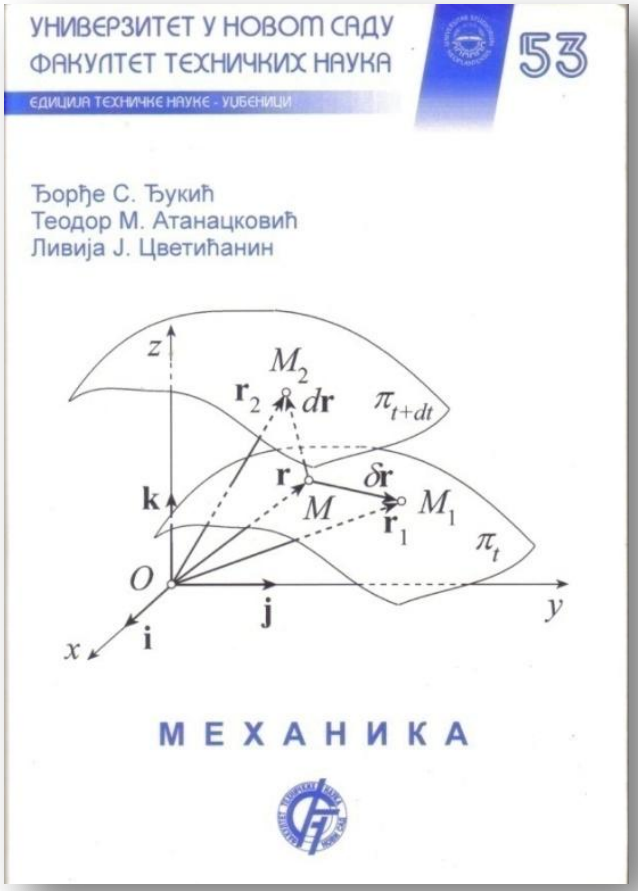
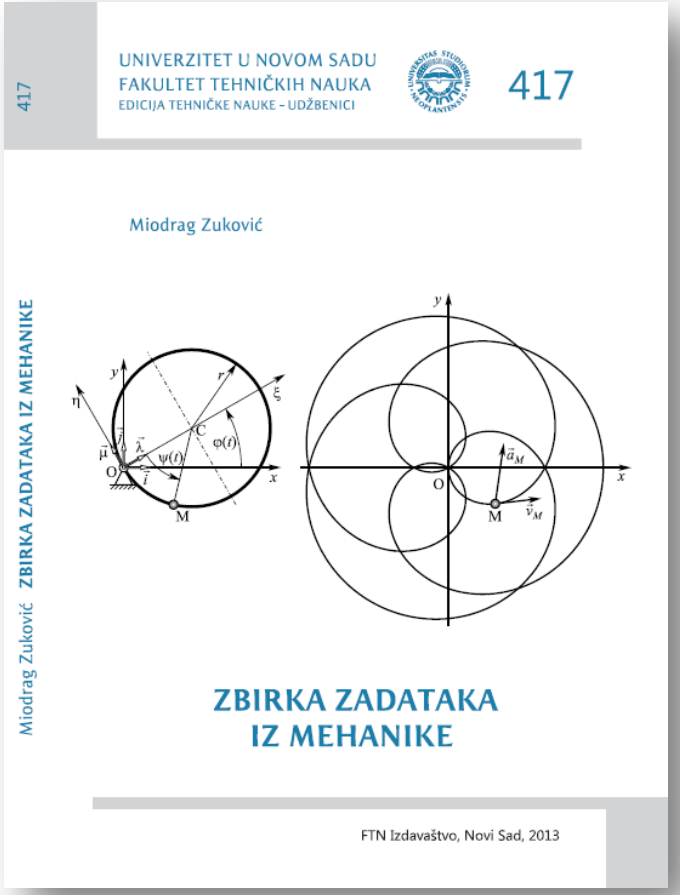
Mehanika 2 (Kinematika)
Vežbe 2

Miodrag Zuković

Novi Sad, 2023.

