

Odavde je pomeranje klina

$$x = \overline{OB} = L \frac{\sin(\alpha - \theta)}{\sin \alpha},$$

pa se diferenciranjem po vremenu dobija brzina klina

$$\dot{x} = -L \frac{\cos(\alpha - \theta)}{\sin \alpha} \dot{\theta}, \quad (b)$$

Kinetička energija sistema je

$$E_k = \frac{1}{2} J_O \dot{\theta}^2 + \frac{M}{2} \dot{x}^2 = \frac{1}{2} \frac{1}{3} m L^2 \dot{\theta}^2 + \frac{M}{2} L^2 \frac{\cos^2(\alpha - \theta)}{\sin^2 \alpha} \dot{\theta}^2.$$

Početna kinetička energija sistema jednaka je nuli a kad štap dodirne pod ona iznosi

$$E_k(\theta = 0) = \frac{1}{6} m L^2 \dot{\theta}_0^2 + \frac{M}{2} L^2 \dot{\theta}_0^2 \cot^2 \alpha.$$

Zakon o promeni kinetičke energije glasi

$$E_k(\theta = 0) - E_{k0} = A_{mg},$$

odnosno

$$\frac{1}{6} m L^2 \dot{\theta}_0^2 + \frac{M}{2} L^2 \dot{\theta}_0^2 \cot^2 \alpha = mg \frac{L}{2} \sin \theta_0.$$

Konačno se odavde dobija

$$\dot{\theta}_0^2 = \frac{3mg \sin \theta_0}{L(m + 3M \cot^2 \alpha)},$$

a iz (b) brzina klina

$$\dot{x}(\theta = 0) = \sqrt{\frac{3mgL \sin \theta_0}{m \tan^2 \alpha + 3M}}.$$

3.6 Obrtanje tela oko nepokretne tačke

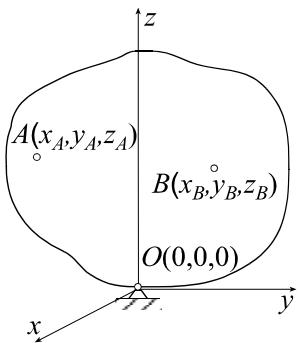
3.6.1 Osnovni pojmovi

Ako je kretanje krutog tela ograničeno samo jednim nepokretnim sfernim zglobom, za koji je telo vezano, onda se radi o obrtanju krutog tela oko

nepomične tačke. Pri ovom kretanju telo se u svakom trenutku vremena obrće oko pokretne ose koja prolazi kroz sferan zglob.

Najjednostavniji, a možda i najočigledniji, primer ovakvog kretanja je kretanje čigre dok joj vrh ostaje nepokretan na ravni po kojoj se čigra vrti. Ova čigra ima važnu osobinu da ako se udari po vrhu, a dok se vrti dovoljno brzo oko svoje ose simetrije, vrh čigre ne skreće u pravcu udarca već u pravcu normale na pravac udarca. Šta više, posle nekoliko oscilacija, vrh ose čigre se vraća u položaj koji je imao pre udarca.

Ova osobina čigre odavno je privlačila pažnju ne samo naučnika nego i mnogih drugih ljudi. 1852. godine francuski fizičar Leon Fouko³ je dokazao obrtanje zemlje pomoći pribora čiji je glavni deo bila uravnotežena čigra. Fouko je svoj pribor nazvao giroskop. Od tada svako telo koje se obrće oko ose koja može da menja pravac u prostoru ali uvek prolazi kroz jednu tačku naziva se giroskop. Zbog svojih neuobičajenih, ali čoveku potrebnih, osobina giroskop se koristi u mnogim oblastima tehnike.



Slika 3.46:

Broj stepeni slobode kretanja

Položaj tela u prostoru određen je sa položajem tri tačke tela koje ne leže na istom pravcu. U nepokretnoj tački O usvoji se koordinatni početak nepokretnog koordinatnog sistema $Oxyz$. Pošto je nepokretna tačka O kruto vezana za telo, položaj tela u prostoru je potpuno određen sa položajem još dve njegove tačke A i B (slika 3.46). Zbog krutosti tela šest Dekartovih koordinata tačaka A i B , odnosno x_A, y_A, z_A, x_B, y_B i z_B , zadovoljavaju uslove konstantnosti rastojanja između sve tri tačke O , A i B

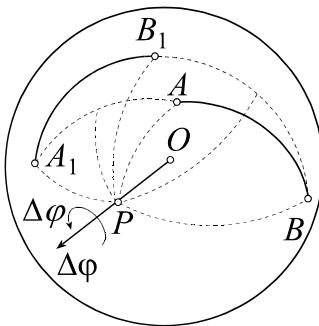
$$\begin{aligned}\overline{AB} &= \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2} = \text{const.}, \\ \overline{OB} &= \sqrt{x_B^2 + y_B^2 + z_B^2} = \text{const.}, \\ \overline{OA} &= \sqrt{x_A^2 + y_A^2 + z_A^2} = \text{const.}\end{aligned}\tag{3.80}$$

Iz ovih jednačina mogu se bilo koje tri koordinate, na primer x_A, x_B , i y_B , izraziti kao funkcije preostale tri nezavisne koordinate, na primer

³Jean Bernard Léon Foucault, 18. 09.1819 - 11. 02. 1868

y_A , z_A , i z_B , pa je broj stepeni slobode sfernog kretanja tri. Jednačine (3.80) predstavljaju tri jednačine veza između koordinata. Broj stepeni slobode je ukupan broj parametara potrebnih za određivanje položaja tela umanjen za broj veza, znači šest manje tri je tri.

Dalamber-Ojlerova teorema



Slika 3.47:

Pri obrtanju tela oko nepomične tačke O svaka tačka tela se kreće po površini sfere sa centrom u tački O (slika 3.47).

Neka su tačke A i B odabrane tako da im je rastojanje od tačke O jednako, odnosno $\overline{OA} = \overline{OB}$. Opiše se sfera kroz te dve tačke sa centrom u tački O (Slika 3.47). Neka je u trenutku t položaj tela određen položajem tačaka A i B koje formiraju luk velikog kruga na sferi, a u trenutku $t + \Delta t$ lukom A_1B_1 . Veliki krug na sferi je krug koji je presek sfere sa bilo kojom ravni koja prolazi kroz centar sfere. Spoje se

tačke A i A_1 , B i B_1 lukovima velikih krugova. Iz sredine lukova AA_1 i BB_1 povuku se sferne normale, koje su takođe lukovi velikih krugova. Te sferne normale se seknu u tački P na površini sfere. Sferni trouglovi ABP i A_1B_1P su podudarni, jer su im sferne stranice, odnosno lukovi, jednaki

$$\widehat{AB} = \widehat{A_1B_1}, \quad \widehat{AP} = \widehat{A_1P}, \quad \widehat{BP} = \widehat{B_1P}.$$

Spoje se tačke O i P . Ako se tačka P sfernog trougla kruto veže za sferu, onda se sferni trougao ABP dovodi do poklapanja sa trouglom A_1B_1P obrtanjem za neki ugao $\Delta\varphi$ oko pravca OP . Pravac OP se naziva osa konačnog obrtanja. Osa konačnog obrtanja je uopštenje pojma centra konačnog obrtanja ravanskog kretanja.

Ove činjenice predstavljaju sadržaj Dalamber⁴-Ojlerove teoreme: Svakog pomeranja tela, pri sfernom kretanju oko nepokretne tačke O , iz jednog u drugi položaj, može se ostvariti jednim obrtanjem oko ose OP koja prolazi kroz tačku O .

⁴J.D'Alembert 1717 – 1783

Ako je $\Delta\varphi$ konačan ugao obrtanja tela oko ose OP za vreme Δt , onda je srednja ugaona brzina tog obrtanja $\omega_s = \Delta\varphi/\Delta t$. Vektor srednje ugaone brzine konačnog obrtanja $\vec{\omega}_s$ pada u pravac ose OP , a smer mu je u skladu sa smerom obrtanja. Kada se pomeranje tela obavi za infinitezimalno malo vreme dt , iz jednog u drugi infinitezimalno bliski položaj, onda je i ugao obrtanja $d\varphi$ infinitezimalno mali. Pri infinitezimalnom pomeranju srednja ugaona brzina teži ka trenutnoj ugaonoj brzini $\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt}$, a odgovarajući vektor $\vec{\omega}$ je u pravcu odgovarajućeg trenutnog položaja pravca OP . Sferno kretanje u konačnom vremenskom intervalu odvija se beskonačnim nizom obrtanja oko trenutne ose obrtanja, koja stalno menja svoj položaj u prostoru prolazeći pri tom kroz nepokretnu tačku O . Trenutna osa obrtanja tokom kretanja opisuje površinu u prostoru sa temenom u nepokretnoj tački O . Zbog promenljivosti pravca ugaone brzine tokom kretanja ugaono ubrzanje $\vec{\varepsilon}$, koje je izvod po vremenu ugaone brzine, odnosno $\vec{\varepsilon} = \dot{\vec{\omega}}$, ne pada u pravac ugaone brzine, ali takođe prolazi kroz tačku O . I ovaj vektor tokom vremena svojim kretanjem opisuje drugu površinu u prostoru sa temenom u tački O .

Ako je $\vec{\omega}$ trenutna ugaona brzina krutog tela pri njegovom obrtanju oko nepokretne tačke onda tačka M u telu, čiji je položaj u odnosu na nepokretnu tačku O određen vektorom položaja \vec{r} , ima brzinu

$$\vec{v}_M = \vec{\omega} \times \vec{r}. \quad (3.81)$$

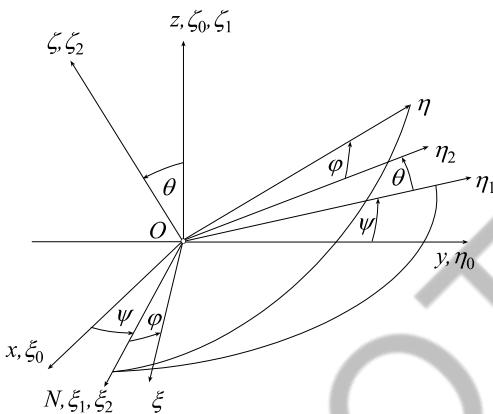
Napomenimo da su brzine svih tačaka tela na trenutnoj osi obrtanja jednake nuli.

Ojlerovi uglovi

Pošto telo koje se obrće oko nepokretne tačke ima tri stepena slobode kretanja, njegov položaj u prostoru određen je sa tri nezavisna parametra. Skoro uvek, tri parametra koja određuju položaj tela pri sfernom kretanju su tri ugla. U raznim oblastima mehanike i tehnike ovi uglovi se biraju na razne načine. Od svih tih načina najstariji je onaj koji se pripisuje Ojleru i koji se ovde koristi.

Neka se u nepokretnu tačku O postavi nepokretni koordinatni sistem $Oxyz$ (Slika 3.48). Za telo se veže koordinatni sistem $O\xi\eta\varsigma$. Ovaj koordinatni sistem se kreće zajedno sa telom i jednoznačno određuje položaj

tela u odnosu na nepokretni koordinatni sistem. Položaj pokretnog koordinatnog sistema u odnosu na nepokretni određen je sa tri nezavisna ugla koji se nazivaju Ojlerovim uglovima. Iz polaznog položaja tela, kada se koordinatne ose ξ , η i ζ poklapaju sa osama x , y i z , telo se dovodi u proizvoljan položaj posle tri obrtanja. Ta obrtanja su za konačne uglove pa, zbog poznate zavisnosti krajnjeg položaja tela od redosleda izvršenih obrtanja, odnosno zbog nekomutativnosti pri sabiranju obrtanja, mora se slediti sledeći red ta tri obrtanja:



Slika 3.48:

Ravan $O\xi_2\eta_2$ zaklapa ugao θ sa nepokretnom horizontalnom ravni Oxy .

3. Treće obrtanje. Telo se obrne za ugao φ oko ose ζ_2 u pozitivnom matematičkom smeru. Ovaj ugao se naziva ugao sopstvenog obrtanja.

Posle ova tri obrtanja, telo dolazi u krajnji položaj, odnosno koordinatne ose dolaze u krajnji položaj $O\xi\eta\zeta$.

Poznate zavisnosti uglova precesije, nutacije i sopstvenog obrtanja u funkciji od vremena

$$\psi = \psi(t), \quad \theta = \theta(t), \quad \varphi = \varphi(t), \quad (3.82)$$

su zakoni sfernog kretanja tela.

Vektor trenutne ugaone brzine

Obrtanje tela oko nepomične tačke je složeno kretanje od tri obrtanja oko tri ose koje se seku u nepokretnoj tački. Odgovarajući vektori ugaonih

1. Prvo obrtanje. Zaokrene se pokretni koordinatni sistem za ugao ψ oko ose z u pozitivnom matematičkom smeru. Ovaj ugao se naziva ugao precesije. Položaj koordinatnih osa $O\xi_1\eta_1\zeta_1$, posle tog obrtanja, prikazan je na slici 3.48. Pravac ose ζ_1 , odnosno pravac ON , naziva se čvorna osa.

2. Drugo obrtanje. Zaokrene se telo oko čvorne ose ζ_1 za ugao θ u pozitivnom matematičkom smeru. Ugao θ se naziva ugao nutacije. Posle ovog obrtanja, koordinatne ose su u položaju $\xi_2\eta_2\zeta_2$.

brzina su: ugaona brzina precesionog obrtanja (Slika 3.49)

$$\vec{\omega}_p = \dot{\psi} \vec{k} = \omega_p \vec{k}, \quad (3.83)$$

ugaona brzina nutacije

$$\vec{\omega}_n = \dot{\theta} \vec{n} = \omega_n \vec{n}, \quad (3.84)$$

i ugaona brzina sopstvenog obrtanja

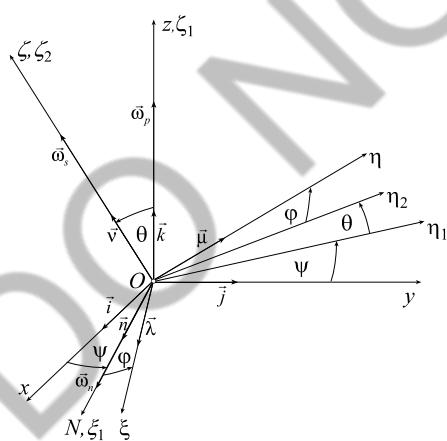
$$\vec{\omega}_s = \dot{\varphi} \vec{\nu} = \omega_s \vec{\nu}. \quad (3.85)$$

gde su \vec{i} , \vec{j} i \vec{k} jedinični vektori nepokretnog koordinatnog sistema $Oxyz$, $\vec{\lambda}$, $\vec{\mu}$ i $\vec{\nu}$ jedinični vektori pokretnog koordinatnog sistema $O\xi\eta\varsigma$, a \vec{n} je jedinični vektor u pravcu čvorne ose.

Ukupna ugaona brzina $\vec{\omega}$ obrtanja tela oko nepokretne tačke O iznosi

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_p + \vec{\omega}_n + \vec{\omega}_s. \quad (3.86)$$

Ojlerove kinematičke jednačine



Slika 3.49:

U prethodnom izlaganju, vektor ugaone brzine ima tri komponente, koje nisu međusobno normalne. Ako se ova tri vektora projektuju na ose nepokretnog $Oxyz$ ili pokretnog $O\xi\eta\varsigma$ koordinatnog sistema, onda se dobijaju projekcije ugaone brzine na tri međusobno normalne ose.

Vektor ugaone brzine nutacije $\vec{\omega}_n$ pada u pravac čvorne ose, a vektor ugaone brzine sopstvenog obrtanja $\vec{\omega}_s$ u pravac ose ς , pa su njihove projekcije na ose pokretnog koordinatnog sistema $O\xi\eta\varsigma$ očigledne. Vektor ugaone brzine precesije $\vec{\omega}_p$ pada u pravac ose z , a nalazi se u vertikalnoj ravni $O\eta_2z\varsigma$, i zbog toga projekcija tog vektora na ravan $O\xi\eta$

iznosi $\dot{\psi} \sin \theta$ i pada u pravac ose η_2 .

Konačne projekcije vektora ugaone brzine $\vec{\omega}$ (3.86) na ose pokretnog koordinatnog sistema $O\xi\eta\varsigma$ glase (Slika 3.49)

$$\begin{aligned}\omega_\xi &= \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi, \\ \omega_\eta &= \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi, \\ \omega_\varsigma &= \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi}.\end{aligned}\quad (3.87)$$

Ove jednačine se zovu Ojlerove kinematičke jednačine za pokretni koordinatni sistem.

Vektor ugaone brzine u pokretnom koordinatnom sistemu ima oblik

$$\vec{\omega} = \omega_\xi \vec{\lambda} + \omega_\eta \vec{\mu} + \omega_\varsigma \vec{\nu}. \quad (3.88)$$

Intenzitet ugaone brzine obrtanja je

$$\omega = \sqrt{\omega_\xi^2 + \omega_\eta^2 + \omega_\varsigma^2}, \quad (3.89)$$

a pravac vektora ugaone brzine $\vec{\omega}$ u odnosu na ose pokretnog koordinatnog sistema $O\xi\eta\varsigma$ određen je sa

$$\cos \sphericalangle(\vec{\omega}, \vec{\lambda}) = \frac{\omega_\xi}{\omega}, \quad \cos \sphericalangle(\vec{\omega}, \vec{\mu}) = \frac{\omega_\eta}{\omega}, \quad \cos \sphericalangle(\vec{\omega}, \vec{\nu}) = \frac{\omega_\varsigma}{\omega}. \quad (3.90)$$

Pri projektovanju ugaone brzine $\vec{\omega}$ na ose nepokretnog koordinatnog sistema $Oxyz$ dobija se

$$\begin{aligned}\omega_x &= \dot{\theta} \cos \psi + \dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi, \\ \omega_y &= \dot{\theta} \sin \psi - \dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi, \\ \omega_z &= \dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta.\end{aligned}\quad (3.91)$$

Ove jednačine se zovu Ojlerove kinematičke jednačine za nepokretan koordinatni sistem.

Vektor ugaone brzine u nepokretnom koordinatnom sistemu ima oblik

$$\vec{\omega} = \omega_x \vec{i} + \omega_y \vec{j} + \omega_z \vec{k}.$$

Intenzitet ugaone brzine obrtanja je

$$\omega = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2},$$

a pravac vektora ugaone brzine $\vec{\omega}$ u odnosu na ose nepokretnog koordinatnog sistema $Oxyz$ određen je sa

$$\cos \sphericalangle(\vec{\omega}, \vec{i}) = \frac{\omega_x}{\omega}, \quad \cos \sphericalangle(\vec{\omega}, \vec{j}) = \frac{\omega_y}{\omega}, \quad \cos \sphericalangle(\vec{\omega}, \vec{k}) = \frac{\omega_z}{\omega},$$

gde su \vec{i} , \vec{j} i \vec{k} jedinični vektori osa x , y i z .

3.6.2 Glavni moment količine kretanja

Posmatramo tačku M mase dm koje pripada telu koje vrši sferno kretanje oko tačke O . Ako je \vec{r} vektor položaja tačke M u odnosu na tačku O , a brzina tačke \vec{v} , elementarni moment količine kretanja mase dm iznosi

$$d\vec{L}_0 = \vec{r} \times \vec{v} dm. \quad (3.92)$$

Iz Kinematike je poznato da je brzina kretanja tačke pri sfernom kretanju tela vektorski proizvod ugaone brzine obrtanja tela $\vec{\omega}$ oko nepokretnе tačke O i vektora položaja tačke \vec{r} , odnosno

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}. \quad (3.93)$$

Zamenom (3.93) u (3.92) elementarni moment količine kretanja dobija oblik

$$d\vec{L}_O = \vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) dm, \quad (3.94)$$

odnosno posle transformacije dvostrukog vektorskog proizvoda

$$d\vec{L}_O = \vec{\omega} (\vec{r} \cdot \vec{r}) dm - \vec{r} (\vec{\omega} \cdot \vec{r}) dm, \quad (3.95)$$

gde su izrazi u zagradi skalarni proizvodi dva vektora. Položaj tačke M u koordinatnom sistemu $\xi\eta\zeta$ određen je vektorom položaja

$$\vec{r} = \xi \vec{\lambda} + \eta \vec{\mu} + \zeta \vec{\nu}. \quad (3.96)$$

Koristeći (3.88) i (3.96) skalarni proizvodi u (3.95) postaju

$$\begin{aligned} (\vec{r} \cdot \vec{r}) &= r^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2, \\ (\vec{\omega} \cdot \vec{r}) &= \omega_\xi \xi + \omega_\eta \eta + \omega_\zeta \zeta. \end{aligned} \quad (3.97)$$

Zamenom (3.97) u (3.95) sledi

$$\begin{aligned} d\vec{L}_O &= \left(\omega_\xi \vec{\lambda} + \omega_\eta \vec{\mu} + \omega_\zeta \vec{\nu} \right) (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) dm \\ &\quad - (\xi \vec{\lambda} + \eta \vec{\mu} + \zeta \vec{\nu})(\xi \omega_\xi + \eta \omega_\eta + \zeta \omega_\zeta) dm, \end{aligned} \quad (3.98)$$

odnosno nakon sređivanja i integraljenja

$$\begin{aligned} \vec{L}_O &= \omega_\xi \vec{\lambda} \int_M (\eta^2 + \zeta^2) dm - \vec{\lambda} \int_M (\xi \eta \omega_\eta + \xi \zeta \omega_\zeta) dm \\ &\quad + \omega_\eta \vec{\mu} \int_M (\xi^2 + \zeta^2) dm - \vec{\mu} \int_M (\xi \eta \omega_\xi + \eta \zeta \omega_\zeta) dm \\ &\quad + \omega_\zeta \vec{\nu} \int_M (\xi^2 + \eta^2) dm - \vec{\nu} \int_M (\xi \zeta \omega_\xi + \eta \zeta \omega_\eta) dm. \end{aligned} \quad (3.99)$$

Koristeći oznake za aksijalne (3.13) i centrifugalne (3.14) momente inercije, dobija se ukupna vrednost momenta količine kretanja krutog tela pri njegovom obrtanju oko nepomične tačke O

$$\vec{L}_O = L_\xi \vec{\lambda} + L_\eta \vec{\mu} + L_\zeta \vec{\nu}, \quad (3.100)$$

gde su L_ξ , L_η i L_ζ momenti količine kretanja krutog tela za koordinatne ose pokretnog koordinatnog sistema ξ , η i ζ

$$\begin{aligned} L_\xi &= J_\xi \omega_\xi - (J_{\xi\eta} \omega_\eta + J_{\xi\zeta} \omega_\zeta), \\ L_\eta &= J_\eta \omega_\eta - (J_{\eta\xi} \omega_\xi + J_{\eta\zeta} \omega_\zeta), \\ L_\zeta &= J_\zeta \omega_\zeta - (J_{\zeta\xi} \omega_\xi + J_{\zeta\eta} \omega_\eta). \end{aligned} \quad (3.101)$$

Ako su ose ξ , η i ζ glavne centralne ose inercije, moment količine kretanja tela (3.100) ima oblik

$$\vec{L}_O = J_\xi \omega_\xi \vec{\lambda} + J_\eta \omega_\eta \vec{\mu} + J_\zeta \omega_\zeta \vec{\nu}, \quad (3.102)$$

jer su za glavne centralne ose inercije centrifugalni momenti inercije jednak nuli.

3.6.3 Kinetička energija tela

Posmatrajmo materijalnu tačku mase dm koja pripada telu koje se obrće oko nepokretne tačke O . Ako je brzina tačke \vec{v} onda njena kinetička energija iznosi

$$dE_k = \frac{1}{2}(\vec{v} \cdot \vec{v})dm = \frac{1}{2}v^2dm. \quad (3.103)$$

Koristeći relaciju za brzinu tačke tela koje vrši sferno kretanje (3.93), kao i vektore položaja (3.96) i ugaone brzine (3.88), određuju se projekcije brzine tačke na ose pokretnog koordinatnog sistema ξ , η i ζ

$$v_\xi = \zeta\omega_\eta - \eta\omega_\zeta, \quad v_\eta = \xi\omega_\zeta - \zeta\omega_\xi, \quad v_\zeta = \eta\omega_\xi - \xi\omega_\eta. \quad (3.104)$$

Kako je kvadrat intenziteta vektora brzine zbir kvadrata projekcija brzine (3.104) na pojedine ose

$$v^2 = v_\xi^2 + v_\eta^2 + v_\zeta^2, \quad (3.105)$$

elementarna kinetička energija prema (3.103) glasi

$$dE_k = \frac{1}{2}dm [(\zeta\omega_\eta - \eta\omega_\zeta)^2 + (\xi\omega_\zeta - \zeta\omega_\xi)^2 + (\eta\omega_\xi - \xi\omega_\eta)^2]. \quad (3.106)$$

Nakon sređivanja izraza (3.106) i integracije po ukupnoj masi tela, sledi da je ukupna kinetička energija tela

$$\begin{aligned} E_k &= \frac{1}{2}\omega_\xi^2 \int_M (\eta^2 + \zeta^2)dm + \frac{1}{2}\omega_\eta^2 \int_M (\xi^2 + \zeta^2)dm + \frac{1}{2}\omega_\zeta^2 \int_M (\xi^2 + \eta^2)dm \\ &\quad - \omega_\xi\omega_\eta \int_M \xi\eta dm - \omega_\xi\omega_\zeta \int_M \xi\zeta dm - \omega_\eta\omega_\zeta \int_M \eta\zeta dm. \end{aligned} \quad (3.107)$$

Uvodeći oznake za aksijalne (3.13) i centrifugalne (3.14) momente inercije, kinetička energija (3.107) postaje

$$E_k = \frac{1}{2} (J_\xi\omega_\xi^2 + J_\eta\omega_\eta^2 + J_\zeta\omega_\zeta^2) - J_{\xi\eta}\omega_\xi\omega_\eta - J_{\xi\zeta}\omega_\xi\omega_\zeta - J_{\eta\zeta}\omega_\eta\omega_\zeta. \quad (3.108)$$

Ako su ose ξ , η i ζ glavne ose inercije, kinetička energija tela koje se obrće oko nepokretne tačke O iznosi

$$E_k = \frac{1}{2} (J_\xi\omega_\xi^2 + J_\eta\omega_\eta^2 + J_\zeta\omega_\zeta^2). \quad (3.109)$$

Direktnim računom može se proveriti da je tačna i sledeća vrlo korisna veza

$$2E_k = \vec{\omega} \cdot \vec{L}_O. \quad (3.110)$$

3.6.4 Modifikovane Ojlerove jednačine obrtanja tela oko nepokretne tačke

Neka na telo koje se obrće oko nepomične tačke O deluju spoljašnje sile \vec{F}_i i spreg momenta $\vec{\mathfrak{M}}$. Za ovo kretanje krutog tela teta promena momenta količine kretanja tela za nepokretnu tačku O jednaka je zbiru momenata za tačku O svih spoljašnjih sila i sprega koji deluju na dato telo, odnosno

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{\mathfrak{M}} + \sum_{i=1}^n \vec{M}_O^{\vec{F}_i}, \quad (3.111)$$

gde je $\vec{M}_O^{\vec{F}_i}$ moment sile \vec{F}_i za tačku O . Neka se telo okreće ugaonom brzinom $\vec{\omega}$, a pokretni koordinatni sistem, koji je postavljen u nepokretnu tačku O , ima ugaonu brzinu $\vec{\Omega}$ koja se razlikuje od ugaone brzine tela. Ovaj pokretan koordinatni sistem se zove Rezalov koordinatni sistem. Projektujmo (3.111) na ose Rezalovog koordinatnog sistema.

U prethodnom poglavlju je izrazom (3.100) prikazan moment količine kretanja tela za tačku O u obliku

$$\vec{L}_O = L_\xi \vec{\lambda} + L_\eta \vec{\mu} + L_\zeta \vec{\nu}, \quad (3.112)$$

gde je

$$\begin{aligned} L_\xi &= J_\xi \omega_\xi - (J_{\xi\eta} \omega_\eta + J_{\xi\zeta} \omega_\zeta), \\ L_\eta &= J_\eta \omega_\eta - (J_{\eta\xi} \omega_\xi + J_{\eta\zeta} \omega_\zeta), \\ L_\zeta &= J_\zeta \omega_\zeta - (J_{\zeta\xi} \omega_\xi + J_{\zeta\eta} \omega_\eta). \end{aligned} \quad (3.113)$$

Brzina promene vektora momenta količine kretanja ima dve komponente.

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \left(\frac{d\vec{L}_O}{dt} \right)_1 + \left(\frac{d\vec{L}_O}{dt} \right)_2. \quad (3.114)$$

Prva komponenta je usled promene intenziteta vektora momenta količine kretanja

$$\left(\frac{d\vec{L}_O}{dt} \right)_1 = \frac{dL_\xi}{dt} \vec{\lambda} + \frac{dL_\eta}{dt} \vec{\mu} + \frac{dL_\zeta}{dt} \vec{\nu}, \quad (3.115)$$

a druga usled promene pravca vektora momenta količine kretanja

$$\left(\frac{d\vec{L}_O}{dt} \right)_2 = \vec{\Omega} \times \vec{L}_O. \quad (3.116)$$

Za vektore ugaone brzine

$$\vec{\Omega} = \Omega_\xi \vec{\lambda} + \Omega_\eta \vec{\mu} + \Omega_\zeta \vec{\nu}, \quad (3.117)$$

i momenta količine kretanja (3.112) brzina promene pravca vektora momenta količine kretanja (3.116) iznosi

$$\left(\frac{d\vec{L}_O}{dt} \right)_2 = \vec{\lambda} (L_\zeta \Omega_\eta - L_\eta \Omega_\zeta) + \vec{\mu} (L_\xi \Omega_\zeta - L_\zeta \Omega_\xi) + \vec{\nu} (L_\eta \Omega_\xi - L_\xi \Omega_\eta). \quad (3.118)$$

Zamenom (3.115) i (3.118) u (3.114) dobija se

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{L}_O}{dt} &= \vec{\lambda} \left(\frac{dL_\xi}{dt} + (L_\zeta \Omega_\eta - L_\eta \Omega_\zeta) \right) \\ &\quad + \vec{\mu} \left(\frac{dL_\eta}{dt} + (L_\xi \Omega_\zeta - L_\zeta \Omega_\xi) \right) \\ &\quad + \vec{\nu} \left(\frac{dL_\zeta}{dt} + (L_\eta \Omega_\xi - L_\xi \Omega_\eta) \right). \end{aligned} \quad (3.119)$$

Projektovanjem (3.111) uz (3.119) na ose pokretnog koordinatnog sistema dobijaju se modifikovane Ojlerove jednačine kretanja

$$\begin{aligned} \frac{dL_\xi}{dt} - (L_\eta \Omega_\zeta - L_\zeta \Omega_\eta) &= M_\xi^{\vec{F}_i} + \mathfrak{M}_\xi, \\ \frac{dL_\eta}{dt} - (L_\zeta \Omega_\xi - L_\xi \Omega_\zeta) &= M_\eta^{\vec{F}_i} + \mathfrak{M}_\eta, \\ \frac{dL_\zeta}{dt} - (L_\xi \Omega_\eta - L_\eta \Omega_\xi) &= M_\zeta^{\vec{F}_i} + \mathfrak{M}_\zeta. \end{aligned} \quad (3.120)$$

3.6.5 Ojlerove jednačine obrtanja tela oko nepokretne tačke

U slučaju da se pokretni koordinatni sistem kreće istom ugaonom brzinom kao i telo, odnosno ako je $\vec{\Omega} = \vec{\omega}$, jednačine (3.120) se transformišu u obične Ojlerove jednačine

$$\begin{aligned}\frac{dL_\xi}{dt} - (L_\eta\omega_\zeta - L_\zeta\omega_\eta) &= M_\xi^{\vec{F}_i} + \mathfrak{M}_\xi, \\ \frac{dL_\eta}{dt} - (L_\zeta\omega_\xi - L_\xi\omega_\zeta) &= M_\eta^{\vec{F}_i} + \mathfrak{M}_\eta, \\ \frac{dL_\zeta}{dt} - (L_\xi\omega_\eta - L_\eta\omega_\xi) &= M_\zeta^{\vec{F}_i} + \mathfrak{M}_\zeta.\end{aligned}\quad (3.121)$$

Ako su ose ξ , η i ζ glavne ose inercije, a projekcije momenta količine kretanja date u obliku (3.102), Ojlerove diferencijalne jednačine kretanja (3.121) glase

$$\begin{aligned}J_\xi \frac{d\omega_\xi}{dt} - (J_\eta - J_\zeta)\omega_\eta\omega_\zeta &= M_\xi^{\vec{F}_i} + \mathfrak{M}_\xi, \\ J_\eta \frac{d\omega_\eta}{dt} - (J_\zeta - J_\xi)\omega_\zeta\omega_\xi &= M_\eta^{\vec{F}_i} + \mathfrak{M}_\eta, \\ J_\zeta \frac{d\omega_\zeta}{dt} - (J_\xi - J_\eta)\omega_\xi\omega_\eta &= M_\zeta^{\vec{F}_i} + \mathfrak{M}_\zeta.\end{aligned}\quad (3.122)$$

Ove jednačine je izveo 1765 g. Ojler. Vidi se da one predstavljaju sistem od tri spregnute nelinearne diferencijalne jednačine po nepoznatim projekcijama ugaone brzine ω_ξ , ω_η i ω_ζ tela na pokretne ose ξ , η i ζ koje se kreću zajedno sa telom. Znači, ovde je zadatak da se za zadate momente spoljašnjih sila $M_\xi^{\vec{F}_i}$, $M_\eta^{\vec{F}_i}$, $M_\zeta^{\vec{F}_i}$ i sprega $\vec{\mathfrak{M}}$ i za zadate početne uslove kretanja sistem Ojlerovih jednačina integrali. Napomenimo, da ovaj problem nije ni malo jednostavan jer su te jednačine spregnute i nelinearne. Odnosno, sve nepoznate ω_ξ , ω_η i ω_ζ ulaze istovremeno u sve jednačine sistema (3.122) na nelinearan način što problem njihove integracije jako usložnjava. Međutim, čak i ako se nađu ugaone brzine ω_ξ , ω_η i ω_ζ u funkciji vremena zadatak o kretanju još nije rešen. Naime, ako smo iz Ojlerovih jednačina uspeli da nađemo projekcije ugaone brzine na glavne ose inercije ξ , η i ζ u funkciji vremena

$$\omega_\xi = \omega_\xi(t), \quad \omega_\eta = \omega_\eta(t), \quad \omega_\zeta = \omega_\zeta(t), \quad (3.123)$$

moraju se još integraliti Ojlerove kinematičke jednačine (3.87)

$$\begin{aligned}\omega_\xi &= \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi, \\ \omega_\eta &= \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi, \\ \omega_\zeta &= \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi},\end{aligned}\quad (3.124)$$

uz zadate početne uslove za Ojlerove uglove, da bi se našli Ojlerovi uglovi u funkciji vremena

$$\psi = \psi(t), \quad \theta = \theta(t), \quad \varphi = \varphi(t). \quad (3.125)$$

Međutim ove jednačine nisu jednostavne za integraciju. I danas, u literaturi postoji samo nekoliko specijalnih problema obrtanja tela oko nepokretne tačke koji su rešeni do kraja. Ojlerove jednačine (3.124) su jednostavne za primenu ako je zadato kretanje a traže se momenti koji ostvaruju to kretanje.

Primer 49 *Tanka kvadratna ploča strane a i mase M vezana je temenom O za sferan zglob i postavljena u miru u ravan tako da je ugao između normale na ploču i ose z ugao θ_O . Ploča počinje da pada usled sopstvene težine, tako da joj ivica OB stalno klizi po glatkoj horizontalnoj ravni Oxy . Pri ovom kretanju ploče njen položaj u prostoru $Oxzy$ je određen položajem ivice ploče OB u odnosu prema osi Ox , odnosno uglom precesije ψ , i položajem normale na ploču, odnosno uglom nutacije θ između normale na ploču i ose Oz . Znači ovo kretanje ploče ima dva stepena slobode kretanja. Koliki su ovi uglovi ψ i θ kada ploča dodirne horizontalnu ravan (Slika 3.50). U početnom položaju stranica ploče OB poklapa se sa pravcem ose Ox .*

Pošto su veze idealne a težina ploče je potencijalna sila, za vreme ovog kretanja važi zakon o promeni kinetičke energije

$$E_k - E_{k0} = A_{0t}. \quad (\text{a})$$

Osim toga sve spoljašnje sile, a to je težina ploče i vertikalna reakcija podlage na ploču, nemaju momenat za osu Oz . Znači pošto je $\mathfrak{M}_z + \sum_{i=1}^n M_z \vec{F}_i = 0$ iz (3.111) sledi da je

$$\frac{dL_z}{dt} = 0,$$

odnosno

$$L_z = L_{z0} = \text{const.} \quad (\text{b})$$

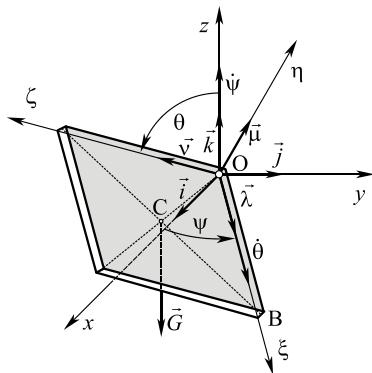
Pošto je problem sa dva stepena slobode kretanja dve skalarne jednačine (a) i (b) su dovoljne za rešavanje problema. Osa η je normalna na ravan simetrije ploče pa je ona glavna osa inercije, odnosno mora biti $J_{\xi\eta} = 0$ i $J_{\zeta\eta} = 0$, pa kinetička energija ploče (3.108) ima oblik

$$E_k = \frac{1}{2}(J_\xi \omega_\xi^2 + J_\eta \omega_\eta^2 + J_\zeta \omega_\zeta^2) - J_{\xi\zeta} \omega_\xi \omega_\zeta, \quad (\text{c})$$

gde su momenti inercije $A = J_\xi = J_\zeta$, $B = J_\eta$ i $C = J_{\xi\zeta}$. Koristeći Ojlerove jednačine (3.87), a pošto je u ovom problemu $\varphi = 0$ tokom kretanja, dobija se

$$\begin{aligned} \omega_\xi &= \dot{\theta}, \\ \omega_\eta &= \dot{\psi} \sin \theta, \\ \omega_\zeta &= \dot{\psi} \cos \theta. \end{aligned} \quad (3.126)$$

Slika 3.50:



Ploča je bila u miru u početnom trenutku vremena pa je $E_{k0} = 0$. Ako je u početnom trenutku vremena ploča imala nagib $\theta = \theta_0$ sa ravni Oxz a u proizvoljnem položaju θ onda je rad sile zemljine teže ploče

$$A_{0t} = Mg \frac{a}{2} (\cos \theta_0 - \cos \theta).$$

Sada izraz (a) postaje

$$\frac{1}{2} \left\{ A \dot{\theta}^2 + \dot{\psi} \left[\dot{\psi} (A \cos^2 \theta + B \sin^2 \theta) - 2C \dot{\theta} \cos \theta \right] \right\} = Mg \frac{a}{2} (\cos \theta_0 - \cos \theta). \quad (\text{d})$$

Moment količine kretanja za osu Oz iznosi

$$L_z = (\vec{L}_0 \cdot \vec{k}),$$

što zbog (3.112) iznosi

$$L_z = L_\xi (\vec{\lambda} \cdot \vec{k}) + L_\eta (\vec{\mu} \cdot \vec{k}) + L_\zeta (\vec{\nu} \cdot \vec{k}).$$

Pošto je

$$(\vec{\lambda} \cdot \vec{k}) = \cos(90^\circ) = 0, \quad (\vec{\mu} \cdot \vec{k}) = \cos(90^\circ - \theta) = \sin \theta, \quad (\vec{\nu} \cdot \vec{k}) = \cos \theta,$$

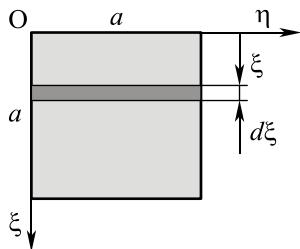
dobija se

$$L_z = L_\eta \sin \theta + L_\zeta \cos \theta.$$

Sada, koristeći (3.113) i početne uslove kretanja sledi da je

$$L_z = L_{z0} = \dot{\psi}(B \sin^2 \theta + A \cos^2 \theta) - C\dot{\theta} \cos \theta = 0. \quad (e)$$

Potrebno je izračunati momente inercije A, B i C . Sa slike 3.51 imamo



$$A = J_\xi = J_\zeta = \iint_{(M)} \zeta^2 dm,$$

a pošto je $dm = \rho ad\xi$, gde je ρ masa po jedinici površine ploče, dobija se

Slika 3.51:

$$A = \rho a \int_0^a \zeta^2 d\zeta = \rho a \frac{a^3}{3} = \frac{Ma^2}{3},$$

gde je $M = \rho a^2$ masa ploče. Dalje je

$$B = J_\eta = \iint_{(M)} (\xi^2 + \zeta^2) dm = 2A = \frac{2Ma^2}{3},$$

i

$$C = J_{\xi\zeta} = \iint_{(A)} \xi\zeta dm,$$

a pošto je $dm = \rho d\xi d\eta$ sledi

$$C = \rho \int_0^a \xi d\xi \int_0^a \zeta d\zeta = \rho \frac{a^4}{4} = \frac{Ma^2}{4}.$$

Koristeći ove momente inercije i (e) i (d) dobija se

$$\dot{\theta}^2 = \frac{48g}{a} \frac{1 + \sin^2 \theta}{7 + 25 \sin^2 \theta} (\cos \theta_0 - \cos \theta),$$

pa je ugaona brzina ploče u trenutku pada ploče na horizontalnu podlogu, odnosno za $\theta = \pi/2$

$$\dot{\theta}_{\theta=\pi/2}^2 = \frac{3g}{a} \cos \theta_0.$$

Koristeći dobijene momente inercije i relaciju (e) dobija se

$$\dot{\psi} = \frac{3}{4} \frac{\dot{\theta} \cos \theta}{1 + \sin^2 \theta},$$

odnosno posle integracije i određivanja integracione konstante iz uslova da je za $t = 0$, $\theta = \theta_0$ i $\psi = 0$

$$\psi = \frac{3}{4} [\arctan(\sin \theta) - \arctan(\sin \theta_0)].$$

U trenutku pada ploče na horizontalnu površinu, odnosno kada je $\theta = \pi/2$, ugao precesije iznosi

$$\psi_{\theta=\pi/2} = \frac{3}{4} \left[\frac{\pi}{4} - \arctan(\sin \theta_0) \right].$$

3.6.6 Stabilnost obrtanja uravnoteženog giroskopa oko glavne ose inercije

Postavimo nesimetrično kruto telo tako da mu težište bude u nepokretnoj tački oko koje se vrši obrtanje. Ojlerove diferencijalne jednačine kretanja (3.122) takvog uravnoteženog ali nesimetričnog giroskopa sa glavnim centralnim momentima inercije J_ξ , J_η i J_ζ su

$$\begin{aligned} J_\xi \dot{\omega}_\xi - (J_\eta - J_\zeta) \omega_\eta \omega_\zeta &= 0, \\ J_\eta \dot{\omega}_\eta - (J_\zeta - J_\xi) \omega_\xi \omega_\zeta &= 0, \\ J_\zeta \dot{\omega}_\zeta - (J_\xi - J_\eta) \omega_\xi \omega_\eta &= 0, \end{aligned} \tag{3.127}$$

gde su ω_ξ , ω_η i ω_ζ projekcije trenutne ugaone brzine na glavne ose inercije koje su kruto vezane za telo. Ispituje se stabilnost takvog obrtanja giroskopa. Jedno rešenje ovih jednačina kretanja glasi

$$\omega_\xi = 0, \quad \omega_\eta = 0, \quad \omega_\zeta = \omega_{\zeta 0} = \text{const.}, \tag{3.128}$$

a to je obrtanje tela oko glavne ose inercije ζ konstantnom ugaonom brzinom $\omega_{\zeta 0}$. Ovakvo obrtanje giroskopa se zove stacionarno obrtanje giroskopa. Ovakvo kretanje se ostvaruje ako je ukupna ugaona brzina u početnom trenutku kretanja usmerena u pravcu ose ζ . Na potpuno isti način stacionarno obrtanje giroskopa može biti i oko osa ξ i η .

Za ispitivanje stabilnosti ovog stacionarnog obrtanja giroskopa, giroskop se izvede malo iz stanja stacionarnog kretanja zbog pojave poremećaja ugaonih brzina ω_ξ^* , ω_η^* i ω_ζ^* . Posle nastajanja poremećaja ugaone brzine tela su zbir stacionarnih vrednosti i poremećaja, odnosno

$$\omega_{p\xi} = 0 + \omega_\xi^*, \quad \omega_{p\eta} = 0 + \omega_\eta^*, \quad \omega_{p\zeta} = \omega_{\zeta 0} + \omega_\zeta^*. \quad (3.129)$$

Poremećeno kretanje giroskopa je dato sa jednačinama oblika (3.127)

$$\begin{aligned} J_\xi \dot{\omega}_{p\xi} - (J_\eta - J_\zeta) \omega_{p\eta} \omega_{p\zeta} &= 0, \\ J_\eta \dot{\omega}_{p\eta} - (J_\zeta - J_\xi) \omega_{p\zeta} \omega_{p\xi} &= 0, \\ J_\zeta \dot{\omega}_{p\zeta} - (J_\xi - J_\eta) \omega_{p\xi} \omega_{p\eta} &= 0. \end{aligned} \quad (3.130)$$

Ako se (3.129) zameni u jednačine (3.130) i zanemare proizvodi poremećaja kao male veličine drugog reda, dobijaju se linearne diferencijalne jednačine malih poremećaja

$$\begin{aligned} J_\xi \dot{\omega}_\xi^* - (J_\eta - J_\zeta) \omega_{\zeta 0} \omega_\eta^* &= 0, \\ J_\eta \dot{\omega}_\eta^* - (J_\zeta - J_\xi) \omega_{\zeta 0} \omega_\xi^* &= 0, \\ J_\zeta \dot{\omega}_\zeta^* &= 0. \end{aligned} \quad (3.131)$$

Iz jednačine (3.131)₃ sledi da je

$$\omega_\zeta^* = \text{const.} \quad (3.132)$$

Diferenciranjem jednačine (3.131)₁ po vremenu i korišćenjem jednačine (3.131)₂, sledi

$$\ddot{\omega}_\xi^* + \left(\frac{(J_\zeta - J_\eta)(J_\zeta - J_\xi)}{J_\xi J_\eta} \omega_{\zeta 0}^2 \right) \omega_\xi^* = 0. \quad (3.133)$$

Za

$$(J_\zeta - J_\eta)(J_\zeta - J_\xi) > 0, \quad (3.134)$$

diferencijalna jednačina (3.133) ima oscilatorno rešenje

$$\omega_\xi^* = C_1 \cos(\omega_f t + C_2), \quad (3.135)$$

gde su C_1 i C_2 integracione konstante koje se određuju iz početnih uslova, dok je ω_f frekvencija oscilovanja

$$\omega_f = \omega_{\zeta 0} \sqrt{\frac{(J_\zeta - J_\eta)(J_\zeta - J_\xi)}{J_\xi J_\eta}}. \quad (3.136)$$

Zamenom prvog izvoda rešenja (3.135) u $(3.131)_1$ i korišćenjem izraza (3.136) dobija se

$$\omega_\eta^* = C_1 \sqrt{\frac{J_\xi}{J_\eta}} \sqrt{\frac{J_\zeta - J_\xi}{J_\zeta - J_\eta}} \sin(\omega_f t + C_2). \quad (3.137)$$

Prema navedenom, rešenja (3.135) i (3.137) postoje ako je ispunjen uslov (3.134), odnosno ako je

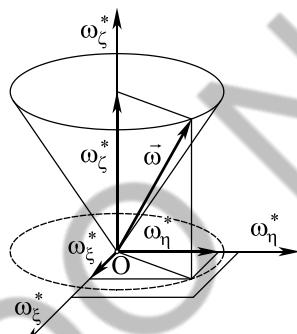
$$J_\zeta > J_\eta, \quad J_\zeta > J_\xi, \quad (3.138)$$

ili

$$J_\zeta < J_\eta, \quad J_\zeta < J_\xi. \quad (3.139)$$

Uslovi (3.138) i (3.139) predstavljaju uslove stabilnosti inercijalnog obrtanja uravnoteženog giroskopa. Iskazano rečima: obrtanje uravnoteženog giroskopa je stabilno ako se obrtanje odvija oko glavne ose inercije za koju moment inercije ima najmanju $J = J_{\min}$ ili najveću $J = J_{\max}$ vrednost. Obrtanje oko ose kojoj odgovara srednji moment inercije J , odnosno kada taj moment inercije J zadovoljava uslov $J_{\min} < J < J_{\max}$ je nestabilno. Tada se, pri proizvoljno malom poremećaju vektor trenutne ugaone brzine $\vec{\omega}$ udaljava od svog početnog položaja za konačnu veličinu.

Slika 3.52:



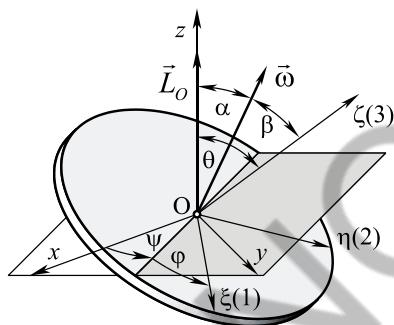
Ako se iz izraza (3.135) i (3.137) eliminiše vreme i koristi (3.136) dobija se

$$\frac{(\omega_\xi^*)^2}{(C_1)^2} + \frac{(\omega_\eta^*)^2}{(C_1)^2 \frac{J_\xi}{J_\eta} \frac{J_\zeta - J_\xi}{J_\zeta - J_\eta}} = 1. \quad (3.140)$$

U prostoru $O\omega^*\xi\omega^*\eta\omega^*\zeta$ (Slika 3.52) ovo je prav eliptički konus, gde je osa $O\omega^*\zeta$ vertikalna a ravan $O\omega^*\xi\omega^*\eta$ normalna na nju. Presek neke ravni koja je normalna na osu $O\omega^*\zeta$, i pravog eliptičkog konusa je elipsa čiji je centar u preseku te ravni i ose $O\omega^*\zeta$. Ako su početni poremećaji mali, sledi da je i integraciona konstanta C_1 mala, pa su kretanja (3.135) i (3.137) ograničena. Kretanje je stabilno i ugaona brzina se kreće po pravom eliptičkom konusu vrlo malog otvora pri temenu O .

Ova osobina stabilnog obrtanja uravnoveženog giroskopa i zadržavanje stalnog pravca ose obrtanja giroskopa našla je široku i korisnu primenu u tehnici.

3.6.7 Regularna precesija uravnoveženog simetričnog giroskopa



Slika 3.53:

Posmatrajmo uravnoveženi disk kod kog je težiste poklapa se nepokretnom tačkom oko koje se telo obrće. U tu tačku postavimo koordinatni početak nepokretnog koordinatnog sistema $Oxyz$ a za telo vežimo pokretni koordinatni sistem $O\xi\eta\zeta$ čiji je položaj određen Ojlerovim uglovima. Koordinatni sistem $O\xi\eta\zeta$ (Slika 3.53) se obrće zajedno sa telom ugaonom brzinom $\vec{\omega}$ koja ima proizvoljan pravac u odnosu na telo. Ose ξ i η koordinatnog sistema leže u ravni diska, a osa ζ je upravna na tu ravan. Ose su glavne ose inercije, pa su centrifugalni momenti inercije za te ose jednaki nulama. Iz uslova simetričnosti tela sledi da su momenti inercije za ξ i η osu jednak, odnosno $J_\xi = J_\eta = J$, a moment inercije za ζ osu je J_ζ . Sada jednačina pravog eliptičkog konusa (3.140) postaje

$$(\omega_\xi^*)^2 + (\omega_\eta^*)^2 = (C_1)^2, \quad (3.141)$$

a to je sada pravi kružni konus. I u ovom slučaju, ako su početni poremećaji mali, sledi da je i konstanta C_1 mala. Kretanje vektora ugaone brzine je stabilno i ugaona brzina se kreće po konusu vrlo malog otvora u odnosu na početni pravac.

U ovom problemu sila zemljine teže diska i reakcija sfernog zgloba prolaze kroz tačku O pa je u relaciji (3.111) $\vec{\mathfrak{M}} + \sum_{i=1}^n \vec{M}_0^{\vec{F}_i}$ jednako nuli i sledi da je

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = 0, \quad \Rightarrow \quad \vec{L}_O = \text{const.} \quad (3.142)$$

Odnosno, vektor momenta količine kretanja ima stalan intenzitet, pravac i smer. Radi preglednosti, neka je usmeren u pravcu nepokretne ose z . Zapišimo Ojlerove diferencijalne jednačine kretanja ovog tela prema (3.122)

$$\begin{aligned} J\dot{\omega}_\xi - (J - J_\zeta)\omega_\eta\omega_\zeta &= 0, \\ J\dot{\omega}_\eta - (J_\zeta - J)\omega_\xi\omega_\zeta &= 0, \\ J_\zeta\dot{\omega}_\zeta &= 0. \end{aligned} \quad (3.143)$$

Iz (3.143)₃ sledi da je projekcija ugaone brzine na ζ osu konstantna veličina, tj.

$$\omega_\zeta = \omega_{\zeta 0} = \text{const.} \quad (3.144)$$

Pomnožimo jednačinu (3.143)₁ sa ω_ξ , a jednačinu (3.143)₂ sa ω_η , i ta dva rezultata saberemo. Iz toga, sledi relacija

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\omega_\xi^2}{2} + \frac{\omega_\eta^2}{2} \right) = 0, \quad \text{odnosno} \quad \omega_\xi^2 + \omega_\eta^2 = \text{const.} \quad (3.145)$$

Na osnovu (3.144) i (3.145) zaključuje se da je intenzitet ugaone brzine tela nepromenljiva veličina, odnosno

$$\omega = \sqrt{\omega_\xi^2 + \omega_\eta^2 + \omega_\zeta^2} = \text{const.} \quad (3.146)$$

Da bi se odredio pravac ugaone brzine u odnosu na nepokretnu osu z , potraži se skalarni proizvod ugaone brzine $\vec{\omega}$ i vektora momenta količine kretanja \vec{L}_0 koji se nalazi na osi z

$$\vec{\omega} \cdot \vec{L}_0 = \omega L_0 \cos \alpha, \quad (3.147)$$

gde je α ugao između ova dva vektora. Koristeći (3.110) i (3.96), kao i (3.109), ovaj skalarni proizvod postaje

$$\vec{\omega} \cdot \vec{L}_0 = J\omega_\xi^2 + J\omega_\eta^2 + J_\zeta\omega_\zeta^2 = 2E_k, \quad (3.148)$$

gde je E_k kinetička energija obrtanja tela. Kako je telo uravnoteženo i ne postoji sila koja vrši neki rad, ukupna energija sistema E odgovara kinetičkoj energiji E_k

$$E = E_k = \text{const.} \quad (3.149)$$

Zamenom (3.148) i (3.149) u (3.147) sledi da je

$$\cos \alpha = \frac{2E_k}{\omega L_0} = \text{const.} \quad (3.150)$$

Na osnovu relacije (3.150) zaključujemo da je pravac ukupne ugaone brzine $\vec{\omega}$ u odnosu na nepokretnu osu z stalan, jer su u navedenom izrazu sve veličine konstantne. Pošto su sve veličine u izrazu za $\cos \alpha$ pozitivne ugao α mora biti oštar ugao.

Odredimo i promenu Ojlerovih uglova u funkciji od vremena. Ugao između pokretne ζ i nepokretne z ose odgovara uglu nutacije θ (vidi sliku 3.53). Projektuje se moment količine kretanja \vec{L}_O na pravac ζ ose

$$L_\zeta = L_O \cos \theta. \quad (3.151)$$

Pošto je $L_\zeta = J_\zeta \omega_\zeta = \text{const.}$, iz izraza (3.151) sledi da je ugao nutacije konstantan $\theta = \theta_0$

$$\theta_0 = \arccos \left(\frac{J_\zeta \omega_\zeta}{L_O} \right) = \text{const.} \quad (3.152)$$

Otuda, ugaona brzina nutacije $\dot{\theta}$ je nula, odnosno $\dot{\theta} = 0$. Sada, korišćenjem Ojlerovih kinematičkih jednačina (3.87) i (3.145)₂ sledi

$$\omega_\xi^2 + \omega_\eta^2 = \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta = \text{const.} \quad (3.153)$$

Relacija (3.153) je zadovoljena kada je ugaona brzina precesije $\omega_p = \dot{\psi} = a$ konstantna veličina. Iz treće Ojlerove kinematičke jednačine (3.87)₃ sračuna se ugaona brzina sopstvene rotacije

$$\dot{\varphi} = \omega_\zeta - \dot{\psi} \cos \theta. \quad (3.154)$$

Kako su svi članovi sa desne strane izraza (3.154) konstantne veličine, sledi da je i $\dot{\varphi} = b$ konstantna veličina. Integracijom izraza $\dot{\psi} = a$ i

$\dot{\varphi} = b$, uz početne uslove $\psi(0) = \psi_0$ i $\varphi(0) = \varphi_0$, dobijaju se zakoni promene Ojlerovih uglova ψ i φ tokom vremena

$$\psi = at + \psi_0, \quad \varphi = bt + \varphi_0, \quad (3.155)$$

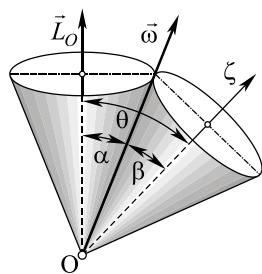
gde su iz (3.153) i (3.154)

$$a = \frac{\sqrt{\omega_\xi^2 + \omega_\eta^2}}{\sin \theta} = \text{const.}, \quad b = \omega_\zeta - a \cos \theta = \text{const.} \quad (3.156)$$

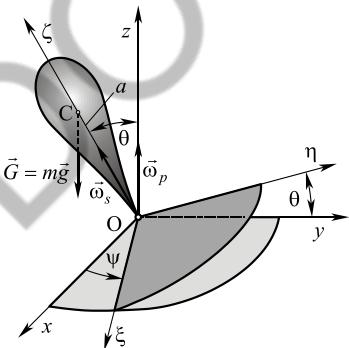
Kretanje giroskopa pri kom su ugaone brzine precesije ψ i sopstvene rotacije φ kao i ugao nutacije θ konstantni naziva se regularna precesija giroskopa.

Regularna precesija giroskopa može se prikazati kao kotrljanje bez klizanja kružnog konusa po nepokretnom konusu (Slika 3.54). Vektor ugaone brzine $\vec{\omega}$ opisuje oko vektora \vec{L}_O konus otvora α čija je veličina data izrazom (3.150). Ovaj vektor se obrće i oko ose ζ i pri tome opisuje konus čiji je ugao $\beta = \theta - \alpha = \text{const.}$ Pošto se kupe dodiruju duž zajedničke izvodnice $\vec{\omega}$, to se regularna precesija može prikazati kao kotrljanje bez klizanja ova dva konusa jednog po drugom.

Slika 3.54:



3.6.8 Spora i brza regularna precesija teškog simetričnog giroskopa



Slika 3.55:

Razmotrimo regularno precesiono kretanje teškog simetričnog giroskopa težine $\vec{G} = m\vec{g}$ (Slika 3.55). Kretanje tela posmatramo u pokretnom Rezalovom koordinatnom sistemu $O\xi\eta\zeta$ koji se obrće ugaonom brzinom precesije ω_p , odnosno $\vec{\Omega} = \vec{\Omega}(\omega_p)$.

$$\Omega_\xi = 0, \quad \Omega_\eta = \omega_p \sin \theta, \quad \Omega_\zeta = \omega_p \cos \theta. \quad (3.157)$$

Za slučaj regularne precesije, ugaona brzina precesije $\omega_p = \psi$ je u pravcu nepokretne z ose, a ugaona brzina sopstvene rotacije $\omega_s = \dot{\varphi}$ u pravcu ose ζ . Ugao između osa z i ζ je konstantni ugao nutacije θ . Za simetrično telo, momenti inercije za ξ i η ose su jednaki, odnosno $J_\xi = J_\eta = J$, a moment inercije za osu simetrije ζ je J_ζ . Projekcije ugaone brzine giroskopa $\vec{\omega}$ na iste ose $O\xi\eta\zeta$ iznose

$$\omega_\xi = 0, \quad \omega_\eta = \omega_p \sin \theta, \quad \omega_\zeta = \omega_s + \omega_p \cos \theta. \quad (3.158)$$

Prema (3.158), projekcije momenta količine kretanja \vec{L}_O su

$$L_\xi = J_\xi \omega_\xi = 0, \quad L_\eta = J_\eta \omega_\eta = J \omega_p \sin \theta, \quad L_\zeta = J_\zeta \omega_\zeta = J_\zeta (\omega_s + \omega_p \cos \theta). \quad (3.159)$$

Koristeći uslov regularne precesije (3.156) i projekcije momenta količine kretanja (3.159), modifikovane Ojlerove jednačine (3.120) postaju

$$\begin{aligned} -(J_\eta \omega_\eta \Omega_\zeta - J_\zeta \omega_\zeta \Omega_\eta) &= M_\xi, \\ -(J_\zeta \omega_\zeta \Omega_\xi - J_\xi \omega_\xi \Omega_\zeta) &= M_\eta, \\ -(J_\xi \omega_\xi \Omega_\eta - J_\eta \omega_\eta \Omega_\xi) &= M_\zeta. \end{aligned} \quad (3.160)$$

Sila težine leži u $\eta\zeta$ ravni pa postoji njen moment samo oko ξ ose, odnosno $M_\xi = Ga \sin \theta$. Zamenom ovog momenta i relacija (3.157) i (3.159) u (3.160)₁, sledi

$$-J \omega_p^2 \sin \theta \cos \theta + J_\zeta (\omega_s + \omega_p \cos \theta) \omega_p \sin \theta = Ga \sin \theta, \quad (3.161)$$

dok su druge dve jednačine (3.160)₂ i (3.160)₃ identički zadovoljene. Jednačina (3.161) je kvadratna algebarska jednačina po promenljivoj ω_p . Rešavanjem jednačine dobija se

$$(\omega_p)_{1,2} = \frac{J_\zeta \omega_s}{2(J - J_\zeta) \cos \theta} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4Ga(J - J_\zeta)}{J_\zeta^2 \omega_s^2} \cos \theta} \right). \quad (3.162)$$

Razvijajući koren funkciju u red i zadržavajući se samo na prvom članu reda, dobijamo dva približna rešenja

$$(\omega_p)_{1,2} \approx \frac{J_\zeta \omega_s}{2(J - J_\zeta) \cos \theta} \left(1 \pm \left(1 - \frac{2Ga(J - J_\zeta)}{J_\zeta^2 \omega_s^2} \cos \theta \right) \right), \quad (3.163)$$

odnosno

$$(\omega_p)_1 \approx \frac{J_\zeta \omega_s}{(J - J_\zeta) \cos \theta} - \frac{Ga}{J_\zeta \omega_s}, \quad (3.164)$$

i

$$(\omega_p)_2 \approx \frac{Ga}{J_\zeta \omega_s}. \quad (3.165)$$

Ako je ugaona brzina sopstvene rotacije ω_s velika drugi član u izrazu sa desne strane izraza (3.164) je zanemarljivo mali pa prva ugaona brzina precesije glasi

$$(\omega_p)_1 \approx \frac{J_\zeta \omega_s}{(J - J_\zeta) \cos \theta}. \quad (3.166)$$

Znači, rešenje (3.166) odgovara brzoj regularnoj precesiji, dok drugo (3.165) sporoj regularnoj precesiji. Brza regularna precesija odgovara slučaju kada je kinetička energija giroskopa mnogo veća od potencijalne energije polja zemljine teže, dok su pri sporoj regularnoj precesiji ove energije istog reda. Pri sporoj regularnoj precesiji ugaona brzina precesije je utoliko manja ukoliko je ugaona brzina sopstvene rotacije ω_s veća i što je veći moment inercije J_ζ .

3.6.9 Giroskopski moment pri regularnoj precesiji teškog simetričnog giroskopa

Koristeći Dalamberov princip, relaciju (3.161) za regularnu precesiju teškog simetričnog giroskopa moguće je zapisati u obliku

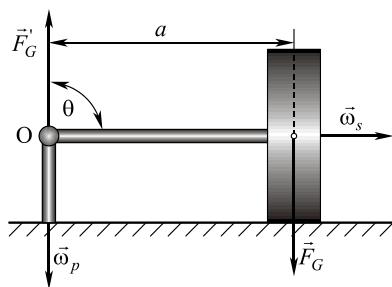
$$M_\xi^G + M_G = 0, \quad (3.167)$$

gde je M_ξ^G moment sile težine giroskopa za čvornu osu ξ

$$M_\xi^G = Ga \sin \theta \quad (3.168)$$

a leva strana jednačine (3.161) glasi

$$M_G = -J_\zeta \omega_s \omega_p \sin \theta \left(1 + \frac{J_\zeta - J}{J_\zeta} \frac{\omega_p}{\omega_s} \cos \theta \right). \quad (3.169)$$



Slika 3.56:

Moment M_G se naziva giroskopski moment i predstavlja moment koji potiče od inercijalnih sila giroskopa. Giroskopski moment je istog intenziteta ali suprotnog smera od momenta spolašnjih sila. Prema tome, giroskopski moment uravnotežava moment koji se javlja od sile težine. Giroskopski moment je od posebnog značaja pri analizi sfernog kretanja tela. Naime, giroskopski moment ima pravac čvorne ose ξ oko koje daje moment i sila težine tela. Giroskopski moment se suprotstavlja dejstvu momenta sile težine tela koji teži da obrne osu giroskopa u pravcu čvorne ose. Giroskopski moment zavisi od odnosa ugaone brzine precesije i sopstvene rotacije, ugla nutacije i veličine momenata inercije za glavne ose inercije. U slučaju da je ugaona brzina sopstvene rotacije tela mnogo veća od ugaone brzine precesije, drugi član u izrazu (3.169) je mala veličina višeg reda koja se može zanemariti. Tada giroskopski moment ima približnu vrednost

$$M_G \approx -J_\zeta \omega_s \omega_p \sin \theta. \quad (3.170)$$

Na slici 3.56 prikazan je mlinski valjak kod kojeg je $\theta = 90^\circ$. Giroskopski moment, odnosno spreg sila \vec{F}_G i \vec{F}'_G tog momenta prikazani su na slici. Njihove vrednosti iznose

$$M_G = -J_\zeta \omega_s \omega_p, \quad (3.171)$$

$$F_G = \frac{|M_G|}{a} = \frac{J_\zeta \omega_s \omega_p}{a}.$$

Ukupan pritisak valjka je

$$F_N = F_G + G = \frac{J_\zeta \omega_s \omega_p}{a} + G,$$

gde je G težina valjka. Vidi se da giroskopska sila povećava pritisak giroskopa na podlogu pri kretanju u odnosu na pritisak pri njegovom mirovanju.

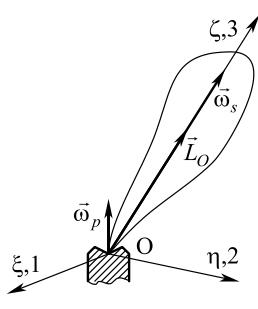
Pravac giroskopskog pritiska moguće je odrediti i pravilom Žukovskog. Ono glasi, ako giroskopu koji se obrće velikom ugaonom brzinom oko

sopstvene ose rotacije nametnemo prinudno precesiono kretanje, onda će na ležišta u kojima je pričvršćena osa giroskopa delovati spreg sila koji teži da najkraćim putem postavi osu sopstvene rotacije giroskopa u takav položaj da bude paralelan osi precesije tako da se pri tome pravci ω_s i ω_p poklope.

3.6.10 Približna teorija giroskopskih pojava

Proučavanje kretanja pomoću Ojlerovih jednačina skopčano je sa velikim matematičkim problemima. U cilju prevazilaženja ovih problema vrše se izvesne aproksimacije koje znatno olakšavaju analizu kretanja giroskopa. Razume se takva rešenja nisu matematički tačna ali ona zadržavaju fizičke osobine problema vrlo verno.

Osnovna pretpostavka približne teorije giroskopa je da se kod simetričnog giroskopa, koji se obrće velikom brzinom oko ose simetrije, ukupan vektor momenta količine kretanja nalazi u pravcu ose simetrije (Slika 3.57). Ako se čigra zavrći velikom ugaonom brzinom oko svoje ose simetrije ona će imati vrlo veliku ugaonu brzinu obrtanja oko ose simetrije $\omega_s = \omega_\zeta$ i vrlo malu ugaonu brzinu precessijskog kretanja $\omega_p = \psi$, odnosno



Slika 3.57:

$$\omega_s = \omega_\zeta \gg \omega_p = \dot{\psi}.$$

Zbog ove pretpostavke i vektor momenta količine kretanja giroskopa pada u pravac ose simetrije pa je

$$L_\xi = 0, \quad L_\eta = 0, \quad L_\zeta = J_\zeta \omega_\zeta. \quad (3.172)$$

Dejstvo sile na osu giroskopa. Slučaj udarnog impulsa

Posmatra se simetričan giroskop, koji ima oblik zamajca i koji je oslonjen u svom težištu na sferni zglob O (Slika 3.58). Giroskop se obrće oko tačke O koja je nepokretna. Neka je u početnom trenutku osa giroskopa bila vertikalna i neka je giroskopu saopštена vrlo velika ugaona brzina $\omega_s = \omega_\zeta$ oko ose simetrije ζ . Za giroskop je vezan lak kruti štap OA u vertikalnom pravcu. Na štap se u tački A deluje silom \vec{F} normalno na osu

giroskopa. Po teoremi Rezala tačka B , odnosno kraj vektora momenta količine kretanja, ima brzinu koja je jednaka momentu spoljašnjih sila koje deluju na giroskop. Znači dobija se

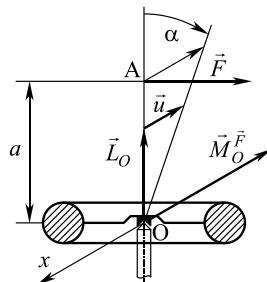
$$\vec{v}_B = \vec{M}_O^{\vec{F}}, \quad v_B = F \cdot a. \quad (3.173)$$

Za kratko vreme τ delovanja sile \vec{F} , tačka B se približno pomeri u pravcu ose x za

$$\Delta x_B = v_B \tau = Fa\tau,$$

pa je sa slike

$$\tan \alpha \approx \alpha = \frac{Fa\tau}{J_\zeta \omega_\zeta}. \quad (3.174)$$



Slika 3.58:

Pošto moment količine kretanja pada u pravac ose simetrije, ta osa se ne pomera u pravcu delovanja sile \vec{F} već u pravcu momenta sile \vec{F} za nepomičnu tačku O , odnosno u pravcu vektora (Slika 3.58) \vec{u} . Iz relacija (3.173) i (3.174) slede zaključci:

1. Prestankom dejstva spoljašnjeg momenta sile \vec{F} na osu giroskopa OA prestaje i skretanje te ose;
2. Pošto je vreme delovanja sile τ vrlo malo a ugaona brzina ω_ζ vrlo velika ugao α skretanja ose simetrije je vrlo mali pa se može i zanemariti.

Ovi zaključci na drugi način izražavaju osobinu da osa uravnoteženog simetričnog giroskopa zadržava svoj stalan položaj u prostoru.

Regularna precesija teškog simetričnog giroskopa

Približna teorija giroskopa omogućuje da se relativno jednostavno prouči kretanje teškog simetričnog giroskopa (čigre).

Posmatra se teški simetrični giroskop koji može da se obrće oko nepomične tačke O koja leži na njegovoj osi simetrije $O\zeta$ (Slika 3.59).

Prema približnoj teoriji giroskopa moment količine kretanja giroskopa iznosi

$$\vec{L}_O = J \vec{\omega}_s,$$

Slika 3.59:

gde je J moment inercije giroskopa za osu simetrije, a $\vec{\omega}_s$ ugaona brzina sopstvenog obrtanja. Prema teoremi Rezala sledi da je

$$\vec{v}_M = \vec{M}_O^F, \quad (3.175)$$

gde je \vec{v}_M brzina kraja vektora momenta količine kretanja, a \vec{M}_O^F moment spoljašnjih sile koje deluju na giroskop za tačku O . Te sile su sila teže giroskopa \vec{G} i otpor nepomične tačke O . Moment otpora nepomične tačke za tačku O je jednak nuli. Tako je

$$\vec{M}_O^F = G \cdot \overrightarrow{OC} \sin \theta.$$

Ovaj vektor je paralelan sa brzinom \vec{v}_M tačke M .

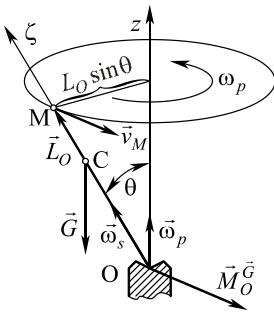
Znači da sila \vec{G} skreće osu giroskopa i pravcu ovog vektora momenta sile \vec{M}_O^F i zbog toga giroskop vrši precesiono kretanje oko vertikalne ose Oz . Pošto je moment sile \vec{G} konstantan, to je i brzina tačke M takođe konstantna.

Sa slike se vidi da je brzina tačke M

$$v_M = (L_O \sin \theta) \omega_p = J \omega_s \omega_p \sin \theta,$$

pa je očigledno

$$G \cdot \overrightarrow{OC} \sin \theta = J \omega_s \omega_p \sin \theta.$$



Odavde se nalazi ugaona brzina precesije

$$\omega_p = \frac{G \cdot \overline{OC}}{J\omega_s}.$$

Jasno se vidi da je ugaona brzina precesije giroskopa sve manja, što je veća brzina sopstvenog obrtanja ω_s i što je veći moment inercije J .

Pošto su ugaone brzine precesije i sopstvenog obrtanja konstantne, a takođe je konstantan i ugao nutacije, to se ovo kretanje giroskopa naziva regularna precesija.

Tačnija analiza ovog problema kretanja giroskopa pokazuje da osa simetrije giroskopa vrši oscilacije vrlo visoke frekvencije i male amplitude koje se nazivaju nutacione oscilacije.

3.7 Slobodno kretanje krutog tela

Posmatrajmo slobodno kruto telo u prostoru na koje deluju sile \vec{F}_i ($i = 1, 2, \dots, N$) i spreg $\vec{\mathfrak{M}}$. Telo je mase M . Ovo kretanje krutog tela ima šest stepeni slobode kretanja. Najprirodniji način za proučavanje ovog kretanja je posmatranje kretanje centra mase krutog tela i obrtanja oko centra mase. Kretanje centra mase je opisano zakonom o kretanju centra mase

$$M \vec{a}_C = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i, \quad (3.176)$$

gde je \vec{a}_c apsolutno ubrzanje centra mase krutog tela. Obrtanje krutog tela oko centra mase opisano je zakonom o promeni momenta količine kretanja oko centra mase C

$$\dot{\vec{L}}_C = \vec{M}_C^{\vec{F}} + \vec{\mathfrak{M}}. \quad (3.177)$$

Ove dve vektorske jednačine su ekvivalentne sa šest skalarnih jednačina. Ako se kretanje centra mase posmatra u nepokretnom koordi-

natnom sistemu $Ox_1y_1z_1$ iz jednačine (3.176) slede jednačine

$$\begin{aligned} M\ddot{x}_{c1} &= \sum_{i=1}^N F_{ix1}, \\ M\ddot{y}_{c1} &= \sum_{i=1}^N F_{iy1}, \\ M\ddot{z}_{c1} &= \sum_{i=1}^N F_{iz1}. \end{aligned} \quad (3.178)$$

Primenom zakona o promeni momenta količine kretanja oko centra mase C dobijaju se i sledeće tri jednačine

$$\begin{aligned} \frac{dL_\xi}{dt} - (L_\eta\omega_\zeta - L_\zeta\omega_\eta) &= M_\xi^{\vec{F}_i} + \mathfrak{M}_\xi, \\ \frac{dL_\eta}{dt} - (L_\zeta\omega_\xi - L_\xi\omega_\zeta) &= M_\eta^{\vec{F}_i} + \mathfrak{M}_\eta, \\ \frac{dL_\zeta}{dt} - (L_\xi\omega_\eta - L_\eta\omega_\xi) &= M_\zeta^{\vec{F}_i} + \mathfrak{M}_\zeta, \end{aligned} \quad (3.179)$$

gde ξ , η i ζ tri Dekartove ose sa koordinatnim početkom u centru mase C , a L_ξ , L_η i L_ζ momenti količine kretanja za te ose i dati su (3.113). Ovim jednačinama se moraju pridodati i kinematičke jednačine (3.87) koje povezuju projekcije ugaone brzine ω_ξ , ω_η i ω_ζ sa Ojlerovim uglovima precesije ψ , nutacije θ i sopstvenog obrtanja φ .

