Glava 2

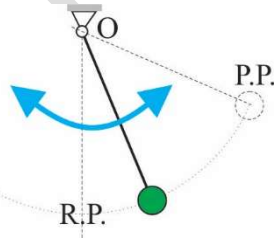
SLOBODNE NEPRIGUŠENE OSCILACIJE SISTEMA SA 1 SSK

2.1 Uvod

Ukoliko se položaj bilo koje tačke sistema može predstaviti preko jedne koordinate, sistem ima jedan stepen slobode kretanja (SSK). Jedan od prvih koraka pri analizi nekog mehaničkog sistema je određivanje minimalnog broja kinematski nezavisnih koordinata. Takve koordinate se nazivaju *generalisane koordinate*. Značajan broj sistema u inženjerstvu ima jedan SSK. Uobičajen mehanički model za razmatranje vibracija sistema sa jednim SSK je prikazan na Slici 2.2.1 (a). Bez uzimanja u obzir postojanja nepotencijalnih dejstava, kao i pod pretpostavkom da za elastično telo važi Hukov zakon, takav model je poznat kao *harmonijski oscillator*.

Neprigušene oscilacije su takve oscilacije gde se zanemaruje postojanje bilo kakvih otpora. To je teorijski, idealizovan slučaj, ali koji je veoma važan za razmatranje oscilatornih procesa. Na primer, jedna od najvažnijih karakteristika nekog oscilatornog sistema je njegova sopstvena (prirodna) frekvencija. Eksperimentalno određena sopstvena frekvencija je vrlo bliska teorijski određenoj sopstvenoj frekvenciji gde su zanemareni otpori kretanju.

Slobodne oscilacije su takve oscilacije pri kojima ne postoje spoljašnja nepotencijalna, ponavljajuća tokom vremena, dejstva. Kao primer slobodnih oscilacija se može pomenuti klatno (Slika 2.1.1), koje se pusti iz nekog početnog položaja (P.P.). Nakon toga, klatno će vršiti njihanje (oscilatorno kretanje) oko ravnotežnog položaja (R.P.). U ovakvom idealizovanom slučaju, kretanje će trajati neograničeno. U realnosti, zbog postojanja otpora, klatno će se u nekom trenutku ponovo zaustaviti u ravnotežnom položaju.



Slika 2.1.1

2.2 Mehanički i matematički model harmonijskog oscilatora

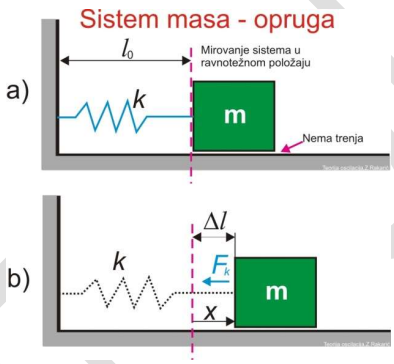
Oscilatorno kretanje sistema sa jednim SSK će se najpre razmotriti na najjednostavnijem mehaničkom modelu koji je prikazan na Slici 2.2.1. Telo mase m leži na horizontalnoj podlozi. Za telo je vezana opruga čija je krutost *k*. Levi kraj opruge je vezan za nepokretnu krutu podlogu. Krutost opruge možemo shvatiti kao meru njenog otpora aksijalnoj deformaciji, i iz tog razloga u fizičkom smislu predstavlja aksijalnu krutost. Ukoliko se drugačije ne naglasi, u nastavku će se pod krutošću elastičnog elementa podrazumevati aksijalna krutost.

Jedinica za (aksijalnu) krutost je N/m^2 iako se često koriste i druge kombinacije, kao što je na primer kN/m^2. Krutost ukazuje potrebnu vrednost sile da bi se elastični element (opruga) izdužio (ili sabio) za jedinicu dužine.

Znači, pod oprugom će se podrazumevati bilo koji jednodimenzijski elastični kontinuum za koji se pretpostavlja da može biti samo opterećen u aksijalnom pravcu. Iz tog razloga, od unutrašnjih sila koje se mogu javiti u takvom elastičnom element su samo aksijalne sile. Na primer, elastični štap u nekom sistemu, takođe možemo tretirati kao kao oprugu.

Na Slici 2.2.1 a) je prikazano stanje mirovanja tela u ravnotežnom položaju.

U ovom delu će se razmatrati takvo oscilatorno kretanje mase m pri kojem nema gubitaka mehaničke energije. Ovo je u saglasnosti sa prethodnom napomenom da se u ovom delu zanemaruju bilo kakvi otpori u posmatranom sistemu (razmatraju se *neprigušene oscilacije*). Samim tim se pretpostavlja da nema gubitka mehaničke energije u sistemu. Inače, treba i naglasiti da u svakom realnom sistemu uvek postoje gubici mehaničke energije.



Slika 2.2.1

Telo na Slici 2.2.1 vrši pravolinijsko translatorno kretanje. Kao što je poznato, pri takvom kretanju se sve tačke tela kreću pravolinijski na isti način. Za opisivanje njegovog kretanja je dovoljna jedna pravolinijska koordinata koja je ovde obeležena sa *x*. Kako je prikazano, koordinata *x* se meri od ravnotežnog položaja. Pod ravnotežnim položajem sistema ćemo podrazumevati položaj u kojem sistem može biti u stanju mirovanja bez dejstva drugih nepotencijalnih sila. Može i da se kaže da sistem može da bude u stanju mirovanja u ravnotežnom položaju ukoliko je samo izložen dejstvu potencijalnih sila.

U ovom slučaju, u ravnotežnom položaju je opruga nedeformisana. Naime, ukoliko bi u ravnotežnom položaju pretpostavili da je opruga deformisana, to bi značilo da postoji sila od opruge koja dejstvuje na telo. To bi ujedno bila i jedina sila u horizontalnom pravcu, budući da nema trenja između tela i podloge. Ukoliko bi sila u opruzi bila i jedina sila u horizontalnom pravcu, tada telo ne bi moglo biti u stanju mirovanja u tom položaju. Znači, opruga je nedeformisana u ravnotežnom položaju. Nedeformisana opruga znači da tada nema dejstva sile od opruge na telo. Iz tog razloga, u posmatranom slučaju, dužina opruge u ravnotežnom položaju je ujedno i dužina nedeformisane opruge. Dužinu nedeformisane opruge ćemo obeležiti sa l_0. Dužina opruge u ravnotežnom položaju će se obeležiti sa l_{st}. Znači, za razmatrani slučaj sa Slike 2.2.1 možemo pisati da važi: $l_0 = l_{st}$.

U oscilatorno kretanje ovaj sistem možemo da dovedemo tako što ćemo izvršiti jednu od sledećih radnji:

- otklon tela u odnosu na ravnotežni položaj;
- udarom tela (udarom tela će se ostvariti njegova početna brzina) ili
- sa jednim i sa drugim.

Ovo znači da je u nekom početnom trenutku u sistem uvedena određena mehanička energija. Nakon toga se pretpostavlja da nema više ni dovođenja niti odvođenja energije u i iz sistema. To znači da će početno dovedena mehanička energija ostati očuvana, odnosno "konzervirana". Važiće zakon o održanju mehaničke energije (ZOME) $E_k + E_p = E = const.$

Potencijalna energija sistema E_p, ovde potiče od opruge, odnosno zbog njene deformacije. Deformacijom opruge se u opruzi generiše (unutrašnja) sila koju ćemo obeležiti sa F_k. Ova sila zavisi od veličine deformacije opruge, Δl, kao i od krutosti *k*, $F_k = f\left(k, \Delta l\right)$. Uticaj deformacije na silu u opruzi, tj. veza između sile u opruzi i deformacije može da bude različit u zavisnosti od više faktora. U ovoj knjizi će se pretpostaviti linearna veza između sile u opruzi i njene deformacije, u obliku

$$F_k = k\,\Delta l \tag{2.2.1}$$

gde se koeficijent *k* naziva krutost opruge. Veza predstavljena izrazom (2.2.1) odražava dobro poznati Hukov zakon.

U posmatranom slučaju se može zaključiti da koordinata *x* koja definiše položaj tela u odnosu na ravnotežni položaj (R.P.) ujedno predstavlja i deformaciju opruge, tj. $x = \Delta l$. Imajući u vidu da se tokom kretanja, koordinata *x* menja, tj. *x*=*x*(t), sledi i da se deformacija opruge menja sa vremenom, pa samim tim i sila u opruzi, tj. važi da je $F_k = F_k\left(t\right)$. Zbog navedenog, sila u opruzi se može predstaviti preko koordinate *x* u obliku $F_k\left(t\right) = k\,x\left(t\right)$. Ovu vezu ćemo češće pisati kraće u obliku $F_k = k\,x$, imajući pri tome u vidu da se radi o vremenski promenljivim veličinama. Ovo je važno naglasiti zbog toga što ćemo često u ovoj knjizi koristiti određene relacije koje su poznate iz drugih predmeta, kao što je naprimer Otpornost materijala. Pri tome, u Otpornosti materijala su sile i deformacije smatrane veličinama nepromenljivim tokom vremena, tj. konstantnim veličinama.

Svako oscilatorno kretanje neke tačke karakteriše njeno kretanje između dva zaustavna položaja tokom jednog poluciklusa. Tokom takvog kretanja na jednom poluciklusu, smenjuju se delovi ubrzanog i usporenog kretanja. Zbog toga je od važnosti za razumevanje oscilatornog kretanja, poznavanje ubrzanja u funkciji od

DO NOT COPY

položaja. Na osnovu toga se onda može pristupiti određivanju načina kretanja, tj. određivanja brzine, kao i određivanje načina promene položaja.

Određivanje zavisnosti ubrzanja tela od koordinate *x* može biti izvršeno na više načina, kao što je naučeno u osnovnim kursevima Mehanike (Dinamici), a to su:

- Primena drugog Njutnovog zakona;
- Primena teoreme o promeni kinetičke energije;
- Primena teoreme o održanju mehaničke energije;
- Primena Lagranževih jednačina druge vrste.
- …

Koji način će se primeniti, zavisi od tipa problema, odnosno načina kretanja elemenata sistema.

U slučaju razmatranog sistema (Slika 2.2.1), primena drugog Njutnovog zakona direktno vodi ka traženoj relaciji **ubrzanje-položaj**. Kretanje tela je u horizontalnom pravcu. Budući da nema trenja, sila težine i normalna reakcija podloge nemaju uticaja na kretanje tela, tako da je dovoljno posmatrati samo sile u horizontalnom pravcu. Jedina sila koja dejstvuje u horizontalnom pravcu na telo je sila od opruge (elastična sila), kada je opruga deformisana. Primena drugog Njutnovog zakona u horizontalnom pravcu, daje

$$m\vec{a} = \vec{F}_k \tag{2.2.2}$$

Imajući u vidu da je inercijalna sila definisana na sledeći način: $\vec{F}_{in} = -m\vec{a}$, izraz (2.2.2) se može zapisati i u sledećem obliku:

$$\vec{F}_k + \vec{F}_{in} = 0\,. \tag{2.2.3}$$

Izraz (2.2.3) odražava Dalamberov princip. Znači, u posmatranom slučaju tokom kretanja tela, “fiktivna” inercijalna sila i sila u opruzi (elastična sila) čine “dinamički uravnotežen” par sila. Ove dve sile su međusobno istog intenziteta, istog pravca i suprotnog smera. Ovo ujedno ilustruje i činjenicu da je za oscilatorno kretanje potreban inercijalni element (koji ima masu) i element koji generiše **restitucionu silu**. **To su neophodni uslovi oscilatornog kretanja**.

Primer 2.2.1 Skicirati sile (u horizontalnom pravcu) koje dejstvuju na telo sa Slike 2.2.1, u četiri karakteristična položaja tokom njegovog oscilovanja oko ravnotežnog položaja (I položaj: telo je sa desne strane RP i kreće se udesno; II položaj: telo je sa desne strane od RP i kreće se ulevo; III položaj: telo je sa leve strane od RP i kreće se ulevo; IV položaj: telo je sa leve strane od ravnotežnog položaja i kreće se udesno). Uzeti u obzir i inercijalnu silu.∗

Restituciona sila je takva sila koja je **uvek** usmerena ka ravnotežnom položaju. Kao takva, ona čini ostvarivim oscilatorno kretanje. Restituciona sila može biti generisana na više načina. Ovde će se uzeti u onzir dva vida dejstva koja generišu restitucionu silu:

DO NOT COPY

- Elastična sila (sila u opruzi, sila koja nastaje deformacijom strukturnih elemenata, …)
- Sila težine elemenata;
- Kombinacija elastičnih sila i sila težina elemenata;

U nekom oscilatornom sistemu, restituciona sila može da ima poreklo samo od elastičnih sila, ili samo od sila težina, a takođe je moguća i kombinacija ovih dveju tipova sila.

Vratimo se na razmatrani sistem masa-opruga. Veza između ubrzanja i položaja se određuje na osnovu izraza (2.2.1) i (2.2.2), imajući u vidu smer elastične sile (Slika 2.2.1 b) prilikom projektovanja na horizontalni pravac

$$a = -\frac{k\,\Delta l}{m} \quad \rightarrow \quad a = -\frac{k\,x}{m} \tag{2.2.4}$$

Pri tome je intenzitet ubrzanja: $a = k\left|\Delta l\right| / m$, odnosno $a = k\left|x\right| / m$.

Na osnovu izraza (2.2.4) se može zaključiti sledeće:

- Telo će u položaju koje je udaljenije od ravnotežnog položaja, imati veći intenzitet ubrzanja (**Napomena:** ubrzanje predstavlja način na koji se menja brzina). U posmatranom slučaju pravolinijskog kretanja, kao što znamo, i vektor brzine i ubrzanja leže na pravcu kretanja. Stoga, ovde ubrzanje ukazuje na promenu intenziteta brzine. U tom smislu, brzina tokom određenog vremenskog intervala može da raste (ubrzano kretanje) ili da opada (usporeno kretanje). U smislu dinamičkog uticaja na konstrukciju, na intenzitet inercijalne sile nije od značaja da li se radi o ubrzanju (kao povećanju brzine) ili o usporenju (kao smanjenju brzine). Stoga ćemo pod pojmom ubrzanja (ukoliko se drugačije ne naglasi) podrazumevati promenu intenziteta brzine, bez obzira da li se brzina povećava ili se smanjuje). Ovde se pomenuta udaljenost tačke od ravnotežnog položaja može posmatrati i kao veličina deformacije opruge. Što je veće *x* veće je i Δl. Znači, veća deformacija opruge (elastičnog tela) povlači sa sobom i veći intenzitet ubrzanja. Sa druge strane, kada je *x* = 0, odnosno $\Delta l = 0$, što odgovara ravnotežnom položaju, tada je ubrzanje (trenutno) = 0 (ubrzanje u tom trenutku menja smer). U tom trenutku (položaju) je brzina (intenzitet) maksimalna.
- Povećanjem krutosti opruge *k*, povećava se i ubrzanje, i obratno.
- Povećanjem mase se smanjuje ubrzanje, i obratno.

Telo na Slici 2.2.1 će mirovati u ravnotežnom položaju, sve dok u taj sistem (sistem masa-opruga) ne uvedemo početnu energiju. Već je ranije pomenuto da početnu energiju uvodimo u sistem preko početne deformacije opruge ili preko početne brzine tela (udar), ili sa jednim i sa drugim.

DO NOT COPY

U razmatranom modelu, početna deformacija opruge znači da postoji početni otklon tela u odnosu na ravnotežni. Ovo kraće možemo zapisati kao $x(0)=x_0$. Početna brzina koju telo ima, pišemo kao: $v(0)=v_0$. Veličine x_0 i v_0 određuju početne uslove kretanja.

Oscilatorno kretanje u ovom slučaju se može predstaviti na sledeći način: $\ldots \rightarrow E_k \rightarrow E_p \rightarrow E_k \rightarrow E_p \rightarrow E_k \rightarrow \ldots$ Drugim rečima, oscilatorno kretanje predstavlja neprestanu izmenu između kinetičke i potencijalne energije.

Relaciju (2.2.4) možemo da zapišemo tako da sve veličine prebacimo na jednu stranu znaka jednakosti, tako da imamo $ma+kx=0$. Osim toga, uzimajući u obzir da je $a=\ddot{x}$, dolazi se do sledeće jednačine:

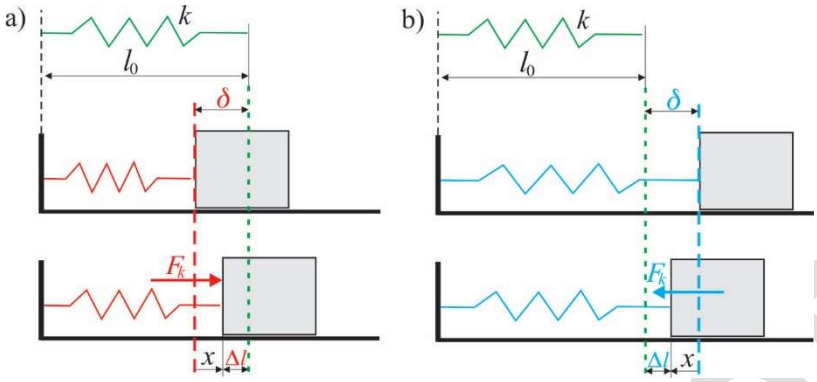
$$m\ddot{x}+kx=0 \tag{2.2.5}$$

Izraz (2.2.5) predstavlja matematički model oscilatornog sistema masa-opruga sa Slike 2.2.1. Imajući u vidu da se ovde radi o najjednostavnijem mehaničkom modelu, tako i izraz (2.2.5) predstavlja **najjednostavniji matematički model nekog oscilatornog sistema**. Jednačina (2.2.5) se obično naziva matematički model **harmonijskog oscilatora (HO)**.

U dosadašnjem razmatranju HO pretpostavljeno je da oscillator započinje kretanje iz ravnotežnog položaja u kojem je elastični element nedeformisan (Slika 2.2.1). Takođe, usvojeno je da se generalisana koordinata (koordinata x) meri iz tog ravnotežnog položaja. Kao što smo videli, izvedena diferencijalna jednačina (2.2.5) je homogena. Može se postaviti pitanje, šta ukoliko postoji početna deformacija elastičnog elementa, a generalisana koordinata se onda meri iz tog položaja (2.2.2)? U narednom primeru ćemo razmotriti i takav slučaj.

Primer 2.2.3 Oscilator započinje kretanje iz položaja u kojem je elastični element deformisan za veličinu δ (Slika 2.2.2). U prvom slučaju (Slika 2.2.2a) elastični element je sabijen za veličinu δ, a u drugom slučaju (Slika 2.2.2b) je istegnut za veličinu δ. Trenutni položaj oscilatora se opisuje koordinatom x, koja se meri od početnog položaja. Odrediti diferencijalnu jednačinu oscilacija u oba slučaja kao i kružnu frekvenciju oscilovanja. Zanemariti otpore kretanju.

DO NOT COPY



Slika 2.2.2

Rešavanje i diskusija Primera 2.2.2: Posmatrajmo najpre slučaj pod a). Nakon što je elastični element sabijen, oscillator je iz tog položaja pušten da se kreće bez početne brzine. Zbog tendencije elastičnog elementa da se vrati u nedeformisano stanje, kretanje oscilatora započinje udesno pod dejstvom sile F_k. Na slici je prikazan proizvoljan položaj tokom kretanja u kojem je opruga još uvek sabijena. Imajući u vidu da je intenzitet elastične sile $F_k = k\,\Delta l = k(\delta - x)$, na osnovu drugog Njutnovog zakona, sledi:

$$m\ddot{x} = F_k \xrightarrow{F_k = k(\delta - x)} m\ddot{x} = k\left(\delta - x\right) \rightarrow m\ddot{x} + kx = k\delta. \qquad (2.2.6)$$

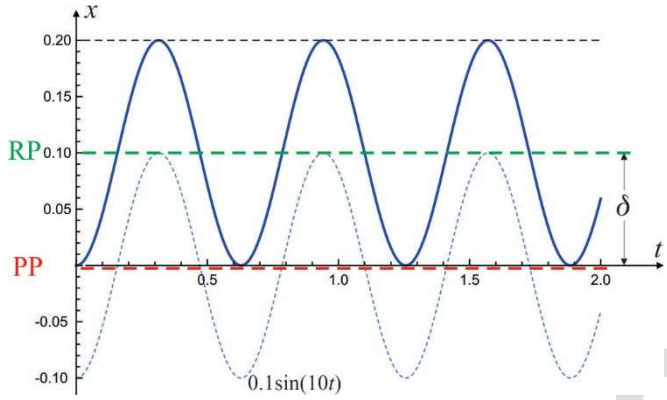
Ukoliko bi se za proizvoljni položaj izabrao onaj u kojem je oscillator sa desne strane od ravnotežnog položaja (u tom položaju je opruga istegnuta), tada bi imali

$$m\ddot{x} = -F_k \xrightarrow{F_k = k(x - \delta)} m\ddot{x} = -k\left(x - \delta\right) \rightarrow m\ddot{x} + kx = k\delta. \qquad (2.2.7)$$

Konačne jednačine u izrazima (2.2.6) i (2.2.79 su iste. Znači, svejedno je koji se položaj izabere (sa jedne ili sa druge strane ravnotežnog položaja) i na njega primeni drugi Njutnov zakon (zato se i zove proizvoljan položaj tokom kretanja). Diferencijalna jednačina kretanja će biti ista.

Može se primetiti da za razliku od jednačine (2.2.5), diferencijalna jednačina u (2.2.6) **nije homogena**, budući da na desnoj strani figuriše član $k\delta$. Treba naglasiti da je ovaj član konstantan, tj. on se ne menja tokom kretanja. Drugim rečima, ovaj član nema nikakve veze sa koordinatom x i stoga je na desnoj strani jednačine. Da podsetimo, na levu stranu jednačine prebacujemo sve članove koji imaju veze sa generalisanom koordinatom i sa njenim izvoodima. Značaj ovog konstantnog člana u diferencijalnoj jednačini se može videti na grafiku kretanja oscilatora (2.2.6) koji je predstavljen punom plavom linijom (usvojene su sledeće vrednosti za parametre: m = 1 kg, k = 100 N/m i δ = 0.1 m) na Slici 2.2.3.

DO NOT COPY



Slika 2.2.3

Kao što se vidi sa slike 2.2.3, sistem čiji je matematički model (2.2.6) osciluje oko ravnotežnog položaja RP (zelena isprekidana linija) koji je na rastojanju δ = 0.1m u odnosu na početni položaj PP od kojeg se meri generalisana koordinata x. Na istom dijagramu je prikazan i grafik funkcije 0.1 sin(10t) (tačkasta linija), gde se može uočiti da ova dva kretanja imaju istu kružnu frekvenciju ω=10 rad/s. Znači, i u slučaju nehomogene diferencijalne jednačine oblika (2.2.6), sopstvena kružna frekvencija je uvek jednaka kvadratnom korenu od količnika koeficijenta ispred generalisane koordinate i koeficijenta ispred drugog izvoda generalisane koordinate ($\omega_n = \sqrt{k/m}$). Imajući u vidu da $k\delta$ predstavlja silu koja je nastala početnom statičkom deformacijom i dalje se tokom vremena ne menja, ovo ukazuje da **konstantna sila ne utiče na frekvenciju oscilovanja**. Ovde treba naglasiti i da, uprkos tome što je ova sila nastala početnom statičkom deformacijom (u početnom trenutku), u matematičkom modelu (2.2.6), budući da figuriše kao nehomogeni deo, ona je stalno prisutna tokom kretanja. Može se i reći da konstanta statička sila F^{st} koja figuriše kao nehomogeni deo diferencijalne jednačine

$$m\ddot{x} + kx = F^{st}, \tag{2.2.8}$$

pomera položaj oko kojeg se vrši oscilovanje i to u smeru njenog dejstva, a veličina tog pomeranja je jednaka količniku intenziteta te sile i krutosti sistema. U slučaju sistema sa Slike 2.2.2 ovo pomeranje je $\frac{F^{st}}{k} = \frac{k\delta}{k} = \delta$.

Treba i naglasiti da se pogodnim izborom generalisane koordinate, može nehomogena jednačina, kao što je (2.2.8) učiniti homogenom (kao što je jednačina (2.2.5)), a za isti mehanički model oscilatora. I u takvom oscilatoru u kojem postoji početna deformacija, ali čiji je matematički model homogena diferencijalna jednačina, oscilatorno kretanje se razmatra bez dejstva takve konstante sile, kao da ona i ne postoji. Formiranje homogene umesto

DO NOT COPY

nehomogene diferencijalne jednačine oscilovanja se može učiniti tako što se, pod pretpostavkom da postoji konstantna (statička) sila, generalisana koordinata koja opisuje kretanje uvek može predstaviti preko dva dela, deo koji nastaje statičkom deformacijom (x_{st}) i deo koji nastaje usled oscilatornog kretanja (x_{d}). Znači, možemo da pišemo sledeće:

$$x = x_{\mathrm{st}} + x_{\mathrm{d}}. \tag{2.2.9}$$

Imajući u vidu da se oscilatorno kretanje uvek vrši oko položaja (stabilne) ravnoteže, x_{d} se meri od ravnotežnog položaja. Veličina x_{st} se odnosi na statički slučaj, u kojem je $x_{\mathrm{d}} = 0$, pa je $x = x_{\mathrm{st}}$, tako da kada se ovo uvrsti u jednačinu (2.2.8), (znači, primenjuje se činjenica da diferencijalna jednačina (2.2.8) važi, kako za kretanje, ali isto tako i za slučaj mirovanja oscilatora u ravnotežnom položaju), sledi

$$kx_{\mathrm{st}} = F_k^{st} \rightarrow x_{st} = \frac{F_k^{st}}{k} = \mathrm{const.} \tag{2.2.10}$$

Uvrštavajući sada (2.2.9) u jednačinu (2.2.8), te imajući u vidu (2.2.10), dobija se sledeće:

$$m\ddot{x}_d + k\left(x_s + x_d\right) = F^{st} \rightarrow m\ddot{x}_d + kx_d = \underbrace{F^{st} - kx_{st}}_{0} \rightarrow m\ddot{x}_d + kx_d = 0 \tag{2.2.11}$$

Znači, ukoliko se izabere takva generalisana koordinata koja definiše položaj oscilatora u odnosu na ravnotežni, matematički model će biti homogena diferencijalna jednačina. Bilo da nam je ravnotežni položaj poznat ili ne, ono što znamo je da on mora da postoji ukoliko se odvija neko oscilatorno kretanje. Primenivši prethodni pristup, uvek je moguće matematički modelovati slobodne oscilacije sa homogenom diferencijalnom jednačinom, tj. eliminisati iz razmatranja konstantne sile, ukoliko se to želi. Brojni su praktični slučajevi da na oscilatorni sistem dejstvuje neka konstantna sila. Pored elastične sile koja je nastala početnim prednaprezanjem, kao važan slučaj je i sila težine imajući u vidu da je sila težine sila konstantnog pravca, intentziteta i smera. Ovaj važan slučaj će se detaljnije razmotriti u Sekciji 2.9.

U slučaju predstavljenom na Slici 2.2.2b), elastični element je u početnom trenutku istegnut i sistem je pušten u kretanje bez početne brzine. Sistem će započeti kretanje ulevo, zbog tendencije elastičnog elementa da se vrati u nedeformisano stanje. Generalisana koordinata je x i meri se od tog početnog položaja, kako je naznačeno na slici. Za proizvoljni položaj je izabran položaj u kojem je elastični element istegnut. Elastična sila je usmerena ulevo, u smeru izabrane koordinate x. Primenivši drugi Njutnov zakon, ponovo se dolazi do istog oblika kao u izrazu (2.2.6) i dalja analiza je kao u slučaju pod a)∗

DEMO COPY

Napomena: Oznaka $*$ na kraju prethodnog paragrafa služi da se naglasi da je sa tekstom **Primera 2.2.3** završeno i da se vraćamo na ono što je prethodilo. Znači, nastavlja se na analizu jednačine (2.2.5).

Matematički model oscilatornog sistema je uvek u obliku diferencijalne jednačine. U slučaju sistema čiji je broj SSK jednak jedinici, radi se o jednoj diferencijalnoj jednačini. U slučaju sistema sa više stepeni slobode kretanja, broj diferencijalnih jednačina odgovara broju SSK.

Jednačina (2.2.5) je diferencijalna jednačina jer u njoj figuriše (drugi) izvod koordinate x po vremenu t. Radi se o diferencijalnoj jednačini drugog reda jer je najveći red izvoda, dva. Budući da su koeficijenti ispred x i $\ddot{x}$ nepromenljivi sa vremenom (naime, u ovom slučaju se podrazumeva da se masa i krutost opruge ne menjaju tokom razmatranog kretanja), radi se o diferencijalnoj jednačini sa konstantnim koeficijentima. Osim članova koji sadrže x i odgovarajuće izvode, u jednačini (2.2.5) nema drugih, slobodnih članova. Iz tog raloga je ovo homogena jednačina. Konačno, može se i primetiti da jednačina (2.2.5) pripada klasi linearne diferencijalne jednačine drugog reda, čiji opšti oblik glasi: $\ddot{x} + p\dot{x} + qx = 0$. Uzimajući sve prethodno rečeno u obzir, jednačina (2.2.5) je **linearna homogena diferencijalna jednačina drugog reda sa konstantnim koeficijentima**.

2.3 Kretanje harmonijskog oscilatora

Kada se postavi matematički model nekog oscilatornog procesa, tada se može pristupiti njegovoj detaljnijoj analizi, koristeći znanje iz matematičke analize. U cilju suštinskog razumevanja oscilatornih procesa, korišćenje i poznavanje rešavanja diferencijalnih jednačina je od značaja. Ovde koristimo odgovarajuće postupke iz matematičke analize.

Partikularno rešenje jednačine (2.2.5) se može pretpostaviti u obliku

$$x = e^{st}, \tag{2.3.1}$$

gde je s konstanta koju treba odrediti. Na osnovu (2.3.1) imamo da su $\dot{x} = s\,e^{st}$ i $\ddot{x} = s^2\,e^{st}$, te uvrštavanjem u jednačinu (2.2.5), sledi

$$\left(m s^2 + k\right) e^{st} = 0\,. \tag{2.3.2}$$

Jednačina (2.3.2) će biti zadovoljena ukoliko je $e^{st} = 0$ ili ako je $m s^2 + k = 0$.

Prvi slučaj $e^{st} = 0$ znači da je x = 0, a što predstavlja trivijalno rešenje. Ovo trivijalno rešenje ima svoj fizički smisao. Naime, ono ukazuje da telo može da bude u ravnotežnom položaju u neograničenom vremenu. Intuitivno, to je razumljivo i moguće. Tako će i biti sve dok se ili telo ne izvede iz ravnotežnog

DO NOT COPY

položaja, ili se udari, ili jedno i drugo. Trivijalno rešenje ne zavisi od parametara sistema.

Što se tiče drugog uslova, $m s^2 + k = 0$, budući da se radi o kvadratnoj jednačini po s, rešavanjem se dolazi do traženog rešenja za s:

$$s_{1,2} = \pm i \sqrt{\frac{k}{m}}\ , \tag{2.3.3}$$

gde je i imaginarna jedinica. Kao što se vidi, postoje dva rešenja za konstantu s i oba su kompleksna pri čemu sadrže samo imaginarni deo ($\mathrm{Im}(s) = \pm\sqrt{k/m}$). Ovde je značajno napomenuti da je nepostojanje realnog dela ($\mathrm{Re}(s) = 0$) u kompleksnom rešenju (2.3.3) za s **karakteristika slobodnih neprigušenih oscilacija**. U Glavi 3 gde ćemo se baviti sa prigušenim slobodnim oscilacijama pokazaće se da uzimanje u obzir prigušenja, a što je karakteristika svakog realnog sistema će imati za posledicu postojanje i realnog dela u rešenju za s, a što će uticati na bogatiju dinamiku oscilatornih procesa u odnosu na idealizovani slučaj bez uzimanja u obzir prigušenja.

Budući da postoje dva rešenja za s, postoje i dva partikularna rešenja, $x_1 = A_1 e^{s_1 t}$ i $x_2 = A_2 e^{s_2 t}$, a opšte rešenje je tada jednako zbiru ova dva partikularna repšenja

$$x = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}. \tag{2.3.4}$$

Veličine A_1 i A_1 su nepoznate realne ili kompleksne konstante. Imamo u vidu da su oba člana $e^{s_1 t}$ i $e^{s_2 t}$ na desnoj strani izraza (2.3.4) kompleksne veličine. Međutim, suma na desnoj strani izraza (2.3.4) treba da bude realna veličina, jer je x koordinata koja određuje pomeranje i **mora biti realna veličina**. Način da ovo bude ostvareno je da konstante A_1 i A_2 imaju specijalnu formu. Naime, imajući u vidu da su $e^{i\sqrt{k/m}\,t}$ i $e^{-i\sqrt{k/m}\,t}$ kompleksne veličine, tada i A_1 i A_2 moraju biti kompleksne veličine i to konjugovano kompleksne. Znači, A_1 i A_2 su sledećeg oblika:

$$A_1 = a_1 + i\,b_1, \tag{2.3.5}$$

$$A_2 = a_2 + i\,b_2. \tag{2.3.6}$$

Želimo da odredimo veličine a_1, b_1, a_2, b_2 ili veze između njih da bismo odredili potrebne forme kompleksnih veličina A_1 i A_2. Da bi bilo što jasnije, objašnjenje će biti prikazano grafički u kompleksnoj ravni koristeći predstavljanje kompleksne veličine kao vektora u kompleksnoj ravni (Slika 2.3.1). Poći će se najpre od veličina $e^{i\sqrt{k/m}\,t}$ i $e^{-i\sqrt{k/m}\,t}$ koje predstavljaju odgovarajuće jedinične vektore. Ugao

DO NOT COPY

kojeg vektor $e^{i\sqrt{k/m}\,t}$ obrazuje sa realnom osom se menja sa vremenom linearno, po zakonu $\sqrt{k/m}\,t$ tj. ovaj jedinični vektor rotira oko koordinatnog početka sa konstantnom ugaonom brzinom u smeru suprotnom od kazaljke sata. Slično, jedinični vektor $e^{-i\sqrt{k/m}\,t}$ takođe rotira ravnomerno sa istom ugaonom brzinom, ali u smeru kazaljke sata. Ova dva jedinična vektora su u svakom trenutku u simetričnom položaju u odnosu na realnu osu. Imajući u vidu (2.3.4), (2.3.5) i (2.3.6), rešenje za kretanje $x(t)$ kao i sam vektor u kompleksnoj ravni, predstavlja zbir dva vektora

$$x(t) = |A_1| e^{i\left(\sqrt{k/m}\,t+\theta\right)} + |A_2| e^{-i\left(\sqrt{k/m}\,t+\theta\right)}, \tag{2.3.7}$$

gde su

$$|A_1| = \sqrt{a_1^2 + b_1^2} \quad \text{i} \quad |A_2| = \sqrt{a_2^2 + b_2^2}. \tag{2.3.8}$$

Sa θ je obeležen konstantni ugao kojeg A_1, posmatran kao vektor u kompleksnoj ravni ubrazuje sa realnom osom. Veličina A_2 kao konjugovano kompleksna veličina od A_1, obrazuje ugao (-θ). Imajući u vidu prethodno rečeno, vektori $|A_1| e^{i\left(\sqrt{k/m}\,t+\theta\right)}$ i $|A_2| e^{-i\left(\sqrt{k/m}\,t+\theta\right)}$ rotiraju oko koordinatnog početka ravnomerno sa istom ugaonom brzinom $\omega = \sqrt{k/m} = \text{const}$, suprotnih smerova jedan u odnosu na drugi.

Inače, kada A_1 i A_2 ne bi bile konjugovano kompleksne veličine (Slika 2.3.1a), tada bi rešenje x (predstavljeno kao vektor u kompleksnoj ravni) imalo projekciju i na imaginarnu osu, a što nema smisla, jer, kao što je rečeno, x mora biti realna veličina. Zbog toga, vektor koji predstavlja koordinatu x mora ležati samo na realnoj osi (Slika 2.3.1b). Da bi to bilo moguće, vektori A_1 i A_2 moraju biti istog intenziteta i obrazovati isti ugao sa realnom osom, međusobno sa suprotnih strana u odnosu na realnu osu. Znači, mora važiti sledeće:

$$|A_1| = |A_2|, \tag{2.3.9}$$

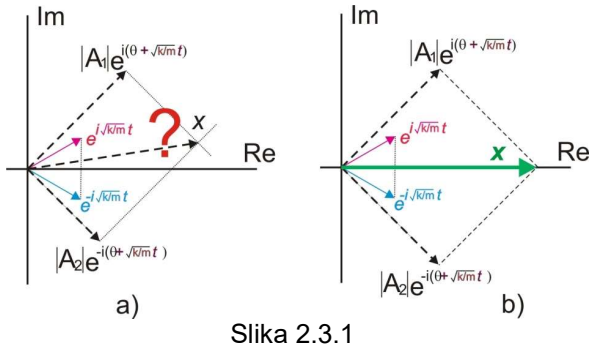
$$\theta_1 = \theta_2 . \tag{2.3.10}$$

Uslovi (2.3.9) i (2.3.10) ukazuju, u matematičkom smislu da su A_1 i A_2 međusobno konjugovano kompleksne veličine, $A_1 = A_2^*$, tako da imamo

$$A_1 = a_1 + ib_1 \tag{2.3.11}$$

$$A_2 = a_1 - ib_1 \tag{2.3.12}$$

DO NOT COPY



Slika 2.3.1

Uvrštavanjem izraza (2.3.11) i (2.3.12) u (2.3.4), te koristeći Ojlerov izraz $e^{\pm is} = \cos(st) \pm i \sin(st)$, pokazuje se da se imaginarni članovi poništavaju i da ostaju samo realni članovi. Konačno, rešenje za kretanje, tj. opšte rešenje diferencijalne jednačine (2.2.5) glasi

$$x = C_1 \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t\right) + C_2 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t\right), \tag{2.3.13}$$

gde su sada C_1 i C_2 realne konstante. Konstante C_1 i C_2 se određuju **na osnovu početnih uslova**, $x(0) = x_0$ i $v(0) = v_0$. Na osnovu toga, rešenje (2.3.13) ima sledeći oblik:

$$x = \frac{v_0}{\sqrt{k/m}} \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t\right) + x_0 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t\right). \tag{2.3.14}$$

Koristeći poznato pravilo o sabiranju sinusne i kosinusne funkcije sa istim argumentom, izraz (2.3.14) se može zapisati i u drugačijoj formi, odnosno izrazom koji je jasniji za predstavljanje i interpretaciju. Naime, suma sinusne i kosinusne funkcije sa istim argumentum, može biti predstavljena samo sa jednom hramonijskom funkcijom. Imajući to u vidu, izraz (2.3.14) može da se zapiše u sledećoj formi:

$$x = A \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t + \varphi^{\sin}\right), \tag{2.3.15}$$

gde su

$$A = \sqrt{\frac{v_0^2}{k/m} + x_0^2}\ , \tag{2.3.16}$$

$$\varphi^{\sin} = \tan^{-1} \frac{x_0 \sqrt{k/m}}{v_0}\ . \tag{2.3.17}$$

DO NOT COPY

Veličina *A* se naziva **amplituda oscilovanja**, a $\varphi^{\sin}$ **faza**. Gornji indeks sin kod $\varphi^{\sin}$ ukazuje da se radi o fazi u izrazu za kretanje koje je predstavljeno preko sinusne funkcije. Ukoliko se kretanje predstavi preko kosinusne funkcije, izraz za fazu će biti nešto drugačiji.

Izraz (2.3.15) može biti predstavljen u nešto drugačijoj formi za slučajeve kada postoji samo početni otklon ili samo početna brzina.

U slučaju kada u početnom trenutku postoji samo početni otklon, $x(0) = x_0$ i $v(0) = 0$, tada je $A = x_0$ i $\varphi^{\sin} = \pi / 2$, pa je kretanje HO definisano sledećim izrazom:

$$x = x_0 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t\right). \tag{2.3.18}$$

U slučaju da je $x(0) = 0$ i $v(0) = v_0$, tada su $A = v_0 / (k / m)$ i $\varphi^{\sin} = 0$, pa je kretanje definisano sledećim izrazom:

$$x = \frac{v_0}{\sqrt{k / m}} \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t\right). \tag{2.3.19}$$

Može se i pomenuti da se rešenje za kretanje (2.3.14), umesto sa sinusnom funkcijom, kako je predstavljeno izrazom (2.3.15), potpuno ravnopravno može predstaviti i korišćenjem kosinusne funkcije. U tom slučaju se menja izraz za fazu. Znači, ukoliko se rešenje usvoji u obliku

$$x = A \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t - \varphi^{\cos}\right), \tag{2.3.20}$$

tada je faza

$$\varphi^{\cos} = \tan^{-1} \frac{v_0}{x_0 \sqrt{k / m}}. \tag{2.3.21}$$

2.4 Period i frekvencija

Posmatrajmo kretanje HO koje je predstavljeno izrazom (2.3.15). Radi se o harmonijskoj funkciji sinus čija je amplituda *A*. Kao što je poznato, funkcija y = sin (bx) je periodična funkcija. Njen **period** je 2π/b. imajući ovo u vidu, period funkcije predstavljene izrazom (2.3.15) je

DO NOT COPY

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{k/m}} \,. \tag{2.4.1}$$

Recipročna vrednost perioda se naziva **frekvencija**,

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\sqrt{k/m}}{2\pi} \,. \tag{2.4.2}$$

Jedinica za frekvenciju je Herz [Hz]. Ako frekvenciju (izraženu u Hercima) pomnožimo sa 2π dobija se veličina koja se naziva kružna frekvencija, i koja u takvom obliku predstavlja jedan od osnovnih termina Teorije oscilacija. Uobičajeno je da se ova veličina obeležava sa ω_n

$$\omega_n = 2\pi f = 2\pi \frac{\sqrt{k/m}}{2\pi} = \sqrt{\frac{k}{m}}. \tag{2.4.3}$$

Kružna frekvencija predstavljena izrazom (2.4.3) se naziva još i *sopstvena* ili *prirodna frekvencija*. Zbog naziva "prirodna" (eng: natural), vrlo često se dodaje i indeks *n*. Tako će se označavati i u ovoj knjizi. Treba primetiti da izraz za kružnu frekvenciju (2.4.3) odgovara ugaonoj brzini obrtanja jediničnih vektora $e^{i\sqrt{k/m}\,t}$ i $e^{-i\sqrt{k/m}\,t}$ u kompleksnoj ravni, a što je razmatrano u prethodnoj Sekciji.

Kao što se vidi na osnovu izraza (2.4.3), kružna frekvencija (kao i frekvencija) u slučaju linearnih oscilacija, zavisi samo od krutosti *k* i mase *m*. Drugim rečima, ona zavisi od karakteristika samog oscilatornog sistema. Ne zavisi od načina kretanja (oscilovanja) ili od načina na koji je posmatrani sistem doveden u kretanje (**ne zavisi od početnih uslova**). Na osnovu toga se zaključuje da se sopstvena frekvencija sistema može menjati samo promenom fizičkih karakteristika samog sistema. Naprimer, u slučaju posmatranog mehaničkog modela, *masa-opruga*, promena frekvencije oscilovanja se može ostvariti sa promenom mase ili sa promenom krutosti opruge ili sa jednim i sa drugim.

Na osnovu izraza (2.4.3) sledi da se povećanjem krutosti opruge, povećava i njena frekvencija i obratno. U vezi sa ovim, mogu se postaviti dva granična slučaja:

- *Apsolutno kruti sistemi*: Kod ovakvih sistema $k \to \infty$, $\omega_n \to \infty$, $T \to 0$;
- *Apsolutno fleksibilni sistemi*: Za ovakve oscilatorne sisteme važi: $k \to 0$, $\omega_n \to 0$, $T \to \infty$.

Svi realni oscilatorni sistemi su između navedena dva granična slučaja.

Kao što se uočava na osnovu izraza za kružnu frekvenciju (2.4.3), može se konstatovati da ona predstavlja kvadratni koren količnika u čijem brojiocu je

DO NOT COPY

koeficijent ispred generalisane koordinate, a u imeniocu koeficijent ispred drugog izvoda generalisane koordinate,

$$\omega_n = \sqrt{\frac{\text{koeficijent ispred generalisane koordinate}}{\text{koeficijent ispred drugog izvoda generalisane koordinate}}} \quad (2.4.4)$$

U slučaju najjednostavnijeg mehaničkog modela oscilatora sa Slike 2.2.1, ovi koeficijenti su k i m. Videće se u nastavku ove knjige, da ovi koeficijenti mogu imati mnogo složeniju formu, ali će uvek kružna frekvencija linearnih neprigušenih oscilacija sistema sa jednim SSK biti određivana i predstavljana u skladu sa izrazom (2.4.4).

Primer 2.4.1 Kretanje tela je zadato sledećim zakonom:

$$x(t) = 0.003\cos(30t) + 0.004\sin(30t)\,[m] \quad (2.7.1)$$

Odrediti: a) amplitudu kretanja; b) period kretanja; c) frekvenciju u [Hz]; d) frekvenciju u [rad/s]; e) fazu; f) zakon kretanja u formi (2.3.15).

2.5 Linearni i nelinearni oscilatorni sistemi

Prethodno izloženo važi za bilo koji sistem čije se oscilatorno kretanje može opisati sa matematičkim modelom oblika (2.2.5). Naglašeno je da se radi o linearnoj diferencijalnoj jednačini. Oscilacije koje su opisane sa linearnim diferencijalnim jednačinama se nazivaju *linearne oscilacije*. Obično se i oscilatorni sistem čije je oscilatorno kretanje opisano linearnim jednačinama, naziva *linearan sistem*.

Pored linearnih oscilacija, kao važnu klasu oscilacija treba pomenuti *nelinearne oscilacije* koje se u ovom kursu neće posebno razmatrati. Nelinearne oscilacije se matematički modeluju sa *nelinearnim diferencijalnim jednačinama*. Za razliku od linearnih diferencijalnih jednačina za koje postoje ustanovljeni standardni postupci rešavanja, za nelinearne diferencijale jednačine to nije slučaj.

Uprkos onome što smo pomenuli, da se nelinearne oscilacije neće posebno razmatrati u ovoj knjizi, ukazivanje na neke od osnovnih razlika između nelinearnih i linearnih oscilacija može doprineti boljem razumevanju linearnih oscilacija, a što je i cilj ove knjige.

Tabela 1.

Linearne oscilacije	Nelinearne oscilacije
Matematički model: Linearne ODE ili PDE	Nelinearne ODE ili PDE
Važi princip superpozicije rešenja	Ne važi princip superpozicije rešenja

DEMO COPY

Važi Hukov zakon	Nelinearna veza između napona i deformacije
Prirodna frekvencija ne zavisi od početnih uslova i od kretanja	Prirodna frekvencija zavisi od početnih uslova i od kretanja

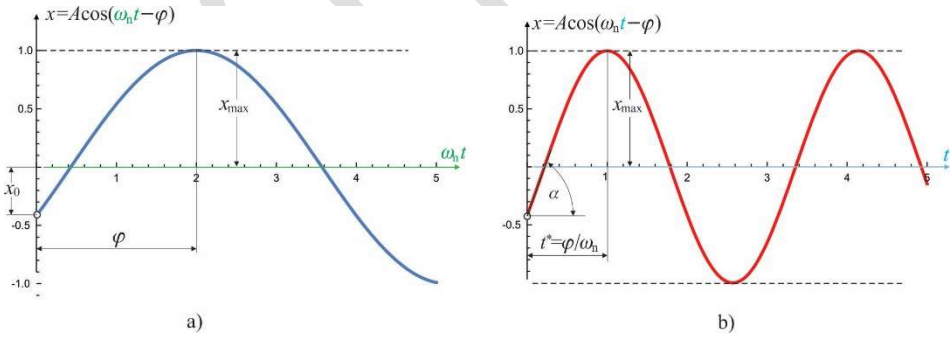
Matematička analiza nelinearnih oscilacija je po pravilu složenija u odnosu na linearne oscilacije, budući da za nelinearne ODJ i PDJ ne postoji tako dobro ustanovljena teorija kao što je slučaj sa linearnim jednačinama.

Hukov zakon smo ovde koristili da bismo uspostavili vezu između elastične sile (aksijalne) u elastičnom elementu i njegove deformacije u aksijalnom pravcu. Međutim, ova linearna veza sila-deformacija može da (i najčešće) važi samo u jednom ograničenom intervalu deformacije. Vrlo često se kaže: "važi za male deformacije". Već odavde se može uočiti da prilikom tretiranja nekog sistema kao linearnog, postoji određeno ograničenje. Kod oscilatornih sistema, kada razmatramo samo linearne oscilacije, obično kažemo *da su oscilacije male*. Ovo u suštini znači da se radi o malim pomeranjima tačaka sistema u odnosu na njihove ravnotežne položaje. Ta pretpostavka o "malim oscilacijama" je opravdana u mnogim inženjerskim sistemima u kojima su prisutne oscilacije. Pod "malim pomeranjima" se mogu smatrati takva pomeranja tačaka oscilatornog sistema koja su mnogo manja u odnosu na dimenzije samog sistema.

U smislu uzroka pojave nelinearnosti, mogu se razmatrati dva najčešća uzroka: geometrijska i materijalna nelinearnost.

2.6 Faza i fazna razlika

Kao što se vidi na osnovu izraza (2.3.17) i (2.3.21), faza, osim od karakteristika sistema, zavisi i od početnih uslova. Sa Slike 2.6.1 se može uočiti fizički smisao faze.



Slika 2.6.1

Naime, neka se rešenje za kretanje HO usvoji preko kosinusne funkcije, kako je dato izrazom (2.3.20). Ovo rešenje može biti predstavljeno u funkciji od vremena t, kako je prikazano na dijagramu 2.6.1b), ali i u funkciji od proizvoda $\omega_n t$, kako je prikazano na dijagramu 2.6.1a). Posmatrajmo dijagram sa Slike 2.6.1a). Pretpostavimo da nas zanima vrednost $\omega_n t^*$, za koji funkcija $A\cos\left(\omega_n t - \varphi^{\cos}\right)$ prvi put dostiže ekstremnu vrednost. U fizičkom smislu, ovo je vrednost za koju oscillator prvi put dolazi u najudaljeniji položaj u odnosu na ravnotežni. Imajući u vidu osobinu kosinusne funkcije, koristimo da je $\omega_n t^* - \varphi^{\cos} = 0$, odakle sledi da je $\varphi^{\cos} = \omega_n t^*$, kako je i prikazano na dijagramu sa Slike 2.6.1a). Iz ovoga sledi da je trenutak kada oscillator prvi put od početka kretanja dolazi u najudaljeniji položaj je $t^* = \varphi^{\cos} / \omega_n$ (Slika 2.6.1b). Znači, što je faza veća, kasnije će, mereno od početka kretanja, oscillator dostići najudaljeniji položaj. Inače, kao što se vidi, veća frekvencija ukazuje da će ovaj trenutak biti manji, što je i intuitivno razumljivo. Ukoliko je faza $\varphi^{\cos} = 0$, tada je već u početnom trenutku oscillator u najudaljenijem položaju od ravnotežnog. Ukoliko je faza $\varphi^{\cos} = \pi / 2$, tada funkcija kosinus prelazi u sinusnu funkciju sa fazom $\varphi^{\sin}$ jednakom nuli.

Ukoliko se rešenje za kretanje usvoji preko sinusne funkcije $A\sin\left(\omega_n t + \varphi^{\sin}\right)$, tada je trenutak u kojem oscillator prvi put dolazi u najudaljeniji položaj $t^* = \left(1/\omega_n\right)\left(\left(\pi/2\right) - \varphi^{\sin}\right)$. Za $\varphi^{\sin} = 0$ sledi da je $t^* = \pi/(2\omega_n)$, dok za $\varphi^{\sin} = \pi/2$, sinusna funkcija prelazi u kosinusnu funkciju čija je faza jednaka nuli.

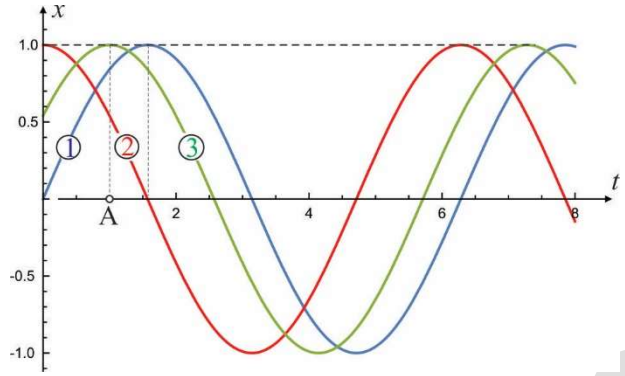
Naravno, bez obzira na koji način se rešenje za kretanje oscilatora usvoji, dijagram kretanja je isti.

Dijagram sa Slike 2.6.1b) predstavlja promenu veličine x tokom vremena. Veličina x može imati različit fizički smisao, kao, na primer, to može generalisana koordinata oscilatornog sistema sa jednim SSK. Na osnovu dijagrama se može uočiti da u izabranom početnom trenutku vremena, veličina x ima nenultu vrednost, a takođe i prvi izvod ove veličine sa vremenom ima nenultu vrednost. Ukoliko je veličina x koordinata, tada kažemo da oscillator ima početni otklon (x_0) i početnu brzinu v_0 ($\tan\alpha = v_0$).

Faza je od značaja prilikom analize dva ili više oscilatornih signala (kretanje, brzina, ubrzanje…). U takvim slučajevima od koristi može biti poznavanje razlike između faza neka dva signala, a što se naziva *fazna razlika* ili *fazni ugao*.

Primer 2.6.1 Na Slici 2.6.1 su prikazana tri signala. Pod pretpostavkom da se signali odnose na položaj slobodnog (bez prigušenja) HO u odnosu na ravnotežni, razmotriti razlike u početnim uslovima kao i faze svakog od njih.

DO NOT COPY



Slika 2.6.1

Diskusija Primera 2.6.1: Signal 1 opisuje takvo oscilatorno kretanje koje započinje iz položaja iz kojeg se meri koordinata x, tj. početni položaj je jednak nuli. Budući da se radi o slobodnim oscilacijama HO, mora postojati onda početna brzina. Ovakav signal može biti predstavljen sa sinusnom funkcijom čija je faza jednaka nuli, ili sa kosinusnom funkcijom oblika (2.3.16) čija je faza jednaka $\pi/2$. U slučaju signala 2, radi se o početnom otklonu u odnosu na položaj od kojeg se meri x bez početne brzine. Ovakav signal može biti predstavljen sa kosinusnom funkcijom čija je faza jednaka nuli, ili sa sinusnom funkcijom oblika (2.3.11) čija je faza $\pi/2$. Znači, bilo koja od dve harmonijske funkcije da se izabere (sinus ili kosinus) za predstavljanje signala 1 i 2, fazna razlika između ova dva signala je $\pi/2$. Što se tiče signala 3, u ovom slučaju postoji i početni otklon i početna brzina. Koristeći da je $t^* = 1$, sledi da je faza u slučaju da se izabere kosinusna funcija za rešenje, $\varphi^{\cos} = 1$, tako da je $x_3(t) = \cos(t-1)$. U slučaju da se signal 3 želi predstaviti sa sinusnom funcijom, tada je faza $\varphi^{\sin} = (\pi/2) - 1$, pa je $x_3(t) = \sin(t - 1 + \pi/2)$.

Fazna razlika između signala 2 i 1 je $\pi/2$. Za takva dva signala se kaže da su im faze u *kvadraturi*. U ovakvom slučaju, kada jedan signal dostigne svoju maksimalnu vrednost, ovaj drugi signal ima nultu vrednost. U mehaničkom smislu, kada jedan oscillator dostigne najudaljeniji položaj od ravnotežnog, drugi oscillator koji je sa njim u kvadraturi, prolazi kroz svoj ravnotežni položaj. Takođe, ono što se može uočiti na Slici 2.6.1, signal 2 prvi dostiže maksimalnu vrednost u odnosu na signal 1, kao i u odnosu na signal 3. Kaže se da signal 2 prednjači (eng: leads) u odnose na signale 1 i 3. Takođe, može i da se kaže, na primer, da signal 1 zaostaje (eng: lags) u odnosu na signale 2 i 3.

Pored slučaja kada su faze u kvadraturi, od značaja su i još dva specijalna slučaja:

- ukoliko je fazna razlika 0°, tada se kaže da su dva signala *u fazi*. U mehaničkom smislu ovo ukazuje da neka dva signala u istom trenutku

DO NOT COPY

prolaze kroz ravnotežne položaje, kao i da u istom trenutku dostižu najudaljenije položaje u odnosu na ravnotežne, i to sa iste strane. Kaže se da takva dva oscilatora međusobno osciluju *sinhrono*;

- ukoliko je fazna razlika 180°, tada su signali u suprotnim fazama. Suprotne faze za neka dva oscilatora, u mehaničkom smislu govore da ova dva oscilatora u istom trenutku dostižu svoje najudaljenije položaje u odnosu na ravnotežne, ali sa suprotnih strana, jedan u odnosu na drugi. Takođe, takva dva oscilatora u istom trenutku prolaze kroz ravnotežne položaje. Za ovakva dva oscilatora se takođe kaže da osciluju sinhrono.

2.7 O značaju harmonijskog oscilatora

Jednačina (2.2.5) je poznata i pod nazivom diferencijalna jednačina *harmonijskog oscilatora*, a njena rešenja predstavljena izrazom (2.3.14) (ili 2.3.15 i 2.3.16) definišu kretanje harmonijskog oscilatora. Harmonijski oscilator predstavlja najjednostavniji model nekog oscilatornog sistema. Iako jednostavan model, od značaja je potpuno razumevanja kretanja takvog sistema. On predstavlja polaznu tačku za razmatranje složenijih oscilatornih sistema. Bez njegovog potpunog razumevanja nije moguće ni dobro razumevanje složenijih oscilatornih procesa. Harmonijski oscilator opisuje *slobodne neprigušene oscilacije*. Reč "slobodne" ukazuje da ne postoje spoljašnja vremenski promenljiva dejstva, dok reč "neprigušene" ukazuje da nema bilo kakvog otpora koji bi prigušivao oscilacije. Imajući u vidu da u svakom realnom sistemu uvek postoje određene otporne sile, harmonijski oscilator je jedan idealizovani model oscilatornog sistema. No, kao što je već rečeno, harmonijski oscilator predstavlja polaznu tačku pri izučavanju oscilatornih fenomena.

Sledeći koraci, nakon razumevanja harmonijskog oscilatora, su uvođenje otpornih sila u mehanički model, zatim uvođenje spoljašnih periodičnih dejstava, proširenje na oscilatorne sisteme sa više SSK itd…

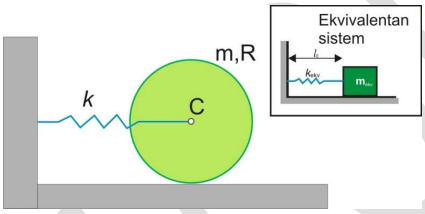
Kružna, sopstvena ili prirodna frekvencija ω_n, predstavlja frekvenciju neprigušenih oscilacija. S pravom se onda može postaviti pitanje o značaju ove veličine u realnim sistemima u kojima postoje otpori. Pokazaće se kasnije da svaki realan sistem ima odgovarajuću sopstvenu frekvenciju prigušenih oscilacija koju ćemo obeležavati sa ω_d. Ono što će biti pokazano i što je izuzetno značajno, jeste činjenica da u realnom oscilatornom sistemu, razlika između ω_n i ω_d može da bude dovoljno mala i u skladu sa tim, zanemarljiva, sa inženjerskog stanovišta. Upravo u ovome leži opravdanost zamemarivanja otpora u realnim oscilatornim sistemima prilikom određivanja njegove sopstvene frekvencije oscilovanja. Zanemarivanje otpornih sila (tj. prigušenja) u značajnoj meri pojednostavljuje određivanje sopstvene frekvencije oscilovanja.

Značaj modela harmonijskog oscilatora, kao i njegovog proširenog modela sa prigušenjem, leži i u mogućnosti uspostavljanja analogije oscilatornog ponašanja složenijih sistema sa ovim jednostavnim modelom. Tu ćemo koristiti metod "ekvivalencije". Naime, za bilo koji složeniji linearan sistem sa 1 SSK možemo da napišemo diferencijalnu jednačinu oscilatornog kretanja za usvojenu odgovarajuću generalisanu koordinatu q, u obliku

$$m_{\text{ekv}}\,\ddot{q} + k_{\text{ekv}}\,q = 0 \tag{2.7.1}$$

Tako formiran matematički model dalje analiziramo na način koji je prethodno prikazan.

Primer 2.7.1 Disk mase m vrši male oscilacije tako što se kotrlja bez klizanja po horizontalnoj nepokretnoj podlozi (Slika 2.7.1). Za centar diska je vezana opruga krutosti *k*. Usvojiti da je poznat moment inercije diska za osu koja je normalna na ravan diska i prolazi kroz njegov centar i iznosi J. Odrediti sopstvenu frekvenciju malih oscilacija ovog sistema i razmotriti uticaj parametara sistema na kružnu frekvenciju.



Slika 2.7.1

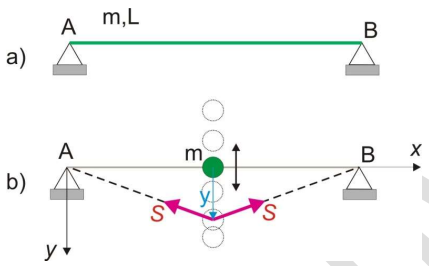
Diskusija i rešavanje Primera 2.7.1: Korišćenjem, na primer, teoreme o kretanju centra mase diska, kao i dinamičke jednačine obrtanja oko centra diska te kinematičku vezu između brzine centra diska i ugaone brzine za slučaj kotrljanja bez klizanja, određuje se izraz za kružnu frekvenciju koji glasi:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m + \dfrac{J_C}{R^2}}}. \tag{2.7.2}$$

Izraz (2.7.2) opisuje kružnu frekvenciju oscilovanja centra diska C. Kao što se vidi, za razliku od izraza za kružnu frekvenciju HO ($\omega_n = \sqrt{k/m}$ sa Slike 2.2.1), u slučaju prikazanom na Slici 2.7.1, u imeniocu se javlja dodatni član koji potiče od masenog momenta inercije diska i njegovog poluprečnika. Ovaj član nastaje usled obrtanja diska pri njegovom ravanskom kretanju, tj. kotrljanju bez klizanja po horizontalnoj podlozi i smanjuje kružnu frekvenciju u odnosu na kružnu frekvenciju HO sa Slike 2.2.1 koji vrši samo translatorno kretanje.∗

DO NOT COPY

PRIMER 2.7.2 Između nepokretnih tačaka A i B je zategnuta žica (struna), kako je prikazano na Slici 2.7.2. Na sredinu žice je postavljena masa m. Odrediti sopstvenu frekvenciju oscilovanja. Rastojanje između tačaka A i B je *L*. Zanemariti masu žice.



Slika 2.7.2

Diskusija i rešavanje Primera 2.7.2: Prikazani model može biti način da se u prvoj aproksimaciji odredi kružna frekvencija oscilovanja teške zategnute žice. Naime, oscilovanje teške zategnute žice predstavlja primer oscilovanja elastičnog tela. Za potpuno opisivanje oscilacija elastičnog tela, potrebno ga je razmatrati kao sistem sa beskonačno stepeni slobode kretanja. Ovaj prilaz će biti razmatran u Delu V (Oscilacije sistema sa beskonačno SSK). Kao što je uobičajeno u inžinjerstvu, vrlo često se polazi od najjednostavnijih modela, a zatim se po potrebi usvojeni polazni model usložnjava i vrši analiza.
Znači, posmatra se materijalna tačka mase m koja je koncentrisana na sredini raspona, lake elastične strune (Slika 2.7.2 b). Sada posmatramo sistem kojeg čini masa m koja može da miruje u ravnotežnom položaju (na sredini između oslonaca A i B), a pod dejstvom jako zategnute lake strune. Ovde se usvajaju još i sledeće pretpostavke:

- Početna sila u zategnutoj žici *S*, ostaje nepromenjena tokom oscilovanja materijalne tačke;
- Uticaj sile težine se zanemaruje u odnosu na uticaj sile *S*;
- Materijalna tačka se kreće samo u poprečnom (transverzalnom) pravcu;
- Pomeranje *y* je malo.

Primenjujući drugi Njutnov zakon za kretanje materijalne tačke u poprečnom (transverzalnom) pravcu, tj. duž *y* ose, sledi:

$$m\ddot{y} = -2S\sin\alpha \tag{2.7.3}$$

Koristeći pretpostavku da je pomeranje y malo, može se $\sin\alpha$ predstaviti približno preko fumkcije tangens. Znači,

$$\sin\alpha \approx \tan\alpha = \frac{2y}{\mathrm{L}} \tag{2.7.4}$$

Primenjujući (2.7.4) i uvrštavajući u jednačinu (2.7.3), sledi

$$m\ddot{y} + \frac{4S}{L}y = 0 \tag{2.7.5}$$

DO NOT COPY

Kao što se vidi, jednačina (2.7.5) odgovara jednačini harmonijskog oscilatora. Na osnovu toga, sopstvena kružna frekvencija oscilovanja teške materijalne tačke na sredini lake zategne struni je data sledećim izrazom:

$$\omega_n = 2\sqrt{\frac{S}{m\,L}} \tag{2.7.6}$$

Povećanjem sile zatezanja žice *S*, povećava se i frekvencija oscilovanja materijalne tačke. Povećanjem njene mase i dužine žice se frekvencija oscilovanja smanjuje.

2.8 Energija harmonijskog oscilatora i primena energijskog prilaza za analizu oscilatornog kretanja

Matematički model oscilovanja tela se može odrediti, na primer i primenom teoreme o održanju mehaničke energije (ukoliko važi), teoreme o promeni kinetičke energije ili pomoću Lagranževih jednačina druge vrste. U tom cilju je potrebno odrediti izraze za kinetičku energiju, kao i radove sila. Pri tome, kao što je poznato, za slučaj potencijalnih sila, njihovi radovi mogu biti određeni korišćenjem potencijalne energije. Na osnovu toga, energijski prilaz u cilju formulisanja matematičkog modela oscilatornog kretanja obično podrazumeva određivanje kinetičke i potencijalne energije posmatranog sistema izražene preko generalisane koordinate merene u odnosu na ravnotežni položaj. Izrazi za kinetičku i potencijalnu energiju su dovoljni u slučaju konzervativnih sistema. U slučaju nekonzervativnih sistema, potrebno je odrediti i rad nepotencijalnih sila.

U slučaju harmonijskog oscilatora sa Slike 2.2.1, kinetička energija tela je

$$E_k = \frac{1}{2} m\, v^2 = \frac{1}{2} m\, \dot{x}^2 . \tag{2.8.1}$$

Potencijalna energija u ovom sistemu je od elastične sile, te imajući u vidu da deformacija opruge u proizvoljnom položaju odgovara koordinati x, potencijalna energija glasi

$$E_p = \frac{1}{2} k\, \Delta l^2 = \frac{1}{2} k\, x^2 . \tag{2.8.2}$$

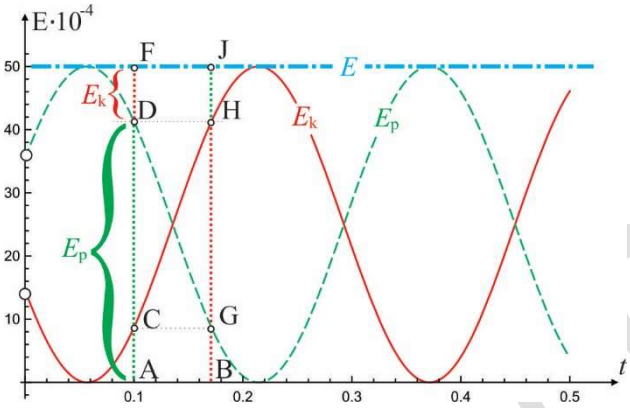
Koristeći izraz (2.3.15) za kretanje HO, izraz za kinetičku energiju HO se može zapisati u sledećoj formi:

$$E_k = \frac{1}{2} m\, A^2 \omega_n^2 \cos^2\left(\omega_n t + \varphi^{\sin}\right). \tag{2.8.3}$$

Znači, kinetička energija HO se menja sa vremenom po zakonu predstavljen izrazom (2.8.3) i njen grafik je prikazan na Slici 2.8.1 (crvena puna linija). Parametri sistema čija je kinetička energija prikazana na Slici 2.8.1 su: m = 1kg i k = 100 N/m. Početni uslovi su izabrani tako da faza iznosi $\varphi^{\sin} = 1$ rad, a

DO NOT COPY

amplituda A = 0.01 m. Na osnovu izraza (2.8.3), maksimalna vrednost kinetičke energije je $(1/2)m\,A^2\omega_n^2$ i ona zavisi od parametara sistema (preko ω_n) i početnih uslova (preko A).



Slika 2.8.1

Na osnovu izraza (2.8.2), te korišćenjem (2.3.15), izraz za potencijalnu energiju HO glasi

$$E_p = \frac{1}{2} k\, A^2 \sin^2\left(\omega_n t + \varphi^{\sin}\right). \tag{2.8.4}$$

Grafički prikaz promene potencijalne energije HO tokom vremena je takođe dat na Slici 2.8.1 (zelena isprekidana linija), za iste parametre kao za E_k .

Treba primetiti na osnovu dijagrama sa Slike 2.8.1 da u trenucima kada je kinetička energija maksimalna, potencijalna energija je jednaka nuli, i obrnuto. Dijagrami kinetičke i potencijalne energije su fazno pomereni za π.

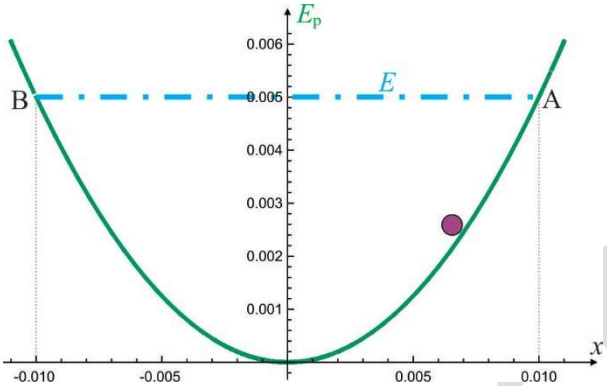
Koristeći činjenicu da ukupna mehanička energija ostaje očuvana, sledi:

$$E_k + E_p = const \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2} m\, v^2 + \frac{1}{2} k\, x^2 = const = E \tag{2.8.5}$$

Na Slici 2.8.1, E je predstavljeno sa horizontalnom (plavom crta tačka) linijom budući da se energija HO ne menja tokom vremena. Na prikazanom dijagramu se u svakom trenutku mogu videti međusobni odnosi kinetičke (npr. duž DF≡AC, BH) i potencijalne energije (AD, BG≡HJ). Vrednost ukupne mehaničke energije odgovara početnim uslovima, odnosno, razmatrani sistem osciluje zato jer je u početnom trenutku u njega dovedena mehanička energija (otklonom, početnom brzinom ili jednim i drugim).

DO NOT COPY

Od interesa je prikazati i dijagram promene potencijalne energije sa koordinatom x (Slika 2.8.2). Na osnovu (2.8.2), grafik je očito kvadratna parabola čije je teme u koordinatnom početku. Ovaj dijagram ukazuje na postojanje *potencijalne jame*.



Slika 2.8.2

Može se uspostaviti analogija između kretanja HO i kretanja materijalne tačke po glatkoj površi čiji oblik odgovara potencijalnoj jami (Slika 2.8.2). Naime, zamislimo da materijalnu tačku spustimo na ovu površ u položaju A. Materijalna tačka će započeti kretanje na niže, proći kroz najniži položaj i početo da se penje po drugoj grani. Ukoliko se pretpostavi da nema trenja, tačka će se popeti do položaja B koji je na istom nivou kao i tačka A i tu se trenutno zaustaviti, a zatim će krenuti naniže itd. Nivo koji prolazi kroz položaje A i B, u energetskom dijagramu predstavlja ukupnu mehaničku energiju E čija vrednost zavisi od početnih uslova.

Kada se uradi izvod po vremenu izraza (2.8.5), a zatim njegovim sređivanjem, dobija se

$$\frac{1}{2}m\,2\dot{x}\,\ddot{x}+\frac{1}{2}k\,2x\,\dot{x}=0\rightarrow m\,\ddot{x}+k\,\dot{x}=0 \tag{2.8.6}$$

Kao što se vidi na osnovu (2.8.6) do matematičkog modela HO (odgovarajuće diferencijalne jednačine) se može doći imajući u vidu da je po pretpostavci, mehanička energija HO nepromenljiva tokom vremena.

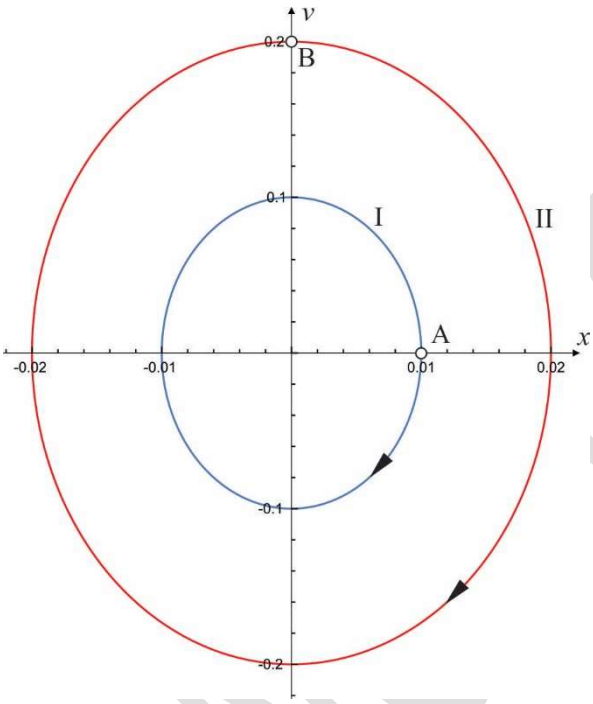
Na osnovu izraza (2.8.5) se može uspostaviti veza između koordinate i brzine na sledeći način

$$\frac{x^2}{\frac{2E}{k}}+\frac{v^2}{\frac{2E}{m}}=1. \tag{2.8.7}$$

Znači, izrazom (2.8.7) se uspostavlja veza između veličina koje definišu mehaničko stanje sistema, tj. uspostavlja vezu između položaja oscilatora sa Slike 2.2.1 i njegove brzine, u svakom trenutku vremena. Ova veza se može i

DO NOT COPY

grafički predstaviti. Naime, u izraza (2.8.7) se može uočiti jednačina centralne elipse u Dekartovom koordinatnom sistemu, čije su poluose $a = 2E/k$ (poluosa paralelna abscisi na koju se nanose vrednosti za koordinatu x) i $b = 2E/m$ (poluosa paralelna ordinati na koju se nanose vrednosti za brzinu v).



Slika 2.8.3

Na Slici 2.8.3 su prikazani grafici veze između x i v za dve različite grupe početnih uslova (x(0), v(0)). Početni uslovi za krivu I su (0.01, 0), a za krivu II (0, 0.2). Ovakve krive se uobičajeno nazivaju *fazne trajektorije*, a ravan u kojoj se predstavljaju i u kojoj leži koordinatni sistem čije su ose položaj i brzina, tj. promenljive stanja, se naziva *fazna ravan*. Na ovaj način se može uspostaviti analogija sa kretanjem tačke u faznoj ravni i kretanja nekog oscilatornog sistema. Smer kretanja tačke po faznoj trajektoriji je u smeru kazaljke sata, kako je prikazano na Slici 2.8.3.

Primer 2.8.1: Odrediti diferencijalnu jednačinu harmonijskog oscilatora iz Primera 2.7.2 primenom zakona o promeni kinetičke energije i primenom Lagranževih jednačina druge vrste. Za generalisanu koordinatu usvojiti koordinatu *x* koja definiše kretanje centra diska.

2.9 Linearizacija nelinearne funkcije $F_k(x)$

U modelu sa Slike 2.2.1, opruga je bila horizontalna, odnosno, njen pravac je na pravcu kretanja klizača. Položaj tela u odnosu na ravnotežni položaj ujedno definiše i deformaciju opruge (ili elastičnog elementa), tj. važilo je sledeće: $\Delta l = x$, tako da je elastična sila $F_k = k\,\Delta l = k\,x$. U ovom slučaju se lako došlo do linearne funkcionalne zavisnosti elastične sile od generalisane koordinate.

Međutim, može se desiti i da deformacija elastičnog elementa nije linearna funkcija od generalisane koordinate, tako da i kada se usvoji da važi Hukov zakon, $F_k = k\,\Delta l$ dolazi se do nelinearne veze između elastične sile i generalisane koordinate.

Ako sa $F_k = f(x)$ označimo funkcionalnu zavisnost elastične sile od koordinate x, tada se u cilju određivanja linearne veze vrši linearizacija funkcije $f(x)$ koristeći razvoj funkcije u MekLorenov red

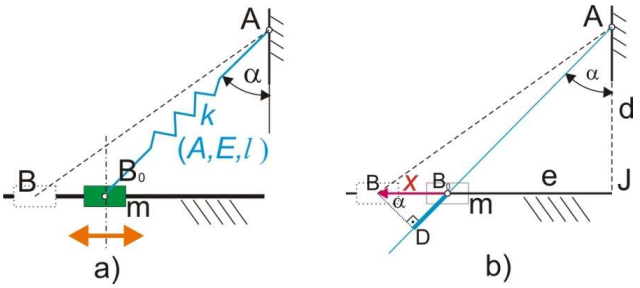
$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} + \ldots \qquad (2.9.1)$$

U praktičnim slučajevima je potrebno odrediti izraz za deformaciju elastičnog elementa koji je uvek jednak $\Delta l = l - l_0$ (l_0 je dužina nedeformisane opruge, a l je dužina opruge u proizvoljnom položaju) i na taj izraz se primeni (2.9.1) zadržavajući se samo do linearnog člana po koordinati. Ovo će se ilustrovati na sledećem primeru.

Primer 2.9.1 Odrediti kružnu frekvenciju oscilovanja klizača mase m po horizontalnoj vođici (Slika 2.9.1). Za klizač je vezan elastični štap (*A*, *E*) čiji je drugi kraj A vezan za nepokretni zid. U ravnotežnom položaju, štap obrazuje poznati ugao α sa horizontalom. Zanemariti otpore kretanju.

Diskusija i rešavanje Primera 2.9.1: Elastični štap, kao što smo ranije ukazali, tretiramo kao oprugu čija je krutost $k=AE/l_0$. U ovom slučaju se pravac opruge ne poklapa sa pravcem kretanja, kao što je i prikazano na Slici 2.9.1. Klizač mase m se kreće po horizontalnoj vođici. I ovde ćemo za sada pretpostaviti da nema trenja između klizača i vođice. Zbog toga i u ovom slučaju je u stanju mirovanja u ravnotežnom položaju opruga nedeformisana. Ovaj položaj je označen sa B_0. Klizač vrši oscilatorno kretanje oko tog ravnotežnog položaja. Položaj klizača je definisan koordinatom x.

DO NOT COPY



Slika 2.9.1

Ovde, deformacija opruge više ne odgovara koordinati x, tj. $\Delta l \neq x$. Prilikom pomeranja klizača za vrednost koordinate x, dolazi i do promene pravca elastičnog štapa. Deformacija elastičnog štapa je sada $\Delta l = AB - AB_0$. Ako je poznata dužina elastičnog štapa u ravnotežnom položaju koja iznosi l_0 tada se može pisati da važi $d = l_0 \cos\alpha$ i $e = l_0 \sin\alpha$, na osnovu čega sledi:

$$\Delta l(x) = AB - AB_0 = \sqrt{d + (\mathrm{e} + \mathrm{x})^2} - \sqrt{d^2 + e^2}\,. \tag{2.9.2}$$

Uvođenje veličina d i e je samo radi preglednijeg predstavljanja. Kao što se vidi, i ovde je deformacija Δl funkcija od koordinate x, ali sada znatno složenija i radi se o nelinearnoj vezi. Dalji rad sa izrazom (2.9.1) bi vodio ka znatno složenijem izrazu za elastičnu silu u odnosu na prikazano u Sekciji 2.2. Međutim, budući da nas zanimaju male oscilacije oko ravnotežnog položaja, izvršićemo linearizaciju izraza (2.9.2).

Da bi se učinila linearizacija izraza (2.9.2), on se razvija u red u okolini $x = 0$. Fizički smisao ovoga je da se posmatra deformacija elastičnog štapa, kada njegova krajnja tačka, tačka B, čije je kretanje definisano koordinatom x, vrši malo pomeranje u okolini ravnotežnog položaja. Na osnovu (2.9.1), prva dva člana reda od funkcije $\Delta l(x)$ su:

$$\Delta l = \frac{e}{\sqrt{d^2 + e^2}} x + \frac{d^2}{2\left(d^2 + e^2\right)^{3/2}} x^2 + O(x)^3 + \ldots \tag{2.9.3}$$

Izraz (2.9.3) u suštini ilustruje postupak aproksimacije. Kao specijalan slučaj aproksimacije je linearizacija. Linearizacija podrazumeva uzimanje u obzir samo linearnog člana razvoja u red, tj. prvog člana izraza (2.9.3). Opravdanje za ovo leži u činjenici da posmatramo mala pomeranja tačaka sistema u odnosu na njihove ravnotežne položaje, tako da u slučaju malih vrednosti za x, x^2 je jako mala veličina (kao i svi ostali viši članovi reda) te se može zanemariti. Imajući ovo u vidu, deformacija Δl data izrazom (2.9.2) se približno može predstaviti na sledeći način:

$$\Delta l \approx \frac{e}{\sqrt{d^2+e^2}} x = x \sin\alpha \tag{2.9.3}$$

Ugao α je konstantna veličina, jer je to ugao kojeg pravac opruge zaklapa sa vertikalnim pravcem u ravnotežnom položaju. Takođe, treba primetiti da $x \sin\alpha$ opisuje projekciju B_0D koordinate x na pravac koji zauzima štap u nedeformisanom položaju (Slika 2.9.1 b). Ovo ukazuje da se do uspostavljanja linearne veze između deformacije elastičnog štapa i koordinate koja definiše pomeranje slobodne tačke štapa može doći direktnim korišćenjem relacije date izrazom (2.9.3), uz napomenu da ovde ne postoji prethodno prednaprezanje elastičnog štapa, te se koordinata x meri od ravnotežnog položaja.

Znači, sa izrazom (2.9.3) je uspostavljena linearna veza između deformacije i koordinate x. Sada se može uspostaviti veza između sile u opruzi i koordinate x koja će takođe biti linearna

$$F_k = k\Delta l = k \sin\alpha \; x \tag{2.9.4}$$

Imajući u vidu izraz (2.9.4), projekcija elastične sile (kao uticaja opruge na klizač), na pravac kretanja je

$$F_{kx} = F_k \sin\alpha = k \sin^2\alpha \,. \tag{2.9.5}$$

Na ovom mestu treba primetiti da se prilikom projektovanja elastične sile u proizvoljnom položaju tokom kretanja na horizontalni pravac, usvojilo da pravac AB (vidi sliku 2.9.1b) obrazuje ugao α sa vertikalom, iako je jasno da je došlo do određene promene ugla u odnosu na ravnotežni pravac. Zanemarivanje ove promene je upravdano ukoliko je dužina elastičnog štapa l_0 mnogo veća od koordinate x, tako da se pomenuta promena ugla α može zanemariti.

Ovde se može demonstrirati i metod ekvivalencije. Naime, oscilatorni sistem sa Slike 2.9.1a) se može predstaviti sa njemu ekvivalentnim sistemom masa-opruga prikazanim na Slici 2.2.1 gde je ekvivalentna krutost, $k_{ekv} = k \sin^2\alpha$. Sopstvena kružna frekvencija oscilatornog sistema sa Slike 2.9.1 glasi

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k \sin^2\alpha}{m}} \,. \tag{2.9.6}$$

U slučaju horizontalne opruge (kada je α=90°) tada se potvrđuje izraz (2.4.3). Izraz (2.9.6) ukazuje uticaj koji pravac eleastičnog štapa ima na frekvenciju. Najveća vrednost frekvencije bi bio kada bi se pravac elastičnog štapa poklapao sa pravcem kretanja oscilatora (kada je α = 90°). Sa smanjenjem ugla α (tj. sa povećanjem ugla kojeg štap obrazuje sa pravcem oscilovanja) se smanjuje i frekvencija oscilovanja. Fizićki smisao ovoga je da se, sa smanjenjem α, smanjuje i komponenta elastične sile u pravcu oscilovanja, a samim tim i “doprinos” elastične sile na oscilatorno kretanje.

DO NOT COPY

Treba naglasiti da i ovaj primer pripada tipu oscilatornih problema gde se oscilovanje vrši oko ravnotežnog položaja u kojem je elastični element (ili elementi) nedeformisan. Naredna sekcija će se baviti oscilatornim problemima za koje je karakteristično da postoji deformacija elastičnih elemenata usled dejstva stalno prisutne konstantne sile, kao što je sila težine.

Primer 2.9.2 Koristeći energijski koncept, za sistem iz **Primera 2.9.1**, odrediti kružnu frekvenciju malih oscilacija.

Diskusija rešavanje Primera 2.9.1: Kinetička energija je $E_k = (1/2)m\dot{x}^2$. Potencijalna energija sistema je usled elastične sile i ona glasi

$$E_p = \frac{1}{2}k(\Delta l)^2 = \frac{1}{2}k\left(\sqrt{d^2+(e+x)^2} - \sqrt{d^2+e^2}\right)^2 \tag{2.9.7}$$

Imajući izraze za kinetičku i potencijalnu energiju, može se sada primeniti, na primer, teorema o promeni kinetičke energije, zakon o održanju mehaničke energije ili Lagranževa jednačina druge vrste (LJ2V). Iskoristićemo ovaj primer da ilustrujemo primenu ovog drugog. Imajući u vidu da ne postoje nepotencijalna dejstva, generalisana sila se određuje na osnovu potencijalne energije date izrazom (2.9.7). Uvrštavanjem odgovarajućih izvoda u opšti oblik (LJ2V)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial E_k}{\partial x} = -\frac{\partial E_p}{\partial x} \tag{2.9.8}$$

Dobija se tačna diferencijalna jednačina oscilovanja sistema sa Slike 2.9.1, koja glasi:

$$m\ddot{x} + k(e+x)\left(1 - \frac{\sqrt{d^2+e^2}}{\sqrt{d^2+(e+x)^2}}\right) = 0 \tag{2.9.9}$$

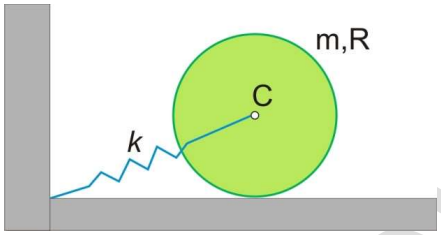
Kao što se vidi, restituciona sila u (2.9.9) je nelinearna, tako da i jednačina (2.9.9) spada u klasu nelinearnih ODJ. Linearizacijom drugog člana u (2.9.9), dobija se približna jednačina malih oscilacija:

$$m\ddot{x} + k\frac{e^2}{d^2+e^2}x = 0 \rightarrow m\ddot{x} + k(\sin\alpha)^2\ x = 0, \tag{2.9.10}$$

čime je potvrđen rezultat dobijen u Primeru 2.9.1.

DO NOT COPY

Primer 2.9.3 Disk mase m vrši male oscilacije tako što se kotrlja bez klizanja po horizontalnoj nepokretnoj podlozi. Za centar diska je vezana opruga krutosti *k*. Usvojiti da je poznat moment inercije diska za osu koja je normalna na ravan diska i prolazi kroz njegov centar i iznosi J. Odrediti sopstvenu frekvenciju malih oscilacija ovog sistema.



Slika 2.9.2

Diskusija i rešavanje Primera 2.9.2 Jedina razlika u odnosu na slučaj iz Primera 2.7.1 je u tome što pomeranje krajnje tačke elastičnog elementa nije na pravcu kretanja centra diska C. U smislu izraza (2.7.2), imenioc ostaje isti, ali se menja izraz u brojiocu. Kružna frekvencija sistema sa Slike 2.9.2 će biti manja u odnosu na sistem sa Slike 2.7.1, za iste parametre m i *k*.

2.10 Oscilacije kada postoji stalno prisutno konstantno dejstvo ili dejstvo čiji je period mnogo veći od perioda oscilacija

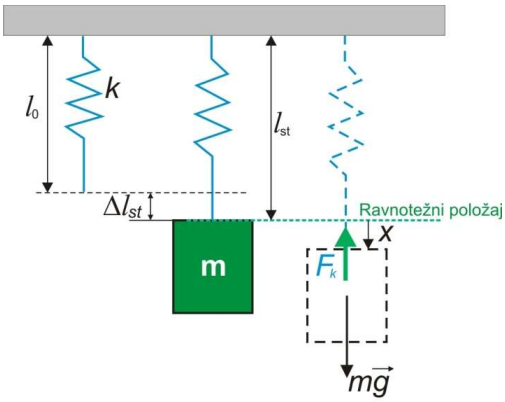
U brojnim praktičnim problemima, u oscilatornim sistemima postoji statička deformacija elastičnih tela izazvana dejstvom sila težina elemenata sistema.

Podsećamo da je sila težine jedna od najvažnijih konstantnih sila u inženjerstvu i predstavlja specijalan slučaj gravitacione sile. Za probleme od značaja u ovoj knjizi, usvajamo da je sila težine konstantnog intenziteta, pravca i smera.

Da ne bude zabune, i u ranijim problemima koje smo razmatrali je postojala sila težine, ali njeno dejstvo nije bilo od značaja jer se oscilovanje vršilo u horizontalnom pravcu, u pravcu u kojem sila težine ne može da vrši rad. Ukoliko se oscilovanje vrši u bilo kom pravcu koji nije horizontalan, postojaće dejstvo sile težine, tj. postojaće dejstvo njene komponente u pravcu kretanja.

Analizu ćemo započeti sa HO, ali koji sada osciluje u vertikalnom pravcu. U svrhu mehaničkog modela posmatramo telo mase m koje je okačeno pomoću opruge krutosti *k*. Pretpostavljamo da se kretanje odvija samo u verikalnom pravcu, tj. da nema kretanja u horizontalnom pravcu.

DO NOT COPY



Slika 2.10.1

U ovom slučaju sila težine dejstvuje u pravcu kretanja. Uvešće se pravolinijska koordinata *x*, sada u vertikalnom pravcu, koja će se, kao i ranije, meriti u odnosu na ravnotežni položaj. Međutim, u ovom slučaju, u ravnotežnom položaju u kojem telo može da miruje, **opruga je deformisana**. Telo u stanju mirovanja u ravnotežnom položaju održavaju dve vertikalne sile. Sila težine, koja je usmerena na dole i sila u opruzi koja dejstvuje naviše. Tada važi:

$$m\vec{g} + \vec{F}_k^{st} = 0\,. \tag{2.10.1}$$

Sa $\vec{F}_k^{st}$ je obeležena sila u opruzi u stanju mirovanja. Koristeći da je intenzitet sile u opruzi u stanju mirovanja, $F_k^{st} = k\,\Delta l_{st}^G$, gde smo sa Δl_{st}^G označili deformaciju opruge u ravnotežnom položaju usled dejstva sile težine. Na osnovu (2.10.1) (statički uravnotežen sistem kojeg čine dve sile), sledi da je $mg = k\,\Delta l_{st}^G$, odakle je veličina deformacije opruge u ravnotežnom položaju (statička deformacija):

$$\Delta l_{st}^G = \frac{mg}{k}\,. \tag{2.10.2}$$

Neka se telo dovede u oscilatorno kretanje duž vertikalnog pravca. Primenjujući drugi Njutnov zakon za telo u proizvoljnom položaju, dolazi se do sledeće jednačine:

$$m\,\ddot{x} = mg - F_k\,. \tag{2.10.3}$$

Korišćenjem $F_k = k\,\Delta l = k\left(\Delta l_{st}^G + x\right)$ i uvrštavanjem u izraz (2.10.3) dobija se

$$m\,\ddot{x} = mg - k\left(\Delta l_{st}^G + x\right) \rightarrow m\,\ddot{x} + k\,x = 0. \tag{2.10.4}$$

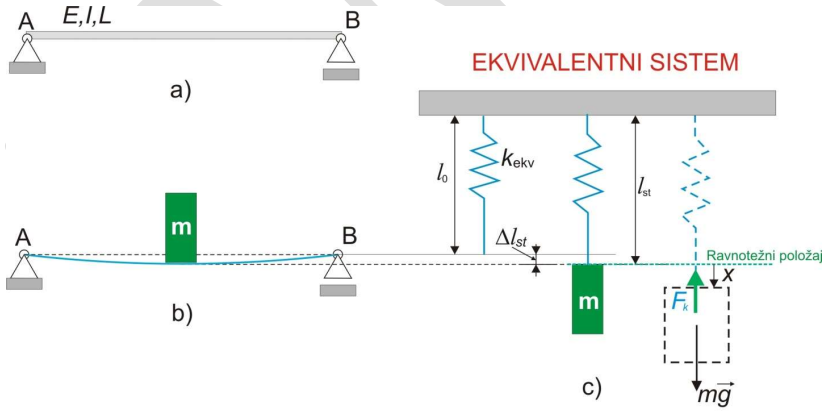
DO NOT COPY

Kao što se vidi, matematički model oscilovanja tela na vertikalnoj opruzi definisan jednačinom (2.10.4) je isti kao i u slučaju oscilovanja tela po glatkoj horizontalnoj podlozi, podrazumevajući da se generalisana koordinata meri u odnosu na ravnotežni položaj. Sila težine ne figuriše u ovoj jednačini. Jedini značajan uticaj koji sila težine ima u ovom slučaju je taj što pomera ravnotežni položaj na dole (u pravcu njenog dejstva). Ovo u suštini znači da se pomera položaj u odnosu na koji se vrši oscilovanje. Pri tome, taj položaj u odnosu na koji sistem vrši oscilovanje ostaje (apsolutno) nepokretan (zbog dejstva konstantne sile), što znači da se u odnosu na njega može uvesti generalisana koordinata čiji drugi izvod predstavlja apsolutno ubrzanje.

Od značaja je naglasiti da ovde sila težine **nema uticaja na restitucionu silu**. Restituciona sila u razmatranom oscilatornom problem potiče samo od elastične sile. Dakle, izraz za sopstvenu kružnu frekvenciju oscilatora sa Slike 2.10.1 će biti u potpunosti isti kao i u slučaju oscilatora sa Slike 2.2.1. Kažemo da sila težine ne utiče na način (mod) oscilovanja tela sa Slike 2.10.1., odnosno, ne utiče na frekvenciju oscilovanja.

Prethodno razmatranje, kada se oscilovanje vrši u vertikalnom pravcu se na sličan način može primeniti i na oscilovanje tela u bilo kojem drugom pravcu koji nije horizontalan i gde je pravac elastičnog elementa (opruge) na pravcu oscilovanja (kao što je npr. sistem na Slici 2.10.8a). Jedina razlika će biti intenzitet uticaja sile težine preko njene komponente na pravac mogućeg pomeranja, a što će se odraziti na veličinu statičke defpormacije Δl_{st}^{G}.

Primer 2.10.1. Telo mase m je postavljeno na sredinu lake elastične proste grede (Slika 2.10.2). analizirati način oscilovanja, kao i sopstvenu kružnu frekvenciju oscilovanja modelujući elastičnost proste grede preko njoj ekvivalentne linijske opruge. Rastojanje između oslonaca je L. Poznat je moduo elastičnosti materijala grede E, kao i moment inercije I poprečnog preseka grede.



Slika 2.10.2.

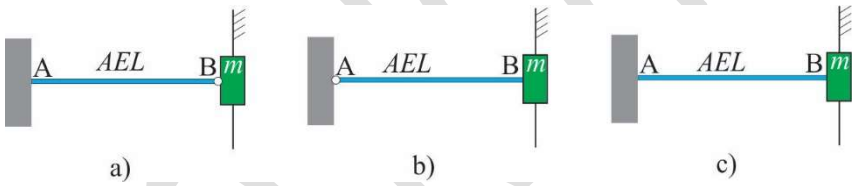
Diskusija i rešavanje Primera 2.10.1 Postavljanjem tela na elastičnu gredu, doći će do njenog ugiba i telo može mirovati u ravnotežnom položaju. Elastična linija grede u ravnotežnom položaju je označena plavom bojom i njen oblik je određen relacijom poznatom iz Otpornosti materijala (prosta greda opterećena koncentrisanom silom, u ovom slučaju silom čiji je intenzitet mg). Ograničavamo se na male deformacije, kao i na male oscilacije oko ravnotežnog položaja.

Sistem *masa-greda* može biti predstavljen ekvivalentnim sistemom *masa–*(vertikalna) *opruga*, kako je prikazano na Slici 2.10.2 c). Ekvivalentna krutost se određuje na osnovu veze između ugiba elastične grede na njenoj sredini i sile koja dejstvuje na tom mestu:

$$F = \frac{48EI}{L^3}\delta \rightarrow k_{\text{ekv}} = \frac{48EI}{L^3} \tag{2.10.5}$$

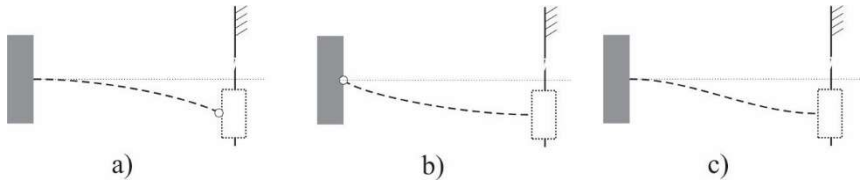
Formiranjem ekvivalentnog sistema, dalje se analiza i razmatranje vrši kao što je prethodno pokazano za oscilovanje tela na vertikalnoj opruzi.

Primer 2.10.2. Za kraj B lakog i elastičnog grednog nosača je postavljen teški klizač mase m koji se može kretati po vertikalnoj glatkoj vođici. Odrediti kružnu frekvenciju oscilovanja sistema laka greda-klizač za tri različita načina vezivanja: a) greda je krajem A ukleštena za nepokretnu krutu podlogu, a klizač je za gredu vezan zglobno; b) greda je za podlogu vezana zglobno, a na kraju B je ukleštenje (pokretno ukleštenje); c) greda je ukleštena i za nepokretnu podlogu (nepokretno ukleštenje), a takođe je ukleštenje i na mestu spoja sa klizačom (pokretno ukleštenje).



Slika 2.10.3

Diskusija i rešavanje Primera 2.10.2: Sa stanovišta Teorije oscilacija, ovaj problem u prvoj aproksimaciji možemo posmatrati kao oscilovanje teškog klizača gde se restituciona sila generiše na osnovu deformacije grednog nosača. Pri tome, prikazani slučajevi se razlikuju međusobno samo po ekvivalentnoj krutosti, a koja proizilazi iz načina vezivanja grede za krutu podlogu kao i za teški kruti klizač. Za određivanje ekvivalentnih krutosti koristimo prilaz iz Otpornosti materijala odakle je poznato da je ugao nagiba elastične linije na mestu ukleštenja jednak nuli (ukleštenje sprečava rotaciju), dok zglobna veza dozvoljava rotaciju preseka (Slika 2.10.4).



Slika 2.10.4

a) Ekvivalentna krutost je $k_{\text{ekv}} = \dfrac{3EI}{L^3}$, pa je kružna frekvencija $k_{\text{ekv}} = \sqrt{\dfrac{3EI}{mL^3}}$;

b) U ovom slučaju je ekvivalentna krutost kao pod a);

c) Ekvivalentna krutost je $k_{\text{ekv}} = \dfrac{12EI}{L^3}$, pa je kružna frekvencija $k_{\text{ekv}} = \sqrt{\dfrac{12EI}{mL^3}}$.

Kao što se može primetiti, slučajevi pod a) i b) odgovaraju nosaču koji je na jednom kraju uklešten a na drugom slobodan, tj. konzoli. U slučaju pod c), kada je gredni nosač uklešten na oba kraja, krutost je četiri puta veća nego kod konzole, tj. u odnosu na slučajeve pod a) i b), tako da se to onda odražava i na kružnu frekvenciju. Znači, za iste parametre, u slučaju pod c) kružna frekvencija će biti dva puta veća u odnosu na slučajeve pod a) i b) $*$

Matematički model oscilovanja tela na vertikalnoj opruzi (Slika 2.10.1) se može odrediti i primenom zakona o održanju mehaničke energije. U ovom slučaju, za razliku od oscilovanja tela na horizontalnoj podlozi, potrebno je uzeti u obzir sledeće:

- U izrazu za potencijalnu energiju opruge je potrebno uzeti u obzir i statičku deformaciju opruge;
- Potrebno je uzeti u obzir i potencijalnu energiju sile težine;

Imajući ovo u vidu, sledi:

$$E_k = \frac{1}{2} m \dot{x}^2, \; E_p = E_p^k + E_p^{mg} = \frac{1}{2} k \left(\Delta l_{\text{st}}^G + x \right)^2 - mgx = \frac{1}{2} k \left(\Delta l_{\text{st}}^G \right)^2 + k \, \Delta l_{\text{st}}^G \, x + \frac{1}{2} k \, x^2 - mgx \tag{2.10.6}$$

Ukupna potencijalna energija sistema ima sledeći oblik:

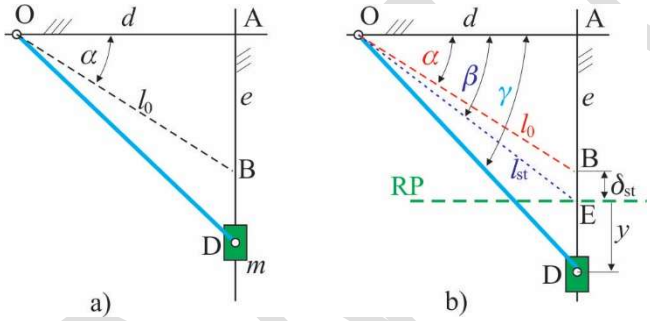
$$E_p = \frac{1}{2} k \, \Delta l_{st}^2 + \left(k \, \Delta l_{\text{st}}^G - mg \right) x + \frac{1}{2} k \, x^2 = \frac{1}{2} k \left(\Delta l_{\text{st}}^G \right)^2 + \frac{1}{2} k \, x^2 \tag{2.10.7}$$

DO NOT COPY

Znači, u konačnom izrazu za potencijalnu energiju ne figuriše član koji linearno zavisi od x, tj. ne figuriše član $\left(k\,\Delta l_{st} - mg\right)x$ jer je $mg = k\,\Delta l_{\mathrm{st}}^{G}$, tako da je taj član jednak nuli. Međutim, u krajnjem izrazu za potencijalnu energiju figuriše sada i konstantni član $(1/2)k\left(\Delta l_{\mathrm{st}}^{G}\right)^2$ koji predstavlja vrednost potencijalne energije u ravnotežnom položaju, a koja potiče od statičke deformacije opruge. Nulti nivo potencijalne energije sile težine je usvojen u ravnotežnom položaju.

Uzimajući u obzir da važi $E_k + E_p = const$, i primenjujući izvod po vremenu ovog izraza (imajući u vidu da je $(1/2)k\left(\Delta l_{\mathrm{st}}^{G}\right)^2 = const$), dolazi se do matematičkog modela oscilovanja u obliku (2.10.4).

Primer 2.10.3 Teški klizač mase m može da se kreće po vertikalnoj vođici. Za klizač je vezan laki elastični štap čiji je drugi kraj O vezan za nepokretnu podlogu. Za poznate karakteristike štapa (površina poprečnog preseka A, moduo elastičnosti E, dužina nedeformisanog štapa l_0) odrediti frekvenciju oscilovanja prikazanog sistema. Ugao kojeg štap u nedeformisanom položaju obrazuje sa horizontalnim pravcem iznosi α.



Slika 2.10.5

Diskusija i rešavanje Primera 2.10.3: Ovo je modifikovan problem iz **Primera 2.9.1**, zaokrenut za 90°. U ovom slučaju, u ravnotežnom položaju postoji statička deformacija $\Delta l_{\mathrm{st}}^{G}$ elastičnog štapa. Razlika u odnosu na problem oscilovanja na vertikalnoj opruzi (sa Slike 2.10.1) je pravac elastičnog štapa koji se u ovom slučaju ne poklapa sa pravcem oscilovanja.

Koristićemo energijski prilaz. U tu svrhu, određujemo izraz za potencijalnu energiju sistema, koja potiče od deformacije elastične sile, kao i od sile težine klizača:

$$E_{\mathrm{p}} = \frac{1}{2}k\left(\sqrt{d^2 + \left(e + \delta_{\mathrm{st}}^{G} + y\right)^2} - \sqrt{d^2 + e^2}\right)^2 - mgy. \qquad (2.10.8)$$

Sa je δ_{st}^{G} označeno pomeranje klizača iz položaja u kojem je štap nedeformisan u ravnotežni položaj, usled dejstva sile težine klizača. Primenjujući Lagranževu jednačinu druge vrste, imajući u vidu da je kinetička energija $E_k = (1/2)m\dot{y}^2$, te na osnovu (2.10.8), dobija se diferencijalna jednačina kretanja

$$m\ddot{y} + k\left(e + \delta_{\mathrm{st}}^{G} + y\right)\left(1 - \frac{\sqrt{d^2 + e^2}}{\sqrt{d^2 + \left(e + \delta_{\mathrm{st}}^{G} + y\right)^2}}\right) - mg = 0 \qquad (2.10.9)$$

Diferencijalna jednačina (2.10.9) predstavlja tačnu jednačinu kretanja i ona je nelinearna. Razvojem u red drugog člana izraza (2.10.9) i zadržavanjem samo članove reda do linearnog, sledi

$$\underbrace{m\ddot{y} + k\left(e + \delta_{st}\right)\left(1 - \frac{\sqrt{d^2 + e^2}}{\sqrt{d^2 + \left(e + \delta_{st}\right)^2}}\right) - mg}_{0} +$$

$$+k\left(1 - \underbrace{\left(\frac{d^2}{\left(d^2 + \left(e + \delta_{st}\right)^2\right)}\right)}_{\cos^2\alpha}\underbrace{\frac{\overbrace{\sqrt{d^2 + e^2}}^{l_0}}{\sqrt{d^2 + \left(e + \delta_{st}\right)^2}}}_{l_{st}}\right)y = 0 \qquad (2.10.10)$$

U jednačini (2.10.10), drugi i treći član su se poništili, jer se radi o uravnoteženim silama, sili težine i komponenti elastične sile u ravnotežnom položaju:

$$mg = k\,\Delta l_{st}^{G}\sin\beta \rightarrow mg = k\left(l_{st} - l_0\right)\sin\beta \rightarrow$$

$$mg = k\left(\sqrt{d^2 + \left(e + \delta_{st}\right)^2} - \sqrt{d^2 + e^2}\right)\frac{e + \delta_{st}}{\sqrt{d^2 + \left(e + \delta_{st}\right)^2}} \qquad (2.10.11)$$

Sa ovim, jednačina (2.10.10) postaje

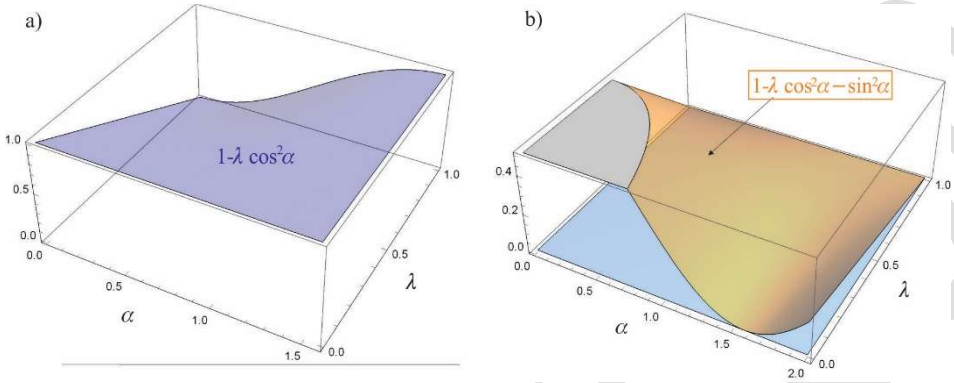
$$m\ddot{y} + k\left(1 - \lambda\cos^2\alpha\right)y = 0 \qquad (2.10.12)$$

Gde je sa λ označen količnik dužine nedeformisanog štapa l_0 i dužine štapa u ravnotežnom položaju l_{st}, $\lambda = l_0/\,l_{\mathrm{st}}$.

Uporedimo sada restitucionu silu iz ovog primera, sa restitucionom silom iz **Primera 2.9.1** (klizač se kreće po horizontalnoj vođici, tako da nema δ_{st}^{G}). U tom

DO NOT COPY

primeru, restituciona sila je data izrazom (2.9.5) i jednaka je $F_{\mathrm{r}}^{\mathrm{H}} = k \sin^2 \alpha\, x$ (indeks H ukazuje da se oscilovanje vrši u horizontalnom pravcu), a za sistem sa Slike 2.10.5, dobili smo da je $F_{\mathrm{r}}^{\mathrm{V}} = k\left(1 - \lambda \cos^2 \alpha\right) y$. Najpre, treba primetiti da u slučaju da je λ = 1, što fizički znači da nema statičke deformacije, i da se u suštini svodi na problem iz **Primera 2.9.1**, radi se o oscilovanju po horizontalnom pravcu, tako da je $F_{\mathrm{r}}^{\mathrm{V}} \equiv F_{\mathrm{r}}^{\mathrm{H}} = k \sin^2 \alpha\, x$.



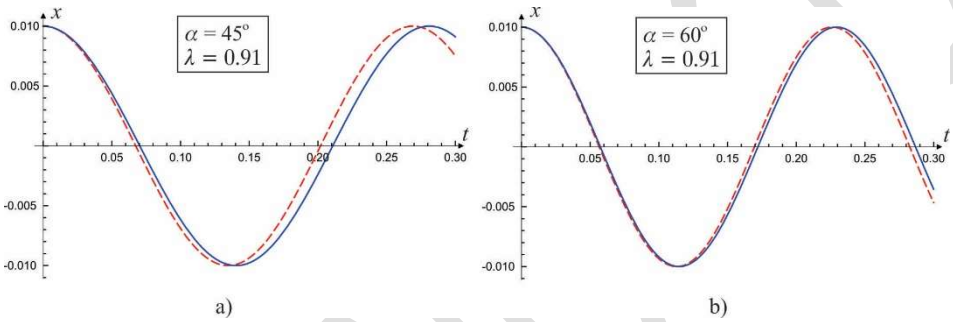
Slika 2.10.6

U slučaju da je α = 90°, tada je $1 - \lambda \cos^2 \alpha = 1$, odakle sledi $F_{\mathrm{r}}^{\mathrm{V}} = k\, y$, što odgovara oscilovanju tela na vertikalnoj opruzi i gde je onda statička deformacija (iako postoji) irelevantna za kružnu frekvenciju. Treba naglasiti da predstavljena analiza, kao i dobijeni izraz $F_{\mathrm{r}}^{\mathrm{V}} = k\left(1 - \lambda \cos^2 \alpha\right) y$, važe za $\alpha \neq 0$. Ukoliko je α = 0, pravac opruge je u pravcu oscilovanja, i to je ranije već razmatrano (već kod HO sa Slike 2.2.1).

Znači izraz za restitucionu silu $F_{\mathrm{r}}^{\mathrm{V}} = k\left(1 - \lambda \cos^2 \alpha\right) y$, koristimo kada se pravac elastičnog štapa (opruge) ne poklapa sa pravcem oscilovanja i kada postoji statička deformacija opruge, tj. kada je λ < 1. Uticaj parametara α i λ na restitucionu silu je prikazan na dijagramu na Slici 2.10.6a). Najveća vrednost restitucione sile je kada je izraz u zagradi, tj. izraz $1 - \lambda \cos^2 \alpha$ jednak jednici, a što bi u ovom slučaju predstavljalo graničnu vrednost. Vrednosti ugla α koje su manje od 90° znače da se restituciona sila smanjuje u odnosu na graničnu vrednost $F_{\mathrm{r}}^{\mathrm{V}} = k\, y$. Povećanjem ugla α smanjuje se cosα, a što doprinosi da se $1 - \lambda \cos^2 \alpha$ povećava. Znači veće vrednosti za α utiču i na veću vrednost restitucione sile kao i na veću frekvenciju i obrnuto. Uticaj statičke deformacije je preko parametra λ. Što je veća statička deformacija, veća je l_{st} tako da se λ smanjuje, te restituciona sila raste prema graničnoj vrednosti $F_{\mathrm{r}}^{\mathrm{V}} = k\, y$. Na Slici

2.10.7 su punom plavom linijom prikazani dijagrami za kretanje za dva različita ugla α, α = 45° i α = 60° iza istu vrednost λ = 0.91 (ostali parametri: m = 10 kg, k = 10 000 N/m), gde se može uočiti smanjenje frekvencije usled smanjenja α.

Na istim dijagramima (Slika 2.10.6) crvenom isprekidanom linijom su prikazani grafici za kretanje, gde je restituciona sila određena korišćenjem relacije $F_r = k\sin^2\alpha\, x$, tj. bez uzimanja u obzir statičke deformacije. Relativno mala razlika u frekvenciji oscilovanja, gde se ta razlika dalje smanjuje sa povećanjem ugla α, ukazuje na mogućnost da se prilikom određivanja restitucione sile, zanemari postojanje statičke deformacije i umesto izraza $F_{\mathrm{r}}^{\mathrm{V}} = k\left(1-\lambda\cos^2\alpha\right)y$ koristi izraz $F_{\mathrm{r}}^{\mathrm{V}} = k\sin^2\alpha\, y$, kako je korišćeno u Sekciji 2.9. Na primer, u slučaju sa Slike 2.10.7s) relativna razlika između frekvencija je Δ = 4.21%, dok je za slučaj sa Slike 2.10.7b) ta razlika Δ = 1.46%. Inače, statička deformacija je vrlo često mala u većini inženjerskih sistema.



Slika 2.10.7

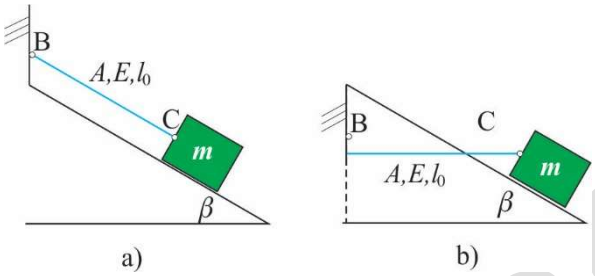
Zanemarujući razliku između uglova α i β (slika 2.10.5b), veličina statičke deformacije elastičnog elementa može biti određena na osnovu izraza (2.10.11), tako da sledi:

$$\Delta l_{st}^{G} \approx \frac{mg}{k\sin\alpha}. \qquad (2.10.13)$$

Poređenjem (2.10.13) sa (2.10.2) se konstatuje da u slučaju kada pravac elastičnog tela nije u pravcu oscilovanja, veličina statičke deformacije je veća. U slučaju da pravac oscilovanja nije vertikalan, već je pod nekim uglom β (vidi Sliku 2.10.8b), veličina statičke deformacije se može proceniti prema sledećem izrazu:

$$\Delta l_{st}^{G} \approx \frac{mg\sin\beta}{k\sin\alpha}. \qquad (2.10.14)$$

Primer 2.10.4 Za koja od prikazana dva oscilatorna sistema će kružna frekvencija biti veća? Obrazložiti odgovor. Napisati čemu je jednaka kružna frekvencija u svakom od prikazanih sistema. Da li frekvencija zavisi od sile težine? Poznate su dužine l_{st} elastičnog štapa u ravnotežnim položajima. U kojem slučaju će statička deformacija biti veća?



Slika 2.10.8

Diskusija i rešavanje Primera 2.10.4: Kružna frekvencija će u slučaju pod a) biti veća i iznosi: $\omega_n = \sqrt{\dfrac{AE}{m\,l_0}}$ i ona ne zavisi od statičke deformacije. U slučaju prikazanom na Slici 2.10.8b), kružna frekvencija je $\omega_n = \sqrt{\dfrac{AE\left(1-\dfrac{l_0}{l_{st}}\sin^2\beta\right)}{m\,l_0}}$. Ovaj primer ukazuje jedan od načina da se za iste parametre nekog sistema (m i k) promenom geometrije utiče na smanjenje ili povećanje sopstvene frekvencije oscilovanja.

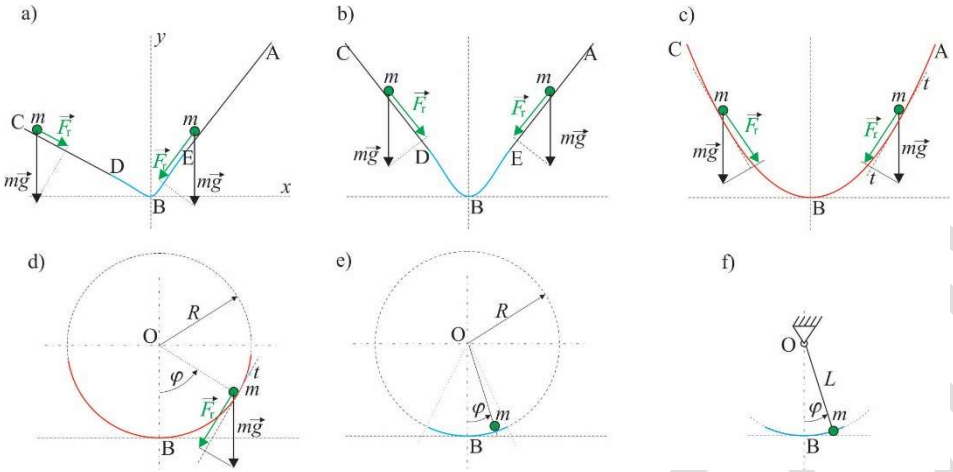
Statička deformacija je u slučaju pod b) veća. Znači, izborom pogodne geometrije se, kao što je prikazano na slici 2.10.8b) može uticati na smanjenje sopstvene frekvencije oscilovanja, ali je tada statička deformacija usled sile težine veća nego u slučaju prikazanom na Slici 2.10.8a).∗

2.11 Slučaj kada sila težine utiče na restitucionu silu

2.11.1 Uvod

Do sada razmatrani primeri oscilovanja tela po horizonalnoj ravni kao i u vertikalnom pravcu (oscilovanje na vertikalnoj opruzi) ili po pravcu koji je pod proizvoljnim uglom u odnosu na horizontalu, pokazali su da se oscilatorno kretanje ostvaruje samo usled elastične sile. Drugim rečima, restituciona sila kao neophodan uslov oscilatornog kretanja u ovim slučajevima postoji samo usled deformacije elastičnih tela u sistemu.

DO NOT COPY



Slika 2.11.1

Pored elastične sile, na oscilatorno kretanje sistema, može, između ostalog da utiču i sile zemljine teže elemenata sistema. Znači, restituciona sila u nekom oscilatornom sistemu može da potiče samo usled elastičnih sila ili samo usled sila težina, ili od jednih i drugih zajedno. Naravno, mogu i neke druge sile da utiču na restitucionu silu (kao na primer sila potiska vode …), ali to se neće posebno razmatrati u ovoj knjizi. Sile težine i elastične sile kao uzroci restitucione sile, pokrivaju velik deo problema od inženjerskog značaja. Osim toga, kada se razumeju uticaji ovih dveju sila na oscilatorne procese, uzimanje u obzir nekih drugih sila na oscilatorni proces se sprovodi na sličan način.

Na Slici 2.11.1 je prikazano nekoliko slučajeva oscilatornog kretanja gde restituciona sila potiče samo od sile težine. Na slici 2.11.1a) materijalna tačka (ili klizač) se može kretati po nepokretnoj vođici koja je sačinjena od dva pravolinijska dela (AE i CD) I krivolinijskog dela EBD. Ukoliko se tačka pusti da se slobodno kreće, na primer, sa pravolinijskog dela AE, intuitivno možemo pretpostaviti da će tačka ići prema najnižem položaju (B), proći kroz ovaj položaj, preći na drugu stranu, popeti se na pravolijski deo DC, zaustaviti se, a zatim ponovo krenuti prema B, preći na drugu stranu itd. Oscilatorno kretanje je moguće. Ovde treba naglasiti da između dva pravolinijska dela mora postojati krivolinijski deo oko položaja B. U suprotnom, vođica ABC bi na mestu B bila neglatka, i prelaz sa jedne na drugu stranu ne bi bio moguć (podsetimo se kinematike: vektor brzine tačke uvek je na pravcu tangente na trajektoriju, tako da, u položaju B, tangenta neposredno pre i neposredno posle B mora biti jednaka). Na Slici 2.11.1a) su prikazana dva položaja, na istom nivou, sa suprotnih strana. Treba primetiti komponente sile težine na pravac kretanja, $\vec{F}_{\mathrm{r}}$. Ove komponente sile težine na pravac kretanja su u bilo kom položaju tokom kretanja uvek usmerene ka ravnotežnom položaju B i **predstavljaju restitucionu silu**.

Na Slici 2.11.1b) je prikazana simetrična vođica ABC, koja se kao i pod a) sastoji iz dva pravolinijska i jednog krivolinijskog dela. Za razliku od slučaja pod b), na istom nivou, restituciona sila je jednaka. Na Slici 2.11.1c), vođica je krivolijska i ima osu simetrije koja prolazi kroz najniži položaj B. Kružna vođica, prikazana na Slici 2.11.1d) je veoma česta u inženjerstvu i u oscilatornim procesima. Umesto velikih oscilacija koje tačka po kružnoj vođici može da izvodi na Slici 2.11.1d), u ovoj knjizi se ograničavamo na male oscilacije oko ravnotežnog položaja, kako je prikazano na Slici 2.11.1e). Konačno, slično kretanju tačke po kružnoj vođici, kretanje po kružnici izvodi i tačka klatna, kako je prikazano na Slici 2.11.1f).

2.11.2 Oscilovanje klatna

U prethodnom delu su razmatrani slučajevi kada sila težine nema uticaja na restitucionu silu. Sada će se razmotriti tipičan oscilatorni sistem u kojem sila težine generiše restitucionu silu. To je klatno (Slika 2.11.2). Teška materijalna tačka je okačena pomoću užeta ili lakog štapa. Pretpostavlja se da je uže nerastegljivo ili da je štap lak i krut (idealna veza- kinematička veza) U ovom slučaju, materijalna tačka se kreće po krivolinijskoj putanji, tj. po kružnici (po jednom njenom delu). Za generalisanu koordinatu je ovde pogodno usvojiti ugaonu koordinatu φ koja se meri u odnosu na vertikalni pravac. Treba primetiti da $\varphi = 0$ odgovara ravnotežnom (najnižem) položaju u kojem materijalna tačka može da miruje. Takođe, to je ujedno i **stabilan** ravnotežni položaj. Podseća se, da u slučaju oscilatornog kretanja, tačke sistema se kreću (oscilatorno) oko svojih stabilnih ravnotežnih položaja.

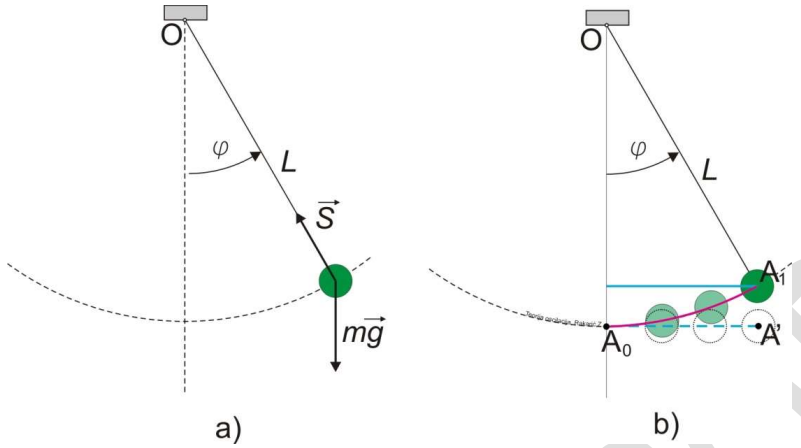
Primenjujući drugi Njutnov zakon na pravac tangente, dobija se

$$m\,L\,\ddot{\varphi} = -m\,g\sin\varphi \;\rightarrow\; mL\,\ddot{\varphi} + mg\sin\varphi = 0\,. \qquad (2.11.1)$$

Jednačina (2.11.1) je nelinearna diferencijalna jednačina. Analitičko rešavanje nelinearnih diferencijalnih jednačina se neće posebno razmatrati u ovoj knjizi. Razmatraće se samo analitička rešenja linearnih diferencijalnih jednačina. Iz tog razloga, u slučajevima kada se tokom rešavanja problema pojave nelinearne diferencijalne jednačine, uobičajeno je da se vrši njihova “linearizacija”. Linearizacija, sa kojom smo se već upoznali u Sekciji 2.9, se vrši tako što se u nelinearnim diferencijalnim jednačinama, nelinearne funkcije po generalisanoj koordinati (ili po njenim izvodima) razvijaju u red u okolini ravnotežnog položaja i zadržavaju samo linearni članovi na osnovu izraza (2.9.1).

U nelinearnoj diferencijalnoj jednačini (2.11.1), nelinearna funkcija je $\sin\varphi$. Razvoj funkcije $\sin\varphi$ u red (uzimajući samo prva dva člana), glasi:

$$\sin\varphi \approx \varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \ldots \qquad (2.11.2)$$



Slika 2.11.2

Linearizacija funkcije $\sin\varphi$ znači da se ona tada predstavlja samo sa prvim članom reda, φ. Uvrštavanjem $\sin\varphi \approx \varphi$ u jednačinu (2.11.1) sledi

$$mL\ddot{\varphi} + mg\,\varphi = 0 \tag{2.11.3}$$

Strukturno, diferencijalna jednačina (2.11.3) odgovara u potpunosti jednačini (2.2.5) budući da je i jednačina (2.11.3) linearna homogena diferencijalna jednačina drugog reda sa konstantnim koeficijentima. Pri tome, treba imati u vidu da je jednačina (2.11.3) po ugaonoj, a jednačina (2.2.5) po linijskoj koordinati. Sve što je rečeno za rešavanje jednačine (2.2.5), sada može biti iskorišćeno i za jednačinu (2.11.3). Treba ukazati i na vezu jednačine (2.11.3) sa jednačinom (2.7.1). Da bi se uspostavila analogija sa jednačinom (2.2.5) u kojoj je inercijalni koeficijent bila masa, može se jednačina (2.11.3) pomnožiti sa L. U tom slučaju, jednačina (2.11.3) postaje

$$\underbrace{mL^2}_{J_{/z}}\ddot{\varphi} + mgL\,\varphi = 0, \tag{2.11.4}$$

gde je $J_{/z}$ sa obeležen maseni moment inercije tačke za osu cilindričnog zgloba O koji pored mase m zavisi i od rastojanja tačke do ose obrtanja. Znači, u jednačini (2.11.4) inercijalni koeficijent je maseni moment inercije tačke za osu čije su jedinice Nm^2 i predstavlja $m_{\text{ekv}} = mL^2$ u jednačini (2.7.1). Ekvivalentna krutost je $k_{\text{eqv}} = mgL$ [Nm]. Na ovakav način se u smislu restutucionog dejstva, od restitucione sile sile $mg\sin\varphi \approx mg\varphi$, došlo do *restitucionog momenta* $mgL\,\varphi$. Znači, na restituciono dejstvo, u ovom slučaju utiče sila težine.

Kružna frekvencija klatna je

DO NOT COPY

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_{ekv}}{m_{ekv}}} = \sqrt{\frac{mgL}{mL^2}} = \sqrt{\frac{g}{L}} \left[\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right] \tag{2.11.5}$$

Izraz (2.11.5) ukazuje da se na promenu (matematičkog) klatna može uticati samo promenom dužine klatna.

Znači, u slučaju kada je generalisana koordinata ugaona koordinata, diferencijalna jednačina HO, u opštem slučaju ima sledeći oblik:

$$J\,\ddot{\varphi} + k_t\,\varphi = 0, \tag{2.11.6}$$

gde je J maseni moment inercije za nepokretnu osu oko koje se vrši obrtanje, a k_t torziona krutost.

Prilikom izvođenja linearne jednačine (2.11.3) je najpre određena nelinearna jednačina (2.11.1). Zatim je izvršena linearizacija i dobijena jednačina (2.11.3), a što predstavlja aproksimaciju jednačine (2.11.1). Stoga se nelinearna jednačina obično naziva tačnom jednačinom, a linearizovana jednačina je mogući oblik približne ili aproksimativne jednačine. Zapravo, linearizovana jednačina je uvek (ukoliko ju je moguće dobiti), najjednostavniji slučaj približne jednačine. U skladu sa tim se nazivaju i rešenja tačne i aproksimativne jednačine: tačno i približno rešenje.

Postupak određivanje tačne nelinearne jednačine, a zatim njena linearizacija, u slučaju složenijih sistema nego što je obično klatno, može biti komplikovan. Iz tog razloga se prilikom razmatranja nekog oscilatornog sistema, izvođenje linearne jednačine može izvršiti tako što će se pristupiti linearizaciji tokom izvođenja same jednačine. Ovo je zapravo već pokazano u Sekcijama 2.9 i 2.10, gde se pravac elastičnog štapa (opruge) nije poklapao sa pravcem kretanja. U nastavku će se pristup linearizacije pokazan u Sekcijama 2.9 i 2.10 proširiti i za slučaj krivolinijskog kretanja tačke.

2.11.3 Pretpostavka (metod) malog ugla

Pretpostavićemo da klatno sa Slike 2.11.2 vrši male oscilacije oko ravnotežnog položaja. U tom slučaju se može kružni luk $\widehat{A_0A_1}$ aproksimirati sa pravom linijom $\overline{A_0A'}$ (Slika 2.11.2b). Imajući u vidu da je dužina kružnog luka $\widehat{A_0A_1} = L\varphi$, a da je $\overline{A_0A'} = L\sin\varphi$, pretpostavljamo da je

$$\overline{A_0A'} \to \widehat{A_0A_1} \;\Rightarrow L\sin\varphi \approx L\varphi \tag{2.11.7}$$

Drugim rečima, zamišljamo kao da se krajnja tačka A klatna (a samim tim i materijalna tačka na njenom kraju) kreće u pravcu normalnom na vertikalni pravac OA. Smanjivanjem maksimalnog ugla (amplitude ugla) oscilovanja, ova pretpostavka je sve opravdanija, kao što je ilustrovano na Slici 2.11.2 b). Ovo predstavlja osnovu *metode malog ugla*. U matematičkom smislu, aproksimacija

DO NOT COPY

predstavljena sa (2.11.7) je zapravo linearizacija prikazana izrazom (2.11.2). Ovakav pristup je pogodan za elemente koji se obrću oko nepokretne ose ili u slučaju ravanskog kretanja gde se onda obrtanje posmatra u odnosu na trenutni pol brzine, na primer.

Znači, u slučaju postojanja obrtanja, kao polaznu dinamičku jednačinu koristimo dinamičku jednačinu obrtanja oko nepokretne ose (ili jednačinu obrtanja oko ose koja prolazi kroz centar mase). Ilustrujmo ovo na primeru klatna. Dinamička jednačina obrtanja tela oko nepokretne ose glasi

$$J_z\,\varepsilon = \sum M_z^{F_i}\,, \tag{2.11.8}$$

gde je sa J_z označen maseni moment inercije tela za osu oko koje se vrši obrtanje, a sa ε intenzitet ugaonog ubrzanja**.** Oznaka $\sum M_z^{F_i}$ stoji za sumu momenata sila za osu oko koje se vrši obrtanje. Jednačina (2.11.8) može biti iskorišćena za formiranje aproksimativne jednačine, tako što se umesto tačnog izraza za krak momenta sile, koristi linearizovani oblik.

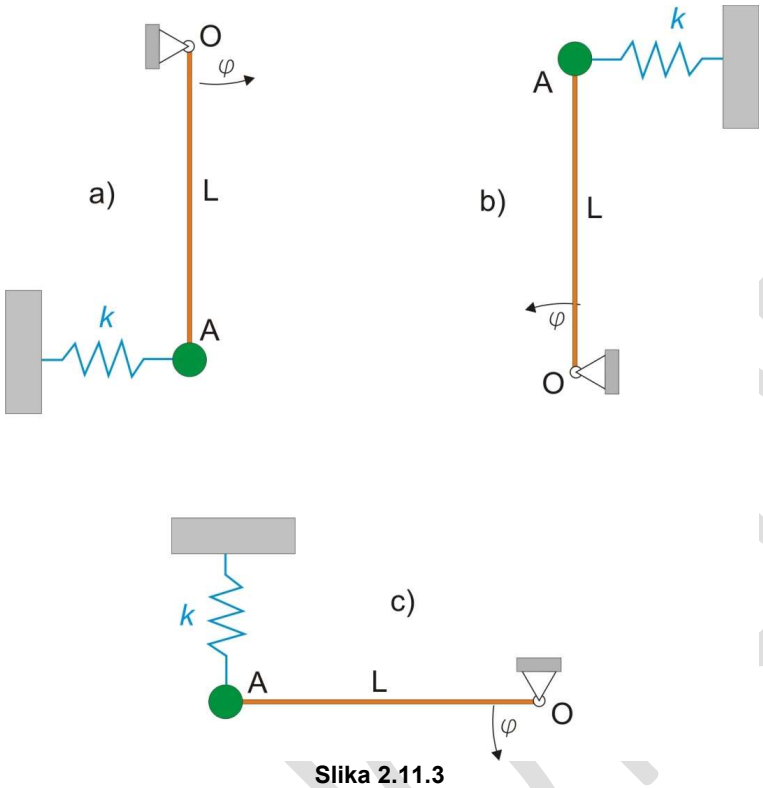
Imajući u vidu da je maseni moment inercije materijalne tačke za osu koja prolazi kroz O, $J_z = m\,L^2$, linearizovana dinamička jednačina obrtanja oko nepokretne ose u ovom slučaju glasi

$$J_z\,\varepsilon = \sum M_z^{F_i} \quad \rightarrow \quad m\,L^2\,\ddot{\varphi} = -m\,g\,L\,\varphi\,, \tag{2.11.9}$$

koja se svodi na linearnu diferencijalnu jednačinu oblika (2.11.3). Do jednačine (2.11.9) smo ranije došli tako što smo jednačinu (2.11.3) pomnožili sa L i dobili jednačinu (2.11.4) koja je identična jednačini (2.11.9).

Primer 2.11.1 Na Slici 2.11.3 su predstavljena tri slučaja klatna (materijalna tačka fiksirana na kraju lakog krutog štapa) koji se razlikuju po načinu kako su postavljeni u vertikalnoj ravni kretanja. Pod pretpostavkom malih uglova koje tokom kretanja klatna izvode (male oscilacije oko prikazanih ravnotežnih položaja), odrediti diferencijalne jednačine kretanja za svakog od njih kao i sopstvene kružne frekvencije oscilovanja. Razmotriti razlike i sličnosti.

DO NOT COPY



Slika 2.11.3

Diskusija i rešavanje Primera 2.11.1:

Sva tri slučaja čini materijalna tačka koja je koncentrisana na kraju lakog krutog štapa, kao i opruga. Ovde se sada može očekivati da restituciona sila potiče i od sile težine i od opruge, tj. da na oscilovanje sistema (sopstvenu kružnu frekvenciju) utiče i opruga i sila zemljine teže. Međutim, ovo za slučaj malih oscilacija važi samo za sisteme pod a) i b). U slučaju za sistem pod c) sila težine ne utiče na proces oscilovanja, što znači da u izrazu za sopstvenu kružnu frekvenciju malih oscilacija neće figurisati ubrzanje sile zemljine teže *g*. Takođe, treba obratiti pažnju na sisteme pod a) i pod b). U prvom slučaju pod a) u sistemu se prepoznaje klatno, dok je u drugom slučaju, b) takođe postoji klatno, ali okrenuto. Takvo klatno se naziva *inverzno klatno*. Sada će se ovo detaljnije obrazložiti.

Posmatrajmo za trenutak ova dva klatna bez opruga. U prvom slučaju a), klatno je u stabilnom ravnotežnom položaju, dok je u drugom slučaju b) u nestabilnom ravnotežnom položaju. Dodavanjem opruga, kako je prikazano, prvo klatno će biti u stabilnom ravnotežnom položaju za bilo koje vrednosti parametara sistema (m, k, g, L). U slučaju pod b), dodavanjem opruge se ostvaruje stabilni vertikalni položaj ravnoteže, ali će postojati određeni uslov koji mora biti zadovoljen.

Znači, klatnu je dodata opruga (laki elastični štap) krutosti *k*. Razmotriće se svaki od slučaja posebno. Koristiće se izraz $J_z\,\varepsilon = \sum M_z^{F_i}$ kao i pretpostavka malih oscilacija oko stabilnog ravnotežnog položaja. Osnovni element koji se ovde kreće je materijalna tačka. Materijalna tačka je pomoću lakog krutog štapa vezana za nepokretni cilindrični zglob. Znači, sistem kojeg čini laki kruti štap i za njega vezana materijalna tačka se obrće oko nepokretne horizontalne ose.

a) U proizvoljnom položaju tokom kretanja važi

$$m\,L^2\,\varepsilon = -m\,g\,L\,\varphi - F_k\,L \rightarrow m\,L^2\,\varepsilon = -m\,g\,L\,\varphi - k\,L\,\varphi\,L. \qquad (2.11.10)$$

Sređivanjem izraza (2.11.10) se dolazi do sledeće jednačine:

$$m\,L^2\ddot{\varphi} + \left(m\,g\,L + k\,L^2\right)\varphi = 0. \qquad (2.11.11)$$

U jednačini (2.11.11) se može prepoznati struktura diferencijalne jednačine harmonijskog oscilatora. Na osnovu toga se može odrediti sopstvena frekvencija malih oscilacija, koja glasi:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{m\,g\,l + k\,L^2}{m\,L^2}} = \sqrt{\frac{g}{L} + \frac{k}{m}}. \qquad (2.11.12)$$

Izraz za kružnu frekvenciju ukazuje na kombinovani uticaj sile težine (kao kod običnog klatna, izraz (2.11.5)) i elastične sile (kao kod HO). Imajući u vidu da su svi parametric pod korenom izraza (2.11.12) pozitivni, izraz za kružnu frekvenciju sistema sa Slike 2.11.3a) važi za sve vrednosti parametara.

b) U ovom slučaju imamo tzv. inverzno klatno, za koje je dodatno vezana i opruga. Može se sprovesti sličan postupak kao pod a) gde se dolazi do izraza za sopstvenu kružnu frekvenciju:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{g}{L}}. \qquad (2.11.13)$$

Treba primetiti da izraz (2.11.13) ima smisla samo ukoliko je $k/m > g/L.$ U protivnom, izraz pod korenom će biti negativan i kružna frekvencija neće imati realne vrednosti. Fizički smisao uslova $k/m > g/L.$ je da opruga mora imati dovoljnu krutost da bi elastična sila savladala uticaj sile zemljine teže koja teži da klatno odvede na niže. Takođe, može se uočiti da je kružna frekvencija sistema pod a) veća od frekvencije sistema b). Drugim rečima, u slučaju inverznog klatna, sila težine smanjuje sopstvenu frekvenciju. Ovo ima značaja na strukture koje u svojoj osnovi sadrže inverzno klatno, kao što su visoke zgrade, ramske strukture, vodotornjevi, telekomunikacioni tornjevi i slično.

c) U slučaju sistema prikazanog pod c) gde je laki kruti štap horizontalan, postupak određivanja jednačine kretanja se nešto razlikuje u odnosu na

DO NOT COPY

prethodna dva slučaja. Naime, u prikazanom ravnotežnom položaju, **opruga je deformisana**. Zbog toga, sila u opruzi tokom kretanja sistema je $F_k = k\,\Delta l = k\left(\Delta l_{st}^G + \Delta l_{din}\right) = k\left(\Delta l_{st}^G + L\,\varphi\right)$. Na osnovu (2.11.5) sledi

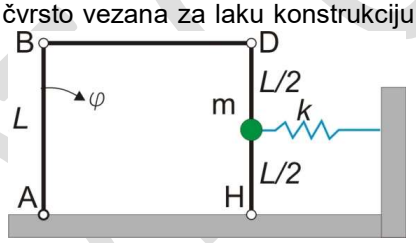
$$m\,L^2\ddot{\varphi} = m\,g\,L - k\left(\Delta l_{st} + L\,\varphi\right)L. \qquad (2.11.14)$$

Koristeći da je $m\,g\,L = k\Delta l_{st}\,L$, budući da su u ravnotežnom (horizontalnom) položaju momenti sile težine i sile u opruzi međusobno uravnoteženi, diferencijalna jednačina kretanja i kružna frekvencija glase:

$$m\,L^2\ddot{\varphi} + k\,L^2\varphi = 0 \rightarrow \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}. \qquad (2.11.15)$$

Kao što se vidi na osnovu (2.11.15), sila težine ne utiče na način oscilovanja (*g* ne figuriše u izrazu za ω_n). U ovom slučaju, frekvencija oscilovanja je manja nego u slučaju pod a), a veća u odnosu na slučaj inverznog klatna.

Primer 2.11.2. Materijalna tačka mase m je čvrsto vezana za laku konstrukciju sačinjenu od tri štapa međusobno zglobno vezana. Konstrukcija je za nepokretnu podlogu takođe zglobno vezana u tačkama A i H. Za materijalnu tačku je vezana opruga krutosti *k*. Na slici je prikazan ravnotežni položaj u kojem su štapovi AB i HD (koji su iste dužine) vertikalni. Odrediti sopstvenu kružnu frekvenciju malih oscilacija prikazanog sistema, u odnosu na ravnotežni položaj. Kretanje štapa AB u odnosu na vertikalni položaj se opisuje ugaonom koordinatom φ.

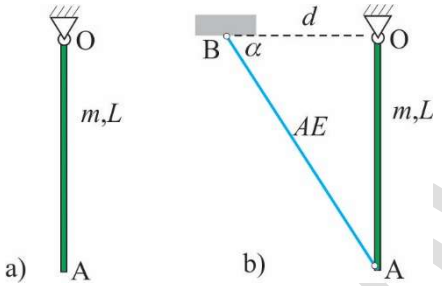


Slika 2.11.4

Diskusija i rešavanje Primera 2.11.2 Struktura ABDH je kinematički pokretljiva i predstavlja zglobni četvorougao. Vertikalni elementi AB i HD mogu da se obrću oko nepokretnih osa, dok element BD vrši translatorno kretanje. Elementi AB i HD se kreću na isti način, sa istom ugaonom brzinom. Budući da je struktura laka, jedini inercijalni element u ovom slučaju je koncentrisana masa m. Problem određivanja kružne frekvencije oscilovanja može biti posmatran kao inverzno klatno kako je pokazano u prethodnom **Primeru 2.11.1**, sa jedinom razlikom što je u ovom slučaju dužina klatna L/2.

DO NOT COPY

Primer 2.11.3 Teški i kruti štap OA mase m i dužine L je krajem O vezan za nepokretni cilindrični zglob (Slika 2.11.5a). Na Slici 2.11.5b) je prikazan slučaj kada je za kraj krutog štapa vezan laki elastični štap AB kojem je drugi kraj B vezan za nepokretnu krutu podlogu. Odrediti za oba slučaja sopstvenu frekvenciju malih oscilacija štapa u odnosu na prikazane ravnotežne položaje. Za generalisanu koordinatu usvojiti ugao kojeg štap obrazuje sa vertikalom.



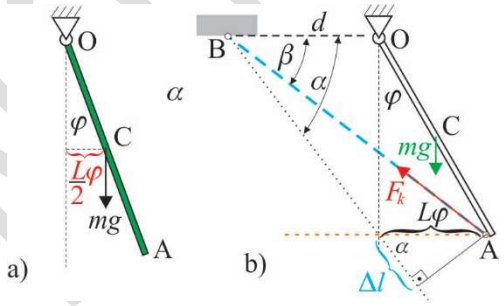
Slika 2.11.5

Diskusija i rešavanje Primera 2.11.3

a) Štap na Slici 2.11.5a) možemo takođe da posmatramo kao klatno. Inače, ovakav slučaj oscilatornog sistema se vrlo često naziva *fizičko klatno*. Primenjujući jednačinu obrtanja krutog objekta oko nepokretne ose, kao i pretpostavku malog ugla (Slika 2.11.6a), sledi

$$\frac{1}{3} m L^2 \ddot{\varphi} = -m g \frac{L}{2} \varphi \rightarrow \frac{1}{3} m L^2 \ddot{\varphi} + m g \frac{L}{2} \varphi = 0 \rightarrow \omega_n = \sqrt{\frac{3}{2}\frac{g}{L}} \approx 1.22\sqrt{\frac{g}{L}}. \quad (2.11.16)$$

Poređenjem dobijenog rezultata (2.11.16) za kružnu frekvenciju, sa kružnom frekvencijom klatna kojem je masa koncentrisana na kraju (2.11.5), uočava se da u slučaju kada je masa jednoliko raspodeljena duž cele dužine štapa L, kružna frekvencija je oko 22% veća nego kada je ta ista masa koncentrisana na kraju lakog krutog štapa iste dužine L.



Slika 2.11.6

b) U ravnotežnom položaju, kada je štap vertikalan ne postoji deformacija elastičnog štapa. Koristeći pretpostavku malog ugla kao i jednačinu (2.11.8), sledi

$$\frac{1}{3} m L^2 \ddot{\varphi} = -F_k \cos(\beta) L - mg \frac{L}{2} \varphi \rightarrow \frac{1}{3} m L^2 \ddot{\varphi} = -k \underbrace{L\varphi \cos(\alpha)}_{\Delta l} \cos(\beta) L - mg \frac{L}{2} \varphi. \quad (2.11.17)$$

Prilikom sređivanja izraza (2.11.17), korišćen je prilaz pokazan u **Primeru 2.9.1** (deformacija elastičnog štapa kojem je jedan kraj nepokretan je jednaka projekciji

vektora pomeranja drugog kraja, na pravac nedeformisanog štapa). Takođe, korišćenjem u izrazu (2.11.17) da važi $\cos\beta \approx \cos\alpha$, konačno se dobija:

$$\frac{1}{3} m L^2 \ddot{\varphi} = -kL^2 \varphi \cos^2(\alpha) - mg\frac{L}{2}\varphi \rightarrow \omega_n = \sqrt{\frac{3}{2}\frac{g}{L} + 3\frac{k}{m}\cos^2\alpha}\,. \qquad (2.11.18)$$

U odnosu na slučaj bez elastičnog štapa, ovde je frekvencija veća. Ukoliko je α = 90°, tada elastični štap nema funkciju, pa se frekvencija data izrazom (2.11.18) svodi na izraz (2.11.16). Najveći uticaj elastični štap ima kada je u horizontalnom pravcu, u pravcu kretanja njegovog slobodnog kraja (tačke A) za pretpostavljen slučaj malih oscilacija i tada bi izraz za frekvenciju glasio:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{3}{2}\frac{g}{L} + 3\frac{k}{m}}\,, \qquad (2.11.19)$$

i koji se može posmatrati kao modifikovani izraz (2.11.12) i gde se kao i u prethodnom slučaju pod b) uočava povećanje frekvencije sa smanjenjem masenog momenta inercije.

Do izraza (2.11.18) se moglo doći i formiranjem tačnog izraza za deformaciju elastičnog štapa, na osnovu kojeg tačan izraz za potencijalnu energiju sistema sa Slike 2.11.5b) glasi:

$$E_p = \frac{1}{2}k\left(\sqrt{d^2 + L^2 + 2dL\sin\varphi} - \sqrt{d^2 + L^2}\right)^2 - \frac{mgL}{2}\cos\varphi. \qquad (2.11.20)$$

Izvodom po koordinati φ izraza (2.11.20), zatim razvojem u red i zadržavanjem do linearnog člana, dobija se

$$\frac{\partial E_p}{\partial \varphi} \approx \left(\frac{kd^2L^2}{d^2 + L^2} + \frac{mgL}{2}\right)\varphi = \left(kL^2\cos^2\alpha + \frac{mgL}{2}\right)\varphi = -Q_\varphi\,, \qquad (2.11.21)$$

gde je sa Q_φ označena generalisano dejstvo, čime je potvrđen izraz na desnoj strani diferencijalne jednačine (2.11.18).

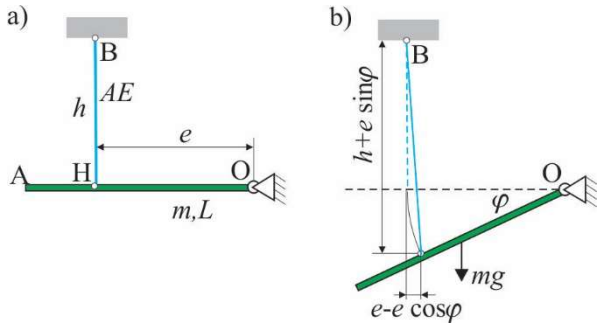
Primer 2.11.4 Za sistem prikazan na Slici 2.11.7a) odrediti frekvenciju malih oscilacija oko prikazanog ravnotežnog položaja u kojem je štap OA horizontalan. Dobijeni rezultat diskutovati u odnosu na rezultat iz **Primera 2.11.1 c)**.

Diskusija i rešavanje Primera 2.11.4: Izraz za kružnu frekvenciju će se najpre odrediti korišćenjem tačnog izraza za potencijalnu koji glasi:

$$E_p = \frac{1}{2}k(\sqrt{(e\sin\varphi + h)^2 + (e - e\cos\varphi)^2} - l_0)^2 - \frac{mgL}{2}\sin\varphi. \qquad (2.11.22)$$

Nakon izvoda i razvijanja u red, dobija se

DO NOT COPY



Slika 2.11.7

$$J_O\,\ddot{\varphi} = -\left[\underbrace{k\left(h-l_0\right)e-\frac{mgL}{2}}_{0}\right]-ke^2\varphi, \qquad (2.11.23)$$

gde je J_O sa označen maseni moment inercije štapa za osu koja prolazi kroz O. Na osnovu (2.11.23), kružna frekvencija oscilovanja je

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k\,e^2}{J_0}} = \sqrt{\frac{3ke^2}{mL^2}}\,. \qquad (2.11.24)$$

Kao što se vidi, sila težine ne utiče na proces oscilovanja, odnosno *g* ne figuriše u izrazu za sopstvenu frekvenciju.

Kao specijalan slučaj, ako je $e = L$, izraz za kružnu frekvenciju je $\omega_n = \sqrt{3k/m}$ i koji može biti upoređen sa **Primerom 2.11.1c)**. Naime, za slučaj iste krutosti i mase, kružna frekvencija je za nešto više od 70% veća u slučaju da je ista masa ravnomerno raspoređena duž cele dužine L štapa, u odnosu na teorijski slučaj kada bi ta ista masa bila koncentrisana na kraju štapu. Ovo je u skladu sa izrazom (2.11.4), odakle se vidi da povećanjem masenog momenta inercije smanjuje kružnu frekvenciju.

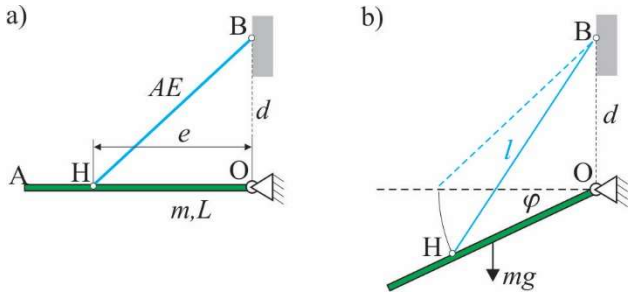
Do jednačine (2.11.23) se moglo doći i korišćenjem metode malog ugla.

Primer 2.11.5 Odrediti frekvenciju oscilovanja za sistem prikazan na Slici 2.11.8

Diskusija i rešavanje Primera 2.11.5: Na osnovu slike 2.11.8b) izraz za potencijalnu energiju glasi:

$$E_p = \frac{1}{2}k\left(\sqrt{d^2+e^2+2de\sin\varphi}-l_0\right)^2-\frac{mgL}{2}\sin\left(\varphi\right). \qquad (2.11.25)$$

DO NOT COPY



Slika 2.11.8

Kao i u prethodnim primerima, izvodom izraza (2.11.25) za potencijalnu energiju, njegovim razvijanjem u red, a zatim korišćenjem, na primer LJ2V, formira se diferencijalna jednačina kretanja koja glasi:

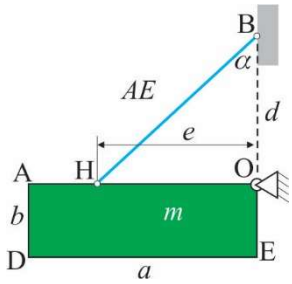
$$J_O\,\ddot{\varphi} = -\left[\underbrace{ked - k\frac{edl_0}{\sqrt{d^2+e^2}} - \frac{mgL}{2}}_{0}\right] - \left[k\underbrace{\left(\frac{d^2}{d^2+e^2}\right)}_{\cos^2\alpha}\underbrace{\left(\frac{l_0}{\sqrt{d^2+e^2}}\right)}_{\lambda}e^2\right]\varphi. \tag{2.11.26}$$

Na osnovu (2.11.26), kružna frekvencija oscilovanja glasi:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k\,\lambda e^2\cos^2\alpha}{J_0}} = \frac{1}{L}\sqrt{\frac{3k\lambda}{m}}\sqrt{\frac{d^2\,e^2}{d^2+e^2}}. \tag{2.11.27}$$

Za razliku od sistema sa Slike 2.11.7, u krajnjem izrazu za frekvenciju (2.11.27) figuriše parametar $\lambda = l_0/l_{st}$. Povećanjem parametra e, raste i kružna frekvencija (naime, sa porastom e, raste i član $\sqrt{\frac{d^2\,e^2}{d^2+e^2}}$). I ovde, sila težine ne utiče na frekvenciju. Treba primetiti da u slučaju kada je $e = 0$, frekvencija je jednaka nuli, odnosno, prikazani sistem ne može da vrši oscilatorno kretanje oko prikazanog ravnotežnog položaja.

Primer 2.11.6 Teška i kruta pravougaona ploča mase m i dužine *stranica* a i b je krajem O za podlogu vezana zglobno. U tački H ploče je vezan laki elastični štap BH (AEl_0). Ploča vrši male oscilacije oko prikazanog ravnotežnog položaja. Ukoliko se elastični štap BH može postaviti na različite načine, odrediti uticaj parametra e na frekvenciju ocilovanja. Takođe, za nepromenljivu vrednost mase m, kako se povećanje/smanjenje dužine b odražava na frekvenciju oscilovanja?



Slika 2.11.9

DO NOT COPY

Rešavanje i diskusija Primera 2.11.6: Ploča se obrće oko nepokretne ose. Za generalisanu koordinatu će se uvesti ugao φ. Elastični štap je već u prikazanom ravnotežnom položaju u kojem je stranica OA horizontalna, deformisan. Veličina statičke deformacije može biti određena pisanjem momentne jednačine za tačku O, tako da sledi

$$\sum M_{\mathrm{O}} = m\,g\,\frac{a}{2} - k\,\Delta l_{\mathrm{st}}^{G}\cos(\alpha)\,e = 0 \rightarrow \Delta l_{\mathrm{st}}^{G} = \frac{m\,g\,a}{2\,k\,e\cos\alpha}. \tag{2.11.28}$$

Potencijalna energija glasi:

$$E_p = \frac{1}{2}k\left(\sqrt{d^2+e^2+2de\sin\varphi} - \sqrt{d^2+e^2}\right)^2 - mg\,\overline{\mathrm{OC}}\cos(\varphi+\theta) \tag{2.11.29}$$

Sa θ je označen ugao između dijagonale ploče i stranice OA. Koristeći (2.11.29), kao i odgovarajuću linearizaciju, diferencijalna jednačina malih oscilacija glasi:

$$J_{\mathrm{O}}\,\ddot{\varphi} = -\left\{\underbrace{\underbrace{k\left(\underbrace{\sqrt{d^2+e^2}-l_0}_{\Delta l_{st}}\right)}_{F_k^{st}}\underbrace{\frac{d}{\sqrt{d^2+e^2}}}_{\cos\alpha}e - mg\,\overline{\mathrm{OC}}\cos\theta}_{0}\right\} +$$

$$+\left(ke^2\underbrace{\frac{d^2}{\left(d^2+e^2\right)}}_{\cos^2\alpha}\underbrace{\frac{l_0}{\sqrt{d^2+e^2}}}_{\lambda} + mg\,\overline{\mathrm{OC}}\sin\theta\right)\varphi, \tag{2.11.30}$$

gde je sa J_{O} označen maseni moment inercije ploče za osu zgloba O. Kao što je pokazano prilikom sređivanja izraza (2.11.30), uzeta je u obzir statička veza između elastične sile i sile težine. Konačno, jednačina glasi:

$$J_{\mathrm{O}}\,\ddot{\varphi} + \left(ke^2\lambda\cos^2\alpha + mg\,\overline{\mathrm{OC}}\sin\theta\right)\varphi = 0. \tag{2.11.31}$$

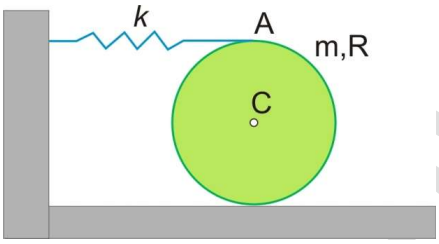
Frekvencija oscilovanja je

$$\omega_n = \sqrt{\frac{ke^2\lambda\cos^2\alpha + mg\,\overline{\mathrm{OC}}\sin\theta}{J_0}}. \tag{2.11.32}$$

DO NOT COPY

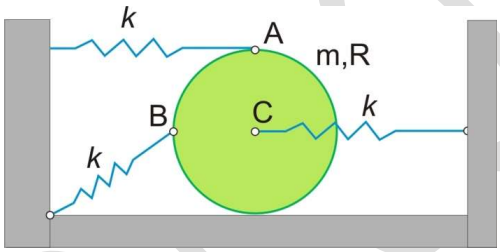
U izrazu za frekvenciju (2.11.32) treba primetiti da sada sila težine utiče na frekvenciju. Za $\theta = 0$ (ploča prelazi u štap), sistem sa Slike 2.11.9 prelazi u sistem sa Slike 2.11.8.

Primer 2.11.7 Odrediti sopstvenu kružnu frekvenciju malih oscilacija prikazanog Sistema (Slika 2.11.6). Homogeni disk mase m i poluprečnika R se kotrlja bez klizanja po nepokretnoj horizontalnoj podlozi. Prikazan je ravnotežni položaj u kojem je pravac AC vertikalan, a opruga horizontalna.



Slika 2.11.10

Primer 2.11.8 odrediti sopstvenu kružnu frekvenciju malih oscilacija sistema oko prikazanog ravnotežnog položaja. Opruga vezana u tački B obrazuje u ravnotežnom položaju ugao od 45° sa horizontalom.



Slika 2.11.11

2.12 Predstavljanje proizvoljnog broja opruga sa ekvivalentnom oprugom

Dve ili više opruga (elastičnih štapova) koje su vezane za oscilatorno telo u istoj tački tela, mogu biti predstavljeni sa jednom ekvivalentnom oprugom. Ovo može biti od značaja u cilju pojednostavljenja razmatranog problema i bržeg i lakšeg izvođenja zaključaka o načinu i karakteru oscilatornog procesa. Pri tome, možemo razlikovati dva tipična slučaja:

- Pomeranje krajnjih tačaka opruga su jednaka po intenzitetu;

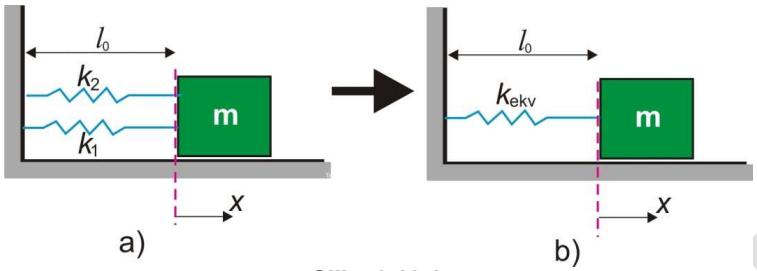
- Unutrašnje (elastične sile) u oprugama su istog intenziteta;

2.12.1 Pomeranja krajnjih tačaka opruga su ista

Razmatranje ovog slučaja ćemo započeti od najjednostavnijeg sistema iz ove klase. Neka su dve ili više opruga međusobno paralelne (Slika 2.12.1a). Ovakve opruge mogu biti predstavljene sa jednom ekvivalentnom oprugom. U tom slučaju krutost ekvivalentne opruge k_{ekv} se određuje kao suma krutosti paralelno vezanih opruga,

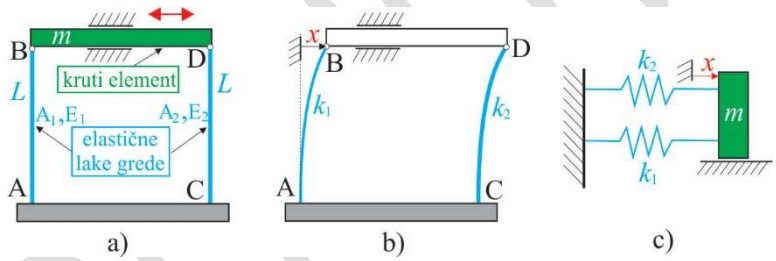
$$k_{\text{ekv}} = k_1 + k_2 + \ldots = \sum_{i=1}^{N} k_i \,, \tag{2.12.1}$$

gde je N broj opruga.



Slika 2.12.1

Posmatrajmo sistem prikazan na Slici 2.12.1a). Sa slike se uočava da su tokom kretanja, pomeranja krajnjih tačaka opruga međusobno jednake. Iz tog razloga su i deformacije obe opruge jednake i iznose $\Delta l = x$. Zbog deformacija opruga, u njima se generišu sile, koje su takođe paralelne, svaka od njih je intenziteta $F_{ki} = k_i \Delta l$. Uticaj ove dve sile može biti predstavljen samo sa jednom rezultujućom silom $F_r = F_{k1} + F_{k2} = k_1 \Delta l + k_2 \Delta l = (k_1 + k_2)\Delta l$. Sistem na Slici 2.12.1b) predstavlja ekvivalentan sistem sistemu sa Slike 2.12.1a). Ekvivalentni sistem (b) se mora ponašati na istovetan način kao i originalan sistem (a). To znači da se usled iste deformacije Δl ekvivalentne opruge, u njoj generiše sila $F_{\text{ekv}} = k_{\text{ekv}} \Delta l$ koja mora biti jednaka sili $F_r = (k_1 + k_2)\Delta l$. Na osnovu toga, izjednačavanjem F_r i F_{ekv} se dolazi do izraza (2.12.1).



Slika 2.12.2

Kao primer paralelno vezanih opruga se može navesti sistem prikazan na Slici 2.12.2a) kojeg čine kruta masivna ploča i dve vertikalne lake i elastične grede. Ukoliko kruti element vrši, na primer, translatorno kretanje u horizontalnom pravcu, krajnje tačke B i D elastičnih greda se kreću na isti način. Kretanje ovih tačaka je u direktnoj vezi sa deformacijom elastičnih greda AB i CD (Slika 2.12.2b). Kao što je ranije pokazano, uticaj elastične grede može biti predstavljen preko linijske opruge čija krutost odgovara savojnoj krutosti grednog nosača. Na ovaj način, imajući u vidu da su pomeranja krajnjih tačaka B i D jednaka, oscilatorno kretanje krutog elementa može biti modelovano na način prikazan na

Slici 2.12.2c), gde se ekvivalentna krutost sistema od dve paralelene opruge može predstaviti sa sledećim izrazom:

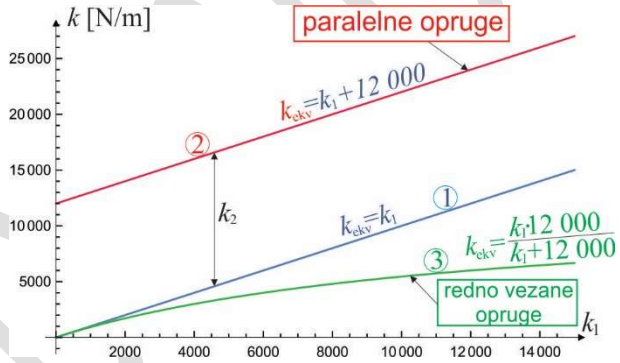
$$k_{\text{ekv}}^{\text{s}} = k_{\text{ekv}1} + k_{\text{ekv}2} = \frac{3E_1I_1}{L^3} + \frac{3E_1I_1}{L^3} = \frac{3}{L^3}\left(E_1I_1 + E_2I_2\right) \tag{2.12.2}$$

Znači, prilikom razmatranja ovog problema, najpre je uticaj elastičnih greda zamenjen linijskim oprugama odgovarajućih ekvivalentnih krutosti ($k_{\text{ekv}1}$ i $k_{\text{ekv}2}$), a zatim je uticaj dve paralelene opruge predstavljen sa jednom ekvivalentnom oprugom od sistema opruga ($k_{\text{ekv}}^{\text{s}}$). Pri tome, prilikom pisanja izraza (2.12.2) je uzeto u obzir da su elastične grede ukleštene na jednom kraju dok su na drugom kraju zglobno vezane za kruti pokretni element, kao i da su karakteristike greda međusobno različite. Ukoliko bi grede bile od istog materijala i istog poprečnog preseka, tada bi ekvivalentna krutost iznosila $k_{\text{ekv}} = 6EI / L^3$. Umesto zglobnih veza na krajevima B i D su mogla biti ukleštenja, i u tom slučaju bi se promenili izrazi za $k_{\text{ekv}1}$ i $k_{\text{ekv}2}$.

Može se reći da u sistemu sa Slike 2.12.2a) postoji očiglednost postojanja sistema elastičnih tela čiji krajevi imaju isti intenzitet pomeranja, i dodatno, paralelnost takvih opruga.

Postoji i drugi, brojni primeri gde ne mora da postoji paralelnost opruga, ali postoji isto pomeranje krajnjih tačaka elastičnih tela, i za koje se onda u cilju određivanja ekvivalentne krutosti može primeniti prethodno opisani pristup.

Suština ovakvog načina postavljanja elastičnih elemenata je da svako dodato elastično telo, linearno povećava ukupnu ekvivalentnu krutost sistema.

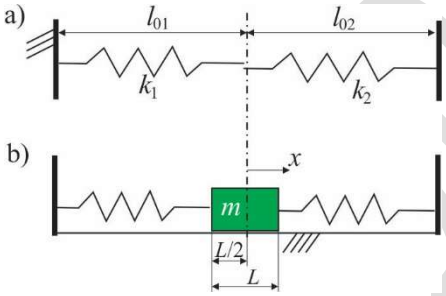


Slika 2.12.3

Na primer, neka imamo dve paralelno vezane opruge, kako je prikazano na Slici 2.12.1a) i čije su krutosti k_1 i k_2. Pretpostavimo da nam je krutost k_2 konstantna i da iznosi 12 000 N/m, a da krutost k_1 možemo da menjamo. Ekvivalentna krutost je data izrazom 2.12.1. Na slici 2.12.3 je prikazan dijagram zavisnosti ekvivalentne krutosti k_{ekv} od krutosti k_1, a za fiksiranu vrednost k_2. Ukoliko postoji

samo jedna opruga krutosti k_1, tada je to ujedno i ekvivalentna krutost (prava 1). Dodavanjem još jedne opruge paralelne opruzi 1, grafik ekvivalentne krutosti se samo translira na gore, kako je predstavljeno sa pravom 2 (kao što smo već ranije naglasili, svaka paralelno vezana opruga povećava ukupnu krutost). Videćemo u sledećoj podsekciji 2.12.2 da u nešto drugačijem načinu vezivanja elastičnih elemenata (na primer, serijski vezane opruge), ukupna ekvivalentna krutost ne mora da se ponaša po ovako jednostavnoj zakonitosti, kao što je slučaj za paralelno vezane opruge.

Primer 2.12.1. Telo mase m je postavljeno između dve opruge različitih krutosti. Na slici je prikazan početni položaj od kojeg se meri koordinata x. Napisati jednačinu kretanja i razmotriti njen karakter u zavisnosti od međusobnog odnosa krutosti opruga. Takođe, odrediti sopstvenu kružnu frekvenciju.



Slika 2.12.3

Diskusija i rešavanje Primera 2.12.1

Postavljanjem tela u prikazani položaj između dve opruge dolazi do početne deformacije opruga, gde su obe opruge sabijene za veličinu $L/2$. U proizvoljnom položaju koji je definisan koordinatom x, važi:

$$m\ddot{x} = F_{k1} - F_{k2}, \tag{2.12.3}$$

gde su

$$F_{k1} = k_1\left(\frac{L}{2} - x\right) \text{ i } F_{k2} = k_2\left(\frac{L}{2} + x\right) \tag{2.12.4}$$

Diferencijalna jednačina glasi

$$m\ddot{x} + \left(k_1 + k_2\right)x = \frac{L}{2}\left(k_1 - k_2\right) \tag{2.12.5}$$

Ukoliko su krutosti opruga međusobno jednake, tada je nehomogeni deo diferencijalne jednačine (2.12.4) jednak nuli. To znači da je položaj od kojeg se meri koordinata x, položaj ravnoteže. U slučaju da su krutosti opruga različite, tada je diferencijalna jednačina oscilovanja sistema sa Slike 2.12.2 a za koordinatu koja se meri od prikazanog početnog položaja, nehomogena diferencijalna jednačina.

Bez obzira na međusobni odnos krutosti opruga, kružna frekvencija je

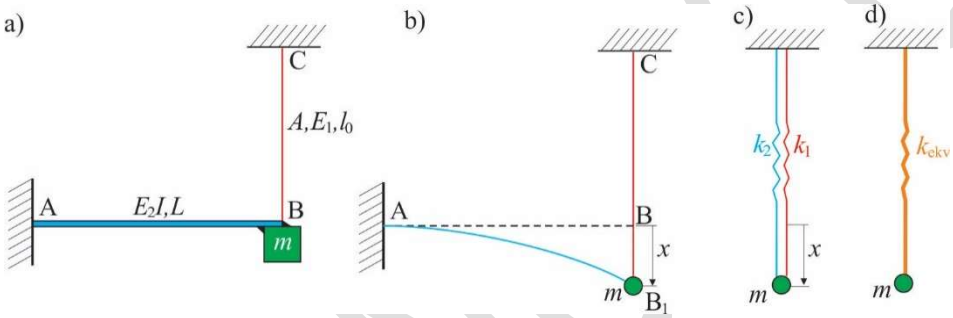
DO NOT COPY

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}} \tag{2.12.6}$$

Znači, kao što smo već ranije videli, početna deformacija elastičnih elemenata nema uticaja na kružnu frekvenciju.

Do rezultata (2.12.6) se moglo doći tako što se uoči da opruge u sistemu sa Slike 2.12.3 čine sistem "paralelno vezanih opruga" (za koliko se pomeri kraj jedne od opruga, za istu vrednost se pomeri i kraj druge opruge), a zatim se primeni izraz (2.12.1), predstavljajući ovakve dve opruge sa jednom oprugom čija je krutost jednaka $k^{s}_{\text{ekv}} = k_1 + k_2$.

Primer 2.12.2 Na kraju elastične konzole je fiksirano telo mase m. Za kraj konzole je vezan elastični štap BC. Odrediti kružnu frekvenciju oscilovanja prikazanog sistema. Pretpostaviti da je masa konzole i štapa mnogo manja od mase tela koje je postavljeno na kraju konzole. Takođe, usvojiti da su dimenzije tela mnogo manje od dužine konzole.

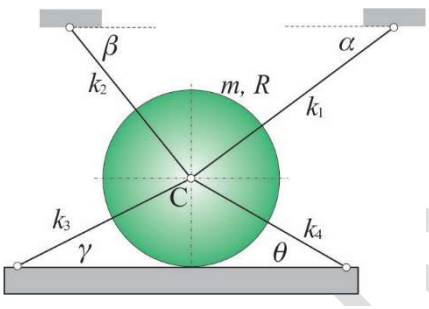


Slika 2.12.4

Diskusija i rešavanje Primera 2.12.2: Budući da se mase konzole i štapa zanemaruju, u ovom slučaju oscilovanje sistema se posmatra kao istovremena kombinacija transverzalnih oscilacija konzole i aksijalnih oscilacija štapa u prvoj aproksimaciji. U tom smislu, elastična tela (konzolu i štap) posmatramo kao ekvivalentne opruge pri čemu se odgovarajuće ekvivalentne krutosti određuju na osnovu poznatih obrazaca iz Otpornosti materijala. Ekvivalentna krutost $k_{\text{ekv1}} = AE_1 / l_0$, (uticaj štapa), dok je $k_{\text{ekv2}} = 3E_2 I / L^3$,(uticaj konzole). Pomeranje kraja konzole i štapa su jednaka i odgovaraju pomeranju tačke B. Ovakva dva elastična tela (u prvoj aproksimaciji) možemo posmatrati kao "paralelno vezane opruge", na osnovu čega je kružna frekvencija

$$\omega_n = \sqrt{\frac{1}{m}\left(\frac{AE_1}{l_0} + \frac{3EI}{L^3}\right)} \tag{2.12.7}$$

Primer 12.2.3 Disk mase m i poluprečnika R može da se kotrlja bez klizanja po horizontalnoj ravni. Za centar diska su vezana četiri laka elastična štapa, kako je prikazano na Slici 2.12.5. Odrediti kružnu frekvenciju malih oscilacija centra diska oko prikazanog ravnotežnog položaja u kojem su elastični štapovi nedeformisani. Poznat je maseni moment inercije diska za osu koja prolazi kroz centar C, kao i aksijalne krutosti svakog elastičnog štapa.



Slika 2.12.5

Diskusija i rešavanje Primera 12.2.3
Slobodni krajevi elastičnih štapova se sučeljavaju u centru diska koji vrši ravansko kretanje. Centar diska je jedina tačka diska koja vrši pravolinijsko kretanje. Budući da se disk kotrlja bez klizanja, broj stepeni slobode kretanja prikazanog sistema je jedan. Potrebna je jedna generalisana koordinata. Uvodi se pravolinijska koordinata x koja definiše kretanje centra diska. Krajevi svih elastičnih štapova imaju jednaka pomeranja koja odgovaraju pomeranju centra C. Na osnovu izloženog u Sekciji 2.9 deformacija svakog od štapova je jednaka projekciji coordinate x na pravac nedeformisanog štapa. Na osnovu toga se određuje elastična sila u svakom od štapova, na primer $F_{k1} = k\,\Delta l_1 = k\,x\cos\alpha$ itd, a zatim se svaka od tih sila projektuje na pravac kretanja centra diska (npr. $F_{k1x} = k\,x\cos^2\alpha$ itd). Primenjući drugi Njutnov zakon na horizontalni pravac, kao i jednačinu obrtanja oko centra diska, formira se diferencijalna jednačina malih oscilacija, odakle se određuje izraz za kružnu frekvenciju koji glasi:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_{\text{ekv}}^{\text{s}}}{m + \dfrac{J_0}{R^2}}} = \sqrt{\frac{k_1\cos^2\alpha + k_2\cos^2\beta + k_3\cos^2\gamma + k_4\cos^2\theta}{m + \dfrac{J_0}{R^2}}} \tag{2.12.8}$$

Dodavanjem elastičnih štapova povećava se krutost datog sistema, a samim tim i kružna frekvencija.

2.12.2 Ekvivalentna krutost elemenata kod kojih su unutrašnje sile ili momenti jednaki

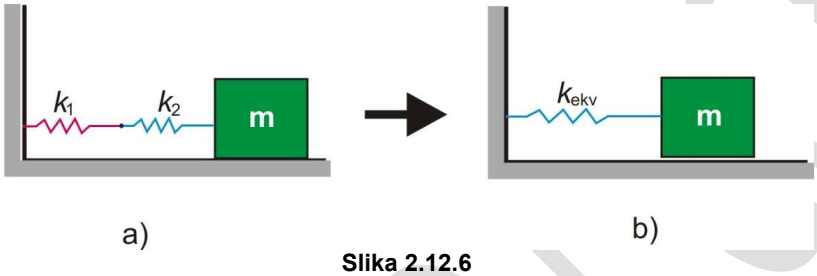
Kao što je poznato iz osnovnih kurseva Mehanike, unutrašnje sile su aksijalne i transverzalne sile, dok su unutrašnji momenti, momenti savijanja i momenti uvijanja.

Analizu ćemo započeti od aksijalnih sila i to u slučaju da su dva ili više elastičnih štapova postavljeni tako da se nadovezuju jedan na drugi. Uobičajeno je da se ovakav slučaj naziva *redno ili serijski vezane opruge*.

U slučaju da su dve ili više opruga redno (serijski) vezane (Slika 2.12.6), njihovo dejstvo se može predstaviti sa jednom oprugom ekvivalentne krutosti koja se određuje na sledeći način:

$$\frac{1}{k_{\text{ekv}}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \ldots = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{k_i}. \tag{2.12.9}$$

Izraz (2.12.9) se izvodi tako što se uzme u obzir da je aksijalna sila za redno vezane opruge, u svakoj od njih, u bilo kom preseku jednaka. Sa druge strane, deformacije opruga nisu jednake, već deformacija svake od njih zavisi od njene krutosti. Ovo će se ilustrovati za dve opruge, ali je identičan postupak i u slučaju više opruga.



Slika 2.12.6

Deformacije opruga su:

$$\Delta l_1 = \frac{F_a}{k_1} \quad \text{i} \quad \Delta l_2 = \frac{F_a}{k_2}. \tag{2.12.10}$$

Ukupna deformacija dve redno vezane opruge je:

$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 = \frac{F_a}{k_1} + \frac{F_a}{k_2} = F_a \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right). \tag{2.12.11}$$

Deformacija ekvivalentne opruge (usled dejstva iste aksijalne sile F_a) je:

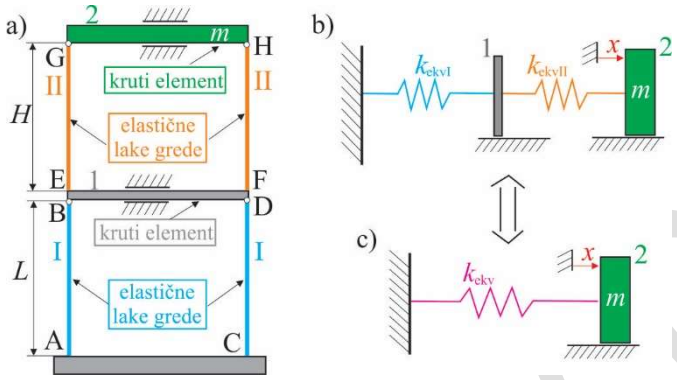
$$\Delta l = \frac{F_a}{k_{\text{ekv}}}. \tag{2.12.12}$$

Izjednačavanjem izraza (2.12.11) i (2.12.12), dolazi se do izraza (2.12.9).

Izraz (2.12.9) pokazuje jednu bitnu razliku u odnosu na paralelno vezane opruge. Naime, kada se jedna opruga krutosti k_2 nadoveže na drugu oprugu krutosti k_1, ukupna krutost ne raste kao u slučaju paralelno vezanih opruga, već, naprotiv, ukupna ekvivalentna krutost se ponaša kako je prikazano na dijagramu na Slici 2.12.3.

DO NOT COPY

U cilju analize sistema gde se mogu uočiti redno vezane opruge, proširićemo sistem sa Slike 2.12.2 na način kako je predstavljeno na Slici 2.12.7a) koja se obično naziva dvospratna ramska struktura. Određivanje krutosti ovakve strukture zavisi od analize koja će biti primenjena.



Slika 2.12.7

U slučaju statičke analize, ne uzima se u obzir postojanje inercijalnih sila. Transverzalne sile sa elastičnih greda prvog nivoa se prenose na elastične grede drugog nivoa, i obrnuto. U tom smislu, za određivanje krutosti strukture sa Slike 2.12.7a) nisu od značaja mase krutih elemenata 1 i 2. Primenjujući izraz (2.12.9), sledi

$$\frac{1}{k_{\text{ekv}}}=\frac{1}{k_{\text{ekv1}}}+\frac{1}{k_{\text{ekv2}}}=\frac{1}{\dfrac{6E_{\text{I}}I_{\text{I}}}{L^3}}+\frac{1}{\dfrac{6E_{\text{II}}I_{\text{II}}}{H^3}}=\frac{1}{6}\left(\frac{L^3}{E_{\text{I}}I_{\text{I}}}+\frac{H^3}{E_{\text{II}}I_{\text{II}}}\right), \qquad (2.12.12)$$

gde su sa $E_{\text{I}}I_{\text{I}}$ i $E_{\text{II}}I_{\text{II}}$ označene savojne krutosti vertikalnih elastičnih greda prvog, odnosno drugog nivoa, tako da je ekvivalentna krutost

$$k_{\text{ekv}}=\frac{6E_{\text{I}}E_{\text{II}}I_{\text{I}}I_{\text{II}}}{E_{\text{I}}I_{\text{I}}H^3+E_{\text{II}}I_{\text{II}}L^3}. \qquad (2.12.13)$$

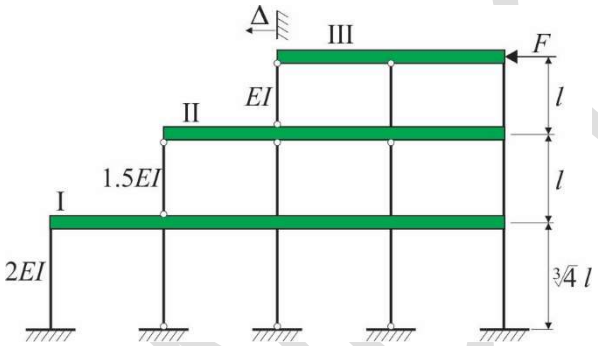
Ukoliko su svi elastični vertikalni elementi istih karakteristika, tada je $k_{ekv}=\dfrac{3EI}{L^3}$ što znači da je krutost celokupne strukture svedena na krutost konzole dužine L. Kao što je prethodno pomenuto, ovako određena krutost strukture sa Slike 2.12.7a) odgovara statičkom pristupu.

Međutim, u slučaju da je od interesa dinamička analiza ponašanja ovakve strukture, tada se u obzir moraju uzeti i mase horizontalnih krutih elemenata. Naime, dinamička analiza podrazumeva uzimanje u obzir i inercijalnih sila koje mogu biti od značaja za opterećenje strukture. U takvom slučaju, ukoliko se u

DO NOT COPY

razmatranje uvedu i horizontalne inercijalne sile koje dejstvuju na masivne elemente 1 i 2, tada transverzalna sila u elastičnim gredama prvog nivoa nije više jednaka transverzalnoj sili u gredama drugog nivoa i ekvivalentna krutost tada ne odgovara izrazu (2.12.13). Uzimanjem u obzir inercijalnih sila obe masivne ploče, razmatrani problem se ne bi mogao tretirati kao sistem sa jednim SSK, već sistem sa dva SSK, a što će biti razmatrano u drugom delu ove knjige. Međutim, ukoliko bi se zanemarila masa elementa 1, tada bi se problem oscilovanja ovakve strukture razmatrao kao sistem sa jednim SSK (Slika 2.12.7b) ekvivalentna krutost bi bila definisana izrazom 2.12.13.

Primer 2.12.4 Za strukturu prikazanu na Slici 2.12.8 odrediti ekvivalentnu krutost za slučaj statičke analize. Svi vertikalni elementi su laki i elastični, dok su horizontalni elementni masivni i kruti. Takođe, svi elastični elementi na istom nivou imaju iste karakteristike. Ako na strukturu dejstvuje horizontalna sila F konstantnog intenziteta, odrediti pomeranje Δ. Da li je i u kojem slučaju, tako određenu ekvivalentnu krutost moguće iskoristiti i u slučaju dinamičke analize?



Slika 2.12.8

Ekvivalentna krutost pet elastičnih greda prvog nivoa glasi:

$$k_{\text{ekv1}} = 2\times\frac{12(2EI)}{(\sqrt[3]{4}\,l)^3}+3\times\frac{3(2EI)}{(\sqrt[3]{4}\,l)^3}=\frac{66}{4}\frac{EI}{l^3}. \qquad (2.12.14)$$

Ekvivalentna krutost elemenata drugog nivoa je

$$k_{\text{ekv2}} = 0+2\times\frac{3(1.5EI)}{l^3}+\frac{12(1.5EI)}{l^3}=27\frac{EI}{l^3} \qquad (2.12.15)$$

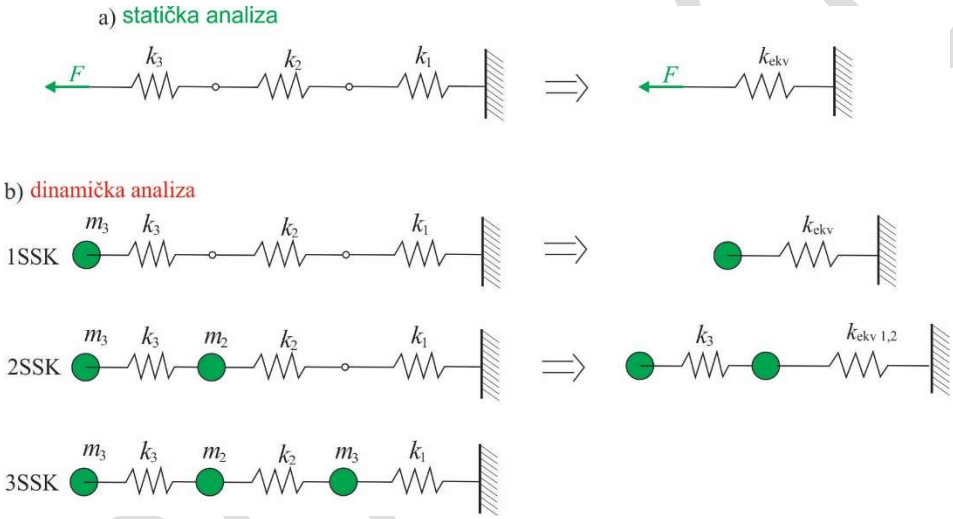
Nula u izrazu 2.12.15 stoji za prvu gredu (gledano s leve strane) drugog nivoa, jer je ova greda na oba kraja zglobno vezana i ne pruža otpor relativnom pomeranju u horizontalnom pravcu između krutih elemenata I i II. Isto važi i za prvu vertikalnu gredu trećeg nivoa koja ne sprečava relativno kretanje između elemenata II i III. Ekvivalentna krutost trećeg nivoa glasi:

$$k_{\text{ekv}3} = 0 + \frac{3EI}{l^3} + \frac{12EI}{l^3} = 15\frac{EI}{l^3} \tag{2.12.16}$$

Ovako određene krutosti strukturalnih elemenata svakog od nivoa, sada mogu poslužiti, kako za statičku, tako i za dinamičku analizu.

U slučaju statičke analize, može nas zanimati koliko će se element III pomeriti pod dejstvom konstantne sile F. U tom smislu, mase elemenata I, II i III nisu od značaja i ne uzimaju se u obzir (Slika 2.12.9a). Ekvivalentnu krutost cele strukture dobijamo tako što ekvivalentne opruge pojedinačnih nivoa, sada posmatramo kao redno (serijski) vezane opruge. Imajući ovo u vidu, ekvivalentna krutost strukture je

$$k_{\text{ekv}}^{\text{s}} = \frac{1}{\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3}} \approx 6.1\frac{EI}{l^3}. \tag{2.12.17}$$



Slika 2.12.9

Dinamička analiza strukture sa Slike 2.12.8 zavisi od toga koje se od masa horizontalnih krutih elemenata uzimaju u obzir. U tom slučaju, razmatrani primer možemo da posmatramo kao sistem sa jednim, dva ili tri SSK. Na primer, u slučaju da strukturu sa Slike 2.12.8 modelujemo kao sistem sa jednim SSK (2.12.9b), usvajajući da je dominantna masa strukture koncentrisana na nivou III, tada bi se krutost cele strukture modelovala preko ekvivalentne krutosti date izrazom 2.12.17. Sa ovim bi se mogla odrediti i kružna frekvencija $\omega_{\text{n}} = \sqrt{k_{\text{ekv}}^{\text{s}} / m_{\text{III}}}$ tako modelovane strukture. U slučaju da se struktura modeluje kao sistem sa dva SSK (na primer, ukoliko se u obzir uzmu mase elemenata II i

III), kako je prikazano na Slici 2.12.9b), tada se strukturalni elementi prvog i drugog sprata posmatraju kao redno vezane opruge i mogu predstaviti odgovarajućom ekvivalentnom krutošću $k_{\text{ekv1,2}}$. Uzimanjem u obzir inercijalnih sila usled kretanja sva tri masivna elementa, u dinamičkom smislu, struktura sa Slike 2.12.8 bi predstavljala sistem sa tri SSK.

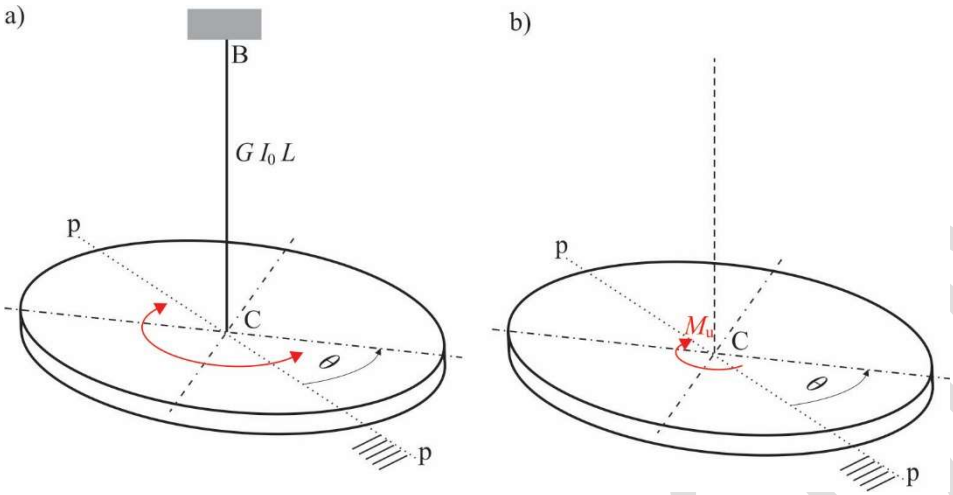
Primer 2.12.5 Odrediti statičku krutost za strukturu iz prethodnog **Primera 2.12.4** ukoliko su svi verikalni elementi obostrano uklešteni za donje i gornje horizontalne nivoe. Zanemarujući mase elemenata I i II, odrediti frekvenciju oscilovanja cele strukture.

2.13 Torzione oscilacije

Torzione oscilacije nastaju kada se kao restituciono dejstvo javlja unutrašnje dejstvo koje se naziva *moment uvijanja*. Moment uvijanja je posledica dejstva spoljašnjeg momenta sile (ili sila) koji ima komponentu u aksijalnom pravcu elastičnog objekta. Usled dejstva takvog spoljašnjeg momenta dolazi do deformacije elastičnog elementa koje se manifestuje kao međusobno relativno zaokretanje njegovih poprečnih preseka. Takva deformacija elastičnog elementa se naziva uvijanje ili torzija, a oscilacije koje se javljaju, nazivaju se torzione oscilacije. U inženjerstvu, kao tipični elementi kod kojih se javljaju torzione oscilacije su vratila, elementi koji prenose obrtno kretanje i momente između dve ili više različitih ravni. Osim vratila, i mnogi drugi elementi u inženjerstvu mogu biti izloženi uvijanju, kao što su na primer, gredni nosači u različitim strukturama, spojnice, elementi cevovoda itd.

Znači, pored aksijalnih oscilacija elastičnih štapova i transverzalnih oscilacija elastičnih greda koje smo do sada imali u sistemima koje smo razmatrali, torzione oscilacije predstavljaju još jedan tip oscilacija elastičnih elemenata.

Kao najjednostavniji mehanički model u kojem se mogu javiti torzione oscilacije je torziono klatno. Na Slici 2.13.1 je prikazan sistem kojeg čini teški i kruti disk koji je za nepokretnu krutu podlogu vezan pomoću elastičnog elementa BC (žica ili štap). Pretpostaviće se da disk može da vrši samo obrtanje oko nepokretne ose koja se poklapa sa osom BC i to takvo kretanje pri kojem je ugaona koordinata koja definiše obrtanje diska ograničena. Važi da je $\theta_1 < \theta(t) < \theta_2$, i gde je ugao θ mala veličina, mnogo manja od 1. Ugaona brzina diska je $\dot{\theta}$. Tokom takvog kretanja diska, istovremeno i sa istom ugaonom brzinom se obrće i krajnji presek elastičnog elementa, na mestu spoja sa diskom. Budući da je drugi kraj elastičnog elementa B vezan kruto za podlogu, taj poprečni presek elastičnog elementa je nepokretan. Na ovaj način imamo elastični element kod kojeg dolazi do relativne rotacije između njegovih krajnjih preseka, a što izaziva uvijanje ili torziju elastičnog kontinuuma između takva dva preseka. Za slučaj opisanog kretanja diska, ovakva deformacija (torzija) elastičnog elementa je takođe promenljiva sa vremenom.



Slika 2.13.1

Iskoristićemo poznati obrazac iz Otpornosti materijala za deformaciju elastičnog elementa izloženog uvijanju, gde je mera ovakve deformacije ugao uvijanja. Ugao uvijanja krajnjeg preseka homogenog elastičnog elementa oblika kružnog cilindra dužine L kojem je drugi kraj kruto vezan za podlogu pri čemu je moment uvijanja konstantan duž celog elastičnog elementa i iznosi M_u, glasi

$$\Delta\theta = \frac{M_u\,L}{G\,I_0} \tag{2.13.1}$$

U izrazu (2.13.1) je sa G označen moduo klizanja materijala elastičnog elementa, a sa I_0 polarni moment inercije poprečnog preseka elastičnog elementa.

Na osnovu (2.13.1) se uspostavlja veza između momenta uvijanja (torzije) i ugla uvijanja

$$M_u = \frac{G\,I_0}{L}\Delta\theta = k_t\,\Delta\theta \tag{2.13.2}$$

Izraz (2.13.2) ukazuje na linearnu vezu između momenta torzije i ugla uvijanja. Možemo uspostaviti analogiju sa izrazom kojim je uspostavljena veza između aksijalne sile u elastičnom štapu (u opruzi) i njegove deformacije. Slično tome, ovde elastični element možemo da posmatramo kao torzionu oprugu, čija je krutost k_t koja se naziva *torziona krutost*.

Dinamička jednačina obrtanja diska oko ose BC glasi:

$$J\,\varepsilon = -M_t \rightarrow J\,\ddot{\theta} = -k_t\,\theta \rightarrow J\,\ddot{\theta} + k_t\,\theta = 0 \tag{2.13.3}$$

DO NOT COPY

Poslednja jednačina u (2.13.3) ima istu strukturu kao i jednačine (2.2.5), (2.7.2) ili (2.11.3), tj. radi se o jednačini harmonijskog oscilatora. Imajući ovo u vidu, dalji rad sa jednačinom (2.13.3) se sprovodi na ranije opisani način.

Na osnovu izraza (2.13.3) se određuje sopstvena kružna frekvencija torzionog klatna, koja glasi

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_t}{J}} = \sqrt{\frac{G\,I_0}{J\,L}} \tag{2.13.4}$$

Na osnovu izraza (2.13.4) se uočava uticaj parametara sistema sa Slike 2.14.1 na sopstvenu kružnu frekvenciju. Povećanjem modula klizanja G materijala od kojeg je vratilo sačinjeno, kao i polarnog momenta inercije vratila, povećava se i kružna frekvencija ω_n **.** Sa druge strane, povećanjem masenog momenta inercije J teškog diska, kao i dužine elastičnog vratila, dovodi do smanjenja sopstvene kružne frekvencije.

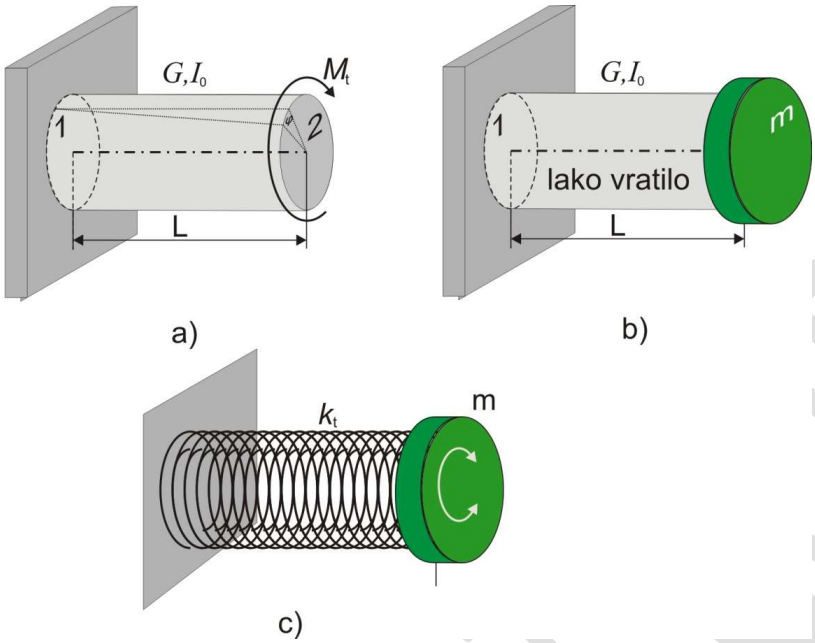
Znači, u ovoj sekciji se torzione oscilacije razmatraju u tzv. prvoj aproksimaciji, gde se masa elastičnog elementa koji je podvrgnut torziji, zanemaruje.

Na Slici 2.13.2 je prikazan tipičan slučaj torzionih oscilacija vratila pri čemu se zanemaruje masa vratila, odnosno maseni moment inercije vratila za njegovu aksijalnu osu oko koje se vrši obrtanje. Inercijalni element je u ovakvom slučaju element koji je vezan na kraju takvog vratila, kao što je na primer, zupčanik i slično. Vratilo se tretira kao torziona opruga čija se krutost određuje na osnovu izraza (2.13.2).

Primer 2.13.1 Teški disk čiji je maseni moment inercije J = 0.5 kgm^2 je postavljen na elastičnom vratilu dužine L=2m kako je prikazano na Slici 2.13.2b). Vratilo je kružnog poprečnog preseka prečnika d = 0.5 cm. Moduo klizanja materijala vratila je G = 8×10^{10} N/m^2. Odrediti kružnu frekvenciju torzionih oscilacija ovog sistema. Masu vratila zanemariti.

Rešenje: ω_n = 2.2. rad/s.

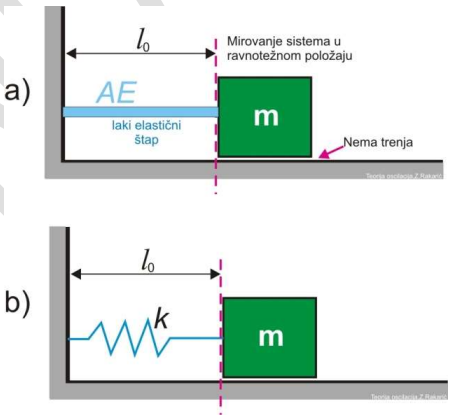
DO NOT COPY



Slika 2.13.2

2.14 Uticaj mase elastičnog tela na oscilacije.

U dosadašnjim razmatranjima nije uzimana u obzir masa elastičnih tela. Iako se i elastična tela, odnosno njegove tačke tokom oscilovanja razmatranog sistema kreću, pod pretpostavkom da je masa elastičnog elementa mnogo manja od mase ostalih elemenata, ona je kao takva zanemarivana. U tom smislu, elastični element nije posmatran kao inercijalni element, već je samo imao uticaj na restituciono dejstvo (silu ili moment).



Slika 2.14.1

Način na koji uticaj mase elastičnog elementa ima na oscilatorni proces će biti pokazan u slučaju aksijalnih oscilacija elastičnog štapa. Postupak prikazan u ovoj Sekciji predstavlja prvu aproksimaciju, kao jedan od načina na koji se može proceniti inercijalni doprinos elastičnog elementa. Analogno postupku koji će biti prikazan u vezi sa aksijalnim

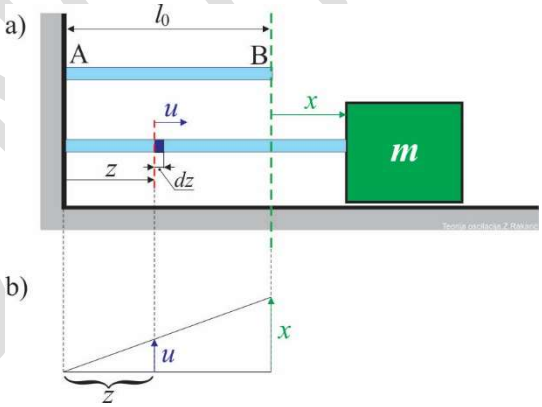
oscilacijama, sličan postupak može biti primenjen i za procenu uticaja momenta inercije elastičnog elementa u slučaju torzionih oscilacija.

Kao što je ranije već naglašavano, opruga u mehaničkom smislu je ekvivalentna elastičnom štapu. Naime, u nekom oscilatornom sistemu možemo imati elemente koji se mogu predstaviti samo kao štapovi. Takvih elemenata može biti više. Neki od njih se deformišu više, neki manje. Iz tog razloga, neke od njih možemo tretirati kao elastične, a druge kao krute štapove. Vrlo često, da bi se u nekom oscilatornom sistemu naglasilo da je neki štap elastičan, on se predstavlja simbolom opruge (Slika 2.14.1).

Do sada smo pretpostavljali da su opruge (elastični štapovi) lake. Ovo u stvari znači da smo pretpostavljali da je masa opruge znatno manja od tela za kojeg je vezana i da se njen uticaj kao inercijalnog elementa može u potpunosti zanemariti.

Međutim, postoje slučajevi kada se masa opruge i ne može u potpunosti zanemariti. Tada se može najpre pristupiti delomičnom uzimanju u obzir uticaja njene mase na oscilovanje sistema, a što će biti prikazano u nastavku. Ovde treba naglasiti da se mnogo tačniji uticaj mase opruge (elastičnog tela) na proces oscilovanja dobija posmatranjem elastičnog štapa kao sistema sa više stepeni slobode kretanja, a pogotovo posmatranjem elastičnog štapa kao sistema sa beskonačno stepeni slobode, a što je predmet trećeg dela ove knjige. Uticaj mase elastičnog elementa će se odrediti formiranjem izraza za njegovu kinetičku energiju tokom oscilovanja. U tom cilju će se odrediti kinetička energija elementarnog dela (dužine dz), a zatim izvršiti integracija po celoj dužini l_0.

Neka je ukupna masa elastičnog štapa m_k (indeks k ukazuje da je ovo masa elementa koji utiče na krutost oscilatornog sistema), ravnomerno raspodeljena duž celog štapa i čija dužina u nedeformisanom stanju iznosi l_0. Štap se posmatra kao jednodimenzijski sistem i od značaja je samo njegova dužina u aksijalnom pravcu (i promena ove dužine), a ne i dimenzija u poprečnom pravcu. Posmatramo najpre elementarni deo štapa koji se nalazi na rastojanju z od kraja gde je opruga fiksirana. Dužinu elementarnog dela ćemo obeležiti sa dz (Slika 2.14.2a). Pomeranje ovog elementarnog dela je označeno sa u. Masa jedinice dužine štapa je



Slika 2.14.2

$$\mu = \frac{m_k}{l_0}. \tag{2.14.1}$$

Sa (2.14.1) masa elementarnog dela je

$$dm_k = \mu\, dz = \frac{m_k}{l_0} dz \tag{1.14.2}$$

Pomeranje proizvoljnog elementarnog dela $u(z)$ će se povezati sa pomeranjem krajnjeg preseka elastičnog štapa na sledeći način (Slika 2.14.2b):

$$u(z) = z\frac{x}{l_0} \tag{2.14.3}$$

Veza između u i x, data izrazom (2.14.3) je uspostavljena na osnovu pretpostavke da je pomeranje elementarnog dela veće što je elementarni deo na većem rastojanju od levog kraja, kao i da najveće pomeranje, x, ima kraj štapa koji je vezan za krutu masu. Pri tome je usvojen linearni porast intenziteta pomeranja, kako je prikazano na Slici 2.14.2b.

Kinetička energija elementarnog dela je

$$dE_k = \frac{1}{2} dm_k \dot{u}^2(z) = \frac{1}{2}\frac{m_k}{l_0} dz\, \dot{u}^2(z) = \frac{1}{2}\frac{m_k}{l_0^3} dz\, z^2\, \dot{x}^2 \tag{2.14.4}$$

Integracijom po celoj dužini elastičnog štapa, njegova kinetička energija ima sledeći oblik:

$$E_k = \int_0^{l_0} dE_k = \frac{1}{2}\frac{m_k}{l_0^3}\dot{x}^2 \int_0^{l_0} dz\, z^2 = \frac{1}{2}\frac{m_k}{3}\dot{x}^2 \tag{2.14.5}$$

Na ovaj način, ukupna kinetička energija oscilatora sa Slike 2.14.1, uzimajući u obzir i doprinos od mase elastičnog elementa uzloženog aksijalnim oscilacijama, glasi

$$E_k^{ekv} = \frac{1}{2}\left(m + \frac{m_k}{3}\right)\dot{x}^2 \tag{1.14.6}$$

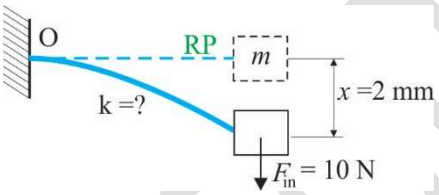
Izraz (2.14.6) predstavlja ukupnu kinetičku energiju ekvivalentnog sistema, gde se izraz u zagradi može smatrati kao ekvivalentna masa. Kao što se vidi, uticaj mase opruge može biti predstavljen kao koncentrisama masa jednaka trećini njene ukupne mase, postavljene na mestu gde je opruga vezana za osnovni sistem. Ovo može da predstavlja izvesnu smernicu o uzimanju (ili ne uzimanju) u obzir mase opruge. Ako je, na primer, masa elastičnog elementa jednaka jednoj trećini od mase m krutog elementa, tada je uticaj mase elastičnog elementa na ukupnu kinetičku energiju kao $m/9$.

DO NOT COPY

2.15 Mešoviti primeri iz oscilacija sistema sa jednim SSK

Primer 2.15.1 Tokom kretanja HO izmeren je intenzitet njegovog ubrzanja koji iznosi a = 1 m/s^2 u trenutku kada je na udaljenosti x = 1 cm od ravnotežnog položaja. Koliko iznosi njegova frekvencija (u hercima)?

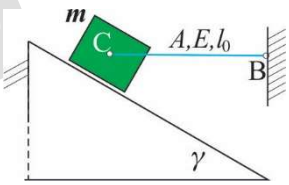
Primer 2.15.2 Telo mase m=1kg osciluje na lakoj elastičnoj konzoli. Prikazan je proizvoljan položaj tokom usporenog kretanja (na udaljenosti x = 2 mm u odnosu na horizontalni položaj. **Napomena**: zanemariti statičku deformaciju), u kojem je poznat intenzitet i smer inercijalne sile. Koji je smer kretanja u tom trenutku: na dole ili na gore? Strelicom označiti smer kretanja. Odrediti savojnu krutost elastične konzole.



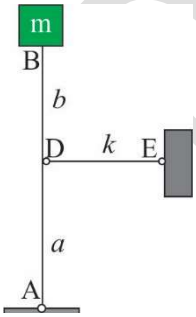
Slika 2.15.1

Primer 2.15.3 Ako je oscillator iz prethodnog zadatka **Z2** u kretanje doveden početnim otklonom x_0 =3 mm, koristeći poznatu krutost (određenu u Z2) odrediti maksimalnu brzinu koju oscilator ostvaruje.

Primer 2.15.4 Telo mase m može da osciluje po glatkoj strmoj ravni ugla nagiba γ. Za telo je vezan laki elastični štap. Prikazan je ravnotežni položaj u kojem je elastični štap horizontalan. Odrediti statičku deformaciju elastičnog štapa. Da li sila težine utiče na frekvenciju oscilovanja? Ako se elastični štap pomeri tako da bude paralelan strmoj ravni, napisati koliko iznosi frekvencija oscilovanja.



Slika 2.15.2

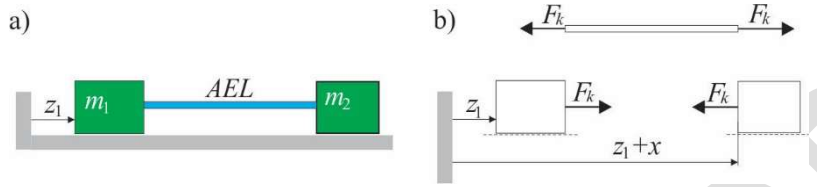


Slika 2.15.3

Primer 2.15.5 Telo mase m je postavljeno na kraju lakog krutog štapa AB. Za štap AB je u tački D vezan laki elastični štap DE poznate aksijalne krutosti k. Prikazan je ravnotežni položaj. Ako bi se štap DE pomerio paralelno samom sebi, tako da dođe do promene veličine a (pri tome je $a+b=L$ =const), odgovoriti da li povećanje a povećava ili smanjuje frekvenciju oscilovanja? Za koju vrednost veličine a će kružna frekvencija biti najveća.

DO NOT COPY

Primer 2.15.6 Telo mase m_1 se kreće po unapred zadatom zakonu z_1 (Slika 2.15.4). Za njega je pomoću lakog elastičnog štapa vezano telo mase m_2. Kretanje tela 2 se razlikuje za neku malu vrednost x usled deformacije elastičnog štapa. Razmotriti način kretanja tela 1 (definisano koordinatom z_1) za koje će telo 2 vršiti slobodne harmonijske oscilacije u odnosu na telo 1.



Slika 2.15.4

Diskusija i rešavanje Primera 2.15.6: U odnosu na osnovni mehanički model HO sa Slike 2.2.1, u ovom slučaju levi kraj elastičnog štapa se takođe kreće. Ovde imamo dva tela čije su mase m_1 i m_2, koja se kreću translatorno pravolinijski i međusobno su vezani lakim elastičnim štapom. Iako ovo predstavlja sistem od dva tela, budući da je kretanje tela 1 unapred zadato, za njega nema potrebe formirati dinamičku jednačinu. Nakon dekompozicije (Slika 2.15.4b), može se formirati dinamička jednačina kretanja za telo 2, koja glasi:

$$m_2\ddot{z}_2 = -F_k\,. \tag{2.15.1}$$

Imajući u vidu da se apsolutna koordinata z_2 može zapisati kao $z_2 = z_1 + x$, sledi i da je $\ddot{z}_2 = \ddot{z}_1 + \ddot{x}$. Osim toga, deformacija elastičnog štapa je jednaka razlici $z_2 - z_1 = x$, tako da se uvrštavanjem u (2.15.1), dobija

$$m_2\left(\ddot{z}_1 + \ddot{x}\right) = -F_k \xrightarrow{F_k = k\left(z_2 - z_1\right) = kx} m_2\left(\ddot{z}_1 + \ddot{x}\right) = -k\,x \rightarrow m_2\,\ddot{x} + k\,x = -m_2\ddot{z}_1 \tag{2.15.2}$$

Kao što se vidi poslednja jednačina u (2.15.2) je nehomogena diferencijalna jednačina. Treba imati u vidu da koordinata x definiše relativno kretanje tela 2 u odnosu na telo 1. Ovde je moguće nekoliko različitih slučajeva (oscilatornog kretanja):

1. Ako je $\dot{z}_1 = const$ (telo 1 vrši ravnomerno kretanje) tada je $\ddot{z}_1 = 0$, pa jednačina u (2.15.2) postaje homogena i može doći do kretanja koje odgovara HO. Znači, telo 2 može da vrši relativno harmonijsko oscilovanje u odnosu na telo 1. Do takvog oscilatornog kretanja će doći samo ukoliko je izazvano početnim relativnim otklonom $x(0)$ i/ili početnom relativnom brzinom tela 2 u odnosu na telo 1, tj, $v_{1/2}(0)$;

2. Ako je $\ddot{z}_1 = const = a$, tada je nehomogeni član $-m_2\ddot{z}_1 = -m_2\,a = const$. Znači, u ovom slučaju je moguće harmonijsko (relativno) oscilovanje tela 2 u odnosu na telo 1 pod dejstvom konstantne sile. Kao što znamo,

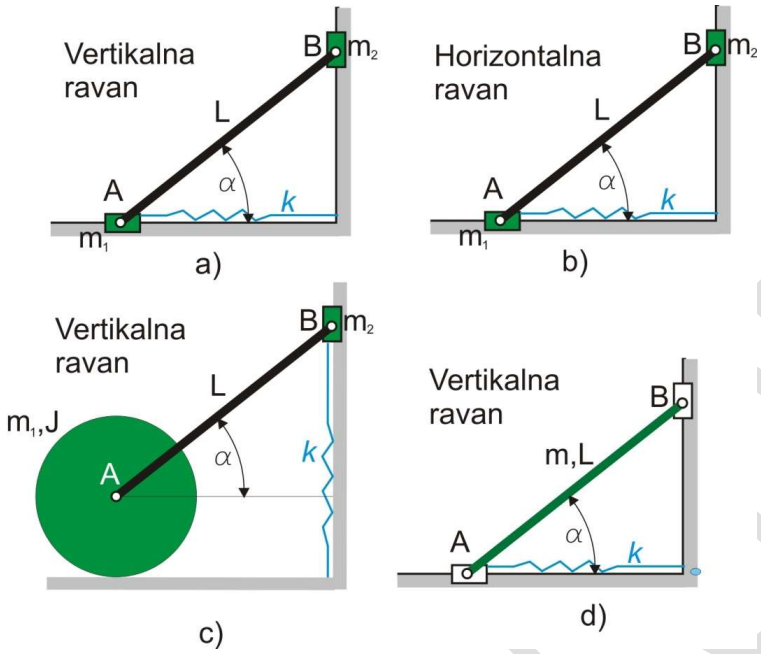
DO NOT COPY

konstantna sila ne utiče na karakter oscilatornog kretanja, već samo pomera položaj oko kojeg se vrši oscilovanje, pod uslovom da je dovoljnog intