systems*, 11(1-3):115–134, 1983.

[42] Ronald R. Yager. On a general class of fuzzy connectives. *Fuzzy Sets and Systems*, 4(3):235–242, 1980.

[43] Ronald R. Yager. On the measure of fuzziness and negation. ii. lattices. *Information and control*, 44(3):236–260, 1980.

[44] Ronald R. Yager. On ordered weighted averaging aggregation operators in multicriteria decision making. *IEEE Transactions on systems, Man, and Cybernetics*, 18(1):183–190, 1988.

[45] Ronald R. Yager. Fusion of ordinal information using weighted median aggregation. *International Journal of Approximate Reasoning*, 18(1-2):35–52, 1998.

[46] Ronald R. Yager. Generalized owa aggregation operators. *Fuzzy Optimization and Decision Making*, 3(1):93–107, 2004.

[47] Ronald R. Yager. Owa aggregation over a continuous interval argument with applications to decision making. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B (Cybernetics)*, 34(5):1952–1963, 2004.

[48] Ronald R. Yager and Janusz Kacprzyk. *The Ordered Weighted Averaging Operation: Theory, Methodology and Applications*. Kluwer, Norwell, MA, 1997.

[49] Ronald R. Yager and Alexander Rybalov. Uninorm aggregation operators. *Fuzzy Sets and Systems*, 80(1):111–120, 1996.

[50] Lotfi A. Zadeh. Fuzzy sets. *Information and control*, 8(3):338–353, 1965.