



FTN Novi Sad



Predmet: Mehanika 2 (06 - GG14) zimski semestar 2019/20

Mehanika 2

Zvonko Rakarić

Predavanje 5 : Ravnotežni položaj. Stabilnost ravnotežnog položaja.



Mehanika 2

Građevinarstvo FTN Novi Sad

5. nedelja

Predmetni nastavnik: Zvonko Rakarić

Kabinet 220 blok F (FTN Novi Sad)

Konsultacije:

Email: zvonko@uns.ac.rs
 zzvonkorr@gmail.com

I DEO: KRETANJE I MIROVANJE TAČKE

Sadržaj 5. nedelje

2 DINAMIKA MATERIJALNE TAČKE

2.11 Ravnotežni položaj i njegova stabilnost

2.11.1 Ravnotežni položaj

2.7.2 Elementarna i konačna promena kinetičke energije

2.7.3 Elementarni rad sile

2.8 Rad sile

2.9 Zakon o promeni kinetičke energije materijalne tačke

2.10 Potencijalna energija. Rad potencijalnih sila

2.10.1 Potencijalne sile. Elementarna potencijalna energija

2.10.2 Potencijalna energija sile težine

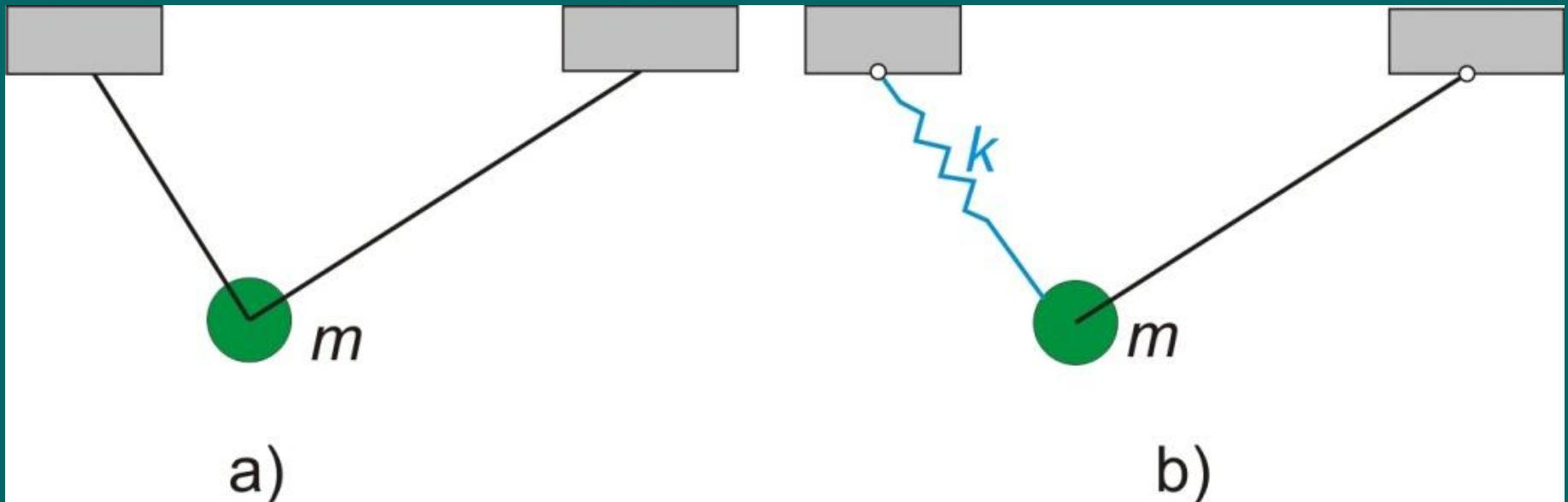
2.10.3 Potencijalna energija elastične sile

2.10.4 Ukupna potencijalna energija

2.11 Ravnotežni položaj i njegova stabilnost

2.11.1 Ravnotežni položaj

- Pod ravnotežnim položajem za neslobodnu i pokretljivu materijalnu tačku ćemo podrazumevati položaj u kojem ona može biti u stanju mirovanja, a pod dejstvom samo potencijalnih sila,
- Posmatra se neslobodna i pokretljiva materijalna tačka ($SSK > 0$);



- Posmatra se sistem prikazan na slici (prethodni slajd). Sistem se nalazi u vertikalnoj ravni, u homogenom polju sile zemljine teže.
- Na Slici a) (prethodni slajd) koncentrisana masa je vezana sa dva laka kruta štapa. Štapovi su za podlogu vezani cilindričnim zglobovima čije su ose normalne na ravan u kojoj se sistem nalazi. Ovako vezana koncentrisana masa je sigurno nepokretna. $SSK = 0$; Ovo je idealan slučaj.
- Na Slici b) umesto jednog krutog štapa je uveden elastični štap. Sada je $SSK = 1$. U ovom slučaju postoji položaj u kojem sistem može da miruje, a pod dejstvom sile težine (sile konstantnog intenziteta) i elastične sile usled odgovarajuće deformacije elastičnog štapa.
- Prilikom analize ravnotežnog položaja, uvek se posmatra neslobodna i pokretljiva materijalna tačka ($SSK > 0$);

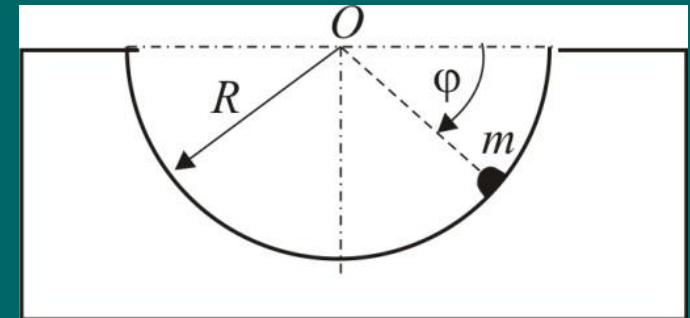
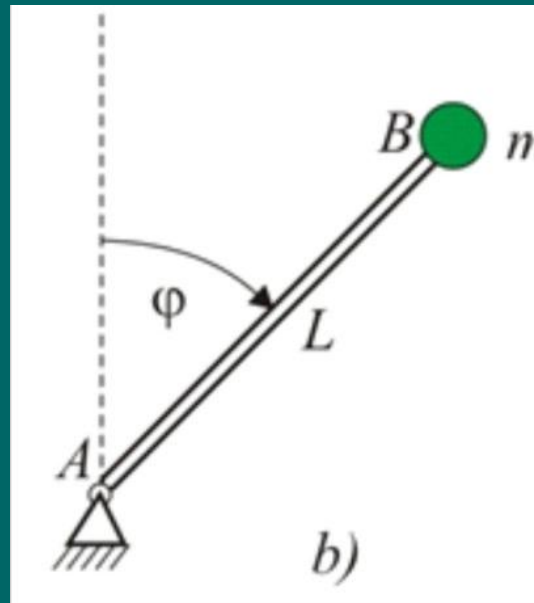
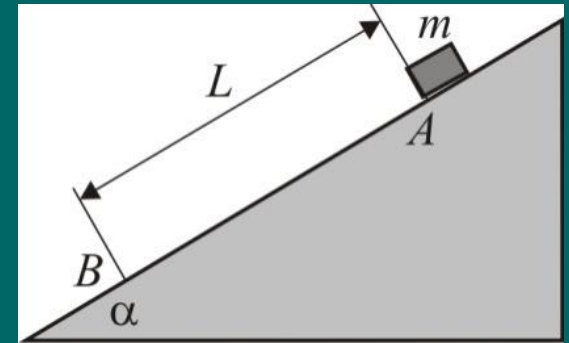
- Neslobodna i pokretljiva materijalna tačka može biti u stanju mirovanja;
- Položaj u kojem je to stanje mirovanja moguće se naziva ravnotežni položaj;
- Ravnoteža sila;
- Nulta brzina u ravnotežnom položaju;
- Posmastra se apsolutno mirovanje;
- Određivanje ravnotežnog položaja se vrši uzimanjem u obzir da nema dovođenja u, niti odvođenja energije iz posmatranog sistema, što znači da se prilikom njegovog određivanja isključuju dejstva nepotencijalnih sila, odnosno, uzimaju se u obzir samo potencijalne sile.

