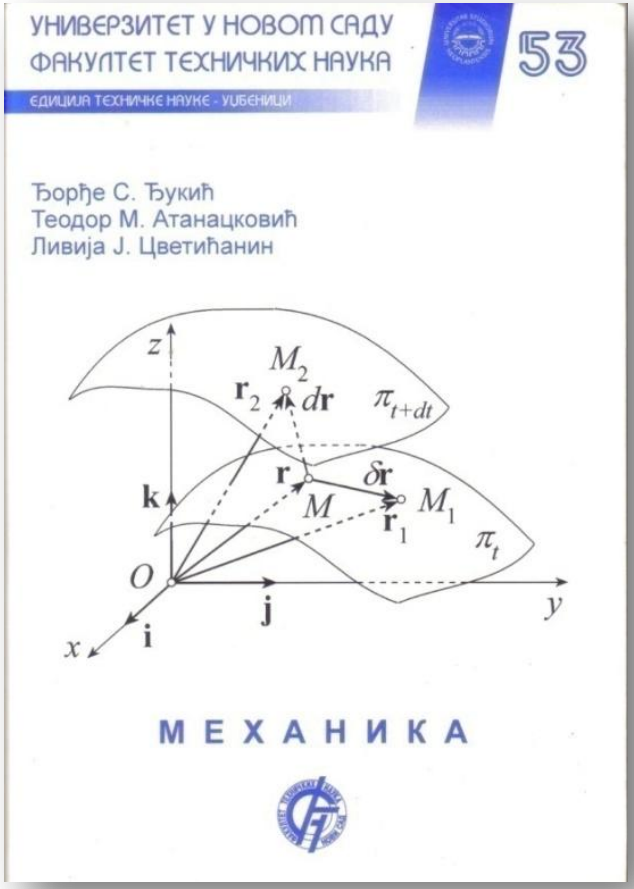
Ispitni zadaci

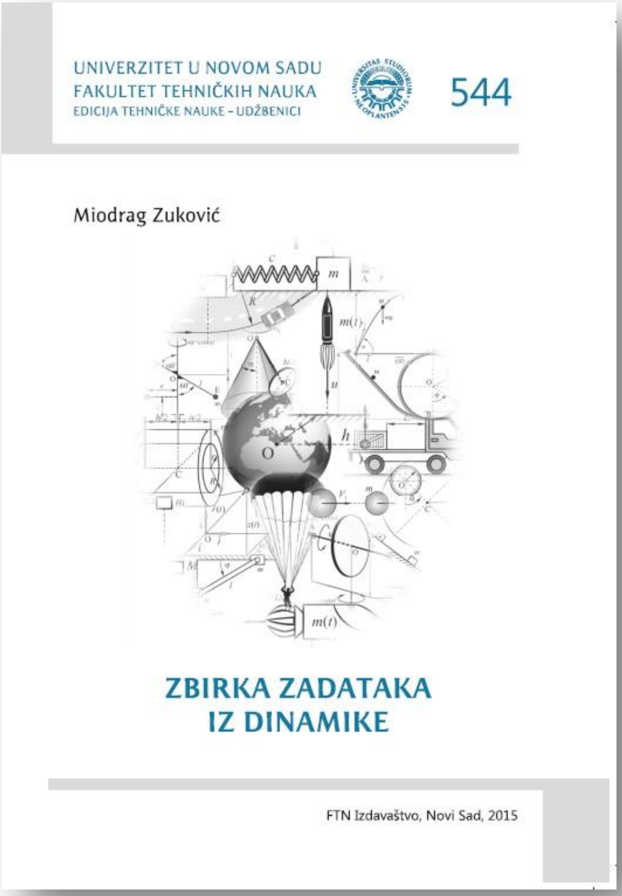
Kinematika i dinamika

Miodrag Zuković

Novi Sad, 2021.