Poglavlje 4

Analitička mehanika

U razvoju dinamike mogu se uočiti dva osnovna pravca. Prvi pravac, koji se često naziva vektorska ili Njutnova mehanika, zasnovan je neposredno na drugom Njutnovom zakonu. U Njutnovoj mehanici dva vektora, impuls sile i količina kretanja, su osnovne mere dejstva sile i mehaničkog kretanja. Njutnov savremenik, Lajbnic¹, tvrdio je da u osnovu mehanike ulaze kinetička energija i rad sile, odnosno dve skalarne veličine. Zato se Lajbnic i smatra osnivačem analitičke mehanike, u kojoj je za proučavanje kretanja ili mirovanja materijalnih sistema dovoljno poznавање kinetičке energije kretanja i rada sila, odnosno potencijalне energije sila.

Pri proučavanju kretanja slobodnog mehaničkog sistema obe spomenute oblasti mehanike su skoro potpuno ekvivalentne. Do razlike dolazi kod proučavanja kretanja neslobodnog sistema u kome se kretanje vrši u skladu sa vezama. U takvim sistemima zbog veza postoje reakcije veza, sile koje je najčešće potrebno takođe odrediti. Kod proučavanja kretanja vezanih mehaničkih sistema metode analitičke mehanike isključuju iz razmatranja reakcije idealnih veza, a to je velika prednost u odnosu na postupak vektorske mehanike. Postoji još jedna velike razlika u metodama vektorske i analitičke mehanike. Naime pri opisivanju nekog problema metodom vektorske mehanike broj jednačina za opisivanje problema je najčešće veći od broja stepeni slobode kretanja sistema. Za rešavanje istog problema analitička mehanika uvek koristi jednačine čiji je broj uvek jednak broju stepeni slobode kretanja sistema.

I vektorska i analitička mehanika se mogu koristiti za proučavanje istih

¹ G. W. Leibniz, 1646 – 1716.

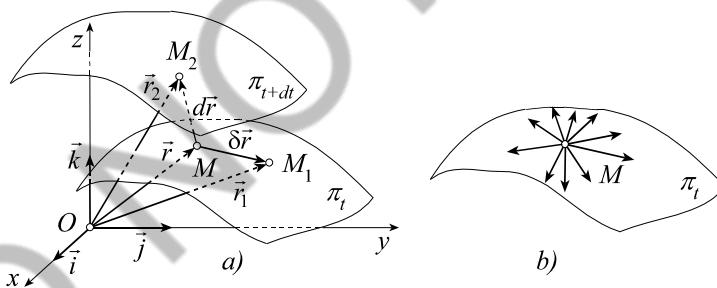
problema. Naravno, i jedna i druga daju istovetne rezultate, jer kretanje postoji u prirodi nezavisno od našeg načina njegovog proučavanja.

Vrlo veliki broj naučnika tvrdi da su principi analitičke mehanike toliko duboki da se smatraju jednim od najvećih ljudskih dostignuća u proučavanju fenomena prirode. Iz analitičke mehanike, gde su razrađene mnoge metode i postupci, ti rezultati su prošireni na mnoge oblasti fizike i tehnike.

4.1 Stvarna i virtualna pomeranja

Posmatrajmo kretanje sistema od N materijalnih tačaka M_i , $i = 1, 2 \dots N$, koje se odvija pri dejstvu određenog broja veza.

U svakom trenutku vremena tokom kretanja položaj tačke M_i određen je vektorom položaja \vec{r}_i . Za elementaran priraštaj vremena dt , a pod dejstvom sila i u saglasnosti sa diferencijalnim jednačinama kretanja, tačka M_i se pomeri za elementarno pomeranje $d\vec{r}_i = \vec{v}_i dt$, koje se naziva *stvarno* elementarno pomeranje i gde je \vec{v}_i brzina tačke M_i .



Slika 4.1:

Posmatrajmo elementarno pomeranje svake tačke sistema M_i u datom trenutku vremena u neki blizak položaj, a koji je moguć zbog prisustva veza u sistemu. To je zamišljeno probno elementarno pomeranje u datom trenutku vremena i nezavisno je od sila koje deluju na sistem, iz jednog položaja u neki blizak. To probno elementarno pomeranje je čisto geometrijskog karaktera i nezavisno od protoka vremena. Ono se obeležava sa $\delta\vec{r}_i$ i naziva *virtualno* pomeranje tačke M_i . Ako jednačine

veze zavise od vremena, pri nalaženju virtualnog pomeranja vreme se u njima smatra konstantnim, odnosno veze se pri tom "zamrznu".

Neka je tačka M primorana da se kreće po površini $f(x, y, z, t) = 0$ (Slika 4.1a), koja zavisi eksplicitno i od vremena, odnosno koja se tokom vremena može menjati. U trenutku t površina zauzima položaj π_t u prostoru a položaj tačke M na njoj je određen vektorom položaja $\vec{r}(x, y, z, t)$, gde su x, y i z Dekartove koordinate tačke M . Pri nalaženju virtualnog pomeranja površina se zaustavi u prostoru i tada tačka može da se pomeri po njoj u ma kom pravcu, koji približno leži u tangencijalnoj ravni π_t na površinu u tom trenutku t a u tački M . Neka je to pomeranje u tačku M_1 , čiji je vektor položaja $\vec{r}_1(x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z, t)$, gde se elementarne promene koordinata δx , δy i δz nazivaju varijacije koordinata. Sa slike se vidi da je virtualno pomeranje, odnosno virtualna promena vektora položaja \vec{r}

$$\delta \vec{r} = \vec{r}_1(x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z, t) - \vec{r}(x, y, z, t).$$

Razvojem u red izraza $\vec{r}_1(x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z, t)$ u okolini tačke $M(x, y, z)$, i zanemarivanjem članova drugog i viših stepena po varijacijama δx , δy i δz , dobija se virtualno pomeranje

$$\delta \vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x} \delta x + \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} \delta y + \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} \delta z. \quad (4.1)$$

Još jednom naglasimo da je virtualno pomeranje uvek u skladu sa vezama, ali zamrznutim u prostoru u trenutku vremena t . Analitički oblik virtualnog pomeranja je određen strukturom veza u sistemu. Pošto tačka M_1 u okolini tačke M može imati beskonačno mnogo položaja, a svi su u skladu sa vezom, i virtualnih pomeranja $\delta \vec{r}$ ima beskonačno mnogo u trenutku vremena t (Slika 4.1b).

Pri stvarnom kretanju sistema površina zauzima u trenutku $t + dt$ novi položaj π_{t+dt} (Slika 4.1a), a tačka M prelazi u položaj M_2 , koji je određen vektorom položaja $\vec{r}_2(x + dx, y + dy, z + dz, t + dt)$, gde su dx , dy i dz diferencijalni priraštaji Dekartovih koordinata tačke tokom vremena dt . Sa slike je stvarno elementarno pomeranje

$$d \vec{r} = \vec{r}_2(x + dx, y + dy, z + dz, t + dt) - \vec{r}(x, y, z, t).$$

Za vreme promene vremena dt ovaj vektor, sa tačnošću do prvih stepena diferencijala dx , dy , dz i dt glasi

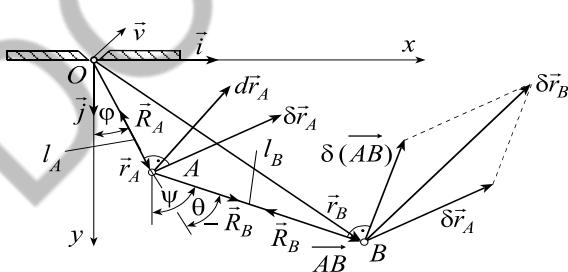
$$d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x} dx + \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} dy + \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} dz + \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} dt. \quad (4.2)$$

Pošto je skup diferencijala dx , dy i dz rezultat dejstva sila na materijalnu tačku, a time jedinstveno određen za vreme priraštaja vremena dt , i stvarno pomeranje $d\vec{r}$ tačke za priraštaj vremena dt je jedinstveno određeno diferencijalnim jednačinama kretanja.

Pošto se skup diferencijala dx , dy i dz , pri stvarnom pomeranju sistema, razlikuje od skupa varijacija δx , δy i δz , pri virtualnom pomeranju, stvarno pomeranje $d\vec{r}$ i virtualno pomeranje $\delta\vec{r}$ su dve različite geometrijske veličine (vidi (4.1) i (4.2)) čak i kod stacionarnih veza, odnosno kada je član $(\partial \vec{r}/\partial t)dt = \vec{0}$. Znači, za slučaj stacionarnih veza, vektori stvarnog $d\vec{r}$ i virtualnog pomeranja $\delta\vec{r}$ su različite linearne kombinacije istih vektora $\partial \vec{r}/\partial x$, $\partial \vec{r}/\partial y$ i $\partial \vec{r}/\partial z$. Kod nestacionarnih veza, stvarno pomeranje ima i član $(\partial \vec{r}/\partial t)dt$ dok ga virtualno pomeranje nema.

Za nalaženje virtualne promene bilo koje funkcije važe sva pravila diferencijalnog računa, ali uvek treba voditi računa da se pri virtualnoj promeni vreme ne menja. Na primer, ako je potencijalna energija funkcija Dekartovih koordinata i vremena, odnosno $\Pi(x, y, z, t)$, onda je njena virtualna promena, odnosno njena promena zbog virtualne promene položaja

$$\delta\Pi = \frac{\partial\Pi}{\partial x}\delta x + \frac{\partial\Pi}{\partial y}\delta y + \frac{\partial\Pi}{\partial z}\delta z. \quad (4.3)$$



Slika 4.2:

Mase i užad se nalaze u vertikalnoj ravni. Dužina užeta, od tačke O do

Radi boljeg razumevanja navedenih činjenica, posmatrajmo dve materijalne tačke A i B (Slika 4.2), koje su međusobno vezane nerastegljivim užetom dužine l_B . Masa u tački A je vezana za drugo nerastegljivo uže, koje se uvlači brzinom \vec{v} kroz otvor u zidu u tački O .

tačke A , je l_A i zavisi od vremena, tj. $l_A = l_A(t)$ a oblik ove funkcije zavisi od načina uvlačenja užeta kroz otvor. Ako se u vertikalnoj ravni izabere Dekartov koordinatni sistem Oxy , onda četiri Dekartove koordinate x_A, y_A, x_B i y_B tačaka A i B moraju zadovoljiti dve očigledne jednačine uslovljene nerastegljivošću užadi

$$\begin{aligned}\vec{r}_A \cdot \vec{r}_A &= l_A^2(t), \quad x_A^2 + y_A^2 = l_A^2(t), \\ \vec{AB} \cdot \vec{AB} &= l_B^2, \quad (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 = l_B^2.\end{aligned}\quad (4.4)$$

Ove jednačine se nazivaju jednačinama veza. Prva veza je nestacionarna, jer eksplisitno, preko dužine užeta l_A , zavisi od vremena t . Druga veza je stacionarna, znači nezavisna od vremena. Pošto je položaj dve tačke u ravni određen sa četiri koordinate, koje su povezane sa dve jednačine veza, samo dve od njih su nezavisne. Zato, ovaj sistem ima dva stepena slobode kretanja. Dve koordinate, bilo koje od x_A, y_A, x_B i y_B , su nezavisne. Ako je potrebno u proučavanju problema, dve zavisne koordinate izračunavaju se iz jednačina veza. Naglasimo da je ovakav način proučavanja vrlo neprikladan.

Virtualna promena izraza $\vec{r}_A \cdot \vec{r}_A = l_A^2(t)$ je

$$\delta \vec{r}_A \cdot \vec{r}_A + \vec{r}_A \cdot \delta \vec{r}_A = 0,$$

jer se pri njenom nalaženju vreme ne menja. Zbog komutativnosti skalarног proizvoda odavde sledi da je

$$\vec{r}_A \cdot \delta \vec{r}_A = 0, \quad (4.5)$$

odnosno vektori \vec{r}_A i $\delta \vec{r}_A$ su međusobno normalni. Znači virtualno pomeranje $\delta \vec{r}_A$ je normalno na pravac OA , a to je u pravcu pomeranja tačke A pri obrtanju užeta oko tačke O , pri zaustavljenom uvlačenju užeta kroz otvor. Diferencijal izraza $\vec{r}_A \cdot \vec{r}_A = l_A^2(t)$ glasi

$$\vec{r}_A \cdot d\vec{r}_A = l_A \dot{l}_A dt,$$

odakle se jasno vidi da vektor stvarnog elementarnog pomeranja $d\vec{r}_A$ nije normalan na pravac OA . To je zato, što se stvarno kretanje tokom vremena tačke A sastoji iz istovremenog obrtanja oko tačke O i pomeranja zbog uvlačenja užeta kroz otvor u tački O . Pri uvlačenju užeta kroz otvor njegova dužina se smanjuje, pa je $\dot{l}_A < 0$ i $\vec{r}_A \cdot d\vec{r}_A =$

$r_A \cdot dr_A \cos(\vec{r}_A, d\vec{r}_A) < 0$. Znači da je ugao između vektora \vec{r}_A i $d\vec{r}_A$ tup (Slika 4.2).

Na isti način, iz virtualne promena izraza $\vec{AB} \cdot \vec{AB} = l_B^2$ sledi

$$\vec{AB} \cdot \delta(\vec{AB}) = 0, \quad (4.6)$$

pa je virtualna promena $\delta(\vec{AB})$ vektora \vec{AB} normalna na uže AB . Sa slike 4.2 je $\vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{AB}$, pa je virtualno pomeranje tačke B

$$\delta \vec{r}_B = \delta \vec{r}_A + \delta(\vec{AB}). \quad (4.7)$$

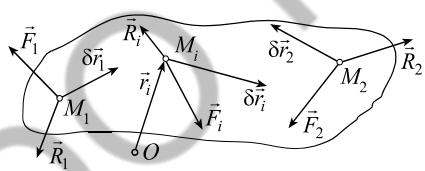
Vektorski zbir (4.7) je nacrtan na slici.

4.2 Idealne i neidealne veze

Prilikom kretanja vezanog sistema materijalnih tačaka, sve veze koje deluju na tačke sistema su unapred zadate i nezavisne od aktivnih sila i početnih uslova kretanja. Pre početka proučavanja kretanja vezanog sistema tačaka, mora se znati karakter veza koje deluju na tačke sistema. Karakter veza u sistemu ne može zavisiti od kretanja tog sistema.

U analitičkoj mehanici dejstvo svih sila, pa i reakcija veza, na kretanje sistema se meri pomoću njihovog rada. Svojstva veza određuju se na osnovu rada reakcija veza na mogućim pomeranjima u proizvoljnom položaju sistema u nekom trenutku vremena.

Posmatrajmo kretanje sistema od N materijalnih tačaka M_i i krutog tela. Položaj svake tačke M_i je određen vektorom položaja \vec{r}_i u odnosu na proizvoljnu nepokretnu tačku O . Svaka tačka M_i se oslobođi od svih unutrašnjih i spoljašnjih veza. Dejstvo svih veza na tačku M_i zameni se njihovom rezultantom \vec{R}_i (Slika 4.3) a dejstvo na



Slika 4.3:

kruto telo i spregom \vec{m}_R . Svim tačkama sistema saopšti se virtualno pomeranje $\delta \vec{r}_i$ u skladu sa vezama a kruto telo dobije i virtualno obrtanje $\delta \vec{\varphi}$ oko neke ose y . Skalarni proizvod $\vec{R}_i \cdot \delta \vec{r}_i$ je rad reakcije veze \vec{R}_i na virtualnom pomeranju $\delta \vec{r}_i$ i zove se virtualni rad sile. Skalarni

proizvod sprega $\vec{\mathfrak{M}}_R$ i virtualnog obrtanja $\delta\vec{\varphi}$ je virtualni rad tog sprega. Ukupan elementarni rad svih reakcija veza \vec{R}_i na virtualnim pomeranjima $\delta\vec{r}_i$ svih N tačaka sistema i virtualnog obrtanja kružnog tela $\delta\vec{\varphi}$ iznosi

$$\delta A^R = \sum_{i=1}^N \vec{R}_i \cdot \delta\vec{r}_i + \vec{\mathfrak{M}}_R \cdot \delta\vec{\varphi}. \quad (4.8)$$

Sistem N materijalnih tačaka i kružnog tela kreće se pod dejstvom idealnih veza ako je ukupan elementarni rad svih reakcija veza na virtualnim pomeranjima svih tačaka sistema i kružnog tela jednak nuli, odnosno ako je

$$\delta A^R = \sum_{i=1}^N \vec{R}_i \cdot \delta\vec{r}_i + \vec{\mathfrak{M}}_R \cdot \delta\vec{\varphi} = 0. \quad (4.9)$$

Ako ovaj uslov nije ispunjen za neke reakcije veza, onda su te veze neidealne. Reakciju neidealne veze obeležavaćemo sa silom \vec{R}_i^* i spregom $\vec{\mathfrak{M}}_R^*$.

Dalje se analiziraju najvažniji primeri idealnih i neidealnih veza.

4.2.1 Nerastegljivo uže

Posmatrajmo (Slika 4.2) sistem od dve materijalne tačke A i B povezane užetom AB , dok je tačka A vezana za drugo uže koje se uvlači u otvor u zidu O . Užad su nerastegljiva. Oslobađajući se veza uklanjanjem užadi, njihovo dejstvo se zamjenjuje reakcijama veza. Reakcija \vec{R}_B deluje na tačku B , dok \vec{R}_A i $-\vec{R}_B$ deluju na tačku A . Ukupan virtualni rad reakcija veza na virtualnim pomeranjima $\delta\vec{r}_A$ i $\delta\vec{r}_B$ tačaka A i B iznosi

$$\delta A^R = (\vec{R}_A - \vec{R}_B) \cdot \delta\vec{r}_A + \vec{R}_B \cdot \delta\vec{r}_B.$$

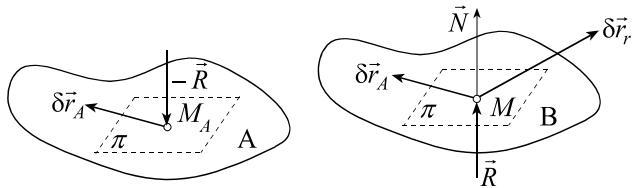
Pošto je prema (4.7) $\delta\vec{r}_B = \delta\vec{r}_A + \delta(\vec{AB})$, sledi da je

$$\delta A^R = \vec{R}_A \cdot \delta\vec{r}_A + \vec{R}_B \cdot \delta(\vec{AB}).$$

Prema (4.5) $\delta\vec{r}_A$ je normalno na silu \vec{R}_A , dok je $\delta(\vec{AB})$ normalno na silu \vec{R}_B zbog (4.6), pa je virtualni rad δA^R svih reakcija veza jednak nuli, odnosno $\delta A^R = 0$. Znači, veza ostvarena nerastegljivim užetom je idealna veza.

4.2.2 Glatka površina

Glatko telo A kreće se u prostoru, a po njegovoj površini pomera se materijalna tačka M (Slika 4.4). Kretanje tačke M u odnosu na telo A je relativno i odvija se u tangencijalnoj ravni π tela A u tački kontakta. Ako tačka kontakta M_A , koja pripada telu A , zbog kretanja tela



Slika 4.4:

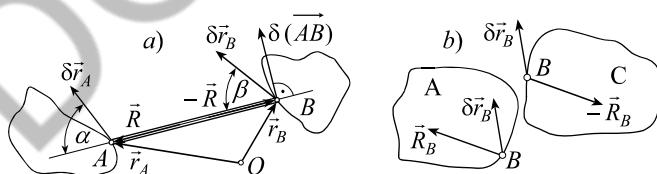
A , ima virtualno pomeranje $\delta \vec{r}_A$, onda je $\delta \vec{r}_M = \delta \vec{r}_A + \delta \vec{r}_r$ ukupno virtualno pomeranje tačke M , gde je $\delta \vec{r}_r$ pomeranje tačke M u bilo kom pravcu u tangencijalnoj ravni π površine tela. Oslo-

bađanjem tačke M od veze sa telom A dobijaju se reakcije \vec{R} i $-\vec{R}$, koje deluju na tačku i telo, a koje su, prema ranijim zaključcima iz statike, u pravcu normale \vec{N} na ravan π . Ukupan virtualni rad ovih reakcija iznosi

$$\begin{aligned} \delta A^R &= -\vec{R} \cdot \delta \vec{r}_A + \vec{R} \cdot \delta \vec{r}_M = -\vec{R} \cdot \delta \vec{r}_A + \vec{R} \cdot (\delta \vec{r}_A + \delta \vec{r}_r) \\ &= \vec{R} \cdot \delta \vec{r}_r = 0, \end{aligned}$$

jer vektor $\delta \vec{r}_r$ leži u ravni π a reakcija veze \vec{R} u pravcu normale \vec{N} na tu ravan. Znači, glatka površina, pokretna ili nepokretna u prostoru, je idealna veza.

4.2.3 Laki kruti štap



Slika 4.5:

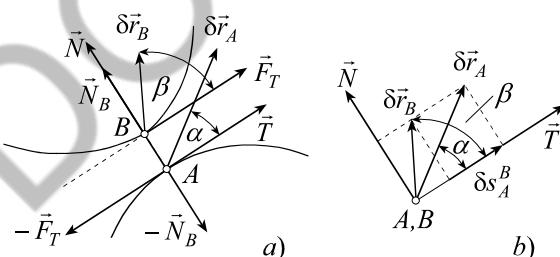
Neka je laki kruti štap AB (Slika 4.5a) zglobno vezan za druga tela na svojim krajevima A i B . Ako se ukloni štap, njegovo dejstvo na ova tela zamenjuje se, kao što je poznato iz statike, silama \vec{R} i

$-\vec{R}$ u pravcu duži AB . Položaj tačaka A i B određen je vektorima položaja \vec{r}_A i \vec{r}_B u odnosu na proizvoljnu nepokretnu tačku O . Ako su virtualna pomeranja ovih tačaka $\delta\vec{r}_A$ i $\delta\vec{r}_B$, onda je ukupan virtualni rad reakcija štapa $\delta A^R = \vec{R} \cdot \delta\vec{r}_A - \vec{R} \cdot \delta\vec{r}_B$. Sa slike je $\vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{AB}$, odnosno $\delta\vec{r}_B = \delta\vec{r}_A + \delta(\vec{AB})$, pa je $\delta A^R = -\vec{R} \cdot \delta(\vec{AB})$. Štap AB je krut pa važi da je $\vec{AB} \cdot \vec{AB} = (\vec{AB})^2$. Virtualna promena ove relacije daje $\vec{AB} \cdot \delta(\vec{AB}) = 0$, odakle zaključujemo da je $\delta(\vec{AB})$ normalno na štap i na silu $-\vec{R}$. Zbog toga je virtualni rad δA^R jednak nuli a laki kruti štap zglobno vezan na svojim krajevima je idealna veza.

4.2.4 Cilindrični zglob, sferni zglob ili potporno ležište

Ako je cilindrični ili sferni zglob ili potporno ležište B nepokretno, onda je vektor položaja te tačke \vec{r}_B konstantan, pa je njeno virtualno pomeranje $\delta\vec{r}_B$ jednako nuli. Tada je i rad reakcije veze \vec{R}_B jednak nuli. Ako su ovakvim elementom vezana dva tela A i C sistema u kretanju, onda se oslobođanjem od te veze dobijaju dve reakcije \vec{R}_B i $-\vec{R}_B$, koje deluju na tela A i C . Virtualno pomeranje (Slika 4.5b) zgloba $\delta\vec{r}_B$ je isto i za telo A i za telo C , pa je jasno da je i ukupan virtualni rad ove dve reakcije veze jednak nuli. Znači, cilindrični ili sferni zglob ili potporno ležište je idealna veza i pri kretanju.

4.2.5 Hrapava veza



Slika 4.6:

Posmatrajmo dva hrapava tela koja su u kontaktu u jednoj tački. U dodirnoj tački uoče se jedinični vektori zajedničke normale \vec{N} i tangente \vec{T} površina ovih tela (Slika 4.6a). Razdvajanjem ove veze dobijaju se normalne reakcije \vec{N}_B , $-\vec{N}_B$, čiji je virtualni rad jednak nuli, i sile trenja \vec{F}_T , $-\vec{F}_T$.

Neka tačke A i B , koje su bile u kontaktu pre razdvajanja veze, imaju virtualna pomeranja $\delta \vec{r}_A$ i $\delta \vec{r}_B$. Ukupan virtualni rad ovih sila trenja iznosi

$$\delta A^R = \vec{F}_T \cdot \delta \vec{r}_B - \vec{F}_T \cdot \delta \vec{r}_A,$$

odnosno

$$\delta A^R = -F_T(\delta r_A \cos \alpha - \delta r_B \cos \beta).$$

Na slici 4.6b su nacrtana virtualna pomeranja $\delta \vec{r}_A$ i $\delta \vec{r}_B$ u istoj tački, jer ona i pripadaju tačkama dva tela u dodiru. Projekcije virtualnih pomeranja na pravac zajedničke normale površina u dodiru moraju biti jednake, jer nema prodiranja jednog tela u drugo ili razdvajanja kontakta između njih. Sa slike se vidi da je

$$\delta s_A^B = \delta r_A \cos \alpha - \delta r_B \cos \beta,$$

virtualno pomeranje tačke A u odnosu na tačku B tela u kontaktu. Prema tome, virtualni rad sila trenja između dva tela postaje

$$\delta A^R = -F_T \delta s_A^B.$$

Iz ove relacije zaključujemo:

1. Ako tačka A u odnosu na tačku B tela u kontaktu ne proklizava, a to znači da su ova tela u relativnom miru jedno u odnosu na drugo ili se kotrljaju jedno po drugom bez klizanja, onda je $\delta s_A^B = 0$, $F_T < \mu N_B$, i virtualni rad je jednak nuli. Znači da su dva hraptava tela, u relativnom međusobnom mirovanju, ili kotrljanju bez klizanja, idealna veza;
2. Neka tačka A u odnosu na tačku B tela u kontaktu proklizava, sa ili bez kotrljanja. Tada je $\delta s_A^B \neq 0$, $F_T = \mu N_B$ i $\delta A^R \neq 0$, pa je takva veza neidealna. Tada je sila trenja klizanja \vec{F}_T reakcija neidealne veze \vec{R}^* . Njen virtualni rad iznosi

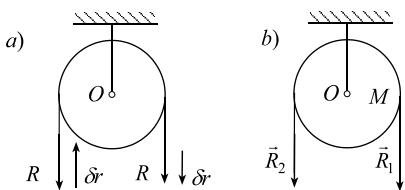
$$\delta A^* = -\mu N_B \delta s_A^B. \quad (4.10)$$

U ovom izrazu, u opštem slučaju, tokom kretanja sila \vec{N}_B nije konstantna.

4.2.6 Kotrljanje tela sa otporom trenja kotrljanja

Pri kotrljanju jednog tela po drugom i deformaciji bilo kog od ova dva tela javlja se otporni spreg deformisane površine, ili otpor trenja kotrljanja. Ovaj fenomen je detaljno proučen u statici. Taj otporni spreg uvek, bez obzira da li je kotrljanje sa ili bez klizanja, vrši rad. Zato je veza ostvarena kotrljanjem tela po deformabilnoj podlozi uvek neidealna.

4.2.7 Veza nerastegljivog užeta i kotura



Slika 4.7:

Posmatrajmo nerastegljivo uže koje je delom obmotano oko kotura, koji može biti pokretan ili nepokretan (Slika 4.7).

Razlikuju se dva slučaja:

1. Ako je kotur gladak, sile R i R na krajevima užeta su iste po intenzitetu (Slika 4.7a). Pošto je uže nerastegljivo virtualna pomeranja krajeva užeta su ista, pa je jasno da je virtualni rad ovih

sila jednak nuli i takva veza je idealna. Primetimo da u ovom slučaju uže proklizava po glatkom koturu.

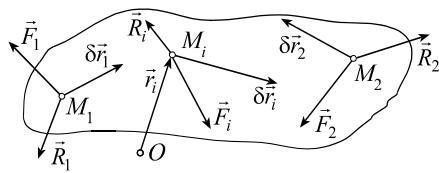
2. Neka je kotur hrapav (Slika 4.7b). Sile na krajevima užeta \vec{R}_1 i \vec{R}_2 nisu jednake. Ako je uže nerastegljivo i ako nema proklizavanja užeta po koturu, onda je pomeranje krajeva užeta i obrtanje kotura ekvivalentno kotrljanju kotura bez klizanja po nekoj pokretnoj površini. Prema ranijim zaključcima ovo je onda idealna veza. Ako uže proklizava po hrapavom koturu veza je neidealna.

4.3 Lagranž-Dalamberov princip

Integracija diferencijalnih jednačina kretanja neslobodne materijalne tačke ili krutog tela je vrlo složen matematički problem. Ako je sistem još i neslobodan, odnosno podvrgnut dejstvu veza, matematički put do rešenja problema je još složeniji. Tada, prisustvo veza je izvor novih nepoznatih sila, odnosno reakcije veza, koje takođe treba odrediti. Značaj analitičke mehanike je u tome što ona iz ovog problema eliminiše reakcije idealnih veza. Tako se u jednačinama analitičke mehanike nalaze sve aktivne sile

sistema i samo reakcije neidealnih veza u sistemu. Po nalaženju kretanja i tih reakcija neidealnih veza reakcije idealnih veza se određuju korišćenjem jednačina Njutnove mehanike.

Posmatrajmo kretanje vezanog sistema N materijalnih tačaka M_i , čije su mase m_i , i koji ima n stepeni slobode kretanja. Položaj svake tačke sistema tokom kretanja određen je vektorom položaja \vec{r}_i u odnosu na neku nepokretnu tačku O (Slika 4.8).



Slika 4.8:

veza, koje deluju na i -tu tačku sistema. Za kretanje svake, na ovaj način izolovane tačke sistema, važi drugi Njutnov zakon

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i + \vec{R}_i + \vec{R}_i^*, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (4.11)$$

gde je $\ddot{\vec{r}}_i = \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2}$ vektor ubrzanja i -te tačke sistema. Skalarno množeći svaku od ovih jednačina odgovarajućim vektorom virtualnog pomeranja te tačke $\delta \vec{r}_i$, sabirajući tako dobijene skalarne proizvode i koristeći svojstvo (4.9) reakcija idealnih veza dobija se

$$\delta A^I + \delta A^F = 0, \quad (4.12)$$

gde je

$$\delta A^I = \sum_{i=1}^N (-m_i \ddot{\vec{r}}_i) \cdot \delta \vec{r}_i \quad (4.13)$$

virtualni rad svih inercijalnih sila u sistemu, jer se veličina $-m_i \ddot{\vec{r}}_i$ naziva inercijalna sila i -te tačke, i

$$\delta A^F = \sum_{i=1}^N (\vec{F}_i + \vec{R}_i^*) \cdot \delta \vec{r}_i, \quad (4.14)$$

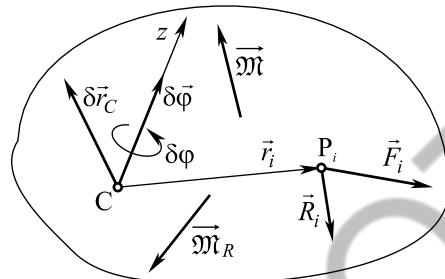
virtualni rad svih aktivnih sila i reakcija neidealnih veza u sistemu.

Jednačina (4.12) je izraz čuvenog Lagranž² - Dalamberovog³ principa i naziva se opštom jednačinom dinamike. Ovaj princip tvrdi:

Za vreme kretanja mehaničkog sistema zbir virtualnih radova svih inercijalnih, aktivnih sila i reakcija neidealnih veza u sistemu jednak je nuli.

Znači, važna je činjenica da se u analitičkoj mehanici reakcije neidealnih veza pridružuju, po svom uticaju na kretanje, aktivnim silama sistema, dok su reakcije idealnih veza potpuno eliminisane iz dalje analize kretanja.

4.3.1 Opšta jednačina statike.



Slika 4.9:

Posmatra se kruto telo i sistem materijalnih tačaka koje se nalaze u ravnoteži pod dejstvom aktivnih sila \vec{F}_i i aktivnog sprega \vec{M} (Slika 4.9) i reakcija veza, sila \vec{R}_i i sprega \vec{M}_R . Ako među reakcijama veza ima onih koje su neidealne, onda se one priključuju aktivnim silama i aktivnom spregu. uslovi ravnoteže ovog sistema za redupcionu tačku centar mase sistema C glase

$$\sum_{i=1}^N (\vec{F}_i + \vec{R}_i) = \vec{0},$$

$$\sum_{i=1}^N (\vec{M}_C^{\vec{F}_i} + \vec{M}_C^{\vec{R}_i}) + \vec{M} + \vec{M}_R = \vec{0}, \quad (4.15)$$

Gde su $\vec{M}_C^{\vec{F}_i} = \vec{r}_i \times \vec{F}_i$ i $\vec{M}_C^{\vec{R}_i} = \vec{r}_i \times \vec{R}_i$ momenti sila \vec{F}_i i \vec{R}_i za tačku C . Ovom sistemu, u saglasnosti sa vezama, dopušta se virtualno pomeranje. U najopštijem slučaju ono se sastoji iz virtualnog pomeranja $\delta \vec{r}_C$ tačke C i virtualnog obrtanja $\delta \vec{\varphi}$ tela oko neke ose z koja prolazi

² Joseph-Louis Lagrange 1736-1813.

³ J. D'Alembert, 1717 – 1783.

kroz tačku C . Prva jednačina (4.15) se skalarno pomnože sa vektorom $\delta \vec{r}_C$, a druga sa vektorom $\delta \vec{\varphi}$. Tako se dobija

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N (\vec{F}_i + \vec{R}_i) \cdot \delta \vec{r}_C &= 0, \\ \sum_{i=1}^N [(\vec{M}_C^{\vec{F}_i} + \vec{M}_C^{\vec{R}_i}) + \vec{\mathfrak{m}} + \vec{\mathfrak{m}}_R] \cdot \delta \vec{\varphi} &= 0, \end{aligned} \quad (4.16)$$

Pri istovremenom pomeranju centra mase sistema C i obrtanju oko neke ose z tačka P_i ima dva virtualna pomeranja: virtualno pomeranje $\delta \vec{r}_C$ usled translatornog kretanja sistema, koje je opisano pomeranjem centra mase sistema i virtualno pomeranje $\delta \vec{\varphi} \times \vec{r}_i$. Ukupno virtualno pomeranje neke tačke P_i sistema je vektorski zbir ovih pomeranja

$$\delta \vec{r}_i = \delta \vec{r}_C + \delta \vec{\varphi} \times \vec{r}_i.$$

Tako prva jednačina (4.16) postaje

$$\sum_{i=1}^N (\vec{F}_i + \vec{R}_i) \cdot \delta \vec{r}_i - \sum_{i=1}^N (\vec{F}_i + \vec{R}_i) \cdot (\delta \vec{\varphi} \times \vec{r}_i) = 0. \quad (4.17)$$

Iz druge jednačine (4.16), koristeći svojstvo mešovitog proizvoda vektora da je $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a})$, sledi

$$\sum_{i=1}^N (\vec{F}_i + \vec{R}_i) \cdot (\delta \vec{\varphi} \times \vec{r}_i) = - (\vec{\mathfrak{m}} + \vec{\mathfrak{m}}_R) \cdot \delta \vec{\varphi},$$

pa zbog toga izraz (4.17) dobija oblik

$$\sum_{i=1}^N (\vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i + \vec{\mathfrak{m}} \cdot \delta \vec{\varphi}) = - \sum_{i=1}^N \vec{R}_i \cdot \delta \vec{r}_i - \vec{\mathfrak{m}}_R \cdot \delta \vec{\varphi}. \quad (4.18)$$

Prema (4.8) i (4.9), ako se sistem materijalnih tačaka i krutog tela kreće pod dejstvom idealnih veza, desna strana prethodg izraza je jednaka nuli, pa se dobija

$$\delta A = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i + \vec{\mathfrak{m}} \cdot \delta \vec{\varphi} = 0, \quad (4.19)$$

gde je dA ukupan elementaran rad na virtualnim pomeranjima svih aktivnih sila i sprega, kojima su pridodate reakcije neidealnih veza. Time su iz daljeg proučavanja ravnoteže sistema materijalnih tačaka i kruog tela isključene reakcije idealnih veza, što je najvažniji rezultat metode analitičke statike.

Izraz (4.19) je iskaz čuvenog Lagranž-Dalamberovog principa, ili principa elementarnog rada, koji tvrdi: *Pri ravnoteži sistema materijalnih tačaka i krutih tela zbir svih elementarnih virtualnih radova aktivnih sila i aktivnog sprega i reakcija neidealnih veza jednak je nuli.*

Napomene:

1. Zbog isključenja reakcija idealnih veza iz proučavanja ravnoteže sistema materijalnih tačaka i krutog tela Lagranž-Dalamberovim principom, pri njegovoj upotrebi u primerima nije potrebno da se oslobađa od unutrašnjih i spoljašnjih idealnih veza.
2. Ako se ovom metodom žele odrediti reakcije idealnih veza onda se dejstvo veze mora zameniti reakcijama i sistemu saopštiti dopunsko virtualno pomeranje koje odgovara uklonjenim vezama i dopunskim slobodama kretanja. U ovom postupku reakcije veza se posmatraju kao aktivne sile i spregovi i njihov rad se pridodaje virtualnom radu svih aktivnih sila i spregova.
3. Pri rešavanju zadataka u izrazu (4.19) sva elementarna virtualna pomeranja moraju biti izražena preko nezavisnih virtualnih pomeranja, koja su $\delta q_1, \delta q_2, \dots \delta q_\alpha, \delta\varphi$. Tada izraz (4.19) u najopštijem slučaju ima oblik

$$dA = Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \dots + Q_\alpha \delta q_\alpha + Q_\varphi \delta\varphi, \quad (4.20)$$

gde su $Q_1, Q_2, \dots Q_\alpha, Q_\varphi$ koeficijenti koji se javljaju uz ova virtualna pomeranja.

4. Nezavisni parametri $q_1, q_2, \dots q_\alpha, \varphi$, kojih ima koliki je broj steoeni slobode kretanja, nazivaju se generalisane koordinate.
5. Koeficijenti $Q_1, Q_2, \dots Q_\alpha, Q_\varphi$ uz nezavisna virtualna pomeranja $\delta q_1, \delta q_2, \dots \delta q_\alpha, \delta\varphi$ u izrazu (4.20) nazivaju se generalisane sile.

6. Pošto su virtualna pomeranja $\delta q_1, \delta q_2, \dots \delta q_\alpha, \delta\varphi$ nezavisna uslov (4.20), odnosno da je dA jednako nuli, zadovoljen je samo ako je

$$Q_1 = 0, Q_2 = 0, Q_\alpha = 0, Q_\varphi = 0. \quad (4.21)$$

Znači u položaju ravnoteže sve generalisane sile su jednake nuli.

Jednačina (4.19) napisana u skalarmom obliku glasi

$$\sum_{i=1}^N [F_{ix}\delta x_i + F_{iy}\delta y_i + F_{iz}\delta z_i + \mathfrak{M}_z\delta\varphi] = 0, \quad (4.22)$$

gde je $\delta\varphi$ virtualno obrtanje krutog tela oko neke ose z a \mathfrak{M}_z projekcija sprega $\vec{\mathfrak{M}}$ na tu osu.

I pored toga što se princip virtualnih pomeranja iskazuje samo помоћу jedne skalarne jednačine, on suštinski u sebi sadrži, zbog nezavisnosti virtualnih pomeranja, onoliko skalarnih jednačina koliko posmatrani sistem ima stepeni slobode kretanja. U praktičnoj primeni jednačine (4.22) na probleme ravnoteže raznih mehaničkih sistema treba slediti ovaj postupak:

1. Odredi se broj stepeni slobode kretanja sistema;
2. Formira se virtualni rad svih aktivnih sila, aktivnih spregova i reakcija neidealnih veza (4.22), gde virtualna pomeranja mogu biti maha koja pomeranja;
3. Izaberu se nezavisna virtualna pomeranja, kojih ima koliko sistem ima stepeni slobode kretanja;
4. Formiraju se jednačine veza između zavisnih i nezavisnih virtualnih pomeranja;
5. Formira se virtualni rad svih aktivnih sila, aktivnih spregova i reakcija neidealnih veza (4.22) izražen preko nezavisnih virtualnih pomeranja;
6. Koeficijenti uz nezavisna virtualna pomeranja u tom izrazu se izjednače sa nulom, jer ukupan virtualni rad mora biti nula a nezavisna virtualna pomeranja nisu jednaka nuli;

7. Tako dobijene relacije su uslovi ravnoteže posmatranog mehaničkog sistema.

Glavna prednost ovih uslova ravnoteže u odnosu na uslove ravnoteže iz statike je u tome što se u njima ne pojavljuju reakcije idealnih veza u sistemu.

4.3.2 Princip virtualnih brzina

Ako se (4.19) podeli sa proizvoljno malom veličinom δt , koja ima dimenziju vremena, i uvede oznaka

$$\vec{v}_i = \frac{\delta \vec{r}_i}{\delta t}, \quad (4.23)$$

koja ima dimenziju brzine, dobija se princip virtualnih pomeranja u obliku

$$\sum_{i=1}^N (\vec{F}_i + \vec{R}_i^*) \cdot \vec{v}_i = 0. \quad (4.24)$$

Veličina \vec{v}_i naziva se virtualna brzina tačake M_i sistema, a jednačina (4.24) je princip virtualnih brzina.

Primer 50 Ravnoteža krutog tela.

Posmatra se kruto telo koje je oslobođeno svih veza. Na to telo deluju aktivne sile \vec{F}_i , aktivan spreg $\vec{\mathfrak{M}}$, reakcije idealnih veza \vec{R}_i i reakcije neidealnih veza \vec{R}_i^* . Pošto je telo oslobođeno svih veza stvarna i virtualna pomeranja neke tačke tela M_i su ista, odnosno

$$\delta \vec{r}_i = d \vec{r}_i = \vec{v}_i dt.$$

Po principu virtualnih brzina mora biti zadovoljena jednačina (4.24). Po rezultatima kinematike brzina neke tačke M_i krutog tela je

$$\vec{v}_i = \vec{v}_O + \vec{\omega} \times \vec{r}_i, \quad (1)$$

gde je \vec{v}_O brzina proizvoljne tačke O krutog tela, koja se zove centar, $\vec{\omega}$ je ugaona brzina obrtanja krutog tela oko tačke O , a \vec{r}_i vektor položaja

tačke M_i u odnosu na tačku O . Kod krutog tela oslobođenog svih veza ova dva vektora su potpuno proizvoljna.

Posle zamene ovog izraza u (4.24) dobija se

$$\sum_{i=1}^N (\vec{F}_i + \vec{R}_i^*) \cdot \vec{v}_O + \sum_{i=1}^N (\vec{F}_i + \vec{R}_i^*) \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) = 0.$$

Ova relacija se može napisati u obliku

$$\vec{v}_O \cdot \left[\sum_{i=1}^N (\vec{F}_i + \vec{R}_i^*) \right] + \vec{\omega} \cdot \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times (\vec{F}_i + \vec{R}_i^*) = 0.$$

Pošto su vektori \vec{v}_O i $\vec{\omega}$ potpuno proizvoljni i različiti od nule ova jednačina je zadovoljena ako su ispunjeni sledeći uslovi

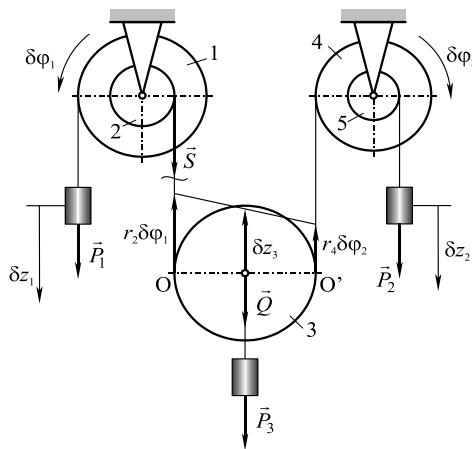
$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N (\vec{F}_i + \vec{R}_i^*) &= \vec{0}, \\ \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times (\vec{F}_i + \vec{R}_i^*) + \vec{\mathfrak{M}} &= \vec{0}, \end{aligned} \tag{2}$$

odnosno glavni vektor i glavni moment svih aktivnih sila su jednaki nuli. Pošto je su $\vec{r}_i \times (\vec{F}_i + \vec{R}_i^*)$ momenti sila \vec{F}_i i \vec{R}_i^* za tačku O u drugoj jednačini (2) dejstvu tih momenata pridodata je i dejstvo sprega $\vec{\mathfrak{M}}$. Ovo su poznati uslovi ravnoteže krutog tela..

Primer 51 Materijalni sistem se sastoji iz tereta P_1, P_2 i P_3 (Slika 4.10). Tereti se nalaze u ravnoteži. Naći vezu između tereta P_1, P_2 i P_3 i težine Q kotura broj tri u položaju ravnoteže. Poluprečnici koturova su r_1, r_2, r_3, r_4 i r_5 . Koturi 1 i 2, kao i 4 i 5, kruto se međusobno vezani.

Ako se teret P_1 virtualno pomeri naniže za δz_1 , a teret P_2 takođe naniže za veličinu δz_2 onda se teret P_3 zajedno sa koturom pomeri naviše za neko δz_3 . Virtualni rad svih sila glasi

$$P_1 \delta z_1 + P_2 \delta z_2 - (Q + P_3) \delta z_3 = 0.$$



Slika 4.10:

Sva virtualna pomeranja nisu nezavisna. Sistem ima dva stepena slobode kretanja i neka su nezavisna virtualna pomeranja uglovi obrtanja $\delta\varphi_1$ i $\delta\varphi_2$. Sada je

$$\begin{aligned}\delta z_1 &= r_1 \delta\varphi_1, \\ \delta z_2 &= r_5 \delta\varphi_2.\end{aligned}$$

Tačka O kotura 3 pomeri se za $r_2 \delta\varphi_1$, a tačka O' istog kotura za $r_4 \delta\varphi_2$ pa je pomeranje centra C dato sa

$$\begin{aligned}\delta z_3 &= r_4 \delta\varphi_2 + \frac{r_2 \delta\varphi_1 - r_4 \delta\varphi_2}{2} \\ &= \frac{r_2 \delta\varphi_1 + r_4 \delta\varphi_2}{2}\end{aligned}$$

pa je virtualni rad

$$\left[P_1 r_1 - \frac{(Q + P_3)}{2} r_2 \right] \delta\varphi_1 + \left[P_2 r_5 - \frac{(Q + P_3)}{2} r_4 \right] \delta\varphi_2 = 0.$$

Pošto su varijacije $\delta\varphi_1$ i $\delta\varphi_2$ nezavisne i različite od nule, zbog zadovoljenja prethodne jednačine mora da bude

$$\begin{aligned}P_1 r_1 - \frac{(Q + P_3)}{2} r_2 &= 0, \\ P_2 r_5 - \frac{(Q + P_3)}{2} r_4 &= 0.\end{aligned}$$

Iz ovih jednačina sledi

$$\begin{aligned}Q + P_3 &= 2P_1 \frac{r_1}{r_2}, \\ Q + P_3 &= 2P_2 \frac{r_5}{r_4}.\end{aligned}$$

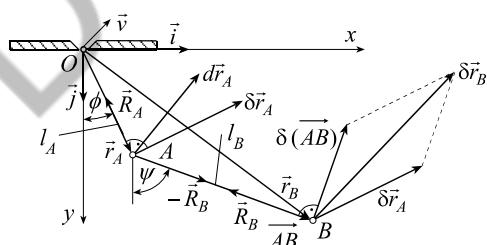
Izjednačavanjem desnih strana ovih rezultata, jer su im i leve strane jednake, dobija se i sledeća veza između težina P_1 i P_2

$$P_1 = \frac{r_2 r_5}{r_4 r_1} P_2.$$

4.4 Generalisane koordinate i Lagranževe jednačine druge vrste

U problemima dinamike koriste se razni koordinatni sistemi, na primer Dekartov, prirodni, polarni itd. Kod proučavanja kretanja slobodnih sistema najčešće se koristi Dekartov pravougli koordinatni sistem iako kod proučavanja kretanja vezanih mehaničkih sistema on nije najpodesniji. Ako je broj Dekartovih koordinata tačaka veći od broja stepeni slobode kretanja sistema, mora se voditi računa o jednačinama veza u sistemu za sve vreme rešavanja problema što stvara poteškoće. Šta više, analitički izraz jednačina veza može biti vrlo nepogodan za upotrebu.

Ukazane teškoće u proučavanju kretanja vezanih mehaničkih sistema se prevazilaze uvođenjem pojma generalisanih koordinata. One se definišu na sledeći način: generalisane koordinate su nezavisni parametri koji jednoznačno određuju položaj posmatranog mehaničkog sistema i čiji je broj jednak broju stepeni slobode kretanja sistema. Generalisane koordinate su realne veličine. Svaka generalisana koordinata ima nezavisno značenje. To znači, da brojne vrednosti generalisanih koordinata potpuno određuju položaj mehaničkog sistema u prostoru. Generalisane koordinate mogu biti Dekartove koordinate, uglovi, površine, krivolinijske koordinate, nanelektrisanje, pritisak, temperatura itd. To mogu biti absolutna ali i relativna pomeranja tačaka ili krutog tela. Po pravilu, u svakom problemu se generalisane koordinate mogu izabrati na više načina. Zato se pri njihovom izboru mora voditi računa da složenost ili jednostavnost matematičkog rešavanja svakog problema kretanja zavisi od izabranog skupa generalisanih koordinata. Generalisane koordinate se obeležavaju sa q_α , $\alpha = 1, 2, \dots, n$, gde je n broj stepeni slobode kretanja. Za vreme kretanja sistema generalisane koordinate su funkcije vremena, odnosno $q_\alpha = q_\alpha(t)$.



Slika 4.11:

U cilju boljeg razumevanja navedenih činjenica posmatrajmo ponovo sistem prikazan na slici 4.11, koji ima dva stepena slobode kretanja. Dve generalisane koordinate mogu biti uglovi φ i ψ (Slika 4.11) ili uglovi φ i θ . Uglovi φ i ψ se mere od ver-

tikalnog pravca pa su to absolutni uglovi. Ugao θ se meri između pravaca vektora \vec{r}_A i \vec{AB} pa je to relativni ugao.

Izrazimo vektore \vec{r}_A i \vec{AB} preko generalisanih koordinata φ i ψ kao

$$\begin{aligned}\vec{r}_A &= l_A(t)(\vec{i} \sin \varphi + \vec{j} \cos \varphi), \\ \vec{AB} &= l_B(\vec{i} \sin \psi + \vec{j} \cos \psi).\end{aligned}\quad (4.25)$$

Ovi izrazi pokazuju da su vektori položaja \vec{r}_A i $\vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{AB}$ tačaka A i B , a time i njihove Dekartove koordinate, funkcije generalisanih koordinata ovog problema φ i ψ i vremena t . Ako se zavisnosti (4.25) uvrste u jednačine veza (4.4), onda se one svode na identičnosti, odnosno one su identički zadovoljene.

Iz ove analize, uočavamo dalekosežne posledice uvođenja pojma generalisanih koordinata u dinamiku:

1. Proučavanjem problema pomoću generalisanih koordinata sve jednačine veza su identički zadovoljene i samim tim se, pri daljem rešavanju problema, o njima više ne treba voditi računa. Drugim rečima, posle uvođenja generalisanih koordinata jednačine veza se više ne pojavljuju eksplicitno u problemu, ali treba dobro naglasiti da veze određuju analitičku zavisnost vektora položaja tačaka vezanog sistema od generalisanih koordinata;
2. U najopštijem slučaju, vektori položaja tačaka sistema su funkcije svih generalisanih koordinata i vremena.

4.4.1 Generalisane sile

Posmatrajmo kretanje mehaničkog sistema N materijalnih tačaka M_i masa m_i ($i = 1, 2, \dots, N$). Ovaj sistem se kreće pod dejstvom aktivnih sila \vec{F}_i i aktivnih spregova $\vec{\mathfrak{M}}_\xi$, $\xi = 1, 2, \dots, P$. Za proučavanje kretanja ovog sistema uvedi se n odgovarajućih generalisanih koordinata q_α , $\alpha = 1, 2, \dots, n$. Vektor položaja \vec{r}_i svake tačke sistema M_i u odnosu na neku nepokretnu tačku O je funkcija generalisanih koordinata i vremena. Znači, da je

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(t, q_\alpha), \quad (4.26)$$

gde je analitički oblik te zavisnosti određen oblikom veza koje postoji u sistemu.

Virtualna promena vektora položaja tačke M_i sistema (4.26), zbog varijacija generalisanih koordinata δq_α , glasi

$$\delta \vec{r}_i = \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} \delta q_\alpha. \quad (4.27)$$

Uvrštavanjem (4.27) u (4.14), virtualni rad aktivnih sila i reakcija neidealnih veza postaje posle promene reda sabiranja

$$\delta A = \sum_{\alpha=1}^n \left[\sum_{i=1}^N (\vec{F}_i + \vec{R}_i^*) \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} \right] \delta q_\alpha.$$

Kako suma po indeksu i , odnosno po svim tačkama sistema, odnosno sve u zagradi [] uz varijacije δq_α zavisi od generalisane koordinate q_α i vremena t , sledi da je

$$\delta A = \sum_{\alpha=1}^n Q_\alpha^F \delta q_\alpha, \quad (4.28)$$

gde je

$$Q_\alpha^F(q_\alpha, t) = \sum_{i=1}^N (\vec{F}_i + \vec{R}_i^*) \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha}, \quad (4.29)$$

koeficijent Q_α^F uz varijaciju generalisane koordinate δq_α u izrazu (4.28). Q_α^F je deo generalisane sile mehaničkog sistema za generalisano koordinatu q_α , koji odgovara aktivnim silama \vec{F}_i i reakcijama neidealnih veza \vec{R}_i^* .

Neka u sistemu koji se razmatra, sem materijalnih tačaka, postoje i kruta tela na koja deluju, sem sila, i aktivni spregovi $\vec{\mathfrak{M}}_\xi$, tada se i spregovi $\vec{\mathfrak{M}}_\xi$ moraju uključiti u izračunavanje generalisanih sila. Neka se neko telo pod dejstvom sprega $\vec{\mathfrak{M}}_\xi$ obrne oko neke ose z_ξ za elementarni ugao $\delta\varphi_\xi$, gde je $\delta\varphi_\xi$ virtualno obrtanje oko ose z_ξ . Prema (3.2) virtualni rad tih spregova $\vec{\mathfrak{M}}_\xi$ iznosi

$$\delta A = \sum_{\xi=1}^m \vec{\mathfrak{M}}_\xi \cdot \vec{\delta\varphi}_\xi = \sum_{\xi=1}^m \mathfrak{M}_\xi \delta\varphi_\xi \cos \alpha_\xi, \quad (4.30)$$

gde je α_ξ ugao između vektora $\vec{\mathfrak{M}}_\xi$ i ose z_ξ . Neka je svako φ_ξ funkcija generalisanih koordinata i vremena, odnosno $\varphi_\xi = \varphi_\xi(q_\alpha, t)$. Tada je varijacija $\delta\varphi_\xi = \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial\varphi_\xi}{\partial q_\alpha} \delta q_\alpha$, pa virtualni rad (4.30) postaje

$$\delta A = \sum_{\xi=1}^m \mathfrak{M}_\xi \cos \alpha_\xi \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial\varphi_\xi}{\partial q_\alpha} \delta q_\alpha.$$

Odnosno, posle promene reda sabiranja

$$\delta A = \sum_{\alpha=1}^n \left(\sum_{\xi=1}^m \frac{\partial\varphi_\xi}{\partial q_\alpha} \mathfrak{M}_\xi \cos \alpha_\xi \right) \delta q_\alpha = \sum_{\alpha=1}^n Q_\alpha^M \delta q_\alpha, \quad (4.31)$$

gde je

$$Q_\alpha^M = \sum_{\xi=1}^m \frac{\partial\varphi_\xi}{\partial q_\alpha} \mathfrak{M}_\xi \cos \alpha_\xi.$$

Konačno, ukupan virtualni rad svih aktivnih sila \vec{F}_i , reakcija neidealnih veza \vec{R}_i^* i aktivnih spregova $\vec{\mathfrak{M}}_\xi$ je zbir virtualnih radova (4.28) i (4.31)

$$\delta A = \sum_{\alpha=1}^n (Q_\alpha^F + Q_\alpha^M) \delta q_\alpha. \quad (4.32)$$

Znači u tom slučaju, generalisana sila za koordinatu q_α je koeficijent uz nezavisnu varijaciju δq_α , odnosno

$$Q_\alpha = Q_\alpha^F + Q_\alpha^M, \quad (4.33)$$

pa izraz (4.32) postaje

$$\delta A = \sum_{\alpha=1}^n Q_\alpha \delta q_\alpha. \quad (4.34)$$

Generalisane sile imaju dimenziju koja zavisi od dimenzije odgovarajuće generalisane koordinate, odnosno prema (4.34) $\text{dimenzija}(Q) = \frac{\text{dimenzija}(A)}{\text{dimenzija}(q)}$. Ako je generalisana koordinata dužina, onda generalisana sila ima dimenziju sile. Ako je generalisana koordinata ugao, tada odgovarajuća generalisana sila ima dimenziju momenta sile.

Generalisane sile se izračunavaju na sledeće načine:

- Izračuna se virtualni rad (4.32) svih aktivnih sila, reakcija neidealnih veza i aktivnih spregova na virtualnim pomeranjima tačaka sistema i svih tela. Pri tome se koriste koordinate, koje ne moraju biti generalisane, ali koje omogućuju najjednostavnije izračunavanje ovog virtualnog rada. Zatim se u tom radu sve varijacije koordinata izraze preko varijacija nezavisnih generalisanih koordinata δq_α a generalisane sile Q_α se prepoznaju kao odgovarajući koeficijenti uz varijacije generalisanih koordinata δq_α . Ovaj postupak je sprovodljiv uvek, bez obzira o kakvim se silama i spregovima radi.
- Ako su sve aktivne sile, reakcije neidealnih veza i svi spregovi konzervativni, onda se za njih može naći odgovarajuća potencijalna energija kao funkcija generalisanih koordinata i vremena, odnosno $\Pi = \Pi(q_\alpha, t)$. Ona je povezana sa radom A svih aktivnih sila, reakcija neidealnih veza i aktivnih spregova relacijom

$$\Pi(q_\alpha, t) = -A,$$

pa je virtualna promena ove relacije

$$\delta A = - \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial \Pi}{\partial q_\alpha} \delta q_\alpha,$$

što poređenjem sa (4.34) dovodi do

$$Q_\alpha = - \frac{\partial \Pi}{\partial q_\alpha}, \quad (4.35)$$

odnosno do pravila za izračunavanje generalisanih sila. Naravno, ovo pravilo važi samo u slučaju konzervativnih sila.

Napomena:

- Ako sva mehanička dejstva u sistemu imaju potencijalnu energiju onda se ona nalazi pomoću relacije $\Pi = -A$, gde je A rad svih aktivnih sila, svih aktivnih spregova, reakcija neidealnih veza na pomeranju iz položaja koji odgovara nultim vrednostima generalisanih koordinata u položaj koji odgovara njihovim proizvoljnim vrednostima.*

2. Ako se za deo sila i spregova u mehaničkom sistemu može naći potencijalna energija Π , ali ne za sve sile i spregove, onda su generalisane sile sistema

$$Q_\alpha = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_\alpha} + Q_\alpha^*, \quad (4.36)$$

gde se deo generalisanih sila Q_α^* , koji odgovara nekonzervativnim silama i spregovima, izračunava pomoću virtualnog rada samo tih sila i spregova koji nemaju potencijalnu energiju, odnosno

$$\delta A^* = \sum_{\alpha=1}^n Q_\alpha^* \delta q_\alpha. \quad (4.37)$$

3. Za određenu klasu nekonzervativnih sila odgovarajuće generalisane sile izračunavaju se kao

$$Q_\alpha^* = -\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_\alpha}, \quad (4.38)$$

gde se funkcija R , koja može zavisiti od vremena t , generalisanih koordinata q_α i generalisanih brzina \dot{q}_α , naziva Rejlijeva⁴ ili disipativna funkcija. Za sile viskoznog trenja ona ima oblik

$$R = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n c_{\alpha\beta}(q_1, q_2, \dots, q_n, t) \dot{q}_\alpha \dot{q}_\beta, \quad (4.39)$$

pa su odgovarajuće generalisane sile 4.38 oblika

$$Q_\alpha^* = - \sum_{\beta=1}^n c_{\alpha\beta}(q_1, q_2, \dots, q_n, t) \dot{q}_\beta. \quad (4.40)$$

4.4.2 Generalisane inercijalne sile

Prema (4.26) vektor položaja \vec{r}_i tačke M_i zavisi eksplicitno od vremena t i implicitno opet od vremena preko generalisanih koordinata $q_\alpha(t)$. Zato apsolutna brzina tačke M_i ima oblik

$$\vec{v}_i = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha, \quad (4.41)$$

⁴J. W.S. Rayleigh, 1842 – 1919.

gde je \dot{q}_α , odnosno izvod generalisane koordinate q_α po vremenu, generalisana brzina. Ako su veze u sistemu stacionarne onda se vreme ne pojavljuje eksplicitno u (4.26) pa je član $\partial \vec{r}_i / \partial t = \vec{0}$. Pošto se generalisane brzine \dot{q}_α javljaju samo kao koeficijenti uz parcijalne izvode $\partial \vec{r}_i / \partial q_\alpha$ u izrazu (4.41) iz tog izraza sledi

$$\frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_\alpha} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha}. \quad (4.42)$$

Ako se u izrazu (4.41) promeni nemi indeks α u β , a to je uvek moguće, onda parcijalan izvod tog izraza po generalisanoj koordinati q_α glasi

$$\frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_\alpha} = \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial t \partial q_\alpha} + \sum_{\beta=1}^n \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_\beta \partial q_\alpha} \dot{q}_\beta.$$

Veličina $\partial \vec{r}_i / \partial q_\alpha$ zavisi od generalisanih koordinata q_α i vremena t pa je njen izvod po vremenu

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} \right) = \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial t \partial q_\alpha} + \sum_{\beta=1}^n \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_\beta \partial q_\alpha} \dot{q}_\beta.$$

Zbog jednakosti desnih strana prethodnih jednačina sledi veza

$$\frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_\alpha} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} \right). \quad (4.43)$$

Koristeći izraz (4.27) za virtualno pomeranje i - te tačke sistema, virtualni rad inercijalnih sila sistema, posle promene reda sabiranja po indeksima i i α (4.13) postaje,

$$\delta A^I = \sum_{i=1}^N (-m_i \vec{a}_i) \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_{\alpha=1}^n Z_\alpha \delta q_\alpha, \quad (4.44)$$

gde je generalisana inercijalna sila sistema Z_α definisana relacijom

$$Z_\alpha = - \sum_{i=1}^N m_i \vec{a}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha},$$

koja se može napisati u obliku

$$Z_\alpha = -\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} + \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha}.$$

Koristeći jednakosti (4.42) i (4.43), ovaj izraz postaje

$$Z_\alpha = -\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_\alpha} + \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_\alpha},$$

odnosno, posle promene reda sabiranja i parcijalnog diferenciranja, dobija se krajnji oblik generalisane inercijalne sile

$$Z_\alpha = -\frac{d}{dt} \frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_\alpha} + \frac{\partial E_k}{\partial q_\alpha}, \quad (4.45)$$

gde je

$$E_k = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i \quad (4.46)$$

kinetička energija sistema.

Analiza izraza (4.41) i (4.46), pokazuje da je kinetička energija bilo kog mehaničkog sistema funkcija generalisanih koordinata q_α , generalisanih brzina \dot{q}_α i vremena t , odnosno

$$E_k = E_k(t, q_\alpha, \dot{q}_\alpha). \quad (4.47)$$

U slučaju kada su sve veze u sistemu stacionarne, kinetička energija ne zavisi eksplicitno od vremena.

4.4.3 Lagranževe jednačine druge vrste

Koristeći (4.28), (4.44) i (4.45), Lagranž - Dalamberov princip (4.12) u generalisanim koordinatama postaje

$$\sum_{\alpha=1}^n \left(-\frac{d}{dt} \frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_\alpha} + \frac{\partial E_k}{\partial q_\alpha} + Q_\alpha \right) \delta q_\alpha = 0. \quad (4.48)$$

Sve generalisane koordinate q_α ($\alpha = 1, 2, \dots, n$) su nezavisne, pa su i njihove varijacije δq_α nezavisne. Lagranž-Dalamberov princip zahteva da relacija

(4.48) bude zadovoljena za bilo koje varijacije generalisanih koordinata koje su različite od nule, odnosno za $\delta q_\alpha \neq 0$, pa sledi da svi koeficijenti uz varijacije δq_α u izrazu (4.48) moraju biti jednakim nulima, odnosno

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial E_k}{\partial q_\alpha} = Q_\alpha, \quad \alpha = 1, 2, \dots, n. \quad (4.49)$$

Ovo su diferencijalne jednačine kretanja mehaničkog sistema sa n stepeni slobode kretanja u generalisanim koordinatama q_α . Zovu se Lagranževe jednačine druge vrste⁵, jer je Lagranž izveo i jednačine kretanja u drugačijem obliku, koje se nazivaju Lagranževe jednačine prve vrste a koje se ovde ne navode. Neke važne činjenice u vezi Lagranževih jednačina druge vrste glase:

1. Broj Lagranževih jednačina druge vrste jednak je broju stepeni slobode kretanja posmatranog mehaničkog sistema. U tom smislu, broj ovih jednačina je optimalan, jer diferencijalnih jednačina kretanja ne treba da bude više, ali ih ne može biti ni manje od broja stepeni slobode kretanja.
2. Pri formiranju Lagranževih jednačina druge vrste mora se voditi računa da operator $d() / dt$ u njima znači diferenciranje po vremenu, direktno tamo gde se vreme pojavljuje eksplicitno i posredno preko svih funkcija koje zavise od vremena.
3. Lagranževe jednačine druge vrste mogu se pisati i u obliku

$$Z_\alpha + Q_\alpha = 0.$$

Tada one, u izvesnom smislu, izražavaju takođe drugi Njutnov zakon, jer se drugi Njutnov zakon za kretanje jedne materijalne tačke može pisati i kao $\vec{F}^I + \vec{F} = 0$, gde je inercijalna sila tačke $\vec{F}^I = -m \vec{a}$.

4. Prema najopštijoj strukturi kinetičke energije sistema (4.47) i obliku Lagranževih jednačina druge vrste, sledi da je svaka od tih jednačina obična diferencijalna jednačina drugog reda.

⁵Hronološki, Lagranž je prvo izveo diferencijalne jednačine kretanja u zavisnim koordinatama sa množicima vezu, koje se zovu Lagranževe jednačine prve vrste.

5. Generalisane sile sistema odgovaraju svim aktivnim silama, aktivnim spregovima i reakcijama neidealnih veza u sistemu (4.32) i (4.34), nezavisno od toga da li su te neidealne reakcije veza unutrašnje ili spoljašnje sile u sistemu.
6. Reakcije idealnih veza nemaju uticaj na oblik Lagranževih jednačina druge vrste. Zato se, pri formiraju ovih jednačina, ne oslobađa idealnih veza, bez obzira da li su one unutrašnje ili spoljašnje u sistemu.
7. Ako se u problemu traže vrednosti nekih reakcija idealnih veza mora se, posle nalaženja kretanja rešavanjem Lagranževih jednačina druge vrste, oslobođiti odgovarajućih idealnih veza i na tako izdvojene elemente sistema primeniti drugi Njutnov zakon, ili opšti zakoni dinamike, jer se samo u njima pojavljuje te reakcije idealnih veza.
8. Ove jednačine su primenljive za sva kretanja holonomih mehaničkih sistema, jer su izvedene za takve sisteme, ali se one mogu uopštiti i za druge mehaničke, električne, elektromehaničke, termodinamičke i druge fizičke sisteme.

4.4.4 Lagranževe jednačine konzervativnih sistema

Ako sve aktivne sile, aktivni spregovi i reakcije neidealnih veza u sistemu poseduju potencijalnu energiju Π , koja zavisi od generalisanih koordinata q_α i vremena t , onda zbog (4.35), Lagranževe jednačine druge vrste (4.49) postaju

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0, \quad \alpha = 1, 2, \dots, n, \quad (4.50)$$

pošto potencijalna energija ne zavisi od generalisanih brzina \dot{q}_α , i gde je $L = E_k - \Pi$ Lagranževa funkcija ili kinetički potencijal sistema. Naglasimo da je u tom slučaju, kretanje mehaničkog sistema okarakterisano samo sa jednom funkcijom L , koja u najopštijem slučaju zavisi od generalisanih koordinata, generalisanih brzina i vremena, odnosno $L = L(q_\alpha, \dot{q}_\alpha, t)$. Mehanički sistemi, čije je kretanje opisano jednačinama (4.50), nazivaju se Lagranževi mehanički sistemi. Šta više, i svi fizički sistemi, kod kojih Lagranževa funkcija ne mora biti razlika kinetičke i po-

tencijalne energije, a čije je ponašanje opisano jednačinama oblika (4.50), nazivaju se Lagranževim sistemima.

4.4.5 Kinetička energija materijalnog sistema

Neka u najopštijem slučaju na sistem materijalnih tačaka i krutih tela deluju veze koje zavise od vremena t i generalisanih koordinata q_α . Tada, svaki vektor položaja ma koje tačke u sistemu može da se izrazi kao funkcija generalisanih koordinata q_α i vremena t , pa je

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_n, t). \quad (4.51)$$

Diferenciranjem po vremenu izraza 4.51 dobija se vektor brzine

$$\vec{v}_i = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha, \quad (4.52)$$

pa kinetička energija materijalnog sistema, posle promene reda sabiranja, postaje

$$\begin{aligned} E_k &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (\vec{v}_i \cdot \vec{v}_i) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} + \\ &+ \sum_{\alpha=1}^n \left(\sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \right) \dot{q}_\alpha + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n \left(\sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\beta} \right) \dot{q}_\alpha \dot{q}_\beta. \end{aligned} \quad (4.53)$$

Uvođenjem sledećih oznaka

$$\begin{aligned} E_{k0} &= A_0 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \right)^2, \\ E_{k1} &= \sum_{\alpha=1}^n A_\alpha \dot{q}_\alpha, \quad A_\alpha = \sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \\ E_{k2} &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n A_{\alpha\beta} \dot{q}_\alpha \dot{q}_\beta, \quad A_{\alpha\beta} = \sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\beta} \end{aligned} \quad (4.54)$$

kinetička energija materijalnog sistema postaje

$$E_k = E_{ko} + E_{k1} + E_{k2}. \quad (4.55)$$

Vidi se da je kinetička energija mehaničkog sistema u najjopštijem slučaju zbir člana E_{ko} koji ne zavisi od generalisanih brzina, člana E_{k1} linearne po generalisanim brzinama i člana E_{k2} koji je homogena funkcija drugog reda (kvadratna forma) po generalisanim brzinama. Veličine $A_{\alpha\beta}$ su simetrične jer važi da je $A_{\alpha\beta} = A_{\beta\alpha}$ za $\alpha, \beta = 1, 2, \dots, n$, gde je n broj stepeni slobode kretanja. Sve veličine $A_{\alpha\beta}$, A_α i A_0 su funkcije svih generalisanih koordinata q_α i vremena t .

U slučaju skleronomnih veza u materijalnom sistemu vektor položaja ma koje tačke sistema M_i ne zavisi eksplicitno od vremena pa je $\partial \vec{r}_i / \partial t = \vec{0}$, pa iz (4.54) sledi da je $A_0 = 0$ i $A_\alpha = 0$ za $\alpha = 1, \dots, n$, i kinetička energija dobija oblik

$$E_k = E_{k2} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n A_{\alpha\beta} \dot{q}_\alpha \dot{q}_\beta. \quad (4.56)$$

Kinetička energija skleronomnog materijalnog sistema je homogena funkcija drugog reda (kvadratna forma) generalisanih brzina \dot{q}_α .

4.4.6 Ciklična koordinata i njen integral

Ako se se neka generalisana koordinata, na primer koordinata q_m , ne pojavljuje eksplicitno u kinetičkoj energiji sistema i ako je odgovarajuća generalisana sila jednaka nuli, odnosno $\partial E_k / \partial q_m = 0$ i $Q_m = 0$, Lagranževa jednačina druge vrste (4.49) za generalisani koordinatu q_m postaje

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_m} \right) = 0.$$

Odavde sledi da je

$$\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_m} = c_m = \text{const.} \quad (4.57)$$

Jednačina (4.57) je prvi integral diferencijalne jednačine kretanja za generalisani koordinatu q_m . Koordinata q_m se naziva ciklična koordinata, a prvi integral (4.57) je ciklični prvi integral. Postojanje ciklične koordinate

u nekom problemu zavisi od odabranog skupa generalisanih koordinata za njegovo proučavanje⁶. Za isti problem u nekom skupu generalisanih koordinata može postojati ciklična koordinata a u drugom ne.

4.4.7 Integral energije

Neka su sve sile u sistemu potencijalne. U tom slučaju sistem se kreće u skladu sa Lagranževim jednačinama druge vrste (4.49) i (4.35)

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial E_k}{\partial q_\alpha} = - \frac{\partial \Pi}{\partial q_\alpha}, \quad \alpha = 1, 2, \dots, n. \quad (4.58)$$

Ako svaku jednačinu (4.58) pomnožimo sa odgovarajućom generalisanom brzinom \dot{q}_α i sve te jednačine saberemo po generalisanim koordinatama dobija se

$$\sum_{\alpha=1}^n \dot{q}_\alpha \frac{d}{dt} \frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_\alpha} - \sum_{\alpha=1}^n \dot{q}_\alpha \frac{\partial E_k}{\partial q_\alpha} = - \sum_{\alpha=1}^n \dot{q}_\alpha \frac{\partial \Pi}{\partial q_\alpha},$$

Ova jednačina može da se napiše u sledećem obliku

$$\sum_{\alpha=1}^n \left[\frac{d}{dt} \left(\dot{q}_\alpha \frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) - \ddot{q}_\alpha \frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_\alpha} - \dot{q}_\alpha \frac{\partial E_k}{\partial q_\alpha} + \dot{q}_\alpha \frac{\partial \Pi}{\partial q_\alpha} \right] = 0. \quad (4.59)$$

Pošto je u najopštijem slučaju kretanja $E_k = E_k(q_\alpha, \dot{q}_\alpha, t)$ i $\Pi = \Pi(q_\alpha, t)$ izvodi ovih funkcija po vremenu glase

$$\begin{aligned} \frac{dE_k}{dt} &= \frac{\partial E_k}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^n \left(\frac{\partial E_k}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha + \frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_\alpha} \ddot{q}_\alpha \right), \\ \frac{d\Pi}{dt} &= \frac{\partial \Pi}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^n \left(\frac{\partial \Pi}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha \right). \end{aligned} \quad (4.60)$$

Korišćenjem relacija (4.54) i (4.55) dobija se

$$\sum_{\alpha=1}^n \left(\dot{q}_\alpha \frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) = E_{k1} + 2E_{k2},$$

⁶Problem da se pronađe skup generalisanih koordinata u kome bi sve koordinate bile ciklične, nije ni do danas rešen.

pa iz (4.59) i (4.60) sledi

$$\frac{d}{dt}(E_{k2} + \Pi) = \frac{dE_{k0}}{dt} + \frac{\partial\Pi}{\partial t} - \frac{\partial E_k}{\partial t}. \quad (4.61)$$

1. Ako su ispunjeni uslovi:

1. Sve veze u sistemu su stacionarne pa je zbog toga

$$\frac{\partial E_k}{\partial t} = 0, \quad E_{k0} = 0, \quad E_{k1} = 0, \quad E_k = E_{k2}. \quad (4.62)$$

2. Potencijalna energija ne zavisi eksplisitno od vremena, odnosno

$$\frac{\partial\Pi}{\partial t} = 0. \quad (4.63)$$

Koristeći (4.62) i (4.63) iz (4.61) sledi

$$\frac{d}{dt}(E_k + \Pi) = 0,$$

pa je

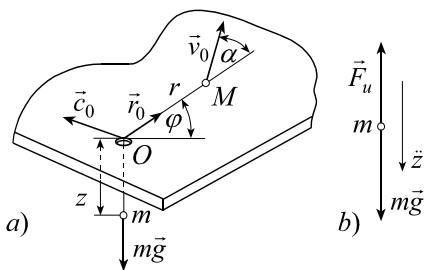
$$E_k + \Pi = E = \text{const.} \quad (4.64)$$

Važi sledeća teorema: *Ako su sve veze u sistemu stacionarne i ako potencijalna energija sistema ne zavisi eksplisitno od vremena totalna mehanička energija sistema $E_k + \Pi$ ostaje konstantna tokom kretanja⁷.* Konstanta E u izrazu (4.64) se određuje iz početnih uslova kretanja.

Primer 52 Dve materijalne tačke masa M i m vezane su nerastegljivim užetom dužine l (Slika 4.12a). Uže je provučeno kroz otvor O glatkog horizontalnog stola. Masa m može da se kreće po osi z . U početnom trenutku vremena masa M je na rastojanju R_0 od tačke O i ima početnu brzinu \vec{v}_0 pod uglom α prema pravcu OM . Treba:

1. Formirati diferencijalne jednačine kretanja sistema,
2. Odrediti silu u užetu,

⁷Ova teorema se pripisuje Jakobiju (K.G.J. Jacobi 1804-1851).



Slika 4.12:

Položaj mase M u ravni stola određen je sa dva parametra, na primer sa polarnim koordinatama r i φ . Zbog pravolinijskog kretanja mase m njen položaj je određen sa koordinatom z . Koordinata z nije nezavisna jer je zbog nerastegljivosti užeta

$$z = l - r. \quad (A)$$

Znači, ovaj sistem ima dva stepena slobode kretanja. Kao generalisane koordinate r i φ mase M . Sve veličine, a to su kinetička energija sistema i virtualni rad ili potencijalna energija sistema, moraju biti izražene preko tih koordinata.

Pošto sistem ima dve mase i kinetička energija sistema ima dva sabirka

$$E_k = E_{km} + E_{kM}.$$

Uzimajući u obzir poznate izraze za projekcije brzine u polarnom, za masu M , i Dekartovom koordinatnom sistemu, za masu m , gornji izraz postaje

$$E_k = \frac{M}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + \frac{m}{2}\dot{z}^2,$$

odnosno, pošto je zbog veze (A) brzina $\dot{z} = -\dot{r}$, dobija se

$$E_k = \frac{1}{2}[(M+m)\dot{r}^2 + Mr^2\dot{\varphi}^2]. \quad (B)$$

Veze u sistemu, nerastegljivo uže i glatka površina, su idealne pa se one ne uklanjaju. Od dve aktivne sile $m\vec{g}$ i $M\vec{g}$, samo sila $m\vec{g}$ vrši rad na virtualnom pomeranju δz . Kako je $\delta z = -\delta r$, zbog veze (A), virtualni rad aktivnih sila iznosi

$$\delta A = mg\delta z = -mg\delta r,$$

pa su generalisane sile

$$Q_r = -mg, \quad Q_\varphi = 0. \quad (C)$$

Generalisane sile mogu se izračunati i pomoću potencijalne energije sile težine $m\vec{g}$, jer je ta sila potencijalna. Potencijalna energija se uvek izračunava prema relaciji $\Pi = -A$, gde je A rad te sile na pomeranju iz položaja koji odgovara nultim vrednostima generalisanih koordinata u položaj koji odgovara njihovim proizvoljnim vrednostima. Prema tome takav rad sile $m\vec{g}$ glasi $A = mgz$, odnosno, zbog (A), $A = mg(l - r)$. Znači, potencijalna energija te sile iznosi $\Pi = -mg(l - r)$. Generalisane sile, koje se izračunavaju prema relacijama

$$Q_r = -\frac{\partial \Pi}{\partial r}, \quad Q_\varphi = -\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi},$$

su istovetne sa izračunatim generalisanim silama (C) pomoću virtualnog rada.

Diferencijalne jednačine kretanja dobijaju se primenom Lagranževih jednačina druge vrste za usvojene generalisane koordinate r i φ

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial E_k}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial E_k}{\partial r} = Q_r, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial E_k}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial E_k}{\partial \varphi} = Q_\varphi. \quad (D)$$

Iz izraza (B) se dobijaju potrebni parcijalni izvodi kinetičke energije

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_k}{\partial \dot{r}} &= (m + M)\dot{r}, & \frac{\partial E_k}{\partial r} &= Mr\dot{\varphi}^2, \\ \frac{\partial E_k}{\partial \dot{\varphi}} &= Mr^2\dot{\varphi}, & \frac{\partial E_k}{\partial \varphi} &= 0. \end{aligned}$$

Zamenom ovih izraza i generalisanih sila (C) u Lagranževe jednačine, pri čemu se mora voditi računa da operator $d()/dt$ znači diferenciranje po vremenu, direktno tamo gde se vreme pojavljuje eksplisitno i posredno preko svih funkcija koje zavise od vremena, dobijaju se jednačine kretanja

$$(m + M)\ddot{r} - Mr\dot{\varphi}^2 = -mg, \quad 2r\dot{r}\dot{\varphi} + r^2\ddot{\varphi} = 0. \quad (E)$$

Vidi se da se generalisana koordinata φ ne pojavljuje eksplisitno u kinetičkoj energiji sistema (B) i da je odgovarajuća generalisana sila jednaka nuli. Prema tome, φ je ciklična koordinata, pa se druga jednačina kretanja može zameniti njenim cikličnim prvim integralom

$$\frac{\partial E_k}{\partial \dot{\varphi}} = Mr^2\dot{\varphi} = C_1, \quad (F)$$

gde je C_1 integraciona konstanta, koja se može pisati i kao

$$Mr(r\dot{\varphi}) = Mrv_c = C_1,$$

gde je v_c cirkularna brzina mase M . Iz početnih uslova kretanja

$$r = R_0, \quad v_{c0} = v_0 \sin \alpha, \quad \text{za } t = 0,$$

dobija se njena vrednost

$$C_1 = MR_0v_0 \sin \alpha.$$

Pošto je sila u užetu reakcija idealne veze, ona se u postupku formiranja jednačina kretanja pomoću Lagranževih jednačina ne pojavljuje. Zato se za njeno određivanje mora oslobođiti veza užeta i, na primer, posmatrati drugi Njutnov zakon za pravolinijsko kretanje mase m (Slika 4.12b). Tako se dobija

$$m\ddot{z} = mg - F_u,$$

gde je \vec{F}_u sila u užetu. Pošto je $z = l - r$, to je $\ddot{z} = -\ddot{r}$, pa se iz (E) i (F) nalazi sila u užetu

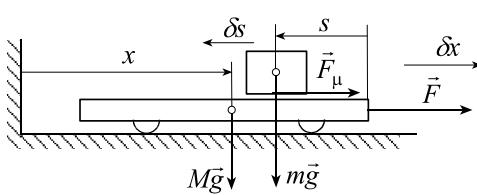
$$F_u = \frac{mM}{m+M} \left(g + \frac{R_0^2 v_0^2}{r^3} \sin^2 \alpha \right).$$

Primer 53 Na kolicima mase M nalazi se teret mase m . Površina kontakta između tereta i kolica je hrapava sa koeficijentom trenja klizanja μ . Mase točkova su zanemarljive i točkovi se kotrljaju bez klizanja po nedeformabilnoj podlozi. Na kolica deluje horizontalna sila \vec{F} (Slika 4.13). Ako je sila \vec{F} konstantna, naći njenu vrednost da se teret m kreće po kolicima konstantnom relativnom brzinom. Za taj slučaj, naći ubrzanje kolica.

Sistem ima dva stepena slobode kretanja, jer je njegov položaj određen sa dve koordinate x i s , gde je x apsolutno pomeranje mase M a s relativno pomeranje mase m u odnosu na kolica. Obe mase se kreću translatoryno pa je kinetička energija sistema

$$E_k = E_{km} + E_{kM} = \frac{M}{2}\dot{x}^2 + \frac{m}{2}(\dot{x} - \dot{s})^2, \quad (A)$$

jer su \dot{x} i $\dot{x} - \dot{s}$ apsolutne brzine ovih masa.



Slika 4.13:

Od aktivnih sila $m\vec{g}$, $M\vec{g}$ i \vec{F} samo sila \vec{F} vrši virtualni rad. Zbog kotrljanja točkova bez klizanja po nedeformabilnoj podlozi veza točkova sa podlogom je idealna. Veza tereta i kolica je neidealna zbog postojanja trenja klizanja. Pošto masa m nema kretanje u vertikalnom pravcu normalna reakcija na nju je jednaka težini mg mase m , pa je sila trenja klizanja $F_\mu = \mu mg$. Virtualno pomeranje mase m u odnosu na kolica iznosi δs . Ukupan virtualni rad svih aktivnih sila i reakcija neidealnih veza sistema iznosi

$$\delta A = F\delta x - \mu mg\delta s, \quad (B)$$

gde se virtualni rad sile trenja klizanja računa prema izrazu (4.10), pa su generalisane sile problema

$$Q_x = F, \quad Q_s = -\mu mg. \quad (C)$$

Dve Lagranževe jednačine kretanja ovog sistema

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial E_k}{\partial x} - \frac{\partial E_k}{\partial x} = Q_x, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial E_k}{\partial s} - \frac{\partial E_k}{\partial s} = Q_s,$$

glase

$$(M+m)\ddot{x} - m\ddot{s} = F, \quad -m\ddot{x} + m\ddot{s} = -\mu mg.$$

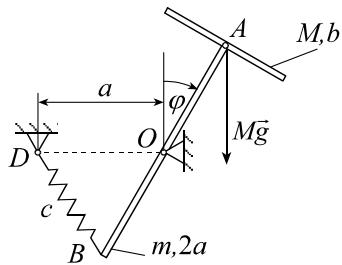
Rešavanjem ovih diferencijalnih jednačina po \ddot{x} i \ddot{s} dobija se

$$\ddot{x} = \frac{F - \mu mg}{M}, \quad \ddot{s} = \frac{F - \mu(m+M)g}{M}.$$

Vidi se da je $\ddot{s} = 0$, tj. da je relativna brzina \dot{s} mase m konstantna, ako sila F ima vrednost $F = \mu(m+M)g$. U tom slučaju kolica imaju apsolutno ubrzanje $\ddot{x} = \mu g$.

Primer 54 Štap mase m i dužine $2a$ vezan je svojim središtem za cilindričan zglob O . Za kraj A ovog štapa kruto je vezan, pod pravim ugлом, svojim središtem štap mase M i dužine b (Slika 4.14). Za kraj B štapa AB vezana je opruga krutosti c , koja je nenapregnuta kada je štap AB vertikalан и која је другим крајем vezана за тачку D ($\overline{OD} = a$).

1. Ako se štap AB kreće u okolini vertikalnog položaja ravnoteže, koji uslov mora ispuniti krutost opruge c da bi to kretanje bilo oscila-torno?
2. Koliki je period tih oscilacija?



Slika 4.14:

Sistem ima jedan stepen slobode kretanja. Za generalisanu koordinatu usvaja se ugao φ . U sistemu su dva štapa međusobno kruto spojena, pa se oba obrću oko tačke O . Znači, kinetička energija sistema glasi

$$E_k = E_{km} + E_{kM} = \frac{1}{2} J_{Om} \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} J_{OM} \dot{\varphi}^2,$$

gde su J_{Om} i J_{OM} momenti inercije masa m i M za tačku O . Momenti inercije imaju vrednosti $J_{Om} = m(2a)^2/12$ i $J_{OM} = J_A + Ma^2$,

gde je $J_A = Mb^2/12$, pa prethodni izraz postaje

$$E_k = \frac{1}{2} \left[\left(M + \frac{m}{3} \right) a^2 + \frac{M}{12} b^2 \right] \dot{\varphi}^2. \quad (A)$$

Jedina veza u sistemu, zgrob O, je idealna veza. Od aktivnih sila, težina $M\vec{g}$ i sila u opruzi imaju potencijalnu energiju. Potencijalna energija težine je

$$\Pi_M = -A = -Mga(1 - \cos \varphi),$$

dok potencijalna energija opruge iznosi

$$\Pi_o = \frac{c}{2} (\Delta l)^2,$$

gde je Δl izduženje opruge. Pošto je tokom kretanja dužina opruge, po kosinusnoj teoremi za trougao DOB , data sa

$$\overline{DB} = a\sqrt{2}\sqrt{1 - \sin \varphi},$$

a u nenapregnutom stanju $a\sqrt{2}$, Δl iznosi $\Delta l = \overline{DB} - a\sqrt{2}$ i potencijalna energija sistema glasi

$$\Pi = -Mga(1 - \cos \varphi) + ca^2 \left(\sqrt{1 - \sin \varphi} - 1 \right)^2. \quad (B)$$

Odgovarajuća Lagranževa diferencijalna jednačina kretanja ima oblik

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial E_k}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial E_k}{\partial \varphi} = - \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi}.$$

Koristeći (A) i (B) dobija se jednačina kretanja sistema

$$\begin{aligned} & \left[\left(M + \frac{1}{3}m \right) a^2 + \frac{1}{12}Mb^2 \right] \ddot{\varphi} \\ & + ca^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \sin \varphi}} - 1 \right) \cos \varphi - Mga \sin \varphi = 0. \end{aligned}$$

Za mala kretanja oko položaja ravnoteže, koji je određen sa $\varphi = 0$, tj. za male vrednosti ugla φ , imamo sledeće razvoje u redove

$$\sin \varphi \approx \varphi, \quad \cos \varphi \approx 1, \quad (1 - \sin \varphi)^{-\frac{1}{2}} \approx 1 + \frac{1}{2}\varphi,$$

pa gornja jednačina postaje

$$\ddot{\varphi} + \omega^2 \varphi = 0,$$

gde je

$$\omega^2 = \frac{\frac{1}{2}ca - Mg}{\left(M + \frac{m}{3} \right) a^2 + \frac{M}{12}b^2} a.$$

Da bi sistem vršio male oscilacije oko položaja $\varphi = 0$, mora biti $\omega^2 > 0$, odnosno $c > 2Mg/a$. Period ovih oscilacija iznosi $T = 2\pi/\omega$.

Primer 55 Laki kruti štap dužine l zglobno je vezan krajevima A i B za klizače mase m . Nerastegljivo uže je vezano za klizač B i namotano na disk mase M i poluprečnika r (Slika 4.15). Ako se centar mase diska C kreće u vertikalnom pravcu, formirati diferencijalne jednačine kretanja sistema. Površine po kojima se kreću klizači su glatke.

Sistem ima dva stepena slobode kretanja. Za generalisane koordinate usvajaju se ugao φ između štapa i horizontale i rastojanje s od centra mase diska C do neke nepomične ravni. U sistemu su tri mase. Klizači

se kreću pravolinijski a disk ravanski. Prema tome, kinetička energija sistema glasi

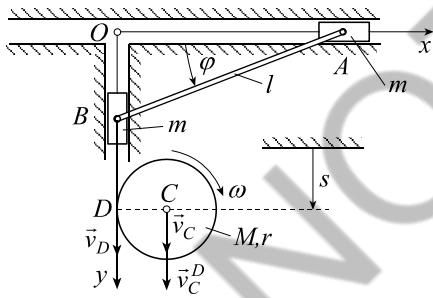
$$\begin{aligned} E_k &= E_{kA} + E_{kB} + E_{kM}, \\ E_k &= \frac{1}{2}mv_A^2 + \frac{1}{2}mv_B^2 \\ &\quad + \frac{1}{2}Mv_C^2 + \frac{1}{2}J_C\omega^2, \end{aligned}$$

gde je ω ugaona brzina ravanskog kretanja diska. Ako se usvoji nepokretni koordinatni sistem Oxy , onda su koordinate tačaka A i B date sa

$$x_A = l \cos \varphi, \quad y_B = l \sin \varphi, \quad (A)$$

a njihove brzine

$$v_A = \dot{x}_A = -l\dot{\varphi} \sin \varphi, \quad v_B = \dot{y}_B = l\dot{\varphi} \cos \varphi. \quad (B)$$



Slika 4.15:

$$\dot{s} = l\dot{\varphi} \cos \varphi + r\omega,$$

odnosno

$$\omega = \frac{\dot{s} - l\dot{\varphi} \cos \varphi}{r}. \quad (C)$$

Koristeći (A), (B), (C) i $J_C = Mr^2/2$, kinetička energija sistema postaje

$$E_k = \frac{m}{2}l^2\dot{\varphi}^2 + \frac{M}{2}\dot{s}^2 + \frac{M}{4}(\dot{s} - l\dot{\varphi} \cos \varphi)^2.$$

Sve veze u sistemu su idealne, a potencijalna energija aktivnih sila $M\vec{g}$ i $m\vec{g}$ sa napadnim tačkama C i B ima oblik

$$\Pi = -A = -mgl \sin \varphi - Mgs.$$

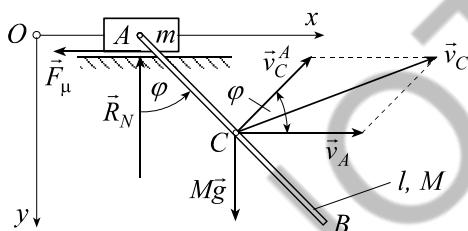
Sada, Lagranževe jednačine druge vrste (4.50)

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial E_k}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial E_k}{\partial \varphi} = -\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial E_k}{\partial \dot{s}} - \frac{\partial E_k}{\partial s} = -\frac{\partial \Pi}{\partial s},$$

dovode do sledećih jednačina kretanja sistema

$$\begin{aligned} \frac{3}{2}\ddot{s} - \frac{l}{2}(\ddot{\varphi} \cos \varphi - \dot{\varphi}^2 \sin \varphi) &= g, \\ (m + \frac{M}{2} \cos^2 \varphi)l\ddot{\varphi} - \frac{M}{2}\ddot{s} \cos \varphi - \frac{M}{4}l\dot{\varphi}^2 \sin 2\varphi &= mg \cos \varphi. \end{aligned}$$

Primer 56 Na hrapavoj horizontalnoj podlozi nalazi se masa m za koju je zglobno vezan štap AB mase M i dužine l (Slika 4.16). Koeficijent trenja klizanja između mase m i podloge iznosi μ . Ako se sistem kreće u jednoj ravni formirati odgovarajuće diferencijalne jednačine kretanja.



Slika 4.16:

Pri kretanju u jednoj ravni ovaj sistem ima dva stepena slobode kretanja. Usvojimo x , pomeranje mase m , i ugao φ za generalisane koordinate. Masa m se kreće pravolinijijski a štap ravanski. Zbog toga, kinetička energija sistema glasi

$$\begin{aligned} E_k &= E_{km} + E_{kM}, \\ E_k &= \frac{m}{2}\dot{x}^2 + \frac{M}{2}\dot{v}_C^2 + \frac{1}{2}J_C\dot{\varphi}^2. \end{aligned}$$

Prema poznatim pravilima kinematike ravanskog kretanja, brzina centra mase štapa iznosi $\vec{v}_C = \vec{v}_A + \vec{v}_C^A$, gde su $v_A = \dot{x}$ i $v_C^A = l\dot{\varphi}/2$, a ovaj vektorski zbir prikazan je na slici. Prema kosinusnoj teoremi dobija se

$$v_C^2 = \dot{x}^2 + \frac{l^2}{4}\dot{\varphi}^2 - 2\dot{x}\frac{l}{2}\dot{\varphi} \cos(\pi - \varphi).$$

Do ove brzine može se doći i na drugi način. Usvojimo nepokretan koordinatni sistem Oxy . Nađemo koordinate centra mase C

$$x_C = x + \frac{l}{2} \sin \varphi, \quad y_C = \frac{l}{2} \cos \varphi.$$

Njihovim diferenciranjem po vremenu dobijamo

$$\dot{x}_C = \dot{x} + \frac{l}{2}\dot{\varphi} \cos \varphi, \quad \dot{y}_C = -\frac{l}{2}\dot{\varphi} \sin \varphi.$$

Kvadrat brzine tačke C izračunava se prema $v_C^2 = \dot{x}_C^2 + \dot{y}_C^2$. Bez obzira na način izračunavanja brzine tačke C , kinetička energija sistema postaje

$$E_k = \frac{1}{2}(m+M)\dot{x}^2 + \frac{M}{2}l\dot{x}\dot{\varphi} \cos \varphi + \frac{M}{6}l^2\dot{\varphi}^2,$$

jer je moment inercije $J_C = Ml^2/12$.

Od aktivnih sila samo težina štapa vrši rad. Ta sila ima potencijalnu energiju

$$\Pi = -A = - \left[-Mg \frac{l}{2}(1 - \cos \varphi) \right].$$

Reakcije zglobova u tački A i normalna reakcija \vec{R}_N na masu m su reakcije idealnih veza, dok je sila trenja klizanja \vec{F}_μ reakcija neidealne veze jer se masa m kliza po hrapavoj podlozi. Virtualni rad te sile iznosi

$$\delta A^* = -F_\mu \delta x$$

pa je nekonzervativni deo generalisane sile Q_x^* dat sa $Q_x^* = -F_\mu$ i $Q_\varphi^* = 0$. Ukupne generalisane sile se izračunavaju prema izrazu (4.36), tj.

$$Q_x = -\frac{\partial \Pi}{\partial x} + Q_x^* = -F_\mu, \quad Q_\varphi = -\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} + Q_\varphi^* = -Mg \frac{l}{2} \sin \varphi.$$

Koristeći dobijene izraze za kinetičku energiju sistema i generalisane sile, Lagranževe jednačine druge vrste

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial E_k}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial E_k}{\partial \varphi} = Q_\varphi, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial E_k}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial E_k}{\partial x} = Q_x$$

dovode do jednačina kretanja

$$(m+M)\ddot{x} + \frac{M}{2}l(\ddot{\varphi} \cos \varphi - \dot{\varphi}^2 \sin \varphi) = -F_\mu,$$

$$\frac{l}{3}\ddot{\varphi} + \frac{1}{2}\ddot{x} \cos \varphi = -\frac{g}{2} \sin \varphi,$$

gde još treba izračunati silu trenja klizanja tokom kretanja. Poznato je da ona iznosi $F_\mu = \mu R_N$. Za nalaženje vrednosti reakcije veze R_N , koja se uopšte ne pojavljuje u Lagranževim jednačinama, moraju se koristiti opšti zakoni dinamike ili drugi Njutnov zakon. Na primer, zakon o kretanju centra mase sistema, kojeg čine mase m i M , u pravcu ose y glasi

$$(m + M)\ddot{y}_{cs} = mg + Mg - R_N,$$

jer su spoljašnje sile sistema \vec{R}_N , $m\vec{g}$ i $M\vec{g}$. Centar mase sistema je određen relacijom

$$y_{cs} = \frac{my_m + My_M}{m + M},$$

a pošto je $y_M = (l/2) \cos \varphi$ i $y_m = 0$, iz prethodnog izraza dobija se

$$\ddot{y}_{cs} = -\frac{Ml}{2(m + M)}(\ddot{\varphi} \sin \varphi + \dot{\varphi}^2 \cos \varphi).$$

Konačno, sila trenja klizanja, čija vrednost treba da se zameni u jednačine kretanja, glasi

$$F_\mu = \mu \left[(m + M)g + \frac{Ml}{2}(\ddot{\varphi} \sin \varphi + \dot{\varphi}^2 \cos \varphi) \right]$$

Vidi se da ova sila trenja klizanja zavisi od kretanja sistema preko ugla φ i njegovih izvoda $\dot{\varphi}$ i $\ddot{\varphi}$, koji su takođe funkcije vremena.

4.5 Stabilnost ravnotežnih stanja

4.5.1 Ravnoteža materijalnih sistema izražena u generalisanim koordinatama. Stabilnost ravnoteže.

U delu 1.9.5 ovog teksta data su proučavanja stabilnosti ravnoteže materijalne tačke. Ovde se ta proučavanja stabilnosti ravnoteže izlažu pomoću generalisanih koordinata. Dokaz teoreme o stabilnosti ravnotežnih položaja se ne ponavlja. Posmatra se ravnoteža mehaničkog sistema N materijalnih tačaka i krutih tela M_i masa m_i , $i = 1, 2, \dots, N$, koji ima n stepeni slobode kretanja. Ovaj sistem se nalazi u ravnoteži pod dejstvom

aktivnih sila \vec{F}_i i aktivnih spregova $\vec{\mathfrak{M}}_\xi$, $\xi = 1, 2, \dots, m$. Na sistem deluju idealne veze nezavisne od vremena i neidealne veze čije su reakcije \vec{R}_i^* . Neka je položaj sistema jednoznačno određen sa n generalisanih koordinata q_1, q_2, \dots, q_n . Prema Lagranževom principu virtualnog pomeranja (4.19) u položaju ravnoteže mora biti virtualni rad svih aktivnih sila i reakcija neidealnih veza jednak nuli, odnosno

$$\delta A = \sum_{i=1}^N (\vec{F}_i + \vec{R}_i^*) \cdot \delta \vec{r}_i + \sum_{\xi=1}^m \vec{\mathfrak{M}}_\xi \cdot \delta \vec{\varphi}_\xi = 0. \quad (4.65)$$

Uvođenjem generalisanih koordinata prema (4.34) ovaj izraz postaje

$$\delta A = \sum_{\alpha=1}^n Q_\alpha \delta q_\alpha = 0, \quad (4.66)$$

gde je Q_α generalisana sila. Pošto su generalisane koordinate nezavisne i varijacije δq_α različite od nule ovaj uslov je ispunjen ako je

$$Q_\alpha = 0, \quad (\alpha = 1, 2, \dots, n). \quad (4.67)$$

Znači ovo su uslovi ravnoteže posmatranog mehaničkog sistema u generalisanim koordinatama. Prema tome : *U položaju ravnoteže neslobodnog materijalnog sistema, koji je podvrgnut idealnim stacionarnim vezama, sve generalisane sile koje odgovaraju nezavisnim generalisanim koordinatama, jednake su nuli.* Ako bi sve sile i spregovi koji deluju na sisteme bile konzervativne, odnosno sve sile i spregovi imaju potencijalnu energiju $\Pi(q_\alpha)$, ovi uslovi postaju

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q_1} = 0, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial q_2} = 0, \dots, \frac{\partial \Pi}{\partial q_n} = 0. \quad (4.68)$$

Vidi se da su ovi uslovi isti kao i uslovi za nalaženje ekstremnih vrednosti funkcije $\Pi(q_\alpha)$. Uslovi pri kojima je položaj ravnoteže stabilan daje Lagranž-Dirihleova⁸ teorema koja glasi: *Ako u položaju ravnoteže potencijalna energija ima minimum položaj ravnoteže je stabilan. Ako u položaju ravnoteže potencijalna energija ima maksimum položaj ravnoteže je nestabilan* (vidi analizu u delu 1.9.5).

⁸Johan Peter Gustav Lejeune Dirichlet 1805-1859.

Ako se ravnoteža materijalnog sistema ostvaruje silama koje nisu potencijalne, stabilnost ravnotežnog stanja se ne može proučavati na ovaj način.

Primer 57 Homogena kvadratna ploča može da se obrće u vertikalnoj ravni oko ose koja prolazi kroz teme O (Slika 4.17). Težina ploče je P , a dužina njene stranice je a . Za teme A ploče vezan je konac, koji je prebačen preko beskonačno malog kotura B i zategnut teretom $Q = P\sqrt{2}/2$. Osa kotura B leži na rastojanju a vertikalno iznad tačke O. Odrediti ravnotežne položaje i ispitati njihovu stabilnost.

Aktivne sile P i Q su konzervativne pa je potencijalna energija sistema

$$\Pi = -Py_1 + Qy_2. \quad (1)$$

Ovaj sistem ima jedan stepen slobode kretanja i neka je generalisana koordinata ugao ψ . Tada je sa slike

$$y_1 = \frac{a\sqrt{2}}{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \psi - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{a}{2}(\sin \psi - \cos \psi). \quad (2)$$

Pošto je konac konstantne dužine, recimo l , sledi

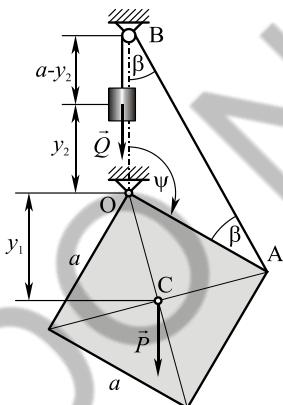
$$a - y_2 + 2a \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\psi}{2}\right) = l,$$

odnosno

$$y_2 = a + 2a \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\psi}{2}\right) - l = 2a \sin \frac{\psi}{2} + a - l. \quad (3)$$

Koristeći da je $Q = P\sqrt{2}/2$ i relacije (2) i (3) potencijalna energija sistema dobija oblik

$$\Pi = \frac{Pa}{2} \left[2\sqrt{2} \sin \frac{\psi}{2} - \sin \psi + \cos \psi \right] + \frac{P\sqrt{2}}{2}(a-l). \quad (4)$$



Slika 4.17:

Položaji ravnoteže su određeni jednačinom $d\Pi/d\psi = 0$ koja dovodi do

$$\frac{d\Pi}{d\psi} = \frac{Pa}{2} \left(\sqrt{2} \cos \frac{\psi}{2} - \cos \psi - \sin \psi \right) = 0. \quad (5)$$

Pošto je

$$\cos \frac{\psi}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \psi}{2}},$$

kvadriranjem prethodnog izraza i vodeći računa da je $\sin^2 \psi + \cos^2 \psi = 1$ dobija se jednačina

$$(2 \sin \psi - 1) \cos \psi = 0$$

čija su rešenja

$$\psi_1 = \frac{\pi}{2}, \quad \psi_2 = \frac{\pi}{6}.$$

Iz izraza (5) dobija se

$$\frac{d^2\Pi}{d\psi^2} = \frac{Pa}{2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \sin \frac{\psi}{2} + \sin \psi - \cos \psi \right),$$

pa je

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2\Pi}{d\psi^2} \right)_1 &= \frac{Pa}{4} > 0, \\ \left(\frac{d^2\Pi}{d\psi^2} \right)_2 &= \frac{Pa}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \frac{\pi}{12} \right) < 0. \end{aligned}$$

Zaključujemo da je ravnotežni položaj $\psi_1 = \frac{\pi}{2}$ položaj stabilne ravnoteže a položaj $\psi_2 = \frac{\pi}{6}$ položaj nestabilne ravnoteže.

Primer 58 Na hrapavom kružnom cilindru prečnika $2R$ leži pravougli paralelopiped debljine h (Slika 4.18). Odrediti visinu h tako da ravnoteža ovog sistema bude stabilna.

U položaju ravnoteže težište se nalazi na visini $y_{c_1} = R + h/2$. Kada se paralelo-piped izvede iz ravnotežnog položaja položaj težišta je određen sa

$$y_{c_2} = \left(R + \frac{h}{2} \right) \cos \varphi + R\varphi \sin \varphi, \quad (1)$$

pa je pomeranje težišta i konačno potencijalna energija iznosi

$$\Pi = G \left[\left(R + \frac{h}{2} \right) (\cos \varphi - 1) + R\varphi \sin \varphi \right]. \quad (2)$$

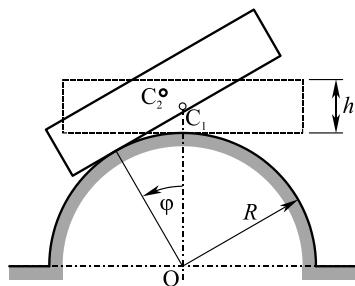
Prvi i drugi izvod potencijalne energije po promenljivoj φ iznose

$$\frac{d\Pi}{d\varphi} = G \left(R\varphi \cos \varphi - \frac{h}{2} \sin \varphi \right), \quad (3)$$

$$\frac{d^2\Pi}{d\varphi^2} = G \left[\left(R - \frac{h}{2} \right) \cos \varphi - R\varphi \sin \varphi \right]. \quad (4)$$

Iz (4) je jasno da jedno rešenje jednačine $\frac{d\Pi}{d\varphi} = 0$ glasi $\varphi = 0$. Za tu vrednost ugla φ drugi izvod potencijalne energije po uglu φ ima vrednost

$$\left(\frac{d^2\Pi}{d\varphi^2} \right)_{\varphi=0} = G(R - \frac{h}{2}).$$



Slika 4.18:

Vidi se da je za $h < 2R$ ispunjen uslov da je potencijalna energija za $\varphi = 0$ u minimumu, odnosno da je $\left(\frac{d^2\Pi}{d\varphi^2} \right)_{\varphi=0} > 0$, pa je taj položaj ravnoteže položaj stabilne ravnoteže za $h < 2R$.

4.5.2 Relativna ravnoteža i stabilnost sistema

Lagranž-Dirihleova teorema može značajno da se uopšti na proučavanje relativne ravnoteže materijalnih sistema i studiju njihove stabilnosti pri kretanju.

Posmatra se neslobodni materijalni sistem koji se nalazi u relativnoj ravnoteži u odnosu na neko pokretno telo koje se obrće sa konstantnom ugaonom brzinom ω oko nepomične ose z . Telo koje nosi materijalni sistem predstavlja u stvari vezu. Ova veza je promenljiva tokom vremena i po pretpostavci idealna. Položaj materijalnog sistema je određen u odnosu na noseće telo pomoću generalisanih koordinata q_1, q_2, \dots, q_n . Ako je rastojanje i -te tačke materijalnog sistema od ose obrtanja Oz obeleženo sa r_i onda je to rastojanje funkcija svih generalisanih koordinata, odnosno

$$r_i = r_i(q_1, q_2, \dots, q_n). \quad (4.69)$$

Pošto se materijalni sistem nalazi u položaju relativne ravnoteže u odnosu na noseće telo kinetička energija sistema ima oblik

$$E_k = \frac{1}{2} \sum m_i r_i^2 \omega^2 = \frac{\omega^2}{2} \sum m_i r_i^2. \quad (4.70)$$

Neka su Q_i ($i = 1, 2, \dots, n$) generalisane sile koje se izračunavaju na uobičajen način. Lagranževe jednačine druge vrste

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial E_k}{\partial q_i} = Q_i, \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (4.71)$$

primenjene na kinetičku energiju (4.70) pružaju relacije

$$\frac{\partial E_k}{\partial q_i} = 0, \quad \frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\frac{\omega^2}{2} \sum m_i r_i^2 \right), \quad (4.72)$$

pa uslov relativne ravnoteže sistema u odnosu na noseće telo koje se obrće konstantnom ugaonom brzinom oko ose Oz glasi

$$\frac{\partial}{\partial q_i} \left(\frac{\omega^2}{2} \sum m_i r_i^2 \right) + Q_i = 0. \quad (4.73)$$

Na svaku materijalnu tačku sistema mase m_i deluje centrifugalna sila

$$m_i r_i \omega^2$$

koja vrši rad na pomeranju u radijalnom pravcu

$$m_i r_i \omega^2 dr_i.$$

Ukupan elementaran rad svih centrifugalnih sila na sve tačke sistema iznosi

$$dA = \omega^2 \sum m_i r_i dr_i.$$

Ako se uvede elementarna potencijalna energija centrifugalnih sila relacijom

$$d\Pi^\omega = -dA = -\omega^2 \sum m_i r_i dr_i,$$

posle integracije dobija se

$$\Pi^\omega = -\frac{\omega^2}{2} \sum m_i r_i^2 = -E_k. \quad (4.74)$$

Ako su sve generalisane sile potencijalne, odnosno ako je

$$Q_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i},$$

uslov (4.73) postaje

$$\frac{\partial \Pi^*}{\partial q_i} = 0, \quad (4.75)$$

gde je

$$\Pi^* = \Pi + \Pi^\omega \quad (4.76)$$

Veličina Π^* , koja je zbir potencijalne energije svih aktivnih i centrifugalnih sila, naziva se modifikovana potencijalna energija. Istim razmišljanjem kao što je već bilo urađeno u analizi stabilnosti ravnotežnog položaja, dolazi se do zaključka da je položaj relativne ravnoteže stabilan ako je modifikovana potencijalna u tom položaju u minimumu.

Ako je materijalni sistem čija se relativna ravnoteža proučava kruto telo potencijalna energija centrifugalnih sila je

$$\Pi^\omega = -\frac{\omega^2}{2} J_z, \quad (4.77)$$

jer je

$$\sum m_i r_i^2 = J_z, \quad (4.78)$$

gde je J_z moment inercije materijalnog krutog tela za obrtnu osu Oz . Važno je naglasiti da je ovde moment inercije J_z funkcija generalisanih koordinata q_i .

Primer 59 Dvojno klatno, obrazovano je od dva štapa dužine l i materijalnih tačaka mase m . Klatna se obrću zajedno sa ležištem u tački O ugaonom brzinom ω oko vertikalne ose Oz . Ispitati stabilnost vertikalnog ravnotežnog položaja klatna pri zanemarivanju mase štapova (Slika 4.19).

U ovom problemu aktivne sile su samo težine dveju masa pa je njihova potencijalna energija

$$\Pi = mg(l - l \cos \theta) + mg [(l - l \cos \theta) + (l - l \cos \varphi)].$$

Pošto su uglovi θ i φ mali razvijanjem funkcija ko-sinus u red i zadržava-jući se na malim veličinama do drugog reda dobija se

$$\cos \theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}, \quad \cos \varphi \approx 1 - \frac{\varphi^2}{2},$$

odnosno

$$\Pi = mgl \left(\theta^2 + \frac{\varphi^2}{2} \right). \quad (1)$$

Potencijalna energija centrifugalnih sila ima ob-

lik

$$\Pi^\omega = -\frac{\omega^2}{2}(mr_1^2 + mr_2^2).$$

Sa slike se vidi da je

$$\begin{aligned} r_1 &= l \sin \theta \approx l\theta, \\ r_2 &= l \sin \theta + l \sin \varphi \approx l(\theta + \varphi). \end{aligned} \quad (2)$$

Prema (4.76) dobija se

$$\Pi^* = mgl \left(\theta^2 + \frac{\varphi^2}{2} \right) - \frac{\omega^2 ml^2}{2} [\theta^2 + (\theta + \varphi)^2]. \quad (3)$$

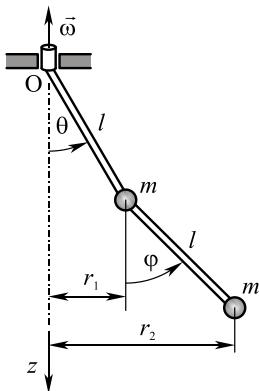
Parcijalnim diferenciranjem odavde se dobijaju

prvi izvodi

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi^*}{\partial \varphi} &= mgl\varphi - \omega^2 ml^2(\theta + \varphi), \\ \frac{\partial \Pi^*}{\partial \theta} &= 2mgl\theta - \omega^2 ml^2[\theta + (\theta + \varphi)], \end{aligned} \quad (4)$$

kao i drugi

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Pi^*}{\partial \varphi^2} &= mgl - \omega^2 ml^2 = ml(g - l\omega^2) = ml^2 \omega^2 \left(\frac{g}{l\omega^2} - 1 \right), \\ \frac{\partial^2 \Pi^*}{\partial \theta^2} &= 2mgl - 2\omega^2 ml^2 = 2ml(g - l\omega^2) = 2ml^2 \omega^2 \left(\frac{g}{l\omega^2} - 1 \right), \\ \frac{\partial^2 \Pi^*}{\partial \varphi \partial \theta} &= -\omega^2 ml^2. \end{aligned} \quad (5)$$



Slika 4.19:

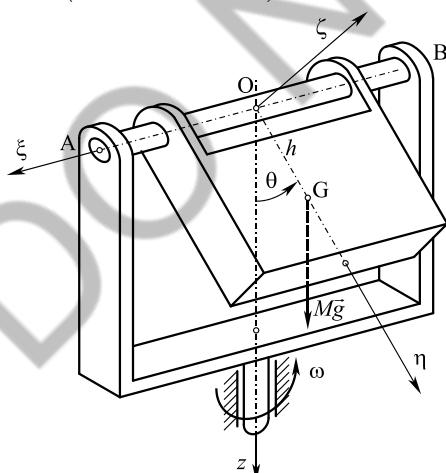
Vidi se da su vrednosti $\varphi = 0$ i $\theta = 0$ rešenje jednačina $\frac{\partial \Pi^*}{\partial \varphi} = 0$ i $\frac{\partial \Pi^*}{\partial \theta} = 0$, pa je to vertikalni položaj ravnoteže. Da bi to bio položaj stabilne ravnoteže moraju biti ispunjena sledeća dva uslova

$$d = \frac{\partial^2 \Pi^*}{\partial \varphi^2} \frac{\partial^2 \Pi^*}{\partial \theta^2} - \left(\frac{\partial^2 \Pi^*}{\partial \varphi \partial \theta} \right)^2 > 0, \quad \frac{\partial^2 \Pi^*}{\partial \varphi^2} > 0.$$

1. Da bi bilo $(\partial^2 \Pi / \partial \varphi^2) > 0$ mora biti $(g/l\omega^2) > 1$; 2. Da bi bilo $d > 0$ mora biti $(g/l\omega^2) > 1 + \sqrt{2}/2$. Pošto su oba uslova ispunjena za $(g/l\omega^2) > 1 + \sqrt{2}/2$ to je ovaj uslov $(g/l\omega^2) > 1 + \sqrt{2}/2$ i uslov da bi vertikalni položaj masa i štapova bio položaj stabilne ravnoteže.

Primer 60 *Giroskop sa dva stepena slobode kretanja može da osciluje oko horizontalne ose AB. Ova osa, koja prolazi kroz tačku O, obrće se oko vertikalne ose Oz konstantnom ugaonom brzinom ω . Giroskop je simetričan u odnosu prema ravni koja horizontalnu osu AB seče u tački O pod pravim uglom. Prava koja spaja tačku O sa težištem G tela je glavna osa inercije tela.*

Moment inercije tela u odnosu na osu OG je C moment inercije tela u odnosu na osu AB je A, a B je moment inercije tela u odnosu na osu koja je normalna na ravan ABG a prolazi kroz tačku O. Masa tela je M, a h je rastojanje težišta od tačke O. Odrediti položaje ravnoteže giroskopa i ispitati njihovu stabilnost. Od aktivnih sile postoji samo težina giroskopa Mg (vidi sliku 4.20).



Slika 4.20:

U odnosu na okvir giroskop ima samo jedan stepen slobode kretanja, on može da se obrće oko ose AB za ugao θ . Uzmimo za generalisani koordinatni ugao θ .

Potencijalna energija sile Mg iznosi

$$\Pi = Mgh(1 - \cos \theta). \quad (1)$$

Prema (4.77) potencijalna energija centrifugalnih sile iznosi

$$\Pi^\omega = -\frac{\omega^2}{2} J_z,$$

pa dalje treba odrediti moment inercije tela za osu z u položaju koji je prikazan na slici 4.19. U ovom problemu su momenti inercije

$$J_\xi = A, \quad J_\eta = C, \quad J_\zeta = B,$$

a pošto su ose ξ, η i ζ glavne ose inercije, to su svi centrifugalni momenti inercije jednaki nuli, pa je na osnovu (3.11)

$$J_z = J_\xi \cos^2 \alpha + J_\eta \cos^2 \beta + J_\zeta \cos^2 \gamma,$$

gde su α, β i γ uglovi koje ose ξ, η i ζ grade sa z osom. Sa slike je

$$\cos \alpha = 0, \quad \cos \beta = \cos \theta, \quad \cos \gamma = \cos(90 - \theta) = -\sin \theta,$$

pa je konačno

$$J_z = C \cos^2 \theta + B \sin^2 \theta.$$

Sada je potencijalna energija centrifugalnih sila

$$\Pi^\omega = -\frac{\omega^2}{2}(C \cos^2 \theta + B \sin^2 \theta),$$

i modifikovana potencijalna energija

$$\Pi^* = Mgh(1 - \cos \theta) - \frac{\omega^2}{2}(C \cos^2 \theta + B \sin^2 \theta).$$

Položaj relativne ravnoteže giroskopa nalazi se kao rešenje jednačine

$$\frac{d\Pi^*}{d\theta} = Mgh \sin \theta - \frac{\omega^2}{2} 2(-C + B) \sin \theta \cos \theta = 0.$$

Rešenja ove trigonometrijske jednačine su

$$\sin \theta = 0, \quad \theta_1 = 0, \quad \theta_2 = \pi,$$

i

$$\theta_3 = \arccos \frac{Mgh}{(B - C)\omega^2}.$$

Drugi izvod modifikovane potencijalne energije Π^* po uglu θ iznosi

$$\frac{d^2\Pi^*}{d\theta^2} = Mgh \cos \theta - \omega^2(B - C) \cos 2\theta.$$

Vrednost drugog izvoda iznosi:

1. Za $\theta_1 = 0$

$$\left(\frac{d^2\Pi^*}{d\theta^2} \right)_{\theta_1} = Mgh - \omega^2(B - C),$$

pa je taj položaj položaj stabilne ravnoteže ako je

$$\omega^2 < \frac{Mgh}{B - C},$$

pri $B > C$.

2. Za $\theta_2 = \pi$

$$\left(\frac{d^2\Pi^*}{d\theta^2} \right)_{\theta_2} = -Mgh - \omega^2(B - C).$$

Ovaj položaj ravnoteže može biti stabilan ako je $C > B$ i

$$\omega^2 > \frac{Mgh}{C - B}.$$

3. Pošto je $\cos 2\theta = 2\cos^2 \theta - 1$ za treći položaj ravnoteže važi

$$\left(\frac{d^2\Pi^*}{d\theta^2} \right)_{\theta_3} = -\frac{(Mgh)^2}{(B - C)\omega^2} + \omega^2(B - C).$$

Da bi ovaj položaj bio položaj stabilne ravnoteže mora biti

$$-\frac{(Mgh)^2}{(B - C)\omega^2} + \omega^2(B - C) > 0,$$

odnosno

$$\omega^2 > \frac{Mgh}{B - C},$$

pri $B > C$.

Poglavlje 5

Teorija udara

5.1 Udar tačke

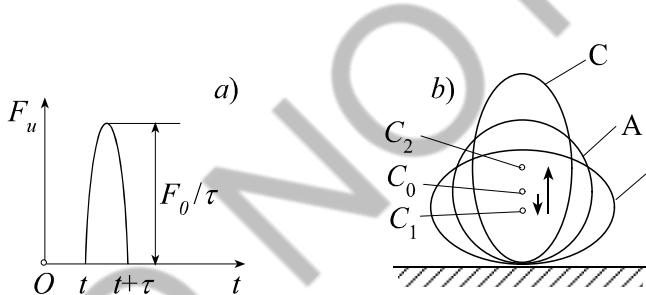
5.1.1 Uvodna razmatranja

Kada materijalna tačka, materijalno telo ili materijalni sistem dođe u intenzivan trenutni kontakt sa nekim drugim telom ili materijalnim sistemom nastaje mehanička pojava koja se zove udar ili sudar. Udar je vrlo složena fizička pojava. Pri udaru tela se deformišu a dolazi i do njihovog zagrevanja. Pošto postoje dve mere mehaničkog dejstva između dva tela, sile i spreg, postoje i dve mehaničke karakteristike udara ili sudara. Sile i spregovi koji se javljaju pri udaru nazivaju se trenutne, udarne ili impulsne sile i trenutni, udarni ili impulsni spregovi. Vidi se da je pojava udara duboko vezana sa procesom deformacije tela u okolini tačke ili površine dodira tela koja se sudaraju. Zbog toga se ovaj proces ne može opisati u okviru mehanike idealno krutog tela. Sile i spregovi koji se javljaju pri udaru, odnosno udarne sile ili udarni spregovi, imaju osnovno svojstvo da deluju vrlo kratko vreme, međutim za to vreme dostižu vrlo velike vrednosti. Primetimo da su kontaktne sile i spregovi pri sudaru jako velike i da prevazilaze za nekoliko desetina puta težine tela koja se sudaraju. Sile i spregovi istog tipa javljaju se i pri eksplozijama. Udar traje vrlo kratko i to vreme trajanja udara je reda $\tau = 0.0001 - 0.01 [s]$. Za to vreme trajanje udara brzina tačke i ugaona brzina tela menjaju se po intenzitetu i pravcu. Pri sudaru dolazi i do promene smera brzine i ugaone brzine. Pošto se ove promene brzine ili ugaone brzine odvijaju u

izuzetno kratkom vremenskom intervalu, u tom intervalu brzina tačke ili ugaona brzina tela nije diferencijabilna funkcija. To znači da za vreme udara ne važi drugi Njutnov zakon za tačku ili opšti zakoni dinamike izvedeni iz drugog Njutnovog zakona. Prema tome, drugi Njutnov zakon, kao i diferencijalne jednačine kretanja tačke i opšti zakoni dinamike zasnovani na drugom Njutnovom zakonu mogu se primenjivati samo ako su brzina tačke ili ugaona brzina tela diferencijabilne funkcije vremena.

Impuls sile

Neka gumena lopta udari o masivni zid. Udarivši o zid, lopta se nalazi u kontaktu sa zidom tokom beznačajno kratkog vremenskog intervala τ , a zatim se lopta odvaja od zida. Za vreme kontakta lopte i zida između njih postoji sila uzajamnog dejstva. Ova sila uzajamnog dejstva F_u raste od nule (Slika 5.1a) do neke maksimalne vrednosti, zatim ponovo opada. U trenutku kada se lopta odvaja od zida i ta sila isčezava. Maksimalna vrednost sile udara je reda F_0/τ , gde je τ vreme trajanja udara a F_0 konstanta koja ima dimenziju impulsa sile.



Slika 5.1:

Očigledno, pri udaru dolazi i do, manjeg ili većeg, deformisanja tela. Kada lopta udari o nepokretan horizontalan pod (Slika 5.1b) početak udara je u trenutku prvog kontakta lopte sa podlogom. Zatim je lopta neko kratko vreme u

Na slici 5.1b pokazan kontaktu sa podom i posle se odvaja od njega. je oblik lopte pri udaru: A početak udara; B sabijanje lopte; C širenje lopte pri kraju udara. Pre udara lopta ima brzinu usmerenu ka podu, a posle sudara njena brzina je usmerena od poda.

Dinamičke metode u proučavanju udarnih procesa su indirektnog karaktera. Naime, proces udara nekog sistema opisuje se merama kretanja sistema pre i posle udara. Sam udar je neki trenutni singularni

proces čije je trajanje izuzetno kratko.

Navedimo redom važna svojstva udara:

Pri udaru razlikuje se impuls udarne sile, koji je posledica udara, od impulsa sila koje nisu posledica udara i koje nazivamo uobičajenim silama. Ako je sila $\vec{F}_u(t) \approx \vec{F}_0/\tau$ udarna, gde je \vec{F}_0 konstantan vektor a τ vreme trajanja udara, onda je vektor njenog impulsa za vreme udara

$$\vec{I}_{u_F} = \int_t^{t+\tau} \vec{F}_u(t) dt \approx \int_t^{t+\tau} \frac{\vec{F}_0}{\tau} dt = \vec{F}_0.$$

konačnog intenziteta. Intenzitet udarnog impulsa sile I_{u_F} jednak je površini na slici 5.1a između krive $F_u(t)$ i apscisne ose t . Za vreme udara intenzitet impulsa neke uobičajene sile, na primer sile zemljine teže, glasi

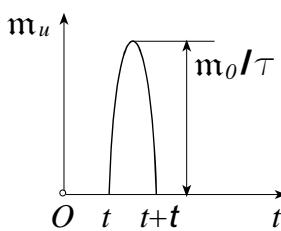
$$I_{mg} = \int_t^{t+\tau} mg dt = mg\tau \approx 0,$$

i on je zanemarljivo malog intenziteta u odnosu na impuls udarne sile.

Za direktno izračunavanje udarnog impulsa sile I_{u_F} potrebno je znanje zavisnosti $F_u(t)$. Međutim ta zavisnost obično nije poznata u konkretnim slučajevima. Šta više, za određivanje zavisnosti udarne sile F_u od vremena t morala bi se vršiti eksperimentalna merenja u svakom problemu udara između dva tela. Tako na primer, dva udarna procesa imaju iste udarne impulse ukoliko su površine između tih krivih linija i t ose iste. Takva merenja se ne vrše u dinamici već se do udarnog impulsa sile I_{u_F} dolazi indirektnim putem, koristeći mere kretanja pre i posle udara.

Impuls sprega

Neka je jedna greda uklještena u zid. Ako se nekim telom udari po gredi u uklještenju se sem udarnog impulsa javlja i otporni udarni spreg. Dejstvo tog sprega je izuzetno kratko. Spregovi koji se javljaju pri udaru, odnosno udarni spregovi deluju vrlo kratko vreme, međutim za to vreme dostižu vrlo velike vrednosti. Spregovi tog tipa javljaju se i pri sudaru, havarijama prevoznih sredstava, itd.



Slika 5.2:

Spregove koji se javljaju pri udaru zovemo *trenutni* ili *impulsni spregovi*. Osobine impulsnog sprega su vrlo slične sa osobinama impulsa udarne sile. Pri udaru razlikuje se impuls udarnog sprega, koji je posledica udara, od impulsa sprega koji nije posledica udara i koji nazivamo uobičajenim spregom. Neka je spreg $\vec{m}_u(t) \approx \vec{m}_0/\tau$ udarni. Ovde je \vec{m}_0 konstantan vektor a τ vreme trajanja udara. Sada, vektor impulsa sprega za vreme udara glasi (vidi sliku 5.2)

$$\vec{I}_{uM} = \int_t^{t+\tau} \vec{m}_u(t) dt \approx \int_t^{t+\tau} \frac{\vec{m}_0}{\tau} dt = \vec{m}_0.$$

Vidi se da je on konačnog intenziteta. Intenzitet impulsa sprega I_{uM} jednak je površini između krive $\vec{m}_u(t)$ i apscisne ose t (Slika 5.2). Za vreme udara intenzitet impulsa nekog uobičajenog konstantnog sprega \vec{m}^* glasi

$$I_{M^*} = \int_t^{t+\tau} \vec{m}^* dt = \vec{m}^* \tau \approx 0,$$

i on je zanemarljivo malog intenziteta u odnosu na impuls udarnog sprega.

Za efektivno izračunavanje udarnog sprega I_{uM} potrebno je znanje zavisnosti $\vec{m}_u(t)$. Međutim ta zavisnost obično nije poznata ili se komplikovano određuje. Potrebno je vršiti eksperimente da bi se odredila zavisnost udarnog sprega \vec{m}_u od vremena t . Takva merenja se ne vrše u dinamici. Do impulsa sprega I_{uM} dolazi se indirektnim putem, posmatrajući mere kretanja krutog tela pre i posle udara.

5.1.2 Osnovne činjenice teorije udara materijalne tačke.

Neka se materijalna tačka mase m kreće pod dejstvom neudarnih sila, čija je rezultanta sila \vec{F} . U nekom trenutku vremena t na tačku počinje da dejstvuje trenutna udarna sila \vec{F}_u , koja prestaje da deluje u trenutku

$t + \tau$ gde je τ vrlo mali vremenski interval. Ako je brzina tačke neposredno pre udara \vec{v}_1 , a na kraju \vec{v}_2 , tada primenom zakona o promeni količine kretanja materijalne tačke, za trenutak vremena t početka udara i njegovog kraja $t + \tau$, dobija se relacija

$$m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1 = \vec{I}_F + \vec{I}_{F_u},$$

gde je \vec{I}_{F_u} impuls udarne sile \vec{F}_u a \vec{I}_F impuls uobičajene sile \vec{F} . Zbog činjenice da se pri udaru impulsi uobičajenih sila zanemaruju, odnosno pošto je $\vec{I}_F \approx 0$, dobija se

$$m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1 = \vec{I}_{F_u}, \quad (5.1)$$

ili

$$\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1 = \frac{\vec{I}_{F_u}}{m}. \quad (5.2)$$

Ova relacija ukazuje da pri udaru dolazi do konačne promene vektora brzine materijalne tačke. Ova činjenica je toliko značajna da može da posluži i kao definicija udara: *Udar je pojava pri kojoj se brzina tačke trenutno menja za konačan iznos.*

Srednja brzina tačke za vreme udara iznosi $\vec{v}_{sr} = (\vec{v}_1 + \vec{v}_2)/2$. Zbog toga je približna vrednost pomeranja tačke za vreme udara, u vremenskom intervalu od t do $t + \tau$, integral relacije $d\vec{r} \approx \vec{v}_{sr} dt$, tj. relacije

$$d\vec{r} \approx \frac{\vec{v}_1 + \vec{v}_2}{2} dt.$$

Pošto su brzine tačke \vec{v}_1 i \vec{v}_2 na početku i kraju udara nezavisne od trenutka vremena u intervalu od t do $t + \tau$, integracijom ovog izraza dobija se približna vrednost pomeranja tačke $\Delta\vec{r}$ za vreme udara

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \approx \frac{\vec{v}_1 + \vec{v}_2}{2}\tau,$$

koje je zanemarljivo malo u odnosu na konačne vrednosti vektora položaja tačke pre i posle udara. Zbog toga, smatra se da je pomeranje tačke za vreme udara zanemarljivo malo, odnosno da je $\vec{r}_2 \approx \vec{r}_1$, gde je \vec{r}_1

vektor položaja tačke neposredno pre sudara a \vec{r}_2 vektor položaja tačke neposredno posle sudara.

Na slici 5.1b ukupno pomeranje centra lopte prilikom udara iznosi

$$C_0C_2 = C_0C_1 - C_1C_2,$$

gde je C_0C_1 pomeranje za vreme sabijanja lopte a C_1C_2 pomeranje za vreme širenja lopte. Pomeranje C_0C_2 je zanemarljivo mala veličina pri malim deformacijama lopte.

Množenjem jednačine (5.1) skalarno, prvo sa vektorom brzine \vec{v}_2 , a zatim sa \vec{v}_1 , dobija se

$$\begin{aligned} mv_2^2 - m\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 &= \vec{v}_2 \cdot \vec{I}_{F_u}, \\ m\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 - mv_1^2 &= \vec{v}_1 \cdot \vec{I}_{F_u}. \end{aligned}$$

Sabiranjem ovih jednačina i deljenjem tako dobijenog zbira sa 2, dobija se

$$\frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = \frac{\vec{v}_2 + \vec{v}_1}{2} \vec{I}_{F_u}.$$

Prepoznavanjem kinetičke energije tačke, a prema teoremi (1.52), sledi

$$E_{k2} - E_{k1} = A_{12}, \quad (5.3)$$

gde je

$$A_{12} = \frac{\vec{v}_2 + \vec{v}_1}{2} \vec{I}_{F_u}. \quad (5.4)$$

Prema tome: Promena kinetičke energije materijalne tačke pri udaru jednak je skalarnom proizvodu impulsa udarne sile i vektorske polusume početne i krajnje brzine tačke pri udaru. Ova relacija se pripisuje Kelvinu¹.

Za vreme udara rad udarne sile je konačan i pored istovremeno zanemarljivo malog pomeranja. Zbog zanemarljivih vrednosti impulsa neudarnih sila sledi da je i njihov rad zanemarljivo mali u odnosu na rad udarnih sila.

Rad udarne sile (5.4), korišćenjem relacije (5.1), dobija pogodniji oblik

$$A_{12} = \vec{v}_1 \cdot \vec{I}_{F_u} + \frac{1}{2m} (I_{F_u})^2, \quad (5.5)$$

¹ W. Thomson, Lord Kelvin, 1824 – 1907.

koji zavisi samo od udarnog impulsa \vec{I}_{F_u} i početne brzine tačke \vec{v}_1 .

Navedimo najvažnije rezultate ovih razmatranja:

1. Pri dejstvu udara impulsi neudarnih sila i spregova se zanemaruju.
2. Za vreme udara pomeranje materijalne tačke ili krutog tela je zanemarljivo.
3. Za vreme udara dolazi do konačne promene brzine materijalne tačke i ugaone brzine krutog tela.
4. Za vreme udara dolazi do konačne promene kinetičke energije materijalne tačke ili krutog tela.
5. Zbog kratkog vremenskog intervala u kome deluju udarne sile, udarni impulsi imaju isti pravac sa udarnim silama i spregovima, koji mogu biti aktivni ili reakcije veza.
6. Karakteristične veličine pri udaru zavise i od čitavog niza materijalnih svojstava tela, na primer od vrste materijala, oblika tela, modula elastičnosti tela itd.

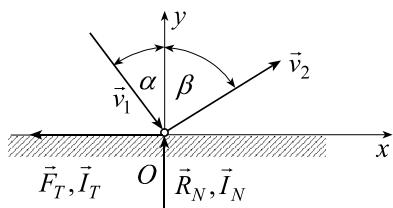
Napomena: *Izraz (5.5) omogućuje izračunavanje rada i neudarne sile, odnosno bilo kakve sile, od početnog trenutka t_1 do proizvoljnog trenutka vremena t_2 za vreme kretanja, kada sila zavisi od vremena. Naglasimo, da se u slučaju kada sila zavisi od vremena njen rad ne može izračunati prema ranijim relacijama (1.30)-(1.37).*

5.1.3 Udar tačke o nepomičnu hrapavu pregradu

Materijalna tačka mase m udara pod poznatim uglom α o nepomičnu hrapavu površinu (Slika 5.3) i ima poznatu brzinu \vec{v}_1 neposredno pre udara.

Očigledno, zbog zanemarljivog uticaja težine tačke na proces udara, ova površina može zauzimati potpuno proizvoljan položaj u prostoru, ali se zbog jednostavnosti ovde pretpostavlja da je ona horizontalna.

Neposredno posle udara tačka ima brzinu \vec{v}_2 pod uglom β u odnosu na normalu na tu površinu. Traži se intenzitet i pravac brzine tačke neposredno posle udara, odnosno v_2 i ugao β . Naglasimo da se brzine \vec{v}_1 i \vec{v}_2 nalaze u ravni koja je normalna na površinu u koju udara tačka.



Slika 5.3:

U tački kontakta materijalne tačke sa površinom javljaju se reakcije veze zbog udara: normalna reakcija \vec{R}_N i sila trenja klizanja \vec{F}_T . U istim pravcima i smerovima javljaju se i udarni impulsi \vec{I}_N i \vec{I}_T . Usvoji se koordinatni sistem Oxy i u njemu se formiraju skalarne jednačine, koje odgovaraju osnovnoj vektorskoj jednačini teorije udara (5.1). Na

taj način se dobija

$$mv_2 \sin \beta - mv_1 \sin \alpha = -I_T, \quad (5.6)$$

$$mv_2 \cos \beta - (-mv_1 \cos \alpha) = I_N. \quad (5.7)$$

Ove dve jednačine sadrže četiri nepoznate veličine v_2 , β , I_N i I_T . Za rešavanje ovog problema moraju se uvesti pretpostavke koje karakterišu ponašanje materijala tela koja se sudaraju tokom sudara i svojstvo udarnih impulsa u prisustvu trenja.

Prva dopunska jednačina se formira na osnovu *Njutnove hipoteze* koja na određen način karakteriše fizička, prvenstveno elastična, svojstva tela koja se sudaraju. Za slučaj dva tela koja se kreću jedno u odnosu na drugo ova hipoteza glasi: *Odnos apsolutnih vrednosti projekcija relativnih brzina dva tela posle i pre sudara na zajedničku normalu u tački dodira tela, je konstantna veličina, koja ne zavisi ni od brzina tela niti od njihovog oblika, već samo od materijala od kog su tela sačinjena.*

Ovaj odnos se naziva *koeficijent uspostavljanja*, ili *koeficijent restitucije*.

Koeficijent uspostavljanja obeležimo sa k . U slučaju kada se pregrada ne kreće koeficijent uspostavljanja jednak je količniku apsolutnih vrednosti normalnih brzina tačke posle i pre sudara

$$k = \frac{|v_{2y}|}{|v_{1y}|}, \quad (5.8)$$

što u ovom problemu daje

$$k = \frac{v_2 \cos \beta}{v_1 \cos \alpha}, \quad (5.9)$$

odnosno dobija se treća jednačina ovog problema

$$v_2 = k \frac{v_1 \cos \alpha}{\cos \beta}. \quad (5.10)$$

Koeficijent restitucije se određuje jednostavnim ogledom koji se opisuje kasnije. Određivanje tog koeficijenta je ekvivalentno merenju udarne sile u zavisnosti od vremena i izračunavanju impulsa I_N , tj. površine između krive $R_N(t)$ i apscisne ose t u granicama od t do $t + \tau$.

Koeficijent restitucije se kreće u granicama od nule do jedan, odnosno $0 \leq k \leq 1$ za većinu realnih materijala. Za $k = 0$, udar je idealno neelastičan ili plastičan, a za $k = 1$ idealno elastičan.

Ogledi pokazuju da za vreme udara materijalne tačke o nepokretnu površinu dolazi do malog proklizavanja tačke po površini. Zato je sila trenja klizanja pri udaru dostigla svoju graničnu vrednost, odnosno $F_T = \mu F_N$, pa je i

$$I_T = \mu I_N, \quad (5.11)$$

a to je četvrta jednačina ovog problema udara. Time je problem principijelno rešen. Prihvatajući da je koeficijent restitucije poznat, iz jednačina (5.7), (5.11) i (5.10) dobijaju se vrednosti udarnih impulsa

$$I_N = m(1 + k)v_1 \cos \alpha, \quad I_T = \mu m(1 + k)v_1 \cos \alpha,$$

a zamenom udarnog impulsa I_T u (5.6) dobija se odbojni ugao tačke

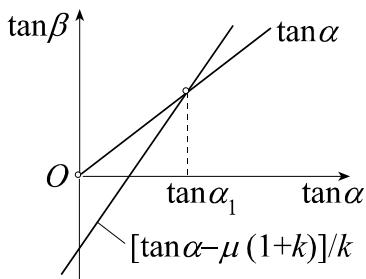
$$\tan \beta = \frac{1}{k} [\tan \alpha - \mu(1 + k)]. \quad (5.12)$$

Za idealno elastičan udar, kada je $k = 1$, odbojni ugao β određen je sa

$$\tan \beta = \tan \alpha - 2\mu.$$

Znači, odbojni ugao β je manji od upadnog ugla α . Za udar o idealno glatku površinu, kada je $\mu = 0$, iz (5.12) sledi

$$\tan \beta = \frac{1}{k} \tan \alpha, \quad (5.13)$$



Slika 5.4:

pa je ugao β veći ili jednak ($k = 1$) uglu α . Za opšti slučaj (Slika 5.4), kada je $k < 1$ i $\mu > 0$, analiza relacije (5.12) pokazuje da je za vrednosti upadnog ugla

$$\alpha_1 = \arctan \mu \frac{1+k}{1-k},$$

odbojni ugao isti sa upadnim uglom, odnosno $\beta_1 = \alpha_1$. Za upadni ugao $\alpha < \alpha_1$ odbojni ugao β je manji od upadnog ugla α ,

a za $\alpha > \alpha_1$ on je veći od upadnog ugla.

Koristeći (5.10), (5.12) i relaciju $\cos \beta = 1/\sqrt{1 + \tan^2 \beta}$ dobija se intenzitet brzine tačke posle udara

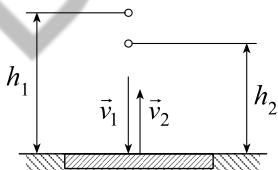
$$v_2 = v_1 \sqrt{1 - [1 - k^2 - \mu^2(1+k)^2] \cos^2 \alpha - \mu(1+k) \sin 2\alpha}. \quad (5.14)$$

Za idealno elastični udar ($k = 1$) tačke o glatku površinu ($\mu = 0$) brzina v_2 posle udara jednaka je brzini v_1 pre udara. U svakom drugom slučaju, kada je $k < 1$ ili $\mu > 0$, brzina posle udara v_2 manja je od brzine v_1 pre udara. Koristeći prethodne rezultate, (5.3) i (5.8), dobija se promena kinetičke energije pri udaru

$$E_{k2} - E_{k1} = -\frac{mv_1^2}{2} \{ [1 - k^2 - \mu^2(1+k)^2] \cos^2 \alpha + \mu(1+k) \sin 2\alpha \}.$$

Pri idealno elastičnom udaru tačke o glatku površinu, kada je $k = 1$ i $\mu = 0$, nema gubitka kinetičke energije tačke. Pri svakom drugom udaru kinetička energija tačke se smanjuje, zbog hrapavosti površina u kontaktu, i troši na deformacije tela i njihovo zagrevanje.

5.1.4 Određivanje koeficijenta restitucije



Slika 5.5:

Prema Njutnovoj hipotezi koeficijent uspostavljanja zavisi samo od elastičnih svojstava tela koja se sudaraju. Ovo je prilično gruba i približna aproksimacija.

Koeficijent restitucije se određuje sledećim jednostavnim ogledom: Napravi se kuglica od

jednog materijala a u podlogu stavi ploča od drugog materijala. Određeni koeficijent restitucije važi za ta dva materijala. Pusti se kuglica bez početne brzine da slobodno pada sa visine h_1 na ploču (Slika 5.5). Izmeri se visina h_2 do koje se kuglica odbije od podloge. Ako se zanemari otpor vazduha, tada zakon o promeni kinetičke energije za padanje kuglice daje $mv_1^2/2 = mgh_1$, odnosno $v_1 = \sqrt{2gh_1}$, gde je v_1 brzina tačke neposredno pre udara. Posle udara tačka kreće naviše brzinom v_2 i dostiže visinu h_2 , pri čemu je $v_2 = \sqrt{2gh_2}$. Prema (5.3), koeficijent restitucije za materijale od kojih su sačinjeni kuglica i ploča ima vrednost²

$$k = \sqrt{\frac{h_2}{h_1}}.$$

Primer 61 Materijalna tačka bačena je pod ugлом α prema horizontu. Njena početna brzina je v_0 . Tačka udari o idealno glatak vertikalni zid i posle odbijanja od njega prođe kroz istu tačku iz koje je bačena. Ako je koeficijent uspostavljanja k naći početno rastojanje a tačke od zida (Slika 5.6).

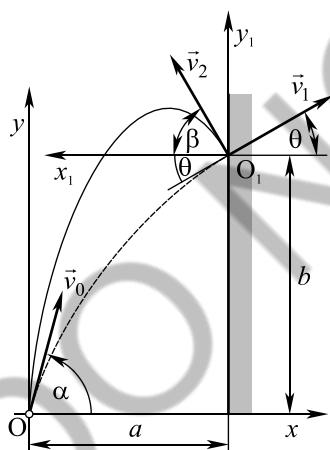
Od trenutka bacanja iz tačke O , materijalna tačka kreće se saglasno jednačinama

$$x = v_0 t \cos \alpha, \quad y = v_0 t \sin \alpha - \frac{gt^2}{2}, \quad (a)$$

tako da je putanja data izrazom

$$y = x \tan \alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}. \quad (b)$$

U tački udara o zid tačka ima koordinate u sistemu Oxz (a, b) tako da je nagib u toj tački



Slika 5.6:

$$\begin{aligned} \tan \theta &= \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{v_0 \sin \alpha - gt}{v_0 \cos \alpha} \\ &= \tan \alpha - \frac{g}{v_0 \cos \alpha} \frac{a}{v_0 \cos \alpha} \\ &= \tan \alpha - \frac{ga}{v_0^2 \cos^2 \alpha}. \end{aligned} \quad (c)$$

²Za međusobni udar nekih tela koeficijent restitucije ima sledeće vrednosti: staklo po staklu $k = 0.94$; slonova kost po slonovoj kosti $k = 0.89$; čelik po čeliku $k = 0.56$; drvo po drvetu $k = 0.50$; drvo po cementnoj podlozi $k = 0.26$.

Iz prve jednačine (a) sledi da je $\dot{x} = v_0 \cos \alpha$ pa je projekcija brzine v_1 neposredno pre sudara na pravac x ose

$$v_1 \cos \theta = v_0 \cos \alpha. \quad (\text{d})$$

Neka je brzina neposredno posle sudara v_2 , a ugao β ugao između normale na zid i brzine v_2 . Kako je veza između normalnih komponenata brzine data pomoću koeficijenta uspostavljanja, imamo

$$v_2 \cos \beta = -kv_1 \cos \theta = -kv_0 \cos \alpha. \quad (\text{e})$$

Postavimo sada novi koordinatni sistem $O_1x_1y_1$ kao što je prikazano na slici 5.6, pa je putanja tačke posle sudara slična kao i (c)

$$y_1 = x_1 \tan \beta - \frac{gx_1^2}{2v_2^2 \cos^2 \beta}. \quad (\text{f})$$

Jasno je da jednačina putanje pre sudara mora da prođe kroz tačku $O_1(a, b)$, a putanja posle sudara kroz tačku $O(a, -b)$. Zamenom ovih vrednosti u (b) i (f) imamo

$$\begin{aligned} b &= a \tan \alpha - \frac{ga^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}, \\ -b &= a \tan \beta - \frac{ga^2}{2v_2^2 \cos^2 \beta}. \end{aligned}$$

Odavde upoređivanjem desnih strana jednačina dobijamo, posle skraćivanja sa a i sređivanja,

$$\tan \alpha + \tan \beta = \frac{ag}{2} \left(\frac{1}{v_2^2 \cos^2 \beta} + \frac{1}{v_0^2 \cos^2 \alpha} \right). \quad (\text{g})$$

Kako je prema (5.13)

$$\tan \beta = \frac{1}{k} \tan \theta,$$

to zamenom ovog izraza i izraza (e) u (g) dobija se

$$\tan \alpha + \frac{1}{k} \tan \theta = \frac{ag}{2} \left(\frac{1}{v_2^2 \cos^2 \beta} + \frac{1}{v_0^2 \cos^2 \alpha} \right).$$

Kako je iz izraza (c) $\tan \theta = \tan \alpha - ga/(v_0^2 \cos^2 \alpha)$ i koristeći izraze (e) i (g) dobija se veličina a

$$a = \frac{k}{1+k} \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha. \quad (\text{h})$$

5.2 Udar sistema materijalnih tačaka. Opšte teoreme teorije udara

Posmatra se materijalni sistem koji se sastoji od N materijalnih tačaka i krutih tela. U nekom trenutku vremena ovaj sistem stupa u kontakt sa nekim drugim sistemom, odnosno dolazi do sudara dva sistema. Ovde se daju opšte teoreme dinamike sudara za sisteme sačinjene od materijalnih tačaka i krutih tela. Kao i u dinamici neudarnih procesa ovde se daju teorema o promeni količine kretanja pri sudaru i teorema o promeni momenta količine kretanja pri sudaru.

Svi udarni impulsi koji deluju na uočeni sistem materijalnih tačaka i krutih tela dele se na:

1. spoljašnje udarne impulse $\vec{I}_i^{(s)}$;
1. unutrašnje udarne impulse $\vec{I}_i^{(u)}$,
2. spoljašnje udarne spregove $\vec{I}_{iM}^{(s)}$,
3. unutrašnje udarne spregove $\vec{I}_{iM}^{(u)}$

U ovoj podeli, spoljašnji impulsi potiču od masa koje udaraju u sistem a koje ne pripadaju proučavanom sistemu. Unutrašnji udarni impulsi su oni impulsi koji se javljaju pri međusobnom sudaru masa posmatranog materijalnog sistema. Glavni vektor i glavni moment unutrašnjih sila su jednaki nuli.

Za svaku tačku materijalnog sistema važi jednačina (5.1) pa se dobija sledeći sistem jednačina

$$\begin{aligned} m_1 \vec{v}_{1(2)} - m_1 \vec{v}_{1(1)} &= \vec{I}_1^{(s)} + \vec{I}_1^{(u)}, \\ m_2 \vec{v}_{2(2)} - m_2 \vec{v}_{2(1)} &= \vec{I}_2^{(s)} + \vec{I}_2^{(u)}, \end{aligned}$$

.....

.....

$$m_n \vec{v}_{n(2)} - m_n \vec{v}_{n(1)} = \vec{I}_n^{(s)} + \vec{I}_n^{(u)}, \quad (5.15)$$

gde izraz u zagradi u indeksu označava stanje sistema posle (2) i pre (1) sudara.

Koristeći (2.12) i (2.13) dobija se

$$\sum m_i \vec{v}_i = M \vec{v}_c,$$

gde je $M = \sum m_i$ masa celog sistema. Sabiranjem jednačina (5.15), a zbog prethodne relacije, dobija se

$$M (\vec{v}_{c(2)} - \vec{v}_{c(1)}) = \sum_{i=1}^n \vec{I}_{i12}^{(s)}, \quad (5.16)$$

jer je zbir svih unutrašnjih udarnih impulsa jednak nuli, odnosno

$$\sum_{i=1}^n \vec{I}_{i12}^{(u)} = 0.$$

Ova jednačina izražava *zakon o promeni količine kretanja sistema pri udaru ili zakon o promeni brzine centra mase sistema pri udaru*. Ovaj zakon ima dva oblika:

1. *Promena količine kretanja centra inercije sistema pri udaru jednaka je zbiru svih spoljašnjih udarnih impulsa koji deluju na sistem za vreme trajanja udara.*
2. *Promena količine kretanja centra inercije sistema pri udaru jednaka je promeni količine kretanja jedne materijalne tačke, čija je masa jednaka zbiru svih masa sistema, a koja se nalazi u centru inercije sistema i na koju deluju svi spoljašnji impulsi paralelno preneti u centar inercije sistema.*

U cilju nalaženja zakona o promeni momenta količine kretanja sistema pri udaru pomnoži se svaka jednačina (5.15) vektorski sa leve strane odgovarajućim vektorom položaja \vec{r}_i i tako dobijene jednačine saberi. Tako se dobija

$$\begin{aligned} \sum \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_{i(2)} - \sum \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_{i(1)} &= \sum \vec{r}_i \times \vec{I}_i^{(s)} + \sum \vec{r}_i \times \vec{I}_i^{(u)} \\ &\quad + \sum \vec{I}_{iM}^{(s)} + \sum \vec{I}_{iM}^{(u)}, \end{aligned}$$

gde su momentima spoljašnjih i unutrašnjih impulsa dodati i impulsi spoljašnjih i unutrašnjih spregova. Pošto je moment unutrašnjih udarnih impulsa jednak nuli, to izraz $\sum \vec{r}_i \times \vec{I}_i^{(u)}$ otpada. Isto tako i zbir svih unutrašnjih udarnih spregova je jednak nuli $\sum \vec{I}_{i_M}^{(u)} = \vec{0}$, pa se dobija

$$\vec{L}_{O(2)} - \vec{L}_{O(1)} = \sum_{i=1}^N \vec{M}_O \vec{I}_i^{(s)} + \sum \vec{I}_{i_M}^{(s)}, \quad (5.17)$$

gde je

$$\vec{L}_O = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i \quad (5.18)$$

glavni moment količine kretanja sistema za tačku O , $\vec{M}_O \vec{I}_i^{(s)}$ moment spoljašnjeg udarnog impulsa $\vec{I}_i^{(s)}$ za tačku O i $\vec{I}_{i_M}^{(s)}$ spoljašnji udarni spreg.

Odavde je jasna teorema o promeni momenta količine kretanja sistema pri udaru: *Priраšтaj главног момента количине кретања система за време удара jednak је збиру момената свих спољашњих ударних импулса и свих спољашњих ударних спрегова за исту моментну тачку.*

Pri obrtanju krutog tela oko nepomične ose (Oz), projektovanjem vektorske jednačine (5.17) na osu z dobija se

$$J_z(\omega_2 - \omega_1) = M_z^{I_s} + I_{Mx}^{(s)}, \quad (5.19)$$

gde je J_z moment inercije tela za z osu, a ω_2 i ω_1 ugaone brzine tela posle i pre sudara.

Odavde je jasan rezultat

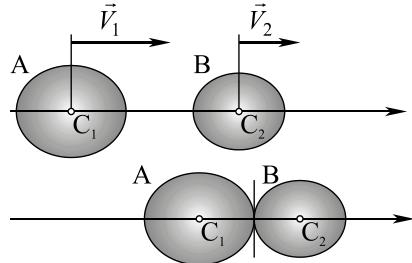
$$\omega_2 - \omega_1 = \frac{M_z^{I_z} + I_{Mx}^{(s)}}{J_z}, \quad (5.20)$$

odnosno, прираштјај угаоне брзине тела које се обреће око непомићне осе при удару, jednak је количнику збира момента спољашњих ударних импулса и пројекције ударних спрегова на ту осу и момента инерције тела за ту исту осу.

5.2.1 Centralni sudar dva tela

Kao primena teoreme o promeni količine kretanja pri udaru, proučava se sudar dva tela koja se kreću translatorno duž prave koja spaja njihove

centre inercije. Prepostavi se da su se ova tela u nekom trenutku sudarila i da se normalna na tangencijalnu ravan u zajedničkoj tački dodira poklapa sa pravom koja spaja centre inercije (Slika 5.7) Ovakav sudar dva tela naziva se *centralni sudar*. Mase tela su m_1 i m_2 , a njihove brzine neposredno pre sudara V_1 i V_2 . Traže se brzine tela v_1 i v_2 neposredno posle sudara. Smatra se da su sve brzine u pozitivnom smeru ose x . Veličine m_1, m_2, V_1 i V_2 mogu da budu proizvoljne, međutim V_1 mora da je veće od V_2 , inače telo A ne bi moglo da stigne telo B i da se sudari sa njim. Ako obe mase posmatramo kao jedan materijalni sistem im-



Slika 5.7:

puls udara između tela A i B je unutrašnji impuls. Kako su svi spoljašnji impulsi jednak nuli to je

$$m_1V_1 + m_2V_2 = m_1v_1 + m_2v_2. \quad (5.21)$$

Drugu jednačinu za određivanje brzina v_1 i v_2 formiramo preko Njutnovе hipoteze o koeficijentu uspostavljanja (5.8)

$$k = \frac{v_2 - v_1}{V_1 - V_2}, \quad (5.22)$$

gde su $V_1 - V_2$ i $v_2 - v_1$ relativne brzine tela pre i posle sudara. Odavde je

$$v_2 - v_1 = k(V_1 - V_2). \quad (5.23)$$

Rešavanjem sistema (5.21) i (5.23) po nepoznatim v_1 i v_2 dobijaju se brzine tela posle sudara

$$v_1 = \frac{V_1(m_1 - km_2) + m_2V_2(1 + k)}{m_1 + m_2}, \quad (5.24)$$

$$v_2 = \frac{V_2(m_2 - km_1) + m_1V_1(1 + k)}{m_1 + m_2}. \quad (5.25)$$

Za nalaženje udarnog impulsa I između dva tela posmatra se samo prvo telo. Teorema o promeni količine kretanja prvog tela glasi

$$I = m_1(v_1 - V_1),$$

odnosno posle korišćenja izraza (5.24) dobija se

$$I = (1 + k) \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (V_2 - V_1). \quad (5.26)$$

Neki posebni slučajevi su:

1. Apsolutno elastični sudar, $k = 1$.

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{(m_1 - m_2)V_1 + 2m_2V_2}{m_1 + m_2}, \\ v_2 &= \frac{(m_2 - m_1)V_2 + 2m_1V_1}{m_1 + m_2}, \\ I &= 2 \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (V_2 - V_1). \end{aligned}$$

Ako su mase jednake, $m_1 = m_2 = m$, ovi izrazi postaju

$$v_1 = V_2, \quad v_2 = V_1,$$

znači da tela razmenjuju svoje brzine. Neka, na primer telo B sa slike 5.7 stoji a telo A ga udari, tada će telo A da se zaustavi, a telo B će početi da se kreće onom brzinom sa kojom se telo A kretalo pre sudara. Ova pojava je lako uočljiva kod sudara biljarskih kugli ili sudara klikera.

2. Apsolutno neelastičan sudar, $k = 0$.

U ovom slučaju jednačine (5.24) i (5.25) postaju

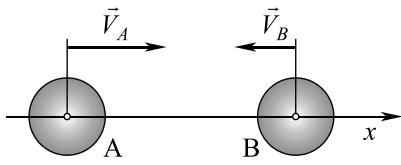
$$v_1 = v_2 = \frac{m_1 V_1 + m_2 V_2}{m_1 + m_2}, \quad (5.27)$$

i tela kreću zajedno. Sada je udarni impuls

$$I = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (V_2 - V_1).$$

Poređenje ovog rezultata sa rezultatom za impuls pri apsolutno elastičnom sudaru vidi se da je impuls u plastičnom sudaru dva puta manji nego u idealno elastičnom.

Primer 62 Dve jednake kugle A i B kreću se jedna prema drugoj (Slika 5.8). Odrediti odnos između brzina kugli pre sudara da se kugla A posle sudara zaustavi. Koeficijent uspostavljanja je k .



Slika 5.8:

Spoljašnjih impulsa nema pa je količina kretanja sistema pre i posle sudara jednaka

$$mV_A - mV_B = mv_B \quad (a)$$

Relativna brzina kugli pre sudara iznosi $V_A + V_B$, pa je prema Njutnovoj hipotezi koeficijent uspostavljanja

$$k = \frac{v_B}{V_A + V_B},$$

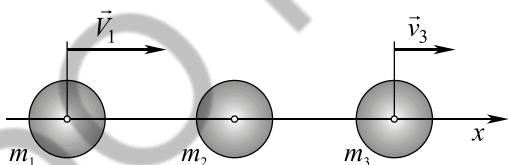
odnosno

$$v_B = k(V_A + V_B). \quad (b)$$

Posle zamene brzine v_B iz (b) u izraz (a) dobija se traženi odnos brzina

$$\frac{V_A}{V_B} = \frac{1+k}{1-k}.$$

Primer 63 Tri elastične kugle, čije su mase m_1 , m_2 i m_3 , leže u glatkom horizontalom žljebu na izvesnom rastojanju jedna od druge. Sve kugle su u miru. Prva kugla krene jer joj je saopštena početna brzina, sudari se sa drugom, koja krene i sudari se sa trećom kuglom. (Slika 5.9). Odrediti masu druge kugle m_2 , da bi treća kugla krenula sa najvećom mogućom brzinom. Velika slova označavaju brzine pre sudara a mala posle.



odnosno

Slika 5.9:

a) Jednačine sudara prve i druge kugle glase

$$\begin{aligned} m_1 V_1 &= m_1 v_1 + m_2 v_2, \\ k &= \frac{v_2 - v_1}{V_1}, \end{aligned}$$

$$v_2 - v_1 = kV_1.$$

Za zadate vrednosti k i V_1 , rešavanjem ovih jednačina dobija se brzina druge kugle posle sudara

$$v_2 = (1+k) \frac{m_1 V_1}{m_1 + m_2}. \quad (a)$$

b) Označimo nađenu brzinu v_2 sa V_2 , znači $v_2 = V_2$, pošto je to brzina druge kugle pre sudara sa trećom. Sada su osnovne jednačine za sudar druge i treće kugle

$$m_2 V_2 = m_2 v_2^* + m_3 v_3, \quad k = \frac{v_3 - v_2^*}{V_2},$$

odnosno

$$v_3 - v_2^* = k V_2.$$

Rešenje ovih jednačina po v_3 glasi

$$v_3 = (1 + k) \frac{m_2 V_2}{m_2 + m_3}.$$

Kako je $V_2 = v_2$ to zamenom (a) u ovaj izraz sledi

$$v_3 = (1 + k)^2 \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)(m_2 + m_3)} V_1. \quad (\text{b})$$

Smatrajući veličine V_1 , k , m_1 i m_3 konstantnim, ova relacija predstavlja zavisnost brzine v_3 od mase m_2 , odnosno $v_3 = v_3(m_2)$. Za nalaženje najveće vrednosti za v_3 traži se prvi izvod ove funkcije po m_2

$$\frac{dv_3}{dm_2} = (1 + k)^2 V_1 \frac{m_1(m_1 m_3 - m_2^2)}{(m_1 + m_2)^2(m_2 + m_3)^2}.$$

Izjednačavanjem izraza dv_3/dm_2 sa nulom dobija se masa m_2 za koju je brzina v_3 ekstremalna

$$m_2 = \sqrt{m_1 m_3}. \quad (\text{c})$$

Drugi izvod funkcije v_3 po nezavisno promenljivom m_2 za $m_2 = \sqrt{m_1 m_3}$ iznosi

$$\left(\frac{d^2 v_3}{dm_2^2} \right)_{m_2=\sqrt{m_1 m_3}} = -\frac{2(1+k)^2 V_1 m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2(m_2 + m_3)^2}.$$

Vidi se da je

$$\left(\frac{d^2 v_3}{dm_2^2} \right)_{m_2=\sqrt{m_1 m_3}} < 0,$$

pa je za tako izračunato m_2 brzina treće kugle v_3 maksimalna.

5.2.2 Gubitak kinetičke energije pri sudaru. Koeficijent korisnog dejstva pri kovanju

U najopštijem slučaju udar je nekonzervativan proces i zato je od velikog interesa pronaći gubitak kinetičke energije pri sudaru. Ovde se posmatra ranije proučen centralni sudar dva tela. Pri sudaru gubitak kinetičke energije oba tela je razlika kinetičke energije oba tela pre sudara i posle sudara, odnosno

$$\Delta E_k = E_{k_1} - E_{k_2} = \left(\frac{m_1 V_1^2}{2} + \frac{m_2 V_2^2}{2} \right) - \left(\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} \right).$$

Kada se u ovaj izraz zamene v_1 i v_2 iz (5.24) i (5.25) posle sređivanja dobija se

$$\Delta E_k = \frac{1 - k^2}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (V_1 - V_2)^2. \quad (5.28)$$

Odavde se odmah zaključuje da je u slučaju idealno elastičnog sudara dva tela, $k = 1$, gubitak kinetičke energije jednak nuli, a da je ovaj gubitak najveći u slučaju apsolutno neelastičnog sudara, $k = 0$. Takođe se vidi da je uvek gubitak energije $\Delta E_k \geq 0$.

U slučaju kada je jedno telo nepokretno pre sudara, recimo $V_2 = 0$ biće

$$\Delta E_k = \frac{1 - k^2}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} V_1^2. \quad (5.29)$$

Pošto je u ovom slučaju $E_{k_1} = m_1 V_1^2 / 2$, ovaj izraz postaje

$$\Delta E_k = (1 - k^2) \frac{m_2}{m_1 + m_2} E_{k_1}. \quad (5.30)$$

Ako je u tom slučaju još sudar apsolutno neelastičan, $k = 0$, dobija se

$$\Delta E_k = \frac{m_2}{m_1 + m_2} E_{k_1}. \quad (5.31)$$

U istom slučaju kinetička energija ovog sistema posle sudara iznosi

$$E_{k_2} = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2}.$$

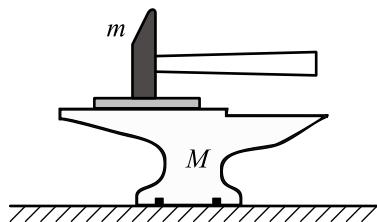
Međutim, zbog apsolutno neelastičnog sudara je $v_1 = v_2$, pa kad se upotrebi (5.27) i uslov $V_2 = 0$, dobija se

$$E_{k_2} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} E_{k_1}. \quad (5.32)$$

Ovaj izraz predstavlja kinetičku energiju koja ostaje u materijalnom sistemu posle potpuno plastičnog sudara.

Primenimo ova razmatranja na određivanje koeficijenta korisnog dejstva u dva za praksu vrlo važna slučaja.

a) Udar čekića u nakovanj



Slika 5.10:

Čekić mase $m_1 = m$ udara brzinom V u nepokretni nakovanj na kome se nalazi predmet koji treba kovati (Slika 5.10). Neka je masa nakovnja i predmeta za kovanje $m_2 = M$. Sada je

$$E_{k_2} = \frac{m}{m + M} E_{k_1}. \quad (5.33)$$

U ovom slučaju korisna energija je izgubljena kinetička energija

$$\Delta E_k = E_{k_2} - E_{k_1},$$

koja se troši na plastičnu deformaciju tela koje se kuje. Energija E_{k_2} koja ostaje u sistemu posle udara i koja se prema tome troši na pomeranje nakovnja i čekića kao celine, u ovom slučaju je nekorisna, pa je koeficijent korisnog dejstva

$$\eta = \left| \frac{\Delta E_k}{E_{k_1}} \right| = \left| \frac{E_{k_2} - E_{k_1}}{E_{k_1}} \right| = \left| \frac{E_{k_2}}{E_{k_1}} - 1 \right|. \quad (5.34)$$

koji zbog izraza (5.33) postaje

$$\eta = \frac{M/m}{1 + M/m}. \quad (5.35)$$

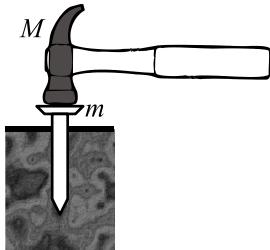
Sada je jasno, da će koeficijent korisnog dejstva pri kovanju biti utoliko veći ukoliko je masa čekića manja u odnosu na masu nakovnja. Iz (5.35) se vidi da je $0 < \eta < 1$. Iz izraza (5.35) se vidi da koeficijent korisnog dejstva η asimptotski teži ka jedinici kada odnos M/m teži ka velikim vrednostima ali da on nikada ne dostiže tu vrednost jedan.

b) Zakivanje klina

Posmatrajmo sada zakivanje klina mase $m_2 = m$ u zid pomoću čekića mase $m_1 = M$. U ovom slučaju je korisna energija

$$E_{k2} = \frac{M}{M+m} E_{k1}$$

pošto je zakivanje tim efikasnije što je energija posle sudara veća, pa je prema tome koeficijent korisnog dejstva (Slika 5.11)



$$\eta = \frac{E_{k2}}{E_{k1}} = \frac{M}{M+m}.$$

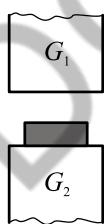
Odavde sledi jasan zaključak da je kod zakivanja koeficijent korisnog dejstva utoliko veći ukoliko je masa klina manja u poređenju sa masom čekića.

Slika 5.11:

Primer 64 Parni čekić, mase $\frac{G_1}{g} = 12 [kg]$, gde je g ubrzanje zemljine teže, pada brzinom $V = 5 [m/s]$ na nakovanj (Slika 5.12). Masa nakovnja sa komadom gvožđa koji na njemu treba kovati iznosi $\frac{G_2}{g} = 250 [kg]$. Izračunati:

- a) energiju utrošenu na kovanje komada gvožđa
 - b) energiju utrošenu na potresanje temelja
 - c) koeficijent korisnog dejstva čekića
- Prepostaviti da je sudar neelastičan.

Izračunava se prvo kinetička energija pre sudara, samo čekića



$$E_{k1} = \frac{1}{2} \frac{G_1}{g} V^2 = \frac{12 * 25}{2 * 9.80665} = 15.29574 [kgm^2/s^2].$$

Kinetička energija koja ide na potresanje temelja izražava se, kao što je viđeno, sa izrazom (5.31)

Slika 5.12:

$$E_{k2} = \frac{G_1}{G_1 + G_2} E_{k1} = \frac{12}{262} * 15.29574 = 0.70057 [kgm^2/s^2].$$

Energija utrošena na kovanje iznosi

$$\Delta E_k = E_{k_1} - E_{k_2} = 14,59517 [kgm^2/s^2].$$

I najzad, koeficijent korisnog dejstva čekića je

$$\eta = \frac{\Delta E_k}{E_{k_1}} = 0.954198.$$

Primer 65 Rešiti prethodni zadatak pretpostavljajući da sudsar nije apsolutno neelastičan, već da je elastičan sa koeficijentom uspostavljanja $k = 0.5$.

U ovom slučaju energija koja se utroši na kovanje iznosi prema (5.29)

$$\Delta E_k = \frac{1 - k^2}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} V_1^2 = 10.945991 [kgm^2/s^2].$$

Prema (5.34) koeficijent korisnog dejstva čekića iznosi

$$\eta = \left| \frac{\Delta E_k}{E_{k_1}} \right| = \frac{10.945991}{15.29574} = 0.715624,$$

pa se vidi, upoređivanjem ove vrednosti sa rezultatom prošlog primera, da koeficijent korisnog dejstva opada sa povećanjem koeficijenta uspostavljanja.

5.3 Određivanje impulsnih reakcija tela koje se obrće oko nepomične ose

Prepostavimo da na kruto telo, koje može slobodno da se obrće oko vertikalne ose Oz , dejstvuju istovremeno udarni impulsi $\vec{I}_1, \vec{I}_2, \dots, \vec{I}_n$ i udarni impuls sprega \vec{I}_M , koji se smatraju zadatim. Označi se ugaona brzina neposredno pre udara sa ω_1 , a neposredno posle udara sa ω_2 (Slika 5.13). Neka je napadna tačka i -tog impulsa

$$M_i(a_i, b_i, c_i), i = 1, 2, \dots, n.$$

Pošto telo usled udarnih impulsa udara o ležišta u tačkama A i B , to se u njima javljaju impulsne reakcije \vec{I}_A i \vec{I}_B koje treba odrediti.

Da bi se odredile ove impulsne reakcije primenjuju se teorema o promeni količine kretanja i teorema o promeni momenta količine kretanja za ose x , y i z (5.16) i (5.17). Iz tih zakona slede jednačine

$$M(v_{cx(2)} - v_{cx(1)}) = \sum I_{x12}, \quad (5.36)$$

$$M(v_{cy(2)} - v_{cy(1)}) = \sum I_{y12}, \quad (5.36)$$

$$M(v_{cz(2)} - v_{cz(1)}) = \sum I_{z12}, \quad (5.37)$$

$$L_{x(2)} - L_{x(1)} = \sum M_{x12}^{I_s} + I_{M_x}, \quad (5.38)$$

$$L_{y(2)} - L_{y(1)} = \sum M_{y12}^{I_s} + I_{M_y}, \quad (5.38)$$

$$L_{z(2)} - L_{z(1)} = \sum M_{z12}^{I_s} + I_{M_z}. \quad (5.39)$$

U ovim izrazima su sa $\vec{v}_{c(1)}$ i $\vec{v}_{c(2)}$ označene brzine centra inercije pre i posle udara, a sa $\vec{L}_{(1)}$ i $\vec{L}_{(2)}$ momenti količine kretanja pre i posle sudara.

Projekcije brzine centra mase na ose x , y i z iznose

$$v_{cx(2)} = -y_c\omega_2, \quad v_{cx(1)} = -y_c\omega_1, \quad (5.40)$$

$$v_{cy(2)} = x_c\omega_2, \quad v_{cy(1)} = x_c\omega_1,$$

$$v_{cz(2)} = 0, \quad v_{cz(1)} = 0, \quad (5.41)$$

dok vektori ugaonih brzina imaju projekcije na ove ose

Slika 5.13:

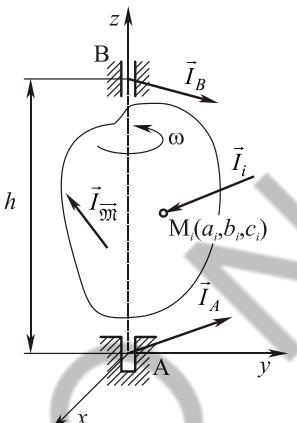
$$\omega_{1x} = 0, \quad \omega_{1y} = 0, \quad \omega_{1z} = \omega_1, \quad (5.42)$$

$$\omega_{2x} = 0, \quad \omega_{2y} = 0, \quad \omega_{2z} = \omega_2. \quad (5.43)$$

Sada se mogu formirati projekcije glavnog momenta količine kretanja na ose x , y i z a prema izrazima (3.59)

$$L_{x(1)} = -J_{xz}\omega_1, \quad L_{y(1)} = -J_{yz}\omega_1, \quad L_{z(1)} = J_z\omega_1,$$

$$L_{x(2)} = -J_{xz}\omega_2, \quad L_{y(2)} = -J_{yz}\omega_2, \quad L_{z(2)} = J_z\omega_2. \quad (5.44)$$

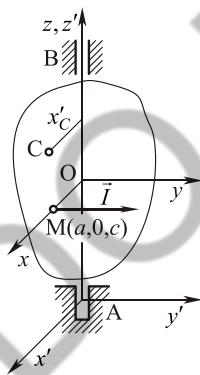


Zbog postojanja relacija (5.41), (5.43) i (5.44), a pošto su reaktivni impulsi u ležištima A i B oblika $\vec{I}_A = \vec{I}_A(I_{Ax}, I_{Ay}, I_{Az})$ i $\vec{I}_B = \vec{I}_B(I_{Bx}, I_{By}, 0)$, relacije (5.37) i (5.39) postaju

$$\begin{aligned} -My_c(\omega_2 - \omega_1) &= I_{Ax} + I_{Bx} + \sum I_{x12}, \\ Mx_c(\omega_2 - \omega_1) &= I_{Ay} + I_{By} + \sum I_{y12}, \\ 0 &= I_{Az} + \sum I_{z12}, \\ -J_{xz}(\omega_2 - \omega_1) &= \sum M_{x12}^{I_s} + I_{M_x} - I_{By}h, \\ -J_{yz}(\omega_2 - \omega_1) &= \sum M_{y12}^{I_s} + I_{M_y} + I_{Bx}h, \\ J_z(\omega_2 - \omega_1) &= \sum M_{z12}^{I_s} + I_{M_z}. \end{aligned} \quad (5.45)$$

Iz prvih pet jednačina (5.45) određuju se pet impulsnih reakcija veza I_{Ax} , I_{Ay} , I_{Az} , I_{Bx} i I_{By} . Poslednja ili šesta jednačina (5.45) je ranije dobijena i služi za određivanje ugaone brzine ω_2 posle udara.

5.3.1 Slučaj kada na telo deluje samo jedan udarni impuls. Centar udara.



Slika 5.14:

Neka na telo, koje se obrće oko nepokretne ose ugaonom brzinom ω_1 , dejstvuje samo jedan udarni impuls \vec{I} . Postavlja se pitanje da li i pored dejstva ovog impulsa impulsne reakcije mogu biti jednake nuli. Ako je to moguće telo će biti uravnoteženo u pogledu udarnog impulsa. Iz treće jednačine (5.45) vidi se da je za $I_{Az} = 0$ i $I_{z12} = 0$ pa udarni impuls mora biti u ravni upravnoj na obrtnoj osi z . Neka se udar posmatra u koordinatnom sistemu $Oxyz$, gde je osa x normalna na udarnom impulsu I , odnosno udarni impuls I je paralelan sa osom y . Neka su ose novog koordinatnog sistema x' , y' i z' (Slika 5.14) paralelne osama x , y i z a njegov koordinatni početak u tački A . U tom koordinatnom sistemu tačka M udara ima koordinate $M(a, 0, c)$. Ako su sve impulsne reakcije u ležištima A i B $I_{Ax'} = I_{Ay'} = I_{Az'} = 0$ i $I_{Bx'} = I_{By'} = 0$, a pošto su projekcije udarnog impulsa $I_{x'} = 0$, $I_{y'} = I$ i $I_{z'} = 0$,

jednačine (5.45) postaju

$$\begin{aligned} -My'_c(\omega_2 - \omega_1) &= 0, \\ Mx'_c(\omega_2 - \omega_1) &= I, \\ 0 &= 0, \\ -J_{x'z'}(\omega_2 - \omega_1) &= 0, \\ -J_{y'z'}(\omega_2 - \omega_1) &= 0, \\ J_{z'}(\omega_2 - \omega_1) &= Ia. \end{aligned} \quad (5.46)$$

Iz prve jednačine (5.46) sledi da je $y'_c = 0$ pa se centar mase mora nalaziti u ravni x', z' . Iz šeste jednačine (5.46) sledi da je

$$\omega_2 - \omega_1 = \frac{Ia}{J_{z'}}, \quad (5.47a)$$

pa iz četvrte i pete jednačine (5.46) sledi da mora biti $J_{x'z'} = 0$ i $J_{y'z'} = 0$. To znači da je osa z' glavna osa inercije tela za tačku A a i osa z je glavna osa inercije tela za tačku O . Iz druge jednačine (5.46) dobija se

$$\omega_2 - \omega_1 = \frac{I}{Mx'_c},$$

pa je rastojanje a

$$a = \frac{J_{z'}}{Mx'_c}. \quad (5.48)$$

Tačka M u kojoj mora da deluje udarni impuls naziva se *centar udara*. Konačno zaključuje se da udarni impuls neće izazvati udarne reakcije veza u ležištima A i B ako su ispunjeni sledeći uslovi:

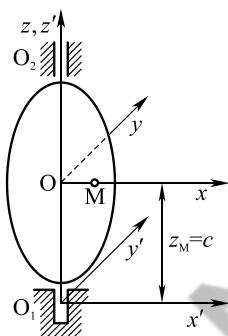
1. Udarni impuls mora biti u ravni normalnoj na obrtnoj osi.
2. Udarni impuls mora biti normalan na ravan koja prolazi kroz obrtnu osu i centar mase tela.
3. Udarni impuls mora da seče ovu ravan u tački koja je na strani centra mase tela i na rastojanju (5.48) od ose obrtanja.

Iz teorije kinetičkih pritisaka zna se da će telo biti bez kinetičkih pritisaka, ili dinamički uravnoveženo, ako mu se centar mase nalazi na osi obrtanja, odnosno kada je $x'_c = 0$. Ali u tom slučaju centar udara bi bio u beskonačnosti, zbog relacije (5.48). Odavde sledi važan zaključak, telo se ne može istovremeno uravnovežiti protiv udara i protiv dinamičkih sila inercije. Ako je telo dinamički uravnoveženo, tada su udarne reakcije u ležištima različite od nule. Ako je telo uravnoveženo u odnosu na udarni impuls tada su dinamičke reakcije u ležištima različite od nule.

Interesantna je i činjenica da se izraz (5.48) poklapa sa izrazom (3.39) za redukovani dužinu fizičkog klatna. U tom slučaju, osa z' bi bila horizontalna osa fizičkog klatna a telo bi se oko nje klatilo.

5.3.2 Centar udara ravne ploče

Posmatra se ravna ploča koja može da se obrće oko ose z' koja leži u ravni ploče (Slike 5.15 i 5.16). Pošto je $\omega_1 = 0$ i zbog $x'_c = \overline{OC}$, jednačine (5.45) sad glase



$$\begin{aligned} -My'_c\omega_2 &= 0, \\ M \cdot \overline{OC} \cdot \omega_2 &= I, \\ 0 &= 0, \\ -J_{x'z'}\omega_2 &= 0, \\ -J_{y'z'}\omega_2 &= 0, \\ J_{z'}\omega_2 &= Ia. \end{aligned} \quad (5.49)$$

Slika 5.15:

Pošto je centar mase ploče u njenoj ravni udarni impuls mora delovati normalno na ploču u tački M . Znači tačka M je centar udara. Sa slike je

$$x' = x, \quad y' = y, \quad z' = z + c.$$

Sada je

$$J_{x'z'} = \int_{(M)} x'z'dm = \int_{(M)} x(z + c)dm = \int_{(M)} xz dm + c \int_{(M)} x dm,$$

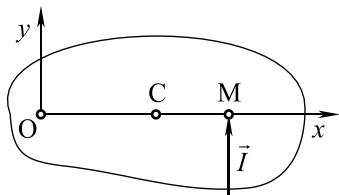
odnosno

$$J_{x'z'} = J_{xz} + c \cdot \overline{OC} \cdot M, \quad \int_{(M)} x dm = \overline{OC} \cdot M.$$

Pošto je osa z glavna osa inercije za tačku O mora biti $J_{xz} = 0$ pa se dobija

$$c = \frac{J_{x'z'}}{M \cdot \overline{OC}}.$$

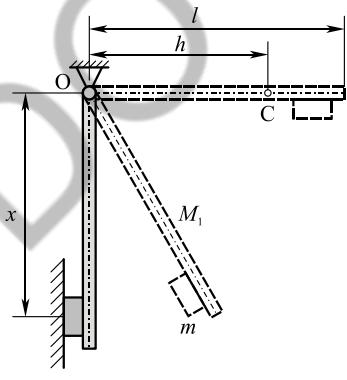
Iz druge i šeste jednačine (5.49) sledi da je



Slika 5.16:

$$\begin{aligned} a &= \frac{J_{z'}}{M \cdot \overline{OC}}, \\ \omega_2 &= \frac{I}{M \cdot \overline{OC}}. \end{aligned} \quad (5.50)$$

Primer 66 U uređaju za određivanje koeficijenta uspostavljanja k štapu mase M i dužine l može da se obrće u vertikalnoj ravni oko horizontalne ose u tački O . (Slika 5.17) Na štalu je na određenom mestu učvršćeno telo mase m od materijala koji se ispituje. Štap počinje da pada iz horizontalnog položaja zbog sopstvene težine bez početne brzine i u vertikalnom položaju se sudari sa preprekom. Prepreka je od materijala koji se ispituje. Odrediti: 1. Koeficijent sudara k ako se posle sudara štap popeo do položaja koji je određen uglom φ ; 2. Rastojanje x mereno od ose obrtanja, na kojem treba učvrstiti težište uzorka, da se u ležištima osovina, pri sudaru, ne javljaju impulsne reakcije.



Slika 5.17:

Ugaona brzina štapa ω_1 neposredno pre sudara zadovoljava zakon o promeni kinetičke energije sistema kojeg čine štap i uzorak

$$\begin{aligned} \frac{J_O}{2} \omega_1^2 &= (M+m)gh, \\ \omega_1 &= \sqrt{\frac{2(M+m)gh}{J_O}}. \end{aligned} \quad (1)$$

gde je J_O moment inercije sistema štap i uzorak za osu obrtanja u tački O , a h rastojanje težišta sistema od tačke O . Ako se uzorak smatra materijalnom tačkom ukupan moment inercije J_O ima vrednost

$$J_O = \frac{M}{3}l^2 + mx^2. \quad (2)$$

Položaj težišta sistema u pravcu štapa određen je sa dužinom

$$h = \frac{M\frac{l}{2} + mx}{M + m}. \quad (3)$$

Ako je ω_2 ugaona brzina sistema neposredno posle sudara biće opet po zakonu o promeni kinetičke energije sistema za taj trenutak i trenutak penjanja štapa do najviše tačke, gde je njena kinetička energija jednaka nuli

$$-\frac{J_O}{2}\omega_2^2 = -(M + m)gh(1 - \cos \varphi).$$

Odavde je

$$\omega_2^2 = \frac{2(M + m)gh}{J_O}(1 - \cos \varphi) = \frac{2(M + m)gh}{J_O}2 \sin^2 \frac{\varphi}{2},$$

odnosno

$$\omega_2 = 2\sqrt{\frac{(M + m)gh}{J_O}} \sin \frac{\varphi}{2}. \quad (4)$$

Pošto je po hipotezi Njutna koeficijent restitucije dat sa

$$k = \frac{|v_2|}{|v_1|},$$

gde su v_2 i v_1 brzine uzorka neposredno pre i posle sudara, dobija se

$$k = \frac{x\omega_2}{x\omega_1} = \frac{\omega_2}{\omega_1},$$

odnosno korišćenjem (1) i (4)

$$k = \sqrt{2} \sin \frac{\varphi}{2}.$$

Da u ležištu nema udarne reakcije mora težište uzorka da leži u centru udara sistema. Prema (5.50) mora biti

$$x = \frac{J_O}{(M+m)h}.$$

Zamena veličina (2) i (3) u ovaj izraz dovodi do

$$x = \frac{\frac{M}{3}l^2 + mx^2}{(M+m)\left(\frac{M\frac{l}{2}+mx}{M+m}\right)}.$$

Posle sređivanja ovaj izraz postaje

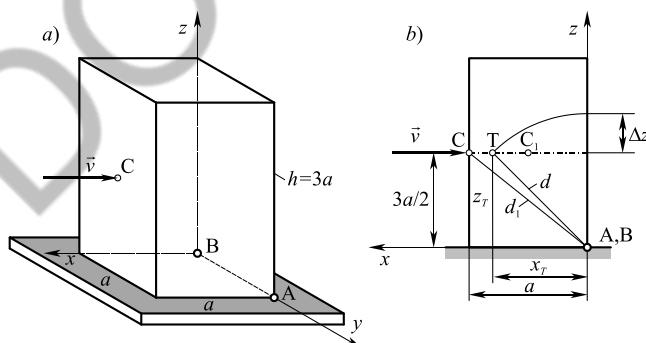
$$M\frac{l}{2}x + mx^2 = \frac{M}{3}l^2 + mx^2,$$

pa je položaj mase m određen sa

$$x = \frac{2}{3}l.$$

Primer 67 Homogena pravougaona prizma, postavljena na horizontalnu ravan, može da se obrće oko ivice AB , koja leži u toj ravni. Dužina ivice kvadratne osnove je a , visina prizme je $3a$. Masa prizme je $3m$. U sredinu C bočne strane prizme, koja leži naspram ivice AB udari kugla mase m brzinom v u horizontalnom pravcu (Slika 5.18).

Odrediti minimalnu brzinu v pri kojoj dolazi do prevrtanja prizme preko ivice AB . Prepostaviti da je udar potpuno neelastičan i da kugla posle sudara ostaje u tački C .



Slika 5.18:

Prizma i kugla se posmatraju kao jedan sistem. Tada je njihov međusobni udarni impuls unutrašnji impuls. Zato primena teoreme o promeni momenta količine kretanja pri sudaru dovodi do

$$L_{y(2)} - L_{y(1)} = 0. \quad (1)$$

Pre sudara moment količine kretanja ima samo kugla i on iznosi

$$L_{y(1)} = mv \frac{3a}{2}. \quad (2)$$

Moment količine kretanja sistema posle sudara je

$$L_{y(2)} = J_y \omega_2 + d_1 (md_1 \omega_2),$$

gde je J_y moment inercije prizme za osu y , a d_1 najkraće rastojanje udarne tačke C do ose y (slika 5.18b).

Moment inercije prizme kvadratne osnove a i visine h iznosi

$$J_y = \frac{M}{3}(a^2 + h^2) = \frac{3m}{3}(a^2 + 9a^2) = 10ma^2. \quad (3)$$

Sa slike 5.18b je

$$d_1^2 = a^2 + \frac{9}{4}a^2 = \frac{13}{4}a^2,$$

pa $L_{y(2)}$ postaje

$$L_{y(2)} = 10ma^2 \omega_2 + \frac{13}{4}ma^2 \omega_2 = \frac{53}{4}ma^2 \omega_2. \quad (4)$$

Zamenom izraza (2) i (4) u (1) dobija se

$$\frac{53}{4}ma^2 \omega_2 - mv \frac{3a}{2} = 0,$$

pa je ugaona brzina neposredno posle sudara

$$\omega_2 = \frac{6v}{53a}. \quad (5)$$

Sistem će se prevrnuti preko ivice AB ako u položaju kada mu težište bude iznad ivice AB težište sistema ima brzinu veću od nule. Zakon o promeni kinetičke energije sistema daje

$$E_{k3} - E_{k2} = A_{23}.$$

Znači mora biti

$$E_{k3} = A_{23} + E_{k2} > 0. \quad (6)$$

Početna kinetička energija, neposredno posle sudara, iznosi

$$E_{k2} = \frac{1}{2}J_y\omega_2^2 + \frac{1}{2}m(d_1\omega_2)^2 = \left(\frac{1}{2}10ma^2 + \frac{1}{2}m\frac{13}{4}a^2\right)\omega_2^2 = \frac{53}{8}ma^2\omega_2^2. \quad (7)$$

Rad vrše samo težine kugle i prizme. Težište sistema, odnosno tačka T , se nalazi na visini

$$z_T = \frac{3}{2}a,$$

dok je x_T određeno sa

$$x_T = \frac{3m\frac{a}{2} + ma}{4m} = \frac{5}{8}a.$$

Sada je rad sila sistema jednak

$$A = -4mg(d - z_T),$$

a pošto je

$$d = \sqrt{x_T^2 + z_T^2} = \sqrt{\frac{25}{64}a^2 + \frac{9}{4}a^2} = \frac{13}{8}a,$$

dobija se

$$A = -4mg\left(\frac{13}{8}a - \frac{3}{2}a\right) = -\frac{mga}{2}. \quad (8)$$

Sada, korišćenjem izraza (5) - (8) dolazi se do potrebne brzine kugle za prevrtanje prizme

$$v > \frac{1}{3}\sqrt{53ag}.$$

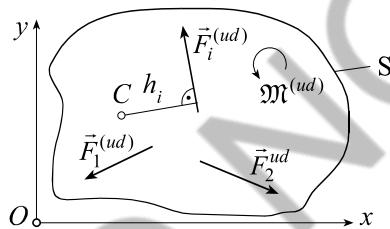
5.4 Dejstvo udara na ravansko kretanje kružog tela

Neka se telo kreće ravanski i neka u nekom trenutku vremena na njega dejstvuju udarne sile i jedan udarni spreg. Prepostavimo da dejstvo udarnih sila i udarnog sprega ne menja način kretanja tela, pa se ono i posle udara kreće ravanski. Osnovna svojstva udara, koja su bila objašnjena kod proučavanja udara jedne materijalne tačke, važe i ovde:

1. Za vreme udara sva pomeranja tačaka tela su zanemarljivo mala,

2. Impulsi neudarnih sila i neudarnih spregova su zanemarljivi u odnosu na impulse udarnih sila i udarnog sprega,
3. Pri udaru dolazi do konačnih promena brzine centra mase i ugaone brzine ravanskog kretanja,
4. Pri udaru, udarne sile i udarni spreg, vrše konačan rad pa pri udaru dolazi do promene kinetičke energije krutog tela,
5. Odnos apsolutnih vrednosti projekcija brzina centra mase posle i pre udara na pravac zajedničke normale u tački kontakta tela u udaru je koeficijent restitucije brzine i određuje se ogledom.

Prilikom udara krutog tela spoljašnje udarne sile i spreg izazivaju unutrašnje udarne sile i spregove. Za njihovu analizu primenjuje se princip preseka tela, koji je obrazložen u statici čvrstog tela. Presecanjem tela u raznim ravnima, primećuje se da se ove sile i spregovi javljaju u uravnoteženim parovima. Zato je zbir impulsa svih unutrašnjih udarnih sila i spregova jednak nuli. Drugim rečima, impulsi unutrašnjih sila i spregova ne utiču na kretanje tela kao celine.



Slika 5.19:

sila i neudarnog sprega zanemaruju, dobija se

$$\begin{aligned} md\vec{v}_C &= \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{(u)} dt, \\ J_C d\dot{\varphi} &= \sum_{i=1}^N h_i F_i^{(u)} dt + M^{(u)} dt, \end{aligned}$$

gde je h_i krak sile $\vec{F}_i^{(u)}$ za momentnu tačku C (Slika 5.19).

Neka se ploča S mase m ravanski kreće u ravni Oxy (Slika 5.19). U nekom trenutku vremena na ploču deluju u ravni ploče, vrlo kratko, udarne sile $\vec{F}_i^{(u)}$ i udarni spreg $M^{(u)}$. Ravansko kretanje se odvija u skladu sa zakonom o kretanju centra mase (3.72) i zakonom o obrtanju oko centra mase (3.74). Množenjem ovih jednačina sa dt , i uzimanjem u obzir činjenice da se pri udaru impulsi neudarnih

Neka je t_1 trenutak početka a t_2 kraja udara. Integracijom prethodnih jednačina u tim granicama, a pošto je za vreme udara krak $h_i \approx \text{const.}$, dobija se

$$m(\vec{v}_{C2} - \vec{v}_{C1}) = \sum_{i=1}^N \vec{I}_{i12}^{(u)}, \quad (5.51)$$

$$J_C(\omega_2 - \omega_1) = \sum_{i=1}^N M_C \vec{I}_{i12}^{(u)} + I_{12}^M, \quad (5.52)$$

gde su

$$\vec{I}_{i12}^{(u)} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_i^{(u)} dt, \quad I_{12}^M = \int_{t_1}^{t_2} \mathfrak{M}^{(u)} dt,$$

impulsi udarnih sila $\vec{F}_i^{(u)}$ i impuls udarnog sprega $\mathfrak{M}^{(u)}$ a $\omega = \dot{\varphi}$ ugaona brzina ravanskog kretanja tela.

Jednačina (5.51) je zakon o promeni količine kretanja tela pri udaru, i ona je u ravni Oxy ekvivalentna sa dve skalarne jednačine

$$m(v_{C2x} - v_{C1x}) = \sum_{i=1}^N I_{i12x}^{(u)}, \quad (5.53)$$

$$m(v_{C2y} - v_{C1y}) = \sum_{i=1}^N I_{i12y}^{(u)}. \quad (5.54)$$

Jednačina (5.52) je zakon o promeni momenta količine kretanja tela oko centra mase pri udaru.

Ako u udaru učestvuje više krutih tela, onda se na svako od njih primjenjuje sve ono što važi za udar jednog tela, odnosno jednačine (5.52)-(5.54). Naglasimo da za udarne impulse, koji su rezultat međusobnog udara ovih tela, a pri pojedinačnom proučavanju svakog tela, uvek primjenjujemo treći Njutnov zakon.

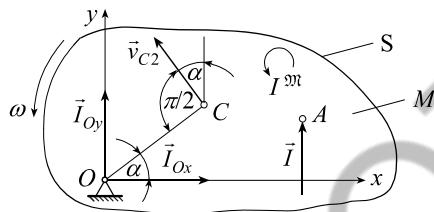
Primer 68 Centar udara ravne ploče.

Posmatrajmo ploču S mase M koja je zglobno vezana u tački O i koja može da se obrće oko te tačke u ravni same ploče (Slika 5.20). Neka u ravni ploče na nju deluje impuls I^M udarnog sprega $\mathfrak{M}^{(u)}$ i u tački A

impuls \vec{I} udarne sile $\vec{F}^{(u)}$. Pre dejstva ovih udarnih impulsata ploča je bila u miru. Potrebno je odrediti reakcije zglobova u tački O kao i uslov koji mora biti ispunjen da bi te reakcije bile jednake nuli.

Za proučavanje problema izabere se u ravni ploče u tački O koordinatni sistem Oxy , pri čemu je osa y paralelna sa pravcem impulsa \vec{I} . Zbog udara, u zglobovu O se javljaju udarne sile i odgovarajući udarni impulsi \vec{I}_{Ox} i \vec{I}_{Oy} . Za ovaj problem jednačine (5.52)-(5.54) glase

$$\begin{aligned} M(v_{C2x} - v_{C1x}) &= I_{Ox}, \\ M(v_{C2y} - v_{C1y}) &= I_{Oy} + I, \\ J_C(\omega_2 - \omega_1) &= I_{Ox}y_c - I_{Oy}x_c \\ &\quad + I(x_A - x_C) + I^M, \end{aligned} \quad (\text{A})$$



Slika 5.20:

gde su x_C , y_C i x_A , y_A koordinate centra mase C i tačke A . Zbog mirovanja ploče pre udara je $v_{C1x} = 0$, $v_{C1y} = 0$ i $\omega_1 = 0$. Posle udara ploča počinje obrtanje oko tačke O pa je brzina centra mase

$$v_{C2} = \overline{OC}\omega_2. \quad (\text{B})$$

Prema slici 5.20 je $\sin \alpha = y_C / \overline{OC}$ i $\cos \alpha = x_C / \overline{OC}$, pa se dobija

$$v_{C2x} = -\omega_2 y_C, \quad v_{C2y} = \omega_2 x_C.$$

Sada, prethodne jednačine postaju

$$\begin{aligned} -My_C\omega_2 &= I_{Ox}, \\ Mx_C\omega_2 &= I_{Oy} + I, \\ J_C\omega_2 &= I_{Ox}y_C - I_{Oy}x_C + I(x_A - x_C) + I^M. \end{aligned}$$

Rešavanjem ovih jednačina nalaze se vrednosti udarnih impulsata u zglobovu O i ugaona brzina ploče posle udara

$$\begin{aligned} \omega_2 &= \frac{Ix_A + I^M}{J_O}, \quad I_{Ox} = -My_C \frac{Ix_A + I^M}{J_O}, \\ I_{Oy} &= Mx_C \frac{Ix_A + I^M}{J_O} - I, \end{aligned}$$

gde je

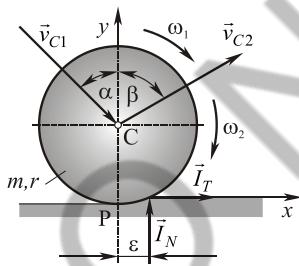
$$J_O = J_C + M(x_C^2 + y_C^2),$$

moment inercije za tačku O . Ako su udarni impulsi I_{Ox} i I_{Oy} reakcije zglobova O jednaki nuli onda se tačka A u kojoj pri tom deluje udarni impuls naziva centar udara. Pošto je $\omega_2 \neq 0$, odnosno zbog $Ix_A + I^M \neq 0$, vidi se da je to ispunjeno ako je

$$y_C = 0, \quad x_A = x_C + \frac{J_C}{Mx_C} - \frac{I^M}{I}. \quad (\text{C})$$

Znači, tada se centar mase nalazi na x osi i x_A koordinata tačke A udara mora zadovoljiti drugu relaciju (C).

Primer 69 *Lopta poluprečnika r i mase m udara o nepomičnu površinu. Pre udara lopta ima ugaonu brzinu ω_1 dok se njen centar mase kreće brzinom \vec{v}_{C1} pod uglom α , gde je $0 \leq \alpha < \pi/2$, prema normali na površinu u tački kontakta. Poznat je koeficijent restitucije za loptu i podlogu. Koeficijent trenja klizanja između lopte i podloge je μ a koeficijent trenja kotrljanja između lopte i površine je ε . Treba odrediti brzinu centra mase lopte i ugaonu brzinu posle udara. Moment inercije lopte je $J_C = \frac{2mr^2}{5}$.*



Slika 5.21:

Naglasimo da zbog zanemarivanja impulsa sile težine za vreme udara površina u koju udara lopta može imati proizvoljan položaj u prostoru. Zbog hrapavosti lopte i podloge u tački kontakta P javljaju se udarne sile i udarni impuls \vec{I}_N i \vec{I}_T u pravcima normalne reakcije i sile trenja klizanja (Slika 5.21). Sila trenja, pa i odgovarajući udarni impuls \vec{I}_T u njenom pravcu, može biti kao na slici, ali i u suprotnom smeru. Posle udara lopta ima ugaonu brzinu ω_2 a njen centar mase brzinu \vec{v}_{C2} pod uglom β prema normali u tački udara.

Osnovne jednačine (5.52)-(5.54) udara pri ravanskom kretanju, za odabrani koordinatni sistem Pxy , glase

$$\begin{aligned} m(v_{C2} \sin \beta - v_{C1} \sin \alpha) &= I_T, \\ m(v_{C2} \cos \beta + v_{C1} \cos \alpha) &= I_N, \\ J_C(\omega_2 - \omega_1) &= -I_T r - I_N \varepsilon. \end{aligned} \quad (\text{A})$$

Za određivanje koeficijenta restitucije posmatrajmo ravansko kretanje lopte. Iz kinematike je

$$\vec{v}_P = \vec{v}_C + \vec{v}_P^C,$$

pa projekcija ove relacije na vertikalnu osu iznosi $v_{Py} = v_{Cy}$, jer je vektor \vec{v}_P^C normalan na pravac PC . Sada je konačno koeficijent restitucije

$$k = \frac{|v_{Py2}|}{|v_{Py1}|} = \frac{v_{C2} \cos \beta}{v_{C1} \cos \alpha}. \quad (B)$$

Četiri jednačine (A) i (B) sadrže pet nepoznatih veličina v_{C2} , β , I_N , I_T i ω_2 pa je za rešavanje problema potrebna još jedna jednačina. Ta jednačina je različita ako u tački kontakta ima ili nema proklizavanja, pa se dalje razlikuju ta dva slučaja:

1. U tački kontakta nema proklizavanja.

Ako u tački kontakta nema proklizavanja onda je tačka kontakta P pol brzine na kraju udara, pa važi

$$v_{C2} \sin \beta = r\omega_2. \quad (C)$$

Rešavanjem jednačina (A), (B) i (C) dobija se

$$\begin{aligned} \tan \beta &= \frac{r}{7k} f(\alpha, \varepsilon, \omega_1, v_{C1}), \\ f(\alpha, \varepsilon, \omega_1, v_{C1}) &= \frac{5}{r} \left[\frac{2r\omega_1}{5v_{C1} \cos \alpha} + \tan \alpha - \frac{\varepsilon}{r}(1+k) \right], \\ \omega_2 &= \frac{v_{C1} \cos \alpha}{7} f(\alpha, \varepsilon, \omega_1, v_{C1}), \\ I_N &= mv_{C1}(1+k) \cos \alpha, \\ I_T &= \frac{2mv_{C1} \cos \alpha}{7} \left[\frac{r\omega_1}{v_{C1} \cos \alpha} + \frac{5\varepsilon}{2r}(1+k) - \tan \alpha \right], \\ v_{C2} &= \sqrt{k^2 + \left[\frac{r}{7} f(\alpha, \varepsilon, \omega_1, v_{C1}) \right]^2} v_{C1} \cos \alpha. \end{aligned} \quad (D)$$

Iz ovih rezultata se zapaža da su veličine $\tan \beta$ i ω_2 uvek istog znaka.

1. Ako je $\frac{r\omega_1}{v_{C1} \cos \alpha} + \frac{5\varepsilon}{2r}(1+k) > \tan \alpha$ udarni impuls I_T usmeren je kao na slici 5.20, a za $\frac{r\omega_1}{v_{C1} \cos \alpha} + \frac{5\varepsilon}{2r}(1+k) < \tan \alpha$ on ima suprotan smer;

2. Ako je $\frac{2r\omega_1}{5v_{C1}\cos\alpha} + \tan\alpha < \frac{\varepsilon}{r}(1+k)$ onda je $\omega_2 < 0$ i $\beta < 0$. U tom slučaju, lopta se posle udara obrće u suprotnom smeru od onog prikazanog na slici. Pošto je $\beta < 0$ lopta se odbija od površine u istu stranu u odnosu na normalu u tački kontakta lopte sa površinom sa koje je u nju i udarila;
3. Ako je $\frac{2r\omega_1}{5v_{C1}\cos\alpha} + \tan\alpha > \frac{\varepsilon}{r}(1+k)$ onda je $\omega_2 > 0$ i $\beta > 0$. U tom slučaju, lopta se posle udara obrće u smeru prikazanom na slici. Pošto je sada $\beta > 0$ lopta se odbija od površine u odnosu na normalu u tački kontakta lopte sa površinom kao što je to na slici nacrtano.

Lopta se odbija od podloge bez proklizavanja ako je zadovoljen uslov $|I_T| < \mu I_N$, odnosno $-\mu I_N < I_T < \mu I_N$. Koristeći prethodne rezultate i pošto je za $0 \leq \alpha < \pi/2$ zadovoljeno $\cos\alpha > 0$, ovaj uslov dovodi do sledeće nejednačine

$$\left[a - 7\mu \frac{1+k}{2} \right] v_{C1} \cos\alpha < r\omega_1 < \left[a + 7\mu \frac{1+k}{2} \right] v_{C1} \cos\alpha,$$

gde je

$$a = \tan\alpha - \frac{1+k}{2} \frac{5\varepsilon}{r}$$

koju zadovoljava brzina tačke $r\omega_1$ na površini lopte pre udara ako lopta ne proklizava po podlozi.

2. Lopta u tački kontakta proklizava.

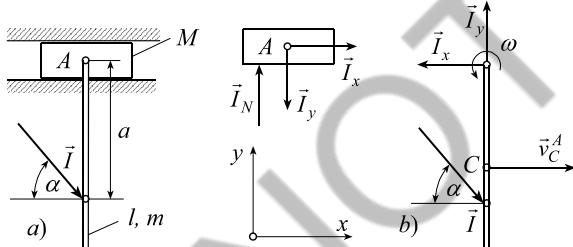
Ako ugaona brzina pre udara ω_1 ne zadovoljava prethodnu nejednačinu onda lopta u tački kontakta proklizava. Lopta pri kontaktu sa površinom može proklizati u desnu stranu ili levu. To zavisi od odnosa brzine centra mase lopte i njene ugaone brzine. Pri proklizavanju impuls I_T dostiže svoju najveću vrednost i važi

$$I_T = \mu I_N. \quad (E)$$

Sada, rešavajući (A), (B) i (E) nalaze se nepoznate veličine

$$\begin{aligned} I_N &= mv_{C1}(1+k)\cos\alpha, \\ \tan\beta &= \frac{1}{k}[\tan\alpha + \mu(1+k)], \\ \omega_2 &= \omega_1 - \frac{5}{2r}v_{C1}(1+k)(\mu + \frac{\varepsilon}{r})\cos\alpha, \\ v_{C2} &= v_{C1}\sqrt{1 - [1 - k^2 - \mu^2(1+k)^2]\cos^2\alpha + \mu(1+k)\sin 2\alpha}. \end{aligned}$$

Primer 70 Sistem se sastoji od klizača mase M koji može da se kreće po idealno glatkoj horizontalnoj ravni i štapa mase m i dužine l . Štap i klizač su zglobno vezani u tački A . Na štap, na udaljenju a od tačke A , deluje udarni impuls I pod ugлом α (Slika 5.22). Odrediti brzinu klizača i ugaonu brzinu štapa neposredno posle udara. Pre udara sistem je mirovao.



Slika 5.22:

Klizač. Pri razdvajanju veze klizača i štapa treba voditi računa o trećem zakonu dinamike (Slika 5.22b).

Pošto se klizač kreće translatorno to se smatra materijalnom tačkom, pa jednačine (5.53) i (5.54) za klizač glase

$$M\dot{x}_{A2} = I_x, \quad M\dot{y}_{A2} = I_N - I_y. \quad (A)$$

Za dejstvo udara na štap važe jednačine (5.52) - (5.54)

$$\begin{aligned} m\dot{x}_{C2} &= I \cos\alpha - I_x, \quad m\dot{y}_{C2} = I_y - I \sin\alpha, \\ J_C\omega_2 &= I_x \frac{l}{2} + I \left(a - \frac{l}{2}\right) \cos\alpha. \end{aligned} \quad (B)$$

Sistem se sastoji iz klizača i štapa koji su spojeni unutrašnjom vezom. Klizač se kreće po spoljašnjoj vezi, tj. po horizontalnoj ravni. Oslobođimo se svih veza i zamenimo njihovo dejstvo udarnim impulsima I_x i I_y u zglobu A i udarnim impulsom I_N koji deluje na

Posle udara štap počinje ravansko kretanje pa važe kinematičke veze između brzina njegovih tačaka $\vec{v}_{C2} = \vec{v}_{A2} + \vec{v}_{C2}^A$, gde je $v_{C2}^A = l\omega_2/2$. Projektovanjem ove vektorske jednačine na ose x i y dobijamo

$$\dot{x}_{C2} = \dot{x}_{A2} + \frac{l}{2}\omega_2, \quad \dot{y}_{C2} = \dot{y}_{A2}. \quad (C)$$

Ovde imamo 7 jednačina sa osam nepoznatih veličina \dot{x}_{C2} , \dot{y}_{C2} , \dot{x}_{A2} , \dot{y}_{A2} , ω_2 , I_x , I_y , I_N . Za rešavanje problema do kraja mora se učiniti pretpostavka o kontaktu klizača i podloge. Neka pri udaru klizač i podloga ostaju u kontaktu. Tada je osma jednačina

$$\dot{y}_{A2} = 0. \quad (D1)$$

pa je rešenje jednačina (A), (B), (C) i (D1) oblika

$$\begin{aligned} \dot{y}_{A2} &= 0, \quad \dot{x}_{A2} = \frac{2I \cos \alpha}{(m + 4M)} \left(2 - 3 \frac{a}{l} \right), \quad I_x = M \dot{x}_{A2}, \\ \dot{x}_{C2} &= \frac{I \cos \alpha}{m + 4M} \left(1 + 6 \frac{a}{l} \frac{M}{m} \right), \quad \dot{y}_{C2} = 0, \\ \omega_2 &= \frac{6I \cos \alpha}{m + 4M} \frac{1}{l^2} \left[2a \left(1 + \frac{M}{m} \right) - l \right], \quad I_y = I_N = I \sin \alpha. \end{aligned} \quad (E)$$

Primer 71 Na kolicima se nalazi, u relativnom miru, kocka mase M i stranice a . Kolica i kocka se kreću konstantnom brzinom \vec{v} i trenutno zaustavljaju udarom o prepreku D . Klizanje kocke po kolicima sprečava klin u tački A (Slika 5.23). Odrediti potrebnu brzinu v pre udara da bi se kocka prevrnula oko tačke A . Moment inercije kocke za centar mase iznosi $J_C = Ma^2/6$.

Problem se pri rešavanju deli na tri vremenska intervala: pre udara; udar; posle udara. Kretanje pre udara je poznato. Pri udaru kolica o prepreku B javljaju se udarni impulsni I_x i I_y u tački A . Proces udara se odvija u skladu sa jednačinama (5.52)-(5.54). Kako je pre udara $\omega_1 = 0$, $v_{C1x} = v$, $v_{C1y} = 0$, ove jednačine postaju

$$\begin{aligned} M(v_{C2x} - v) &= I_x, \quad Mv_{C2y} = I_y, \\ J_C \omega_2 &= -I_y \frac{a}{2} - I_x \frac{a}{2}. \end{aligned}$$

Posle udara kocka počinje obrtanje oko tačke A , pa je brzina centra mase

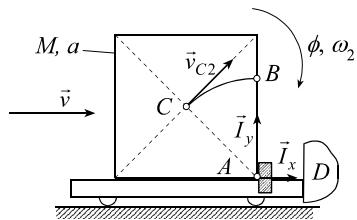
$$v_{C2} = \overline{AC}\omega_2 = \omega_2 \sqrt{2} \frac{a}{2},$$

odnosno

$$v_{C2x} = v_{C2} \cos \frac{\pi}{4} = \omega_2 \frac{a}{2}, \quad v_{C2y} = v_{C2} \sin \frac{\pi}{4} = \omega_2 \frac{a}{2}.$$

Rešavanjem prethodnih jednačina dobijaju se ugaona brzina kocke neposredno posle udara i vrednosti udarnih impulsa u tački A

$$\omega_2 = \frac{3v}{4a}, \quad I_x = -\frac{5}{8}Mv, \quad I_y = \frac{3}{8}Mv.$$



Slika 5.23:

Posle udara kocka se obrće oko tačke A . Neka je položaj 3 kocke u kome se njen centar mase nalazi iznad tačke A . Zakon o promeni kinetičke energije za položaje 3 i neposredno posle udara glasi

$$\frac{1}{2}J_A\omega_3^2 - \frac{1}{2}J_A\omega_2^2 = -Mg\left(\frac{a\sqrt{2}}{2} - \frac{a}{2}\right),$$

jer samo sila težine kocke vrši rad, i to negativan. Pošto je po Hajgens - Štajnerovoj teoremi $J_A = J_C + M(a\sqrt{2}/2)^2 = 2Ma^2/3$, iz prethodnog izraza nalazi se ugaona brzina kocke prilikom prolaska centra mase iznad tačke A

$$\omega_3 = \sqrt{\omega_2^2 - \frac{3g}{2a}(\sqrt{2} - 1)}.$$

Ako kocka treba da se prevrne preko zglobova A mora biti $\omega_3 > 0$, odnosno

$$\omega_2 > \sqrt{\frac{3g}{2a}(\sqrt{2} - 1)},$$

što daje potrebnu brzinu kretanja kolica i kocke pre udara

$$v > \sqrt{\frac{8}{3}ag(\sqrt{2} - 1)}.$$

5.4.1 Primena Lagranževih jednačina druge vrste u teoriji udara

Do sada izložena teorija udara uspešno se koristi kod relativno jednostavnih problema udara. Za složenije sisteme u teoriji udara koriste se metode analitičke mehanike. Metode analitičke mehanike to proučavanje pojednostavljaju jer se u jednačinama za proučavanje problema eliminisu udarne reakcije idealnih veza.

Posmatra se sistema sačinjen od N materijalnih tačaka i krutih tela. U sistemu dolazi do udara između tačaka i tela sistema. Pri tome se javljaju udarni impulsi sila i spregova. Udarne impulse delimo na udarne aktivne impulse i udarne impulse reakcija veza.

Neka su udarni impulsi reakcija veza impulsi sila $\vec{I}_i^{(R)}$. Tada se sledećim izrazom

$$\sum_{i=1}^N \vec{I}_i^{(R)} \cdot \delta \vec{r}_i = 0, \quad (5.55)$$

definišu udarne reakcije idealnih veza. Virtualna pomeranja $\delta \vec{r}_i$ su elementarna pomeranja koja sistem dopušta u trenutku udara.

Neka je aktivni impuls koji deluje na tačku M_i sistema \vec{I}_i . Tada za svaku materijalnu tačku važi osnovna jednačina teorije udara pa se dobija sistem jednačina

$$\begin{aligned} m_1 \Delta \vec{v}_1 &= \vec{I}_1 + \vec{I}_1^{(R)}, \\ m_2 \Delta \vec{v}_2 &= \vec{I}_2 + \vec{I}_2^{(R)}, \\ &\dots \\ &\dots \\ m_N \Delta \vec{v}_N &= \vec{I}_N + \vec{I}_N^{(R)}, \end{aligned} \quad (5.56)$$

gde je sa Δ označena razlika brzine i -te materijalne tačke posle i pre sudra, odnosno $\Delta \vec{v}_i = \vec{v}_{i(2)} - \vec{v}_{i(1)}$, $i = 1, 2, \dots, N$. Ako se svaka jednačina sistema (5.56) pomnoži sa odgovarajućim virtualnim pomeranjem $\delta \vec{r}_i$ pa se sve tako dobijene jednačine saberi i koristi uslov (5.55) dobija se

$$\sum_{i=1}^N (\vec{I}_i - m_i \Delta \vec{v}_i) \cdot \delta \vec{r}_i = 0. \quad (5.57)$$

Prethodna jednačina je uopštenje Lagranž-Dalamberovog principa na teoriju udara.

Neka su q_1, q_2, \dots, q_n nezavisne generalisane koordinate problema udara, gde je n broj stepeni slobode kretanja uočenog problema. Pošto je sada $\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_n, t)$ sledi da je

$$\delta \vec{r}_i = \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} \delta q_\alpha,$$

pa je

$$\sum_{i=1}^N (m_i \Delta \vec{v}_i) \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_{i=1}^N (m_i \Delta \vec{v}_i) \cdot \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} \delta q_\alpha.$$

Pošto se operator Δ odnosi samo na brzinu, promenom reda sabiranja po indeksima i i α dobija se

$$\sum_{i=1}^N (m_i \Delta \vec{v}_i) \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_{\alpha=1}^n \delta q_\alpha \Delta \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha}.$$

Od ranije je poznato da je

$$\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} = \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_\alpha},$$

pa prethodni izraz postaje

$$\sum_{i=1}^N (m_i \Delta \vec{v}_i) \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_{\alpha=1}^n \delta q_\alpha \Delta \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_\alpha},$$

odnosno

$$\sum_{i=1}^N (m_i \Delta \vec{v}_i) \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_{\alpha=1}^n \delta q_\alpha \Delta \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_\alpha} \right). \quad (5.58)$$

Takođe je rad udarnih impulsa \vec{I}_i na virtualnim pomeranjima $\delta \vec{r}_i$

$$\delta A \vec{I}_i = \sum_{i=1}^N \vec{I}_i \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_{i=1}^N \vec{I}_i \cdot \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} \delta q_\alpha,$$

odnosno posle promene reda sabiranja

$$\delta A \vec{I}_i = \sum_{i=1}^N \vec{I}_i \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_{\alpha=1}^n \left(\sum_{i=1}^N \vec{I}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} \right) \delta q_\alpha = \sum_{\alpha=1}^n U_\alpha \delta q_\alpha, \quad (5.59)$$

gde je

$$U_\alpha = \sum_{i=1}^N \vec{I}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} \quad (5.60)$$

generalisani udarni impuls. Generalisani udarni impulsi se izračunavaju kao koeficijenti uz varijacije generalisanih koordinata δq_α u izrazu za virtualni rad udarnih impulsa (5.59)

Zbog relacija (5.58) i (5.60) izraz (5.57) postaje

$$\sum_{\alpha=1}^n \left[\Delta \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) - U_\alpha \right] \delta q_\alpha = 0. \quad (5.61)$$

Pošto su sve varijacije δq_α nezavisne iz prethodnog izraza sledi da mora da bude

$$\Delta \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) = U_\alpha. \quad (5.62)$$

Ovo su Lagranževe jednačine druge vrste za probleme udara kod sistema materijalnih tačaka sa n stepeni slobode kretanja.

Napomena

Ako u sistemu postoje i kruta tela na koja deluju udarni spregovi onda se za te spregove izračunava odgovarajući virtualni rad u izrazu (5.59). Ako je spreg \vec{M} a virtualno obrtanje $\delta\varphi$ oko neke ose z onda je odgovarajući virtualni rad $\vec{M}_z \delta\varphi$ gde je \vec{M}_z projekcija vektora sprega \vec{M} na osu z

Primer 72 Dva homogena diska svaki mase M spojena su homogenim štapom dužine l i mase M kao što je prikazano na slici 5.24. O ovaj sistem obešen je takođe homogeni štap dužine l i mase M . Na kom udaljenju s mereno od donjeg kraja štapa treba delovati impulsom I da bi ugaona brzina vertikalnog štapa bila jednaka nuli? Prepostaviti da se diskovi za vreme sudara kotrljaju bez klizanja po horizontalnoj ravni i da su sve veze između štapova i diskova zglobne.

Posmatrani problem ima dva stepena slobode kretanja. Za generalisane koordinate mogu se izabrati horizontalno pomeranje kolica x i ugao obrtanja φ vertikalnog štapa. Ako je θ ugao obrtanja diska onda je kinetička energija diskova pri njihovom ravanskem kretanju oblika

$$E_{k1} = 2 \frac{1}{2} (M \dot{x}^2 + J \dot{\theta}^2).$$

Pošto se diskovi kotrljaju bez klizanja važi da je $\dot{x} = R\dot{\theta}$, a pošto je $J = MR^2/2$ i $R = l/3$, prethodni izraz postaje

$$E_{k1} = \frac{3}{2} M \dot{x}^2. \quad (\text{a})$$

Kinetička energija horizontalnog štapa iznosi

$$E_{k2} = \frac{M}{2} \dot{x}^2. \quad (\text{b})$$

Centar mase vertikalnog štapa ima koordinate

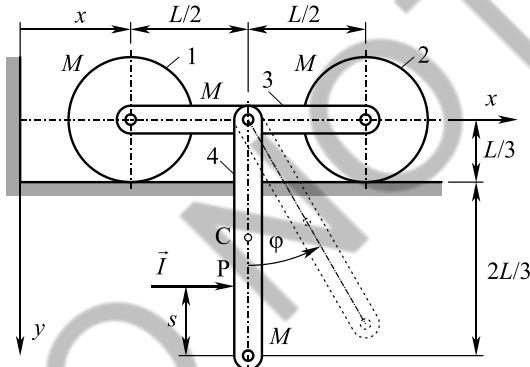
$$x_c = x + \frac{l}{2} \sin \varphi,$$

$$y_c = \frac{l}{2} \cos \varphi.$$

Diferenciranjem ovih izraza po vremenu i za vrlo male vrednosti ugla φ dobija se

$$\dot{x}_c = \dot{x} + \frac{l}{2} \dot{\varphi},$$

$$\dot{y}_c = 0,$$



Slika 5.24:

pa je kinetička energija vertikalnog štapa

$$E_{k3} = \frac{M}{2} (\dot{x}_c^2 + \dot{y}_c^2) + \frac{J_c}{2} \dot{\varphi}^2. \quad (\text{d})$$

Konačno iz prethodnih izraza dobija se kinetička energija celog sistema

$$E_k = E_{k1} + E_{k2} + E_{k3} = \frac{5M}{2} \dot{x}^2 + \frac{Ml}{2} \dot{x} \dot{\varphi} + \frac{Ml^2}{6} \dot{\varphi}^2. \quad (\text{e})$$

Udarni impuls I vrši rad na pomeranju tačke P u horizontalnom pravcu. Horizontalna koordinata tačke P iznosi $x_P = x + (l - s) \sin \varphi$. Odavde je $\delta x_p = \delta x - \delta s \sin \varphi + (l - s) \delta \varphi \cos \varphi$, odnosno za male vrednosti ugla $\varphi \sin \varphi \approx 0$ i $\cos \varphi \approx 1$, pa je $\delta x_P = \delta x + (l - s) \delta \varphi$. Sada je virtualni rad udarnog impulsa I oblika $\delta A^T = I \delta x_p = I [\delta x + (l - s) \delta \varphi]$. Znači generalisani udarni impulsi su

$$\begin{aligned} U_x &= I, \\ U_\varphi &= I(l - s). \end{aligned}$$

Lagranževe jednačine druge vrste za ovaj problem udara glase

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{x}} \right)_{(2)} - \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{x}} \right)_{(1)} &= U_x, \\ \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{\varphi}} \right)_{(2)} - \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{\varphi}} \right)_{(1)} &= U_\varphi. \end{aligned}$$

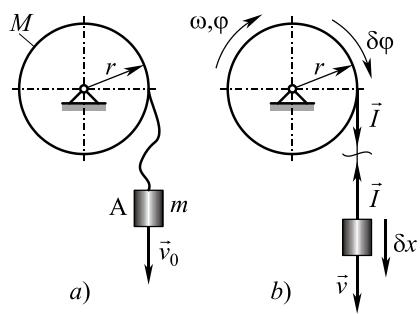
Pošto je sistem pre sudara bio u miru to su sve veličine sa donjim indeksom (1) jednake nuli, pa se korišćenjem (e) dobija

$$\begin{aligned} 5M\dot{x} + \frac{Ml}{2}\dot{\varphi} &= I, \\ \frac{Ml}{2}\dot{x} + \frac{Ml^2}{3}\dot{\varphi} &= I(l - s). \end{aligned} \tag{f}$$

Pošto je potrebno da posle udara ugaona brzina štapa bude jednaka nuli, odnosno $\dot{\varphi} = 0$, iz (f) se dobija

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{I}{5M}, \\ s &= \frac{9l}{10}. \end{aligned}$$

Primer 73 Teret A mase m vezan je užetom koje je drugim krajem obmotano oko cilindra mase M i poluprečnika r , kako je na slici 5.25 prikazano. Teret A slobodno pada i neposredno pre zatezanja užeta imao je brzinu v_0 . Naći ugaonu brzinu diska i brzinu tereta neposredno posle zatezanja užeta ako je sudar: 1. idealno elastičan; 2. idealno plastičan.



Slika 5.25:

$$E_{k(1)} = \frac{m\dot{x}_{(1)}^2}{2}, \quad (a)$$

gde je $\dot{x}_{(1)} = v_0$, a posle sudara

$$E_{k(2)} = \frac{m\dot{x}_{(2)}^2}{2} + \frac{1}{2} \frac{Mr^2}{2} \dot{\varphi}_{(2)}^2, \quad (b)$$

gde je $\dot{x}_{(2)}$ brzina tereta A i $\dot{\varphi}_{(2)}$ ugaona brzina cilindra posle sudara. Pošto je uže elastično njegovo uklanjanje dovodi do udarnih impulsa \vec{I} i $-\vec{I}$ koji deluju na teret A i preko užeta na cilindar. Njihov virtualni rad je

$$\delta A \vec{I} = -I\delta x + Ir\delta\varphi, \quad (c)$$

pa su generalisani impulsi

$$U_x = -I, \quad U_\varphi = Ir. \quad (d)$$

Lagranževe jednačine ovog problema udara

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{x}} \right)_{(2)} - \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{x}} \right)_{(1)} &= U_x, \\ \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{\varphi}} \right)_{(2)} - \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{\varphi}} \right)_{(1)} &= U_\varphi, \end{aligned}$$

sada glase

$$\begin{aligned} m\dot{x}_{(2)} - mv_0 &= -I, \\ \frac{Mr^2}{2} \dot{\varphi}_{(2)} &= Ir. \end{aligned} \quad (e)$$

1. Ako se uže posmatra kao elastičan element onda ovaj sistem ima dva stepena slobode kretanja pri udaru. Neka su generalisane koordinate pomeranje x tereta A i ugao φ obrtanja cilindra. Položaj sistema pre i neposredno posle sudara prikazan je na slici 5.25 a i b. Kinetička energija sistema neposredno pre sudara je

1. Ako je sudar idealno elastičan onda nema gubitka energije pri sudaru pa je $E_{k(1)} = E_{k(2)}$, odnosno korišćenjem izraza (a) i (b)

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{m\dot{x}_{(2)}^2}{2} + \frac{1}{2} \frac{Mr^2}{2} \dot{\varphi}_{(2)}. \quad (\text{f})$$

Rešenje tri jednačine (e) i (f) po nepoznatim veličinama I , $\dot{\varphi}_{(2)}$ i $\dot{x}_{(2)}$ iznosi

$$\begin{aligned} I &= \frac{2v_0mM}{2m+M}, \\ \dot{\varphi}_{(2)} &= \frac{4v_0m}{r(2m+M)}, \\ \dot{x}_{(2)} &= v_0 \frac{2m-M}{2m+M}. \end{aligned}$$

2. Za slučaj idealno plastičnog sudara brzina tereta posle sudara jednaka je obimnoj brzini diska, odnosno

$$\dot{x}_{(2)} = r\dot{\varphi}_{(2)}. \quad (\text{g})$$

Eliminacijom impulsa I iz jednačina (e) i korišćenja (g) slede veličine posle sudara

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_{(2)} &= \frac{2mv_0}{r(2m+M)}, \\ \dot{x}_{(2)} &= \frac{2mv_0}{2m+M}. \end{aligned}$$