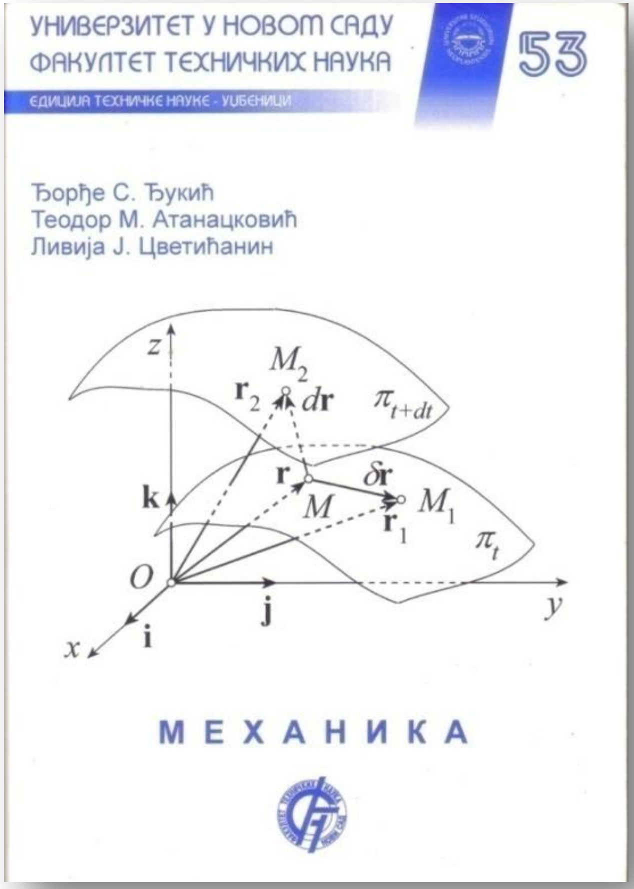
Kinematika – vežbe 5

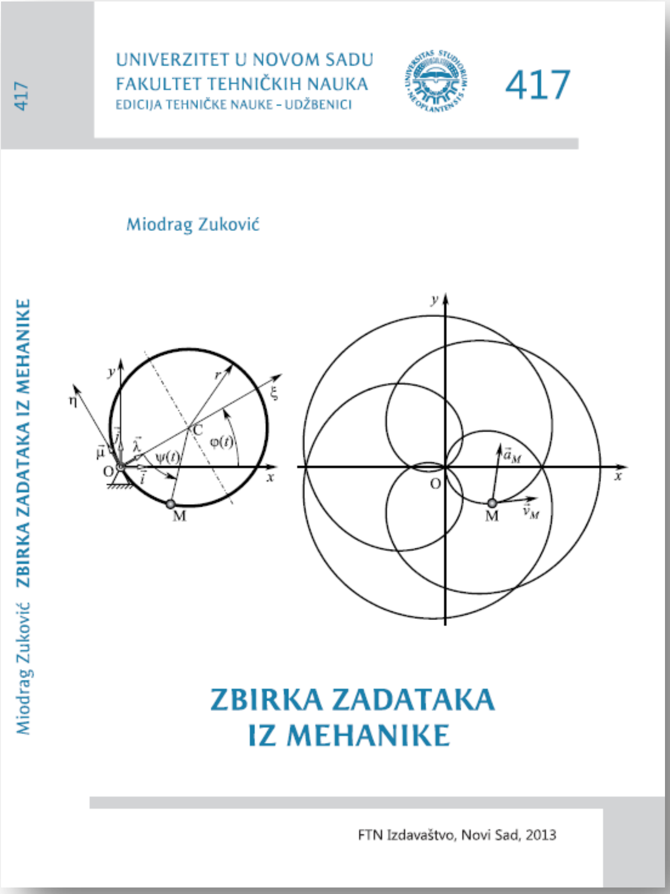
Kinematika i dinamika

Miodrag Zuković

Novi Sad, 2021.

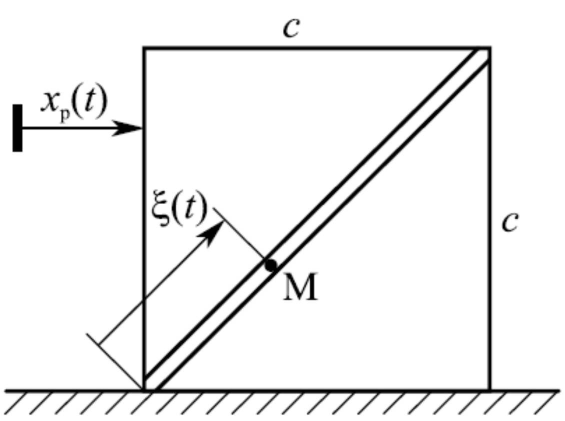
Literatura


УНИВЕРЗИТЕТ У НОВОМ САДУ
ФАКУЛТЕТ ТЕХНИЧКИХ НАУКА
ЕДИЦИЈА ТЕХНИЧКЕ НАУКЕ - УЏБЕНИЦИ
53
Ђорђе С. Ђукић
Теодор М. Атанацковић
Ливија Ј. Цветићанин
МЕХАНИКА


UNIVERZITET U NOVOM SADU
FAKULTET TEHNIČKIH NAUKA
EDICIJA TEHNIČKE NAUKE - UDŽBENICI
417
Miodrag Zuković
ZBIRKA ZADATAKA
IZ MEHANIKE
FTN Izdavaštvo, Novi Sad, 2013
Miodrag Zuković ZBIRKA ZADATAKA IZ MEHANIKE