Literatura


УНИВЕРЗИТЕТ У НОВОМ САДУ
ФАКУЛТЕТ ТЕХНИЧКИХ НАУКА
ЕДИЦИЈА ТЕХНИЧКЕ НАУКЕ - УЏБЕНИЦИ
53
Ђорђе С. Ђукић
Теодор М. Атанацковић
Ливија Ј. Цветићанин
МЕХАНИКА


UNIVERZITET U NOVOM SADU
FAKULTET TEHNIČKIH NAUKA
EDICIJA TEHNIČKE NAUKE - UDŽBENICI
544
Miodrag Zuković
ZBIRKA ZADATAKA
IZ DINAMIKE
FTN Izdavaštvo, Novi Sad, 2015

Zadatak 1

1. Kretanje tačke u ravni zadato je parametarskim jednačinama kretanja:

$$(1) \quad x(t) = e^t,$$

$$(2) \quad y(t) = e^{2t} - 1.$$

Odrediti trajektoriju kretanja tačke i nacrtati je. Odrediti položaj, brzinu i ubrzanje tačke kao i poluprečnik krivine trajektorije u početnom trenutku $t_0=0$.

T.P.

(1) $x = e^t$

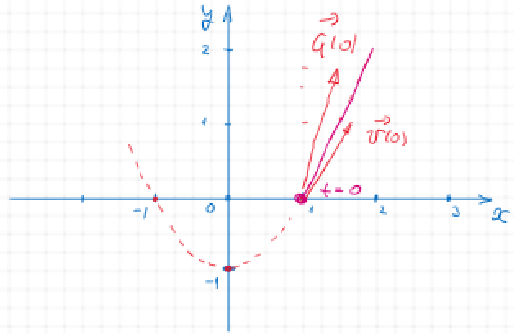
(2) $y = (e^t)^2 - 1$ $\Big\} \xrightarrow[t]{\text{ЕЛ.}}$

$y = x^2 - 1$ | лп

$x = 0 \rightarrow y = -1$

$x = \pm 1 \rightarrow y = 0$

$t \geq 0$ (1) $x \geq 1$



(1) $x(t) = e^t$

(2) $y(t) = e^{2t} - 1$

$\dot{x}(t) = e^t$

$\dot{y}(t) = 2e^{2t}$

$\ddot{x}(t) = e^t$

$\ddot{y}(t) = 4e^{2t}$

$v(t) = \sqrt{(e^t)^2 + (2e^{2t})^2}$

$v(t) = \sqrt{e^{2t} + 4e^{4t}}$

$a(t) = \sqrt{(e^t)^2 + (4e^{2t})^2}$

$a(t) = \sqrt{e^{2t} + 16e^{4t}}$

$t_0 = 0$,

$\dot{x}(0) = e^0 = 1$

$\dot{y}(0) = 2e^0 = 2$

$v(0) = \sqrt{5}\ \frac{m}{s}$

$\ddot{x}(0) = 1$

$\ddot{y}(0) = 4$

$a(0) = \sqrt{17}\ \frac{m}{s^2}$

$R_K = \frac{v^2}{a_N} \rightarrow R_K(0) = \frac{v^2_{(0)}}{a_N(0)} = \frac{(\sqrt{5})^2}{\frac{2}{\sqrt{5}}} = \frac{5\sqrt{5}}{2}\ m$

$a_N(0) = \sqrt{a^2_{(0)} - a_T^2(0)} = \sqrt{17 - \frac{81}{5}} = \sqrt{\frac{85 - 81}{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$

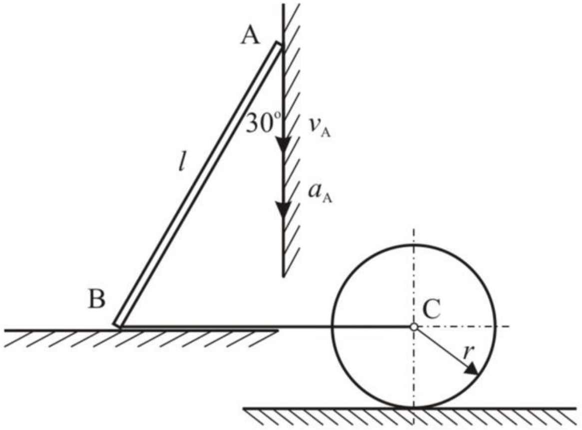
$v(t) = \sqrt{e^{2t} + 4e^{4t}}\ \Big/ \frac{d}{dt}$

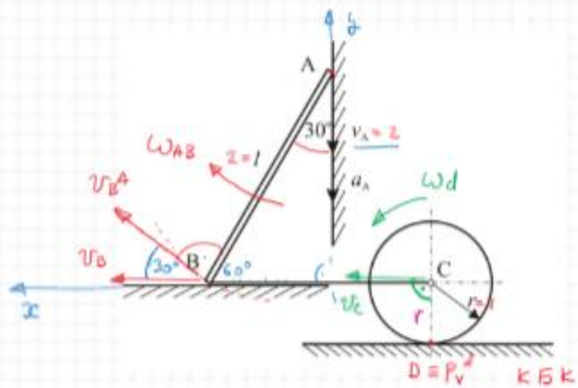
$\dot{v}(t) = \frac{1}{2}\,\frac{2e^{2t} + 16e^{4t}}{\sqrt{e^{2t} + 4e^{4t}}}$

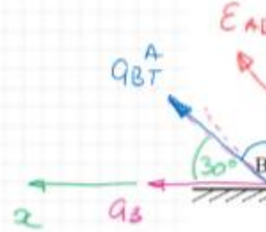
$\dot{v}(0) = \frac{1}{2}\,\frac{2 + 16}{\sqrt{5}} = \frac{9}{\sqrt{5}} \rightarrow a_T^2(0) = \dot{v}^2(0) = \frac{81}{5}$

Zadatak 2

Štap AB, dužine l=2 m klizi svojim krajevima po vertikalnoj, odnosno horizontalnoj vođici. Za kraj B vezano je idealno uže koje je drugim krajem vezano za centar diska poluprečnika r=1 m. Disk se kotrlja bez klizanja po nepokretnom horizontalnom podu. U položaju sistema u kome štap gradi sa vertikalom ugao 30° brzina i ubrzanje kraja A štapa iznose: v_A=2 m/s, a_A=2 m/s^2 (smerovi su dati na slici). Odrediti brzinu i ubrzanje centra diska, kao i njegovu ugaonu brzinu i ugaono ubrzanje, u datom položaju.







$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_B^A$; $\vec{v}_B^A \perp \overline{AB}$

(смер према ω_{AB})

$v_B^A = \overline{AB} \cdot \omega_{AB} = ?$

x: $v_B = 0 + v_B^A \cos 30°$ (1)

y: $0 = -v_A + v_B^A \sin 30°$ (2)

(2) $0 = -2 + v_B^A \cdot \frac{1}{2} \rightarrow v_B^A = 4 \ \frac{m}{s}$

$$\boxed{\omega_{AB} = \frac{v_B^A}{\overline{AB}} = \frac{4}{2} = 2 \ s^{-1}}$$

(1) $v_B = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3} \ \frac{m}{s}$

ИДЕАЛНО УЖЕ $\rightarrow$ $v_C = v_B = 2\sqrt{3} \ \frac{m}{s}$

КБК $\rightarrow$ $D \equiv P_v^d \rightarrow v_C = \overline{CP_v^d} \cdot \omega_d = r\omega_d$

$$\omega_d = \frac{v_C}{r} \ \Big/ \frac{d}{dt} \rightarrow \varepsilon_d = \frac{a_{CT}}{r} = \frac{a_C}{r}$$

$$\omega_d = \frac{2\sqrt{3}}{1} = 2\sqrt{3} \ s^{-1}$$

$\vec{a}_B = \vec{a}_A$ ...

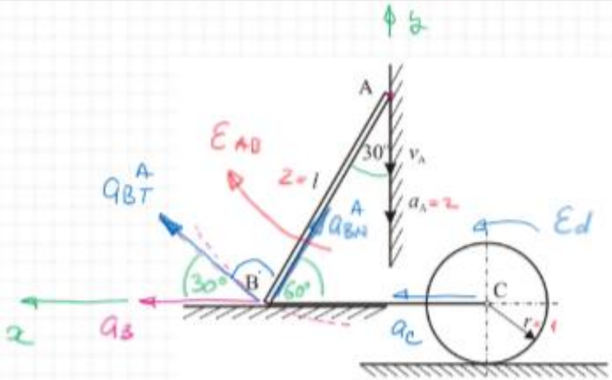
x: $a_B = -a_{BN}^A \cos 60° + a_B$ ...

y: $0 = -a_A + a_{BN}^A \sin 60° + a$ ...

(4) $\rightarrow$ $0 = -2 + \cancel{8}^{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}} + a$ ...

$a_{BT}^A = 4 - 8\sqrt{3} = -$ ...