Literatura


УНИВЕРЗИТЕТ У НОВОМ САДУ
ФАКУЛТЕТ ТЕХНИЧКИХ НАУКА
53
ЕДИЦИЈА ТЕХНИЧКЕ НАУКЕ - УЏБЕНИЦИ
Ђорђе С. Ђукић
Теодор М. Атанацковић
Ливија Ј. Цветићанин
МЕХАНИКА


417
UNIVERZITET U NOVOM SADU
FAKULTET TEHNIČKIH NAUKA
EDICIJA TEHNIČKE NAUKE - UDŽBENICI
417
Miodrag Zuković
Miodrag Zuković ZBIRKA ZADATAKA IZ MEHANIKE
ZBIRKA ZADATAKA
IZ MEHANIKE
FTN Izdavaštvo, Novi Sad, 2013

Šta ćemo naučiti?

5. Pravolinijsko kretanje tačke. Ravnomerno i ravnomerno promenljivo kretanje
6. Kinematika tačke - polarni koordinatni sistem

Zadatak 1

Kretanje tačke je opisano parametarskim jednačinama

$$r(t) = ae^t, \varphi(t) = bt$$

a) Odrediti i nacrtati trajektoriju kretanja tačke,
b) odrediti brzinu i ubrzanje tačke u proizvoljnom trenutku vremena t,
c) odrediti brzinu i ubrzanje tačke u početnom trenutku,

Kretanje tačke je opisano parametarskim jednačinama

$$r(t) = ae^t, \varphi(t) = bt$$

a) Odrediti i nacrtati trajektoriju kretanja tačke,
b) odrediti brzinu i ubrzanje tačke u proizvoljnom trenutku vremena t,
c) odrediti brzinu i ubrzanje tačke u početnom trenutku,

$a, b > 0$

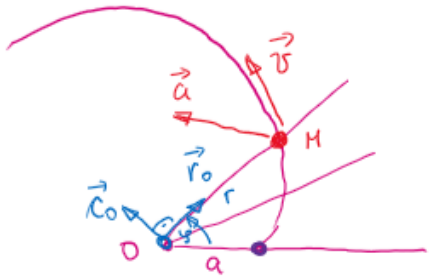
a) $r(t)$, $\varphi(t)$ $\xrightarrow[t]{\text{ELIM.}}$ $r(\varphi)$ JP

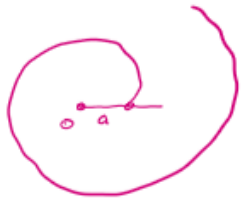
(1) $r = a e^t$

(2) $\varphi = b t \rightarrow t = \frac{\varphi}{b}$

$r = a e^{\frac{1}{b}\varphi}$ JP

$\varphi = 0 \rightarrow r = a e^0 = a \cdot 1 = a$





LOGARITAMSKA SPIRALA

b) $r(t) = a\,e^t$ $\quad \dot r(t) = a\cdot e^t$ $\quad \ddot r(t) = a\,e^t$

$\varphi(t) = b\,t$ $\quad \dot\varphi(t) = b$ $\quad \ddot\varphi(t) = 0$

$\vec v = v_r \vec r_0 + v_c \vec c_0$; $\vec a = a_r \vec r_0 + a_c \vec c_0$

$v_r = \dot r = a\,e^t$

$v_c = r\dot\varphi = a\,b\,e^t$

$v = \sqrt{v_r^2 + v_c^2} = \sqrt{a^2(e^t)^2 + a^2b^2(e^t)^2}$

$v = a\,e^t\sqrt{1+b^2}$

$a_r = \ddot r - r\dot\varphi^2 = a e^t - a e^t b^2 = a(1-b^2)e^t$

$a_c = \cancel{r\ddot\varphi}^{\,0} + 2\dot r\dot\varphi = 2\cdot a e^t\cdot b = 2ab\,e^t$