$$E = E_k + E_p = \text{const}$$

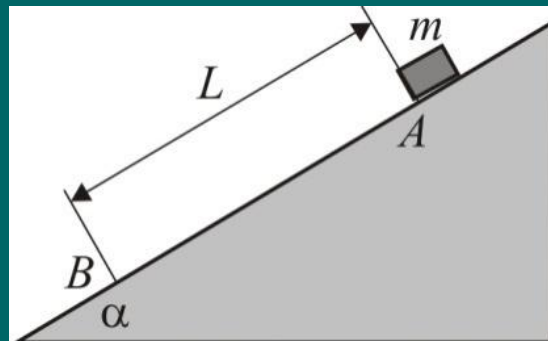
- Mehanička energija je konstantna i odgovara energiji koju sistem ima u početnom trenutku. Nakon početnog trenutka, nema više dovodenja energije u sistem.
- U realnosti, u svakom sistemu postoje otpori kretanju. Ovi otpori će dovesti da se sistem nakon određenog vremena, ukoliko nema više dovodenja energije (nakon početnog trenutka), zaustavi u ravnotežnom položaju.
- Znači, prilikom određivanja ravnotežnog položaja nekog modela realnog sistema, prepostavlja se idealan slučaj u kojem tokom kretanja ne dolzi do promene mehaničke energije;
- sistem može imati više ravnotežnih položaja;
- Ravnotežni položaj može biti stabilan, nestabilan ili neutralan (labilna ravnoteža);

- Posmatraju se tri sistema prikazana na Slici.

- Materijalna tačka na strmoj ravni;
- Materijalna tačka unutar cilindrične površi;
- Materijalna tačka fiksirana na kraju lakog krutog štapa kojem je drugi kraj vezan zglobno za podlogu,



- Materijalna tačka se postavlja na strmu ravan;
- Ako se prepostavi da nema trenja, sigurno će do kretanja doći. Kretanje je naniže, usled dejstva sile zemljine teže.
- Ukoliko postoji trenje, može se desiti da nakon postavljanja tela na strmu ravan ne dođe do kretanja. Takođe, može doći do kretanja
- Pretpostaviće se da je do kretanja došlo
- Ukoliko je do kretanja došlo, materijalna tačka se ne može više zaistaviti samo usled dejstva sila koje deluju u sistemu



- Materijalna tačka na strmoj ravni;
- Jedina potencijalna sila je sila težine,
- Usvaja se nulti nivo za potencijalnu energiju sile zemljine teže –
- postavlja se kroz početni položaj

$$E_p = -mg x \sin \alpha$$

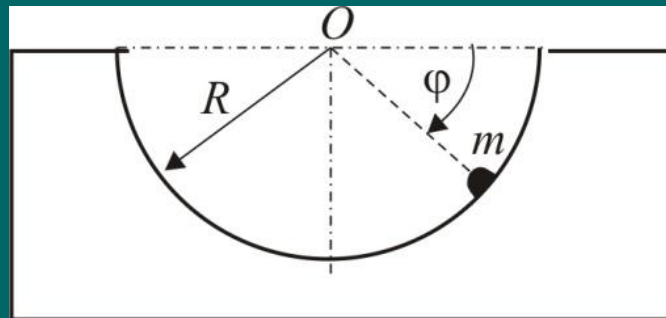
- Ukupna mehanička energija

$$\frac{1}{2} m \dot{x}^2 - mg x \sin \alpha = 0 \quad \left| \frac{d}{dt} \rightarrow \frac{1}{2} m 2\dot{x} \ddot{x} - mg \dot{x} \sin \alpha = 0 \right.$$

- Izvodom po vremenu mehaničke energije se dolazi do diferencijalne jednačine kretanja

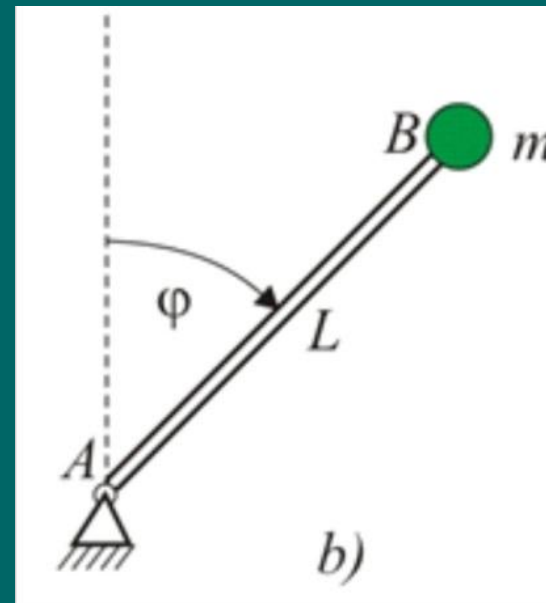
- Materijalna tačka se nalazi unutar cilindrične površi radijusa R ;
- U ovom slučaju postoji ravnotežni položaj. To je najniži položaj.
- Kada se materijalna tačka postavi bilo gde, osim u najnižem položaju, ukoliko nema trenja, tačka će se kretati (oscilovati) oko njega.
- Nulti nivo potencijalne energije se postavlja kroz O

$$E_p = -mg R \sin \varphi$$

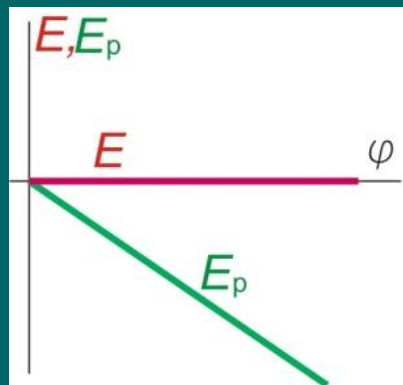


- Materijalna tačka je fiksirana na kraju lakog krutog štapa koji je na drugom kraju vezan zglobno za podlogu;
- Intuitivno, ovde postoje dva ravnotežna položaja: Kada je ugao $\varphi = 0$ i kada je $\varphi = \pi$;
- Nulti nivo potencijalne energije se postavlja kroz O;

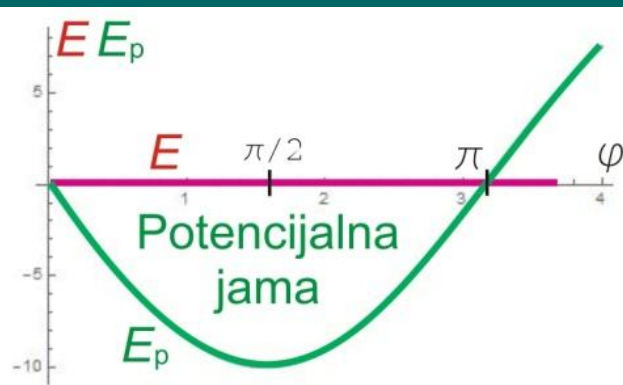
$$E_p = -mg(L - L\cos\varphi)$$



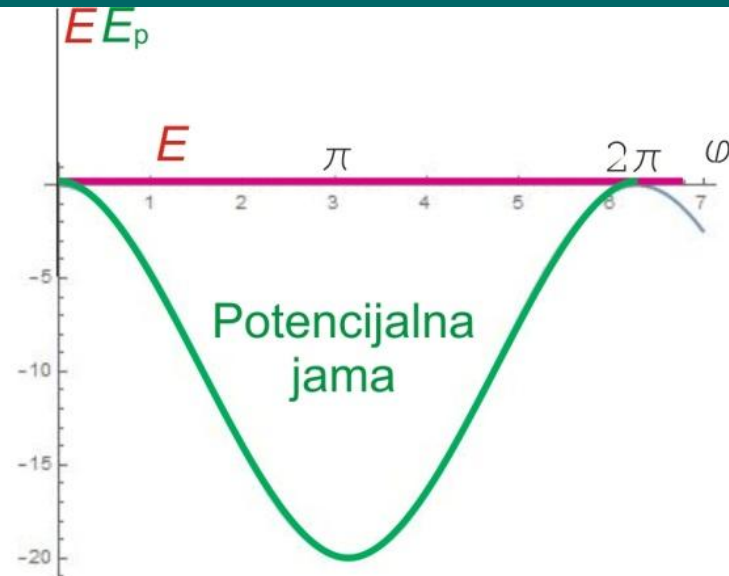
- Na slikama su prikazani energijski dijagrami u funkciji generalisane koordinate



a)



b)



c)

Na osnovu prikazanih dijagrama za sva tri slučaja, može se uočiti da u slučajevima pod b) i c) potencijalna energija ima ekstremnu vrednost u položaju, odnosno položajima koji intuitivno odgovaraju ravnotežnim položajima. U slučajevima pod b) i c) to su najniži položaji, odnosno . Dodadtno, potencijalne energije u ovim položajima je u minimumu. U slučaju pod a), (kretanje niz strmu ravan), potencijalna energija nema ekstremnu vrednost. U tom slučaju, ne postoji ravnotežni položaj.

$$\left. \frac{dE_p}{dt} \right|_{\text{ravn. pol}} = 0$$

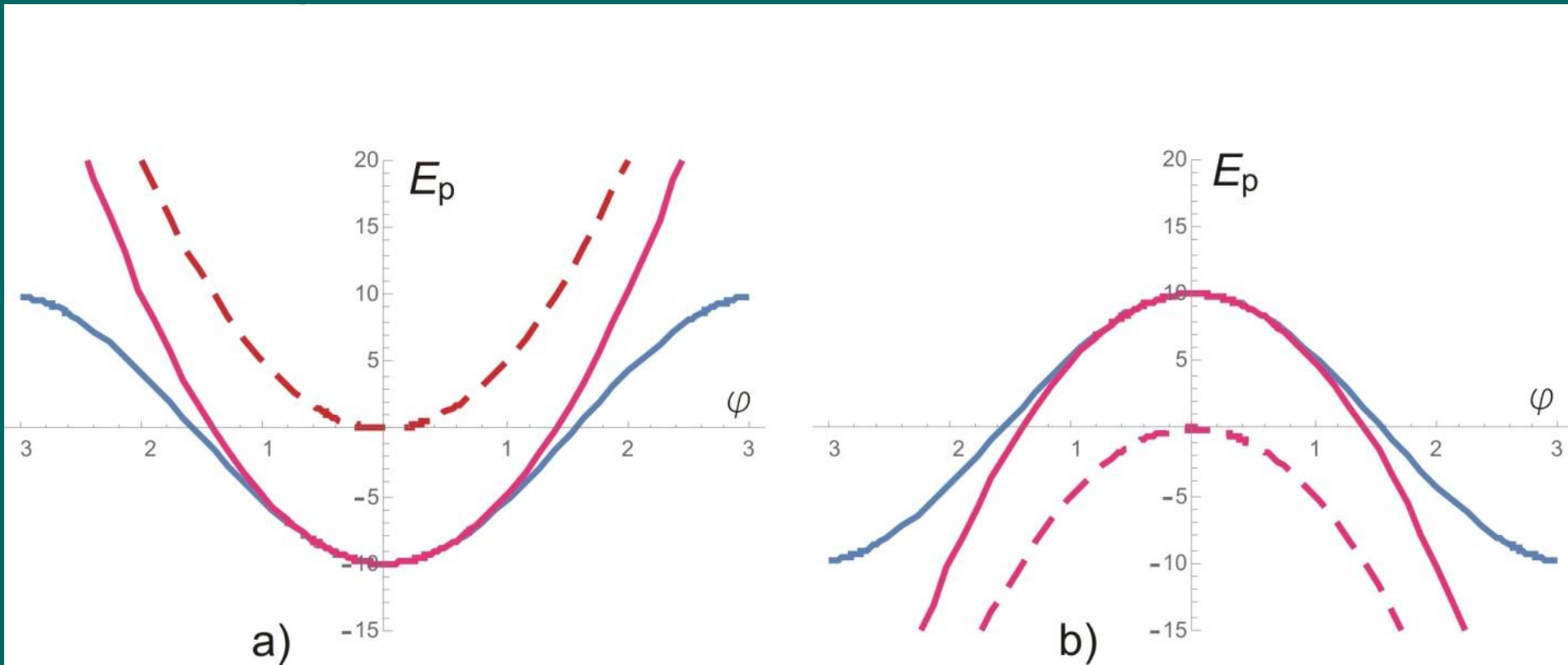
$$\frac{dE_p}{dt} = -mg R \cos \varphi^* = 0 \rightarrow \varphi^* = \frac{\pi}{2}$$

$$\left. \frac{d^2 E_p}{dt^2} \right|_{\text{ravn. pol}} > 0$$

$$\left. \frac{d^2 E_p}{dt^2} \right|_{\varphi^* = \pi/2} = mg R \sin \varphi^* = mgR > 0$$

$$\left. \frac{d^2 E_p}{dt^2} \right|_{\text{nest. rav. pol.}} < 0$$

$$E_p = E_p^{m\vec{g}} = -mgL\cos\varphi$$



$$\left. \frac{dE_p}{d\varphi} \right|_{\varphi^*=0} = 0$$

$$\left. \frac{d^2 E_p}{d\varphi^2} \right|_{\varphi^*=0} > 0$$

$$\cos \varphi \approx 1 - \frac{\varphi^2}{2}$$

$$E_p = E_p^{m\vec{g}} \approx -mgL \left(1 - \frac{\varphi^2}{2} \right) = \text{const} + \frac{mgL}{2} \varphi^2 \rightarrow E_p = \frac{mgL}{2} \varphi^2$$

$$E_p = E_p^{m\vec{g}} \approx mgL \left(1 - \frac{\varphi^2}{2} \right) = \text{const} - \frac{mgL}{2} \varphi^2 \rightarrow E_p = -\frac{mgL}{2} \varphi^2$$

$$\left. \frac{dE_p}{d\varphi} \right|_{\varphi^*=0} = 0$$

$$\left. \frac{d^2 E_p}{d\varphi^2} \right|_{\varphi^*=0} < 0$$

$$E_p = E_p^{m\vec{g}} + E_p^{\vec{F}_k} \approx -mgL \left(1 - \frac{\varphi^2}{2} \right) + \frac{1}{2} k (L\varphi)^2 =$$

$$= \text{const} + \frac{1}{2} (mgL + kL^2) \varphi^2$$

$$E_p = E_p^{m\vec{g}} + E_p^{\vec{F}_k} \approx mgL \left(1 - \frac{\varphi^2}{2} \right) + \frac{1}{2} k (L\varphi)^2 =$$

$$= \text{const} + \frac{1}{2} (kL^2 - mgL) \varphi^2$$

$$E_p = E_p^{m\vec{g}} + E_p^{\vec{F}_k} \approx -mgL\varphi + \frac{1}{2} k (\Delta l_{st} + L\varphi)^2 =$$

$$= \text{const} + \left(k \Delta l_{st} L - mg \frac{L}{2} \right) \varphi + \frac{1}{2} (kL^2) \varphi^2$$

2.12 Impuls sile

$$d\vec{I}^{\vec{F}} = \vec{F} dt$$

Elementarni impuls sile

$$\vec{I}_{t_1-t_2}^{\vec{F}} = \int d\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt$$

Konačni impuls sile

$$d\vec{I}^{mg} = m\vec{g} dt$$

$$\vec{I}^{mg} = m\vec{g} \int_{t_1}^{t_2} dt = m\vec{g} \Delta t_{AB}$$

Konačna promena količine kretanja

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_N \rightarrow m d\vec{v} = \vec{F}_1 dt + \vec{F}_2 dt + \dots + \vec{F}_N dt$$

$$d(m\vec{v}) = \vec{F}_1 dt + \vec{F}_2 dt + \dots + \vec{F}_N dt \rightarrow d\vec{K} = \sum d\vec{I}^{\vec{F}_i}$$

$$d\vec{K} = d\vec{I}^{m\vec{g}} + d\vec{I}^{\vec{N}} = m\vec{g} dt + \vec{N} dt$$

$$\int_{t_1}^{t_2} d\vec{K} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_1 dt + \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_2 dt + \dots + \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_N dt \rightarrow \vec{K}_2 - \vec{K}_1 = \vec{I}_{\Delta t}^{\vec{F}_1} + \vec{I}_{\Delta t}^{\vec{F}_2} + \dots + \vec{I}_{\Delta t}^{\vec{F}_N}$$

$$\Delta\vec{K} = \sum \vec{I}_{\Delta t}^{\vec{F}_i}$$

$$\vec{K}_2 - \vec{K}_1 = \vec{I}_{\Delta t}^{m\vec{g}} + \vec{I}_{\Delta t}^{\vec{N}}$$

$$x: K_{2x} - K_{1x} = I_x^{m\vec{g}} + I_x^{\vec{N}} \rightarrow mv_2 = mg \sin \alpha \Delta t$$

$$y: K_{2y} - K_{1y} = I_y^{m\vec{g}} + I_y^{\vec{N}} \rightarrow 0 = -mg \cos \alpha \Delta t + N\Delta t$$