(3)



$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BN}^A + \vec{a}_{BT}^A$; $\vec{a}_{BN}^A$ (B → A)

$a_{BN}^A = \overline{AB}\,\omega_{AB}^2 = 2\cdot 2^2 = 8\ \frac{m}{s^2}$

$\vec{a}_{BT}^A \perp \overline{AB}$; $a_{BT}^A = \overline{AB}\,\varepsilon_{AB} = ?$

(смер према ε_{AB})

x: $a_B = -a_{BN}^A \cos 60° + a_{BT}^A \cos 30°$ (3)

y: $0 = -a_A + a_{BN}^A \sin 60° + a_{BT}^A \sin 30°$ (4)

(4) → $0 = -2 + \cancel{8}^{\,4}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}} + a_{BT}^A\cdot\frac{1}{2}$

$\boxed{a_{BT}^A = 4 - 8\sqrt{3} = -(8\sqrt{3} - 4)}$ → $\varepsilon_{AB} = - - - -$

(3) → $a_B = -8\cdot\frac{1}{2} + (4 - 8\sqrt{3})\frac{\sqrt{3}}{2} = -4 + 2\sqrt{3} - 12$

$a_B = (-16 + 2\sqrt{3}) = -(16 - 2\sqrt{3})\ \frac{m}{s^2}$

r ω d

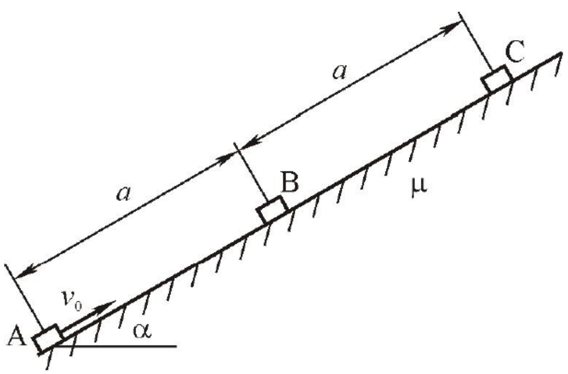
ил. уже $a_C = a_B = -(16 - 2\sqrt{3})$

→ $\underbrace{\varepsilon_d = \frac{a_{CT}}{r} = \frac{a_C}{r}}$

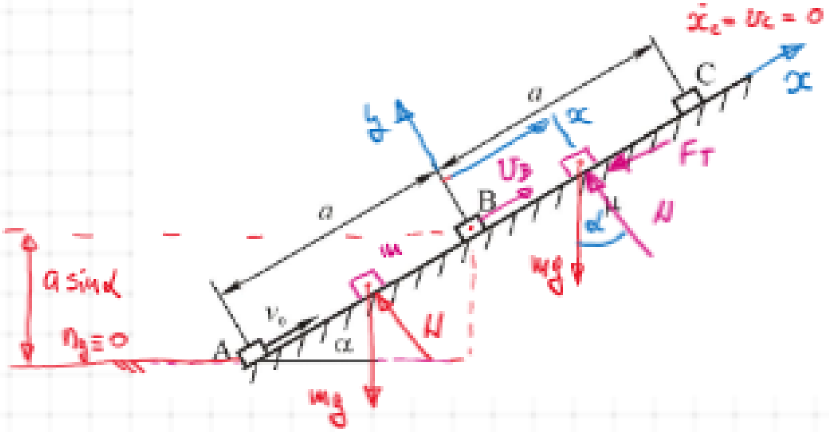
$\varepsilon_d = \frac{a_C}{r} = \frac{-(16 - 2\sqrt{3})}{1}\ s^{-2}$

Zadatak 3

Materijalna tačka, mase m, kreće se po strmoj ravni, nagibnog ugla α,u homogenom polju sile zemljine teže. Tačka započinje kretanje iz položaja A početnom brzinom v_0 i do tačke B se kreće po glatkoj strmoj ravni. U položaju B strma ravan postaje hrapava, a koeficijent trenja između tačke i strme ravni je μ. Odrediti brzinu tačke u položaju B. Odrediti kolikog intenziteta treba da bude početna brzina tačke v_0, da bi se tačka zaustavila u položaju C, AB=BC=a.



Materijalna tačka, mase m, kreće se po strmoj ravni, nagibnog ugla α, u homogenom polju sile zemljine teže. Tačka započinje kretanje iz položaja A početnom brzinom v_0 i do tačke B se kreće po glatkoj strmoj ravni. U položaju B strma ravan postaje hrapava, a koeficijent trenja između tačke i strme ravni je μ. Odrediti brzinu tačke u položaju B. Odrediti kolikog intenziteta treba da bude početna brzina tačke v_0, da bi se tačka zaustavila u položaju C, AB=BC=a.



„A–B"

$$E_{kB} + \Pi_B = E_{kA} + \Pi_A$$

$$\frac{1}{2}\cancel{m}v_B^2 + \cancel{m}ga\sin\alpha = \frac{1}{2}\cancel{m}v_0^2 + 0 \quad / \cdot 2$$

$$v_B^2 = v_0^2 - 2ga\sin\alpha$$

$$v_B = \sqrt{v_0^2 - 2ga\sin\alpha}$$

„B–C"

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_T \quad / \cdot \vec{i} \quad / \cdot \vec{j}$$

(1) $m\ddot{x} = -mg\sin\alpha - F_T$

(2) $0 = -mg\cos\alpha + N$

(3) $F_T = \mu N$

$$(2) \rightarrow N = mg\cos\alpha \rightarrow (3) \quad F_T = \mu m g \cos\alpha$$

$$(1) \quad \cancel{m}\ddot{x} = -\cancel{m} g \sin\alpha - \mu \cancel{m} g \cos\alpha$$

$$\underline{\ddot{x} = -g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}$$

$$\dot{x}\frac{d\dot{x}}{dx} = -g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)$$

$$\int_{\dot{x}_B = v_B}^{\dot{x}_C = 0} \dot{x}\, d\dot{x} = -g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)\int_{x_B = 0}^{x_C = a} dx$$

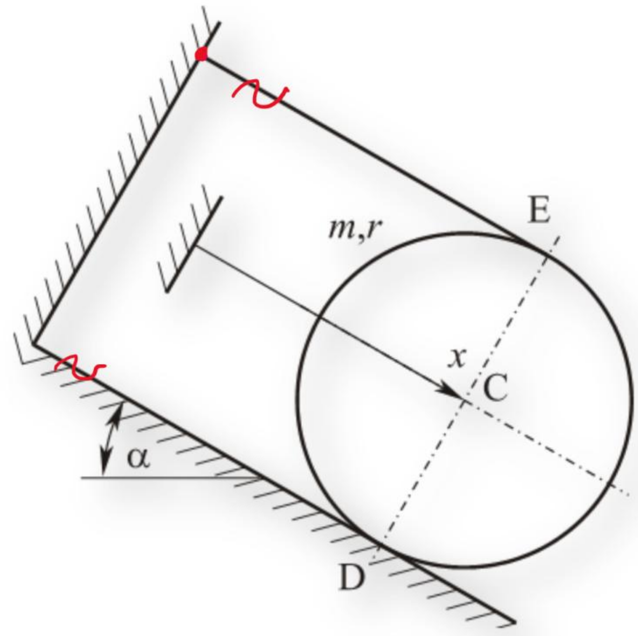
$$-\frac{v_B^2}{2} = -g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)\, a$$

$$v_B^2 = 2g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)\, a$$

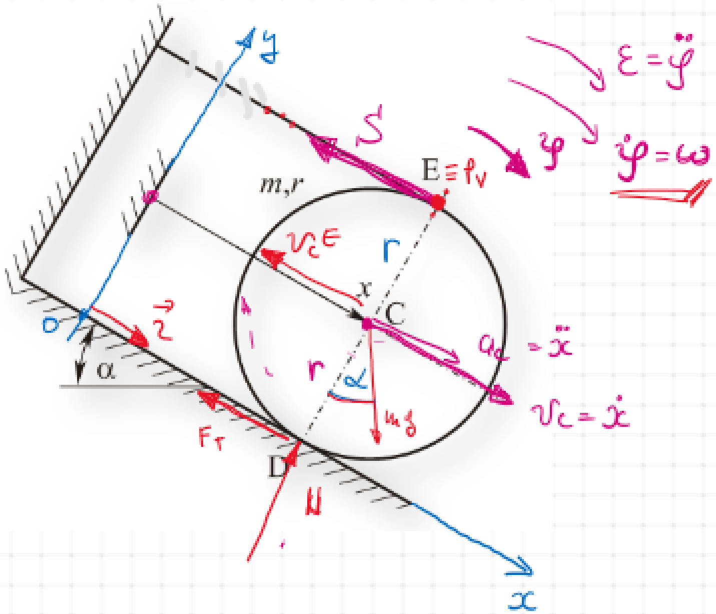
$$v_0^2 - 2ga\sin\alpha = 2g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)\, a \rightarrow v_0 = \text{- - - -}$$

Zadatak 4

Disk, mase m i radijusa r, nalazi se na hrapavoj strmoj ravni nagibnog ugla α. Oko diska je omotano idealno uže koje ne proklizava u odnosu na njega. Drugi kraj užeta vezan je za zid, tako da je deo užeta između zida i diska paralelan sa strmom ravni. Disk kretanje započinje iz stanja mirovanja – pod dejstvom sile težine, savlađujući trenje (koeficijent trenja je μ). Odrediti kretanje centra diska $x(t)$ i silu u užetu S.



$x_c(t) = x(t) = ?$, $S = ?$



ДИСК → РАВ. КР.

T1 $m\cdot\vec{a}_c = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_T + \vec{S} \quad /\cdot\vec{i} \,/\cdot\vec{j}$

(1) $m\cdot\ddot{x} = mg\sin\alpha - F_T - S$

(2) $0 = -mg\cos\alpha + N$

T2 (3) $J_c\cdot\varepsilon = \Sigma M_c$

(3) $\frac{mr^2}{2}\ddot{\varphi} = F_T\cdot r - S\cdot r$

$x, \varphi, N, F_T, S = ?$

D → КСК → (4) $F_T = \mu N$

E → КБК → $E \equiv P_v$ → $\vec{v}_c = \cancel{\vec{v}_E}^{\,0} + \vec{v}_c^{\,E}$; $v_c^E = \overline{CE}\,\omega = r\omega$

$\dot{x}\,\vec{i} = -r\omega\,\vec{i}$

$\dot{x} = -r\omega \rightarrow \dot{x} = -r\dot{\varphi}$ (5)

$\ddot{x} = -r\ddot{\varphi}$

$$(5) \rightarrow \underbrace{\ddot{\varphi} = -\frac{\ddot{x}}{r}} \longrightarrow (3)\quad \frac{m\cancel{r}^2}{2}\left(-\frac{\ddot{x}}{\cancel{r}}\right) = F_T\cdot\cancel{r} - S\cdot\cancel{r} \rightarrow$$

$$* \boxed{S = F_T + \frac{m}{2}\ddot{x} =} \rightarrow (1)$$

$$(1)\quad \underbrace{m\ddot{x} = mg\sin\alpha - \left(F_T + \frac{m}{2}\ddot{x}\right) - F_T}$$

$$\boxed{\left(m + \frac{m}{2}\right)\ddot{x} = mg\sin\alpha - 2F_T} \quad **$$

$$(2) \rightarrow N = mg\cos\alpha \rightarrow (4)\quad \underline{F_T = \mu mg\cos\alpha}$$

$$** \rightarrow \quad \frac{3}{2}\cancel{m}\ddot{x} = \cancel{m}g\sin\alpha - 2\mu\cancel{m}g\cos\alpha$$

$$\bigstar\ \boxed{\ddot{x} = \frac{2}{3}g(\sin\alpha - 2\mu\cos\alpha) = C > 0}$$

$$\left.\begin{matrix}\bigstar\\ F_T\end{matrix}\right\} \rightarrow * \quad \boxed{S = \mu mg\cos\alpha + \frac{m}{\cancel{2}}\frac{\cancel{2}}{3}g(\sin\alpha - 2\mu\cos\alpha)}$$

$$\boxed{S = \dots}$$

$$\bigstar\quad \boxed{\ddot{x} = C} \int\rightarrow \boxed{\dot{x} = Ct + c_1} \int\rightarrow \boxed{x = C\frac{t^2}{2} + c_1 t + c_2}$$

$$\text{ПУ} \leftarrow \left.\begin{matrix}\dot{x}(0) = 0\\ x(0) = 0\end{matrix}\right\} \rightarrow \left.\begin{matrix}c_1 = 0\\ c_2 = 0\end{matrix}\right\} \rightarrow x = C\frac{t^2}{2} = \dots$$

Zadatak 5

Ispitni zadaci

Kinematika i dinamika

Miodrag Zuković

Novi Sad, 2021.