$a = \sqrt{a_r^2 + a_c^2} = \dots\dots$

c) $t = 0 \qquad r(0) = a\cancel{e^0}^{\,1} = a$, $\varphi(0) = b\cdot 0 = 0$

$v_r(0) = a e^0 = a$

$v_c(0) = a b e^0 = ab$ $\Big\}$ $\rightarrow$ $v(0) = \sqrt{v_r^2(0) + v_c^2(0)}$

$v(0) = \sqrt{a^2 + a^2b^2} = a\sqrt{1+b^2}$

$a_r(0) = a(1-b^2)\cancel{e^0}^{\,1} = a(1-b^2)$

$a_c(0) = 2ab\cancel{e^0}^{\,1} = 2ab$ $\Big\}$ $\rightarrow$ $a(0) = \sqrt{a_r^2(0) + a_c^2(0)}$

$a(0) = \sqrt{a^2(1-b^2)^2 + 4a^2b^2}$

Zadatak 2

Kretanje tačke je opisano parametarskim jednačinama u polarnom koordinatnom sistemu

$$r(t) = 2R\cos t\,,\varphi(t) = t$$

Odrediti parametarske jednačine i trajektoriju kretanja tačke u Dekartovom koordinatnom sistemu.

Kretanje tačke je opisano parametarskim jednačinama u polarnom koordinatnom sistemu

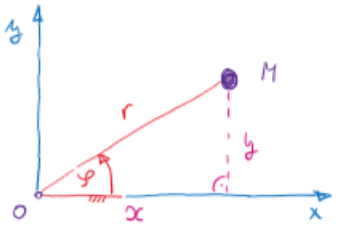
$$r(t) = 2R\cos t,\ \varphi(t) = t$$

Odrediti parametarske jednačine i trajektoriju kretanja tačke u Dekartovom koordinatnom sistemu.

$r(t) = 2R\cos t$ | $x(t) = ?$

$\varphi(t) = t$ | $y(t) = ?$

$y(x) = ?$



$x = r\cos\varphi$

$y = r\sin\varphi$

$x = 2R\cos t \cdot \cos t$

$y = 2R\cos t \cdot \sin t$

$x = 2R\cos^2 t$

$y = R\sin(2t)$

$\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha$

$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - (1 - \cos^2\alpha)$

$\cos(2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1$

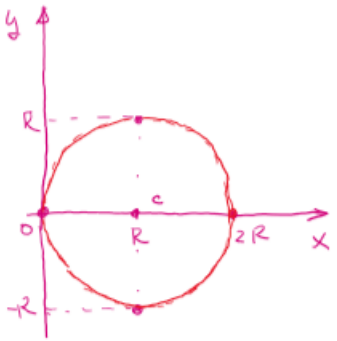
$\cos^2\alpha = \frac{1 + \cos(2\alpha)}{2}$

$x = \frac{2R \cdot (1 + \cos(2t))}{2}$

$y = R\sin(2t)$

$x(t) = R + R\cos(2t)$

$y(t) = R\sin(2t)$



$x - R = R\cos(2t) \quad /^2$

$y = R\sin(2t) \quad /^2$ $+$

$(x-R)^2 + y^2 = R^2\cos^2(2t) + R^2\sin^2(2t)$

$(x-R)^2 + y^2 = R^2$ КРУЖНИЦА

$C(R, 0)$; $r = R$

Zadatak 3

1. Kretanje tačke dato je u polarnim koordinatama jednačinama:

$$r = k\left(1+\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)\right)$$

$$\theta = \frac{\pi}{2}t$$

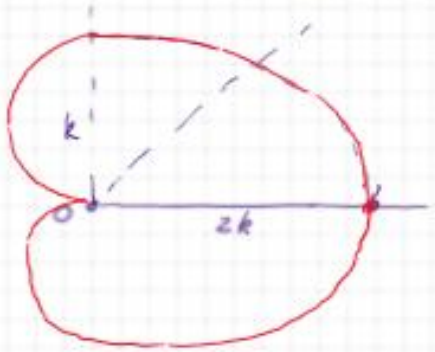
gde je k pozitivna konstanta, (θ u rad, r u m).
Odrediti jednačinu trajektorije, brzinu, ubrzanje i poluprečnik krivine u trenutku t =1 s.

1. Kretanje tačke dato je u polarnim koordinatama jednačinama:

$$r = k\left(1 + \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)\right)$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2}t$$

gde je k pozitivna konstanta, (φ u rad, r u m).
Odrediti jednačinu trajektorije, brzinu, ubrzanje i poluprečnik krivine u trenutku $t = 1$ s.



(1) $r = k + k\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)$

(2) $\varphi = \frac{\pi}{2}t$

$\in \wedge$ → t

$r = k + k\cos(\varphi)$

KARDIOIDA

OK $t \geq 0$

(2) $\varphi \geq 0$

(1) $0 \leq r \leq 2k$

$\varphi = 0 \rightarrow r = 2k$

$\varphi = \frac{\pi}{4} \rightarrow r = k + k\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\varphi = \frac{\pi}{2} \rightarrow r = k$

$\varphi = \pi \rightarrow r = 0$

(1) $r(t) = k + k\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)$

(2) $\varphi(t) = \frac{\pi}{2}t$

$\dot{r}(t) = -k\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)$

$\dot{\varphi}(t) = \frac{\pi}{2}$

$\ddot{r}(t) = -k\frac{\pi^2}{2^2}\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)$

$\ddot{\varphi}(t) = 0$

$$v_r = \dot{r} = -k\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)$$

$$v_c = r\dot{\varphi} = \left(k + k\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)\right)\cdot\frac{\pi}{2}$$

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_c^2} =$$

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = -k\frac{\pi^2}{4}\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) - \left(k + k\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)\right)\frac{\pi^2}{4}$$

$$a_c = r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} = 2\cdot\left(-k\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)\right)\frac{\pi}{2}$$

$$a = \sqrt{a_r^2 + a_c^2} =$$

$t_1 = 1$

$$v_r(1) = -k\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = -k\frac{\pi}{2}$$

$$v_c(1) = \left(k + k\cos\frac{\pi}{2}\right)\frac{\pi}{2} = k\frac{\pi}{2}$$

$$v(1) = \sqrt{v_r^2(1) + v_c^2(1)} = \sqrt{\frac{k^2\pi^2}{4} + \frac{k^2\pi^2}{4}} = \frac{k\pi}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}k\pi$$

$$a_r(1) = -k\frac{\pi^2}{4}\cos\frac{\pi}{2} - \left(k + k\cos\frac{\pi}{2}\right)\frac{\pi^2}{4} = -k\frac{\pi^2}{4}$$

$$a_c(1) = 2\left(-k\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}\right)\frac{\pi}{2} = -k\frac{\pi^2}{2}$$

$$a(1) = \sqrt{a_r^2(1) + a_c^2(1)} = \sqrt{\cdots}$$

Zadatak 4

- Pravolinijsko kretanje tačke opisano je parametarskom jednačinom:

$$x(t) = 2t^3 - 6t^2$$

  - Odrediti brzinu i ubrzanje tačke i nacrtati dijagrame njihove promene,
  - odrediti trenutak t^* u kom tačka menja smer kretanja,
  - odrediti put koji će tačka preći tokom prvih 4s kretanja,
  - odrediti intervale vremena, tokom prvih 4s kretanja, u kojima će se tačka kretati ubrzano, odnosno, usporeno.

Šta smo naučili?

5. Pravolinijsko kretanje tačke. Ravnomerno i ravnomerno promenljivo kretanje
6. Kinematika tačke - polarni koordinatni sistem

Mehanika 2 (Kinematika)
Vežbe 2

Miodrag Zuković

Novi Sad, 2023.