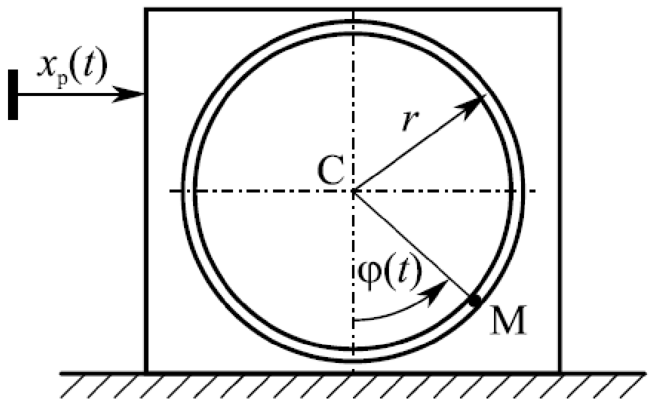
Zadatak 1

Zadatak 2.26 Kvadratna ploča, stranica dužine c, kreće se translatorno pravolinijski po zakonu $x_p(t) = a_p \frac{t^2}{2}$[m], gde je $a_p = const > 0$, u prikazanom smeru. Duž žleba u ploči, urezanog u pravcu dijagonale, kreće se tačka M po zakonu $\xi(t) = \sqrt{2}\frac{c}{T}t$[m], gde su c i T pozitivne realne konstante. Odrediti apsolutnu brzinu i apsolutno ubrzanje tačke M u trenutku $t_1 = T$[s].

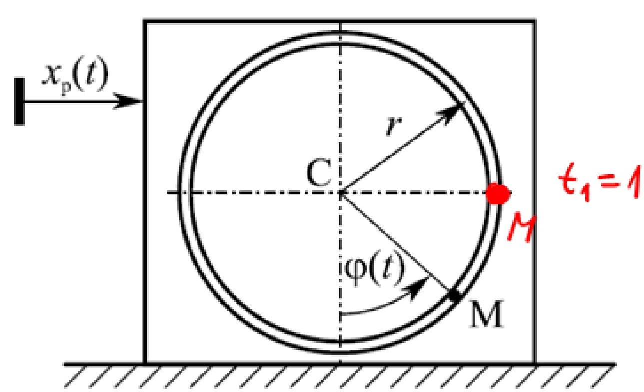


Zadatak 2

Zadatak 2.27 Pravougaona ploča kreće se translatorno pravolinijski po zakonu $x_p(t) = v_p t$, gde je $v_p = const > 0$, u prikazanom smeru. Po kružnom žlebu u ploči, radijusa r, kreće se tačka M po zakonu $\varphi(t) = \pi \frac{t^2}{2}$. Odrediti apsolutnu brzinu i apsolutno ubrzanje tačke M u trenutku $t_1 = 1\mathrm{s}$.



Zadatak 2.27 Pravougaona ploča kreće se translatorno pravolinijski po zakonu $x_p(t) = v_p t$, gde je $v_p = const > 0$, u prikazanom smeru. Po kružnom žlebu u ploči, radijusa r, kreće se tačka M po zakonu $\varphi(t) = \pi\frac{t^2}{2}$. Odrediti apsolutnu brzinu i apsolutno ubrzanje tačke M u trenutku $t_1 = 1\text{s}$.



ПР. КР. → ПЛОЧА → ТРАНСЛ. → $\omega_p = 0$, $\vec{a}_{cor} = 2\vec{\omega}_p \times \vec{v}_r = 0$

$\varepsilon_p = 0$

РЕЛ. КР. → $\mathcal{K}\{C, r\}_\varphi$

$x_p(t) = v_p t$

$\dot{x}_p(t) = v_p = const$

$\ddot{x}_p(t) = 0$

$t_1 = 1$ $\quad \dot{x}_p(1) = v_p$

$\ddot{x}_p(1) = 0$

$\varphi(t) = \pi\frac{t^2}{2}$

$\dot{\varphi}(t) = \pi \cdot t$

$\ddot{\varphi}(t) = \pi = const$

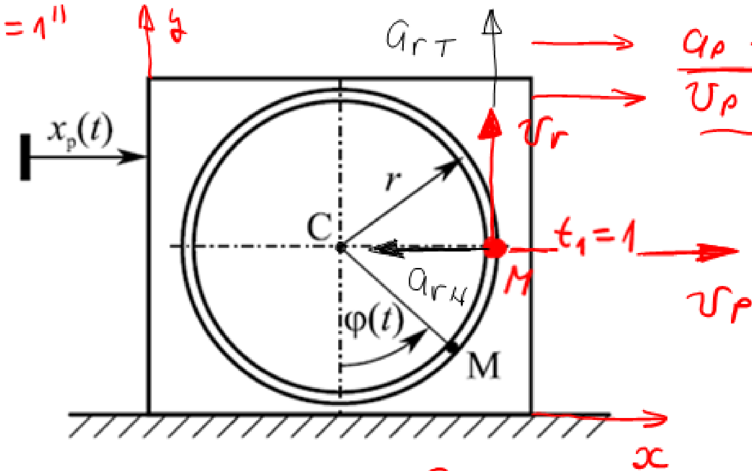
$t_1 = 1$

$\varphi(1) = \pi \cdot \frac{1^2}{2} = \frac{\pi}{2}$

$\dot{\varphi}(1) = \pi$

$\ddot{\varphi}(1) = \pi$

„$t_1 = 1$"



$$\left.\begin{array}{l} a_p = 0 \\ v_p = v_p \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \varphi(1) = \frac{\pi}{2} \\ \dot{\varphi}(1) = \ddot{\varphi}(1) = \pi \end{array}$$

„M"

$$\vec{v}_M = \vec{v}_p + \vec{v}_r \; ; \quad v_r = r\,\dot{\varphi}(1) = r\pi$$

$$v_{Mx} = v_p = v_p$$

$$v_{My} = v_r = r\pi$$

$$v = \sqrt{v_{Mx}^2 + v_{My}^2} = \sqrt{v_p^2 + (r\pi)^2}$$

$$\vec{a}_M = \vec{a}_p + \vec{a}_r + \cancel{\vec{a}_{cor}}^{\,0}$$

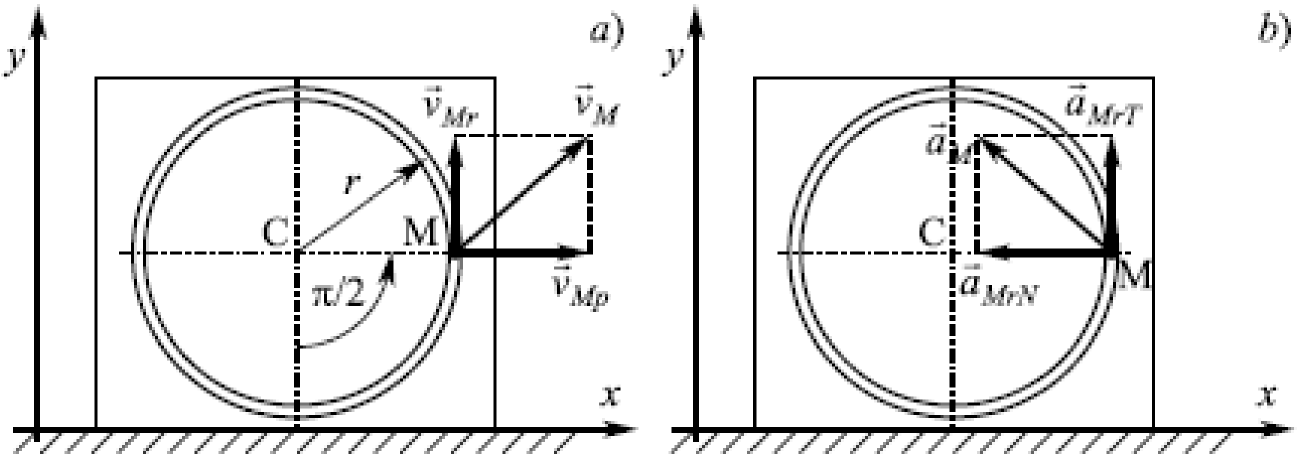
$$\vec{a}_M = \cancel{\vec{a}_p}_{\,0} + \vec{a}_{rT} + \vec{a}_{rN} \qquad a_{rT} = r\,\ddot{\varphi}_1 = r\pi$$

$$a_{Mx} = -a_{rN} = -r\pi^2 \qquad a_{rN} = r\,\dot{\varphi}^2(1) = r\pi^2 = \frac{v_r^2}{r} = \frac{r^{\cancel{2}}\pi^2}{\cancel{r}}$$

$$a_{My} = a_{rT} = r\pi$$

$$a_M = \sqrt{a_{Mx}^2 + a_{My}^2} = \sqrt{r^2\pi^4 + r^2\pi^2} = r\pi\sqrt{\pi^2 + 1}$$

Kao i u prethodnom zadatku prenosno kretanje je translatorno pravolinijsko kretanje ploče. Prenosna brzina i prenosno ubrzanje tačke M jednaki su brzini i ubrzanju ploče (sve tačke ploče imaju iste brzine i ubrzanja). Intenzitet prenosne brzine je $v_{Mp}(t) = \dot{x}_p(t) = v_p = const$, a prenosnog ubrzanja $a_{Mp}(t) = \ddot{x}_p(t) = 0$. Prenosna brzina je konstantna i usmerena je u smeru porasta koordinate x_p.



Slika 2.36

Zbog translatornog prenosnog kretanja Koriolisovo ubrzanje jednako je nuli.

Relativno kretanje tačke u odnosu na ploču je kružno kretanja, trajektorija relativnog kretanja je kružnica radijusa r sa centrom u tački C. Relativna brzina tačke ima pravac tangente na relativnu trajektoriju, a intenzitet joj je $v_{Mr}(t) = r\dot{\varphi}(t) = r\pi t$. Relativno tangencijalno ubrzanje tačke je intenziteta $a_{MrT}(t) = r\ddot{\varphi}(t) = r\pi = const$. Normalno relativno ubrzanje je usmereno ka tački C, a intenzitet mu je $a_{MrN}(t) = r\dot{\varphi}^2(t) = r\pi^2 t^2$.

U trenutku $t_1 = 1s$, koji se dalje posmatra, položaj tačke određen je sa $\varphi(1) = \pi/2$, Slika 2.36.

Relativna brzina tačke u datom trenutku ima intenzitet $v_{Mr}(1) = r\pi$, vertikalan pravac i usmerena je naviše, u smeru porasta koordinate φ, Slika 2.36*a*. Apsolutna brzina tačke je

$$\vec{v}_M = \vec{v}_{Mp} + \vec{v}_{Mr}$$

odakle se projektovanjem na x i y osu dobija

$$v_{Mx} = v_{Mp}, \qquad v_{My} = v_{Mr}$$

odnosno

$$v_{Mx} = v_p, v_{My} = r\pi, v_M = \sqrt{(v_{Mx})^2 + (v_{Mx})^2} = \sqrt{{v_p}^2 + r^2\pi^2}$$

Apsolutna brzina tačke je

$$\vec{a}_M = \vec{a}_{Mp} + \vec{a}_{Mr} + \vec{a}_{Mc}$$

odnosno

$$\vec{a}_M = \vec{a}_{MrT} + \vec{a}_{MrN}$$

jer su pri ovom kretanju tačke prenosno i Koriolisovo ubrzanje jednaki nuli.

Normalno relativno ubrzanje u trenutku $t_1 = 1s$ ima intenzitet $a_{MrN}(1) = r\pi^2$, a smer mu je uvek ka tački C, Slika 2.36*b*. Relativno tangencijalno ubrzanje je konstantnog intenziteta $a_{MrT}(t) = r\pi = const$ i u datom trenutku ima smer naviše. Projektovanjem poslednje vektorske jednačine na x i y osu dobija se

$$a_{Mx} = -a_{MrN}, \qquad a_{My} = a_{MrT}$$

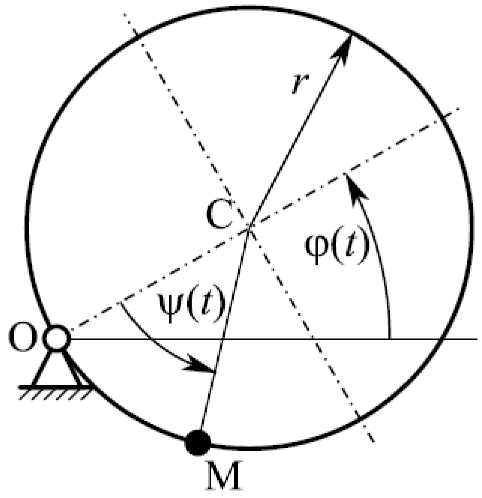
odnosno

$$a_{Mx} = -r\pi^2, \qquad a_{My} = r\pi$$

$$a_M = \sqrt{(a_{Mx})^2 + (a_{My})^2} = \sqrt{(-r\pi^2)^2 + (r\pi)^2} = r\pi\sqrt{\pi^2 + 1}$$

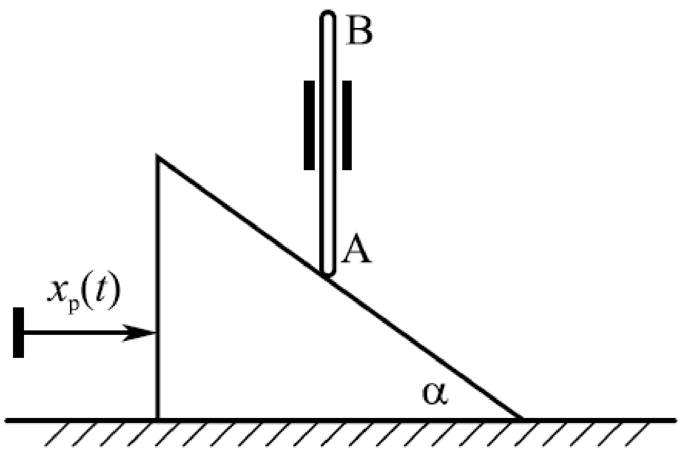
Zadatak 3

Zadatak 2.29 Kružna žica, radijusa r, obrće se oko nepokretne ose konstantnom po zakonu $\varphi(t) = \alpha t$. Po žici se kreće tačka M po zakonu $\psi(t) = \beta t$. Odrediti trajektoriju kretanja tačke M, a zatim i apsolutnu brzinu i ubrzanje.

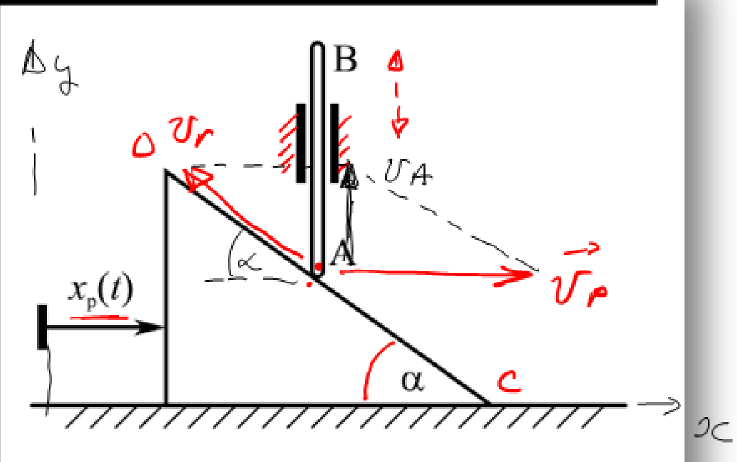


Zadatak 4

Zadatak 2.30 Klin, nagibnog ugla α, kreće se translatorno pravolinijski po poznatom zakonu $x_p(t)$. Na njegovu strmu stranu oslanja se štap AB, koji može da se kreće duž vertikalne vođice. Odrediti apsolutnu brzinu i ubrzanje štapa.



Zadatak 2.30 Klin, nagibnog ugla α, kreće se translatorno pravolinijski po poznatom zakonu $x_p(t)$. Na njegovu strmu stranu oslanja se štap AB, koji može da se kreće duž vertikalne vođice. Odrediti apsolutnu brzinu i ubrzanje štapa.



АБ – ТРАНСЛ. $\longrightarrow$ $\vec{v}_A$, $\vec{a}_A$ „A"

ПР.КР. – ПЛОЧА – ТРАНСЛ.

РЕЛ.КР. – ПРАВОЛ. – $\overline{CD}$

АПС. КР. – ПРАВОЛ. – $\overline{AB}$

$$\vec{v}_A = \vec{v}_p + \vec{v}_r \quad ; \quad v_p = \dot{x}_p$$

$$x: \quad 0 = v_p - v_r \cos\alpha \qquad (1)$$

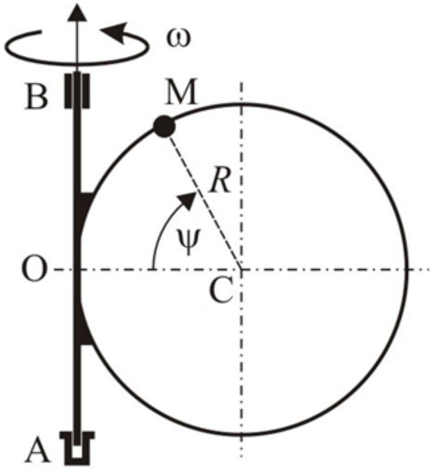
$$y: \quad v_A = v_r \sin\alpha \qquad (2)$$

$$(1) \rightarrow \quad v_r = \frac{v_p}{\cos\alpha}$$

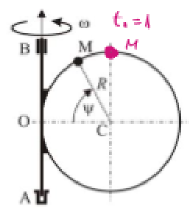
$$(2) \rightarrow \quad v_A = \frac{v_p}{\cos\alpha} \cdot \sin\alpha = v_p \operatorname{tg}\alpha$$

Zadatak 5

3. Obruč, radijusa R=1 m, obrće se oko vertikalne ose AB konstantnom ugaonom brzinom ω=1 s^{-1}=*const*. Po obruču se kreće prsten M po zakonu $\psi(t)=\frac{\pi}{2}+t^2-1\,[\text{rad}]$. Odrediti apsolutnu brzinu i apsolutno ubrzanje prstena u trenutku t_1=1 s.



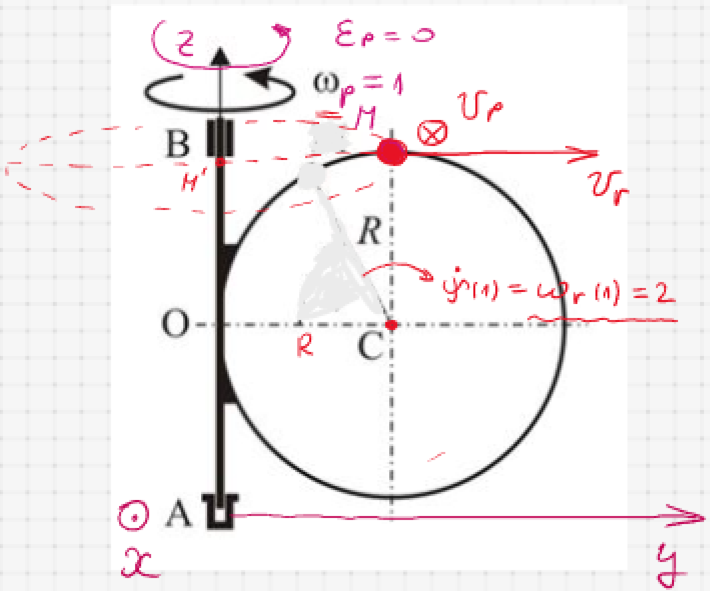
3. Obruč, radijusa $R=1$ m, obrće se oko vertikalne ose AB konstantnom ugaonom brzinom $\omega=1\ s^{-1}=const$. Po obruču se kreće prsten M po zakonu $\psi(t)=\frac{\pi}{2}+t^2-1$ [rad]. Odrediti apsolutnu brzinu i apsolutno ubrzanje prstena u trenutku $t_1=1$ s.



$$\omega_p=\omega=1=const$$
$$\varepsilon_p=\dot{\omega}_p=0$$
$$\psi(t)=\frac{\pi}{2}+t^2-1$$
$$\dot{\psi}(t)=\omega_r(t)=2t$$
$$\ddot{\psi}(t)=\varepsilon_r(t)=2=const$$

$$t_1=1$$
$$\omega_p=1,\quad \varepsilon_p=0$$
$$\psi(1)=\frac{\pi}{2}+1^2-1=\frac{\pi}{2}$$
$$\dot{\psi}(1)=\omega_r(1)=2$$
$$\ddot{\psi}(1)=\varepsilon_r(1)=2$$

„$t_1 = 1$"



$$\vec{v}_M = \vec{v}_p + \vec{v}_r$$

$$v_p = \overline{MM'}\,\omega_p = R\,\omega_p$$

$$v_p = 1\cdot 1 = 1\ \frac{m}{s}$$

$$v_r = R\cdot\omega_r = 1\cdot 2 = 2\ \frac{m}{s}$$

$$v_{Mx} = -v_p = -1$$

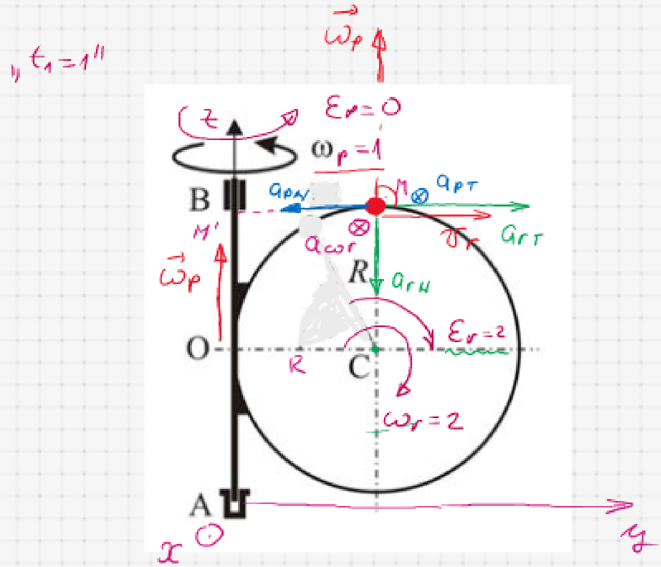
$$v_{My} = v_r = 2$$

$$v_{Mz} = 0$$

$$v = \sqrt{v_{Mx}^2 + v_{My}^2 + v_{Mz}^2} = \sqrt{(-1)^2 + 2^2\ 0^2}$$

„$t_1 = 1$" $\quad v = \sqrt{5}$

„$t_1 = 1$"

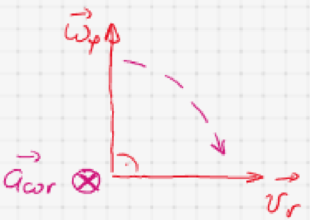


$$\vec a_M = \vec a_p + \vec a_r + \vec a_{cor}$$

$$* \quad \boxed{\vec a_M = \vec a_{pT} + \vec a_{pN} + \vec a_{rT} + \vec a_{rN} + \vec a_{cor}}$$

$$a_{pT} = \overline{MM'}\,\varepsilon_p = R\,\varepsilon_p = 0$$

$$a_{pN} = \overline{MM'}\,\omega_p^2 = R\,\omega_p^2 = 1\cdot 1^2 = 1 \ \frac{m}{s^2}$$



$$a_{rT} = R\,\varepsilon_r = 1\cdot 2 = 2 \ \frac{m}{s^2}$$

$$a_{rN} = R\,\omega_r^2 = 1\cdot 2^2 = 4 \ \frac{m}{s^2}$$

$$= \frac{v_r^2}{R} = \frac{2^2}{1} = 4$$

$$\vec a_{cor} = 2\,\vec\omega_p \times \vec v_r$$

$$a_{cor} = 2\,\omega_p \cdot v_r \, \cancel{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}^{\,1}$$

$$a_{cor} = 2\cdot 1\cdot 2\cdot 1 = 4 \ \frac{m}{s^2}$$

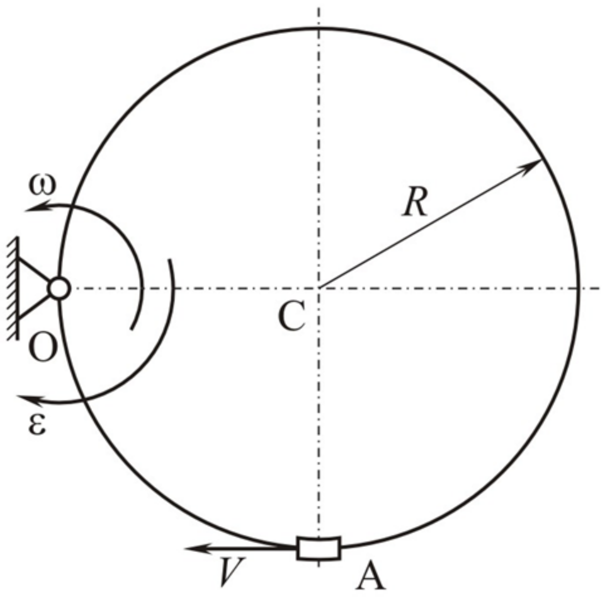
$$* \quad a_{Mx} = -a_{pT} - a_{cor} = -0 - 4 = -4$$

$$a_{My} = -a_{pN} + a_{rT} = -1 + 2 = 1$$

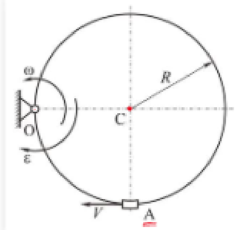
$$a_{Mz} = -a_{rN} = -4$$

$$a_M = \sqrt{a_{Mx}^2 + a_{My}^2 + a_{Mz}^2} = \sqrt{16+1+16} = \sqrt{33}$$

Zadatak 6

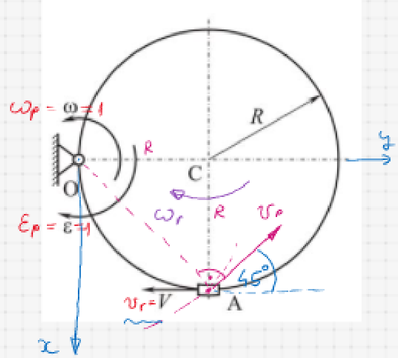


3. Obruč poluprečnika R=1 m zglobno je vezan u tački O za podlogu i obrće se u ravni crteža. Po obruču se relativnom brzinom konstantnog intenziteta V kreće klizač A. U prikazanom položaju obruč ima ugaonu brzinu $\omega=1\ s^{-1}$ i ugaono ubrzanje $\varepsilon=1\ s^{-2}$, datih smerova. Odrediti apsolutnu brzinu i apsolutno ubrzanje klizača u zadatom položaju.



3. Obruč poluprečnika R=1 m zglobno je vezan u tački O za podlogu i obrće se u ravni crteža. Po obruču se relativnom brzinom konstantnog intenziteta V kreće klizač A. U prikazanom položaju obruč ima ugaonu brzinu ω=1 s^{-1} i ugaono ubrzanje ε=1 s^{-2}, datih smerova. Odrediti apsolutnu brzinu i apsolutno ubrzanje klizača u zadatom položaju.

$\overline{OA}=\sqrt{R^2+R^2}=R\sqrt{2}$



„A"

$\boxed{\vec{v}=\vec{v}_p+\vec{v}_r}$ *

$v_r = V = const$

$v_p=\overline{OA}\,\omega_p=R\sqrt{2}\,\omega_p=1\cdot\sqrt{2}\cdot 1=\sqrt{2}\ \frac{m}{s}$

$TP_{np}=\mathcal{K}\{O,\overline{OA}\}_{\omega_p}$

* $v_x=-v_p\sin 45^\circ$

$v_y=v_p\cos 45^\circ-v_r$

$v_x=-\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=-1$

$v_y=\cancel{\sqrt{2}}\cdot\frac{\cancel{\sqrt{2}}}{\cancel{2}}-V=1-V$

$v_r=R\omega_r$

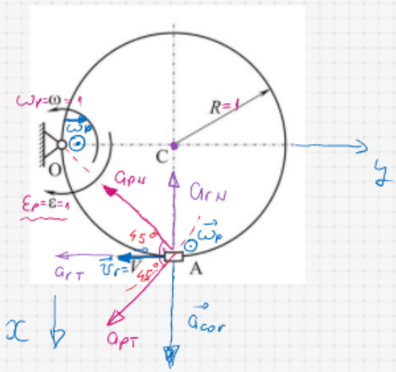
$\omega_r=\frac{v_r}{R}$

$\omega_r=\frac{V}{R}=const$

$\varepsilon_r=0$

$v=\sqrt{v_x^2+v_y^2}=\sqrt{1+(1-V)^2}$

„A"



$\vec a = \vec a_p + \vec a_r + \vec a_{cor}$

$\vec a = \vec a_{pT} + \vec a_{pN} + \vec a_{rT} + \vec a_{rN} + \vec a_{cor}$

$a_{pT} = \overline{OA}\cdot \varepsilon_p = R\sqrt{2}\,\varepsilon_p = \sqrt{2}\ \frac{m}{s^2}$

$a_{pN} = \overline{OA}\cdot \omega_p^2 = R\sqrt{2}\,\omega_p^2 = \sqrt{2}\ \frac{m}{s^2}$

$a_{rT} = \dot v_r = \frac{d}{dt}(V) = 0 = R\,\varepsilon_r$

$a_{rN} = \frac{v_r^2}{R} = \frac{V^2}{R} = V^2\ \frac{m}{s^2}$

$= R\,\omega_r^2 = \cancel{R}\cdot\frac{V^2}{R^{\cancel{2}}}$

$\vec a_{cor} = 2\vec\omega_p \times \vec v_r$

$a_{cor} = 2\,\omega_p\, v_r\, \cancel{\sin(90^\circ)}^{1}$

$a_{cor} = 2\cdot 1\cdot V = 2V$

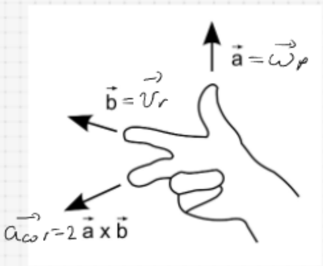
$a_x = a_{pT}\sin 45^\circ - a_{pN}\sin 45 - a_{rN} + a_{cor}$

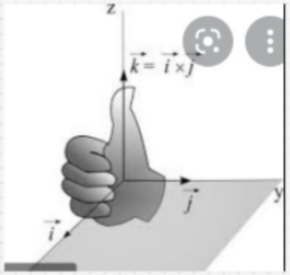
$a_y = -a_{pT}\cos 45^\circ - a_{pN}\cos 45^\circ - a_{rT}$

$a_x =$

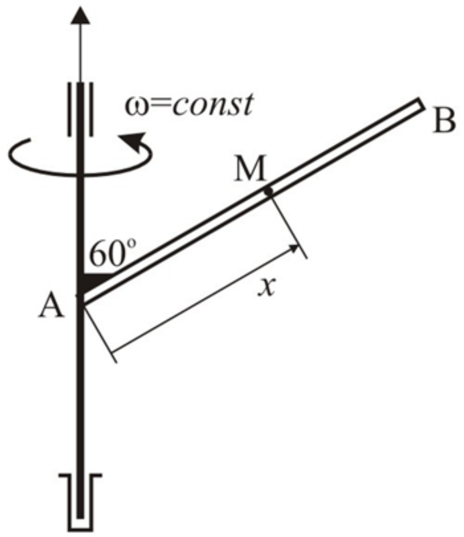
$a_y =$

$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \dots$

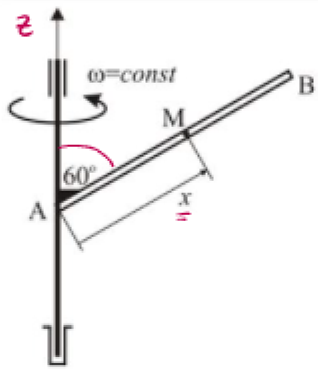




Zadatak 7



3. Cev AB se obrće oko nepokretne ose konstantnom ugaonom brzinom $\omega=2s^{-1}=const$. Sa osom obrtanja cev gradi ugao 60°. U cevi se po zakonu $x(t)=t^2+t$ [m] kreće tačka M. Odrediti apsolutnu brzinu i ubrzanje tačke u trenutku $t_1=1$s.



3. Cev AB se obrće oko nepokretne ose konstantnom ugaonom brzinom $\omega=2\,s^{-1}=const$. Sa osom obrtanja cev gradi ugao 60°. U cevi se po zakonu $x(t)=t^2+t$ [m] kreće tačka M. Odrediti apsolutnu brzinu i ubrzanje tačke u trenutku $t_1=1$s.

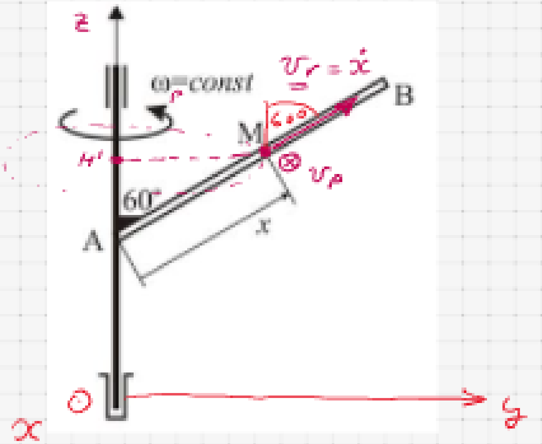
ПРЕН. КР. – ЦЕВ – обртање око осе z – $\omega_p = \omega = 2 = const$

$\varepsilon_p = 0$

РЕЛ. КР. – у односу на цев – праволин. кр. – $x(t) = t^2 + t$

$\dot{x}(t) = 2t + 1$

$\ddot{x}(t) = 2 = const$



$\underline{\vec{v}_a} = \boxed{\vec{v} = \vec{v}_p + \vec{v}_r}$ $\qquad \underline{v_r = \dot{x} = 2t + 1}$

*

$v_p = \overline{MM'}\,\omega_p$

$v_p = (x \sin 60^\circ)\,\omega$

$v_p = (t^2 + t)\sin 60^\circ\,\omega$

$\underline{t_1 = 1\,s}$

$v_r(1) = \dot{x}(1) = 2\cdot 1 + 1 = 3\ \frac{m}{s}$

$v_p(1) = (1^2 + 1)\,\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}\cdot\cancel{2} = 2\sqrt{3}\ \frac{m}{s}$

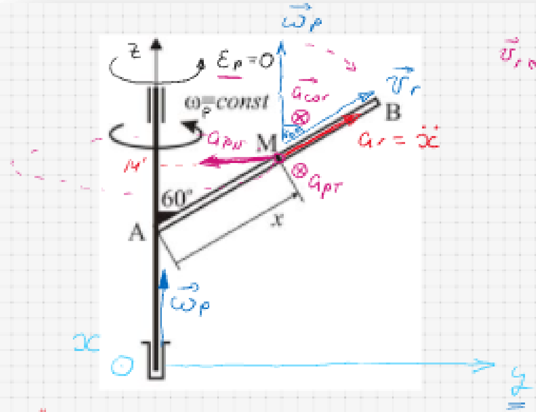
* $v_x = -v_p = -2\sqrt{3}$

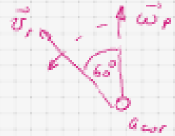
$v_y = v_r \sin 60^\circ = 3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

$v_z = v_r \cos 60^\circ = 3\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{(-2\sqrt{3})^2 + \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{12 + \frac{9\cdot 3}{4} + \frac{9}{4}} = \ldots$$





„M"

$$\vec{a} = \vec{a}_p + \vec{a}_r + \vec{a}_{cor}$$

$$\vec{a} = \underbrace{\cancel{\vec{a}_{pT}}}_{0} + \vec{a}_{pN} + \vec{a}_r + \vec{a}_{cor}$$

; $a_r = \ddot{x} = 2 = const$

$$a_{pN(1)} = \overline{MM'}_{(1)}\,\omega_p^2 = \sqrt{3}\cdot 2^2 = 4\sqrt{3}\ \frac{m}{s^2}$$

$$\overline{MM'} = x \sin 60^\circ$$

$$\overline{MM'}(1) = x(1)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \cancel{2}\,\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}} = \sqrt{3}\ \ m$$

$$a_{pT} = \overline{MM'}\,\varepsilon_p = 0$$

$$a_x = -a_{cor}$$

$$a_y = -a_{pN} + a_r \sin 60^\circ$$

$$a_z = a_r \cos 60^\circ$$

$$\vec{a}_{cor} = 2\,\vec{\omega}_p \times \vec{v}_r$$

$$a_{cor} = 2\,\omega_p v_r \sin(60^\circ)$$

$$a_{cor}(1) = 2\,\omega_p(1)\cdot v_r(1)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \cancel{2}\cdot 2\cdot 3\,\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}} = 6\sqrt{3}$$

$t_1 = 1$

$$a_x = -6\sqrt{3}$$

$$a_y = -4\sqrt{3} + \cancel{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}} = -3\sqrt{3}$$

$$a_z = 2\cdot\frac{1}{2} = 1$$

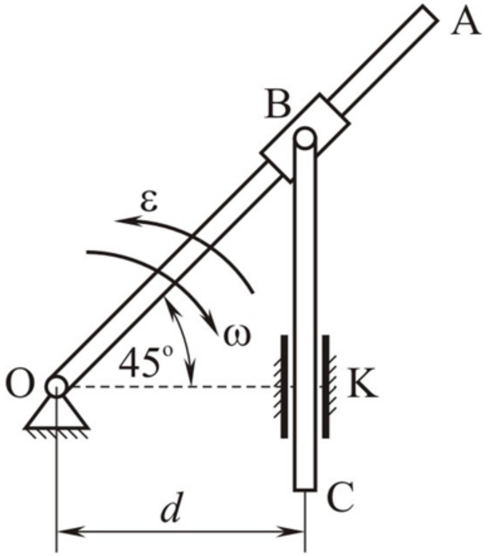
$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

$$= \sqrt{(-6\sqrt{3})^2 + (-3\sqrt{3})^2 + 1^2}$$

$$= \sqrt{108 + 27 + 1} = \sqrt{136}$$

Zadatak 8

3. Na slici je prikazan kulisni mehanizam. Pri klaćenju krivaje OA, oko ose O upravne na ravan crteža, pomera se klizač B duž krivaje OA i dovodi u kretanje štap BC, koji može da se kreće u vertikalnoj vodici K. Rastojanje OK=*d*. Ukoliko je poznato da krivaja OA u dalom položaju ima ugaonu brzinu ω i ugaono ubrzanje ε (smerovi su dati na slici), odrediti brzinu i ubrzanje tačke C.



Kinematika – vežbe 5

Kinematika i dinamika

Miodrag Zuković

Novi Sad, 2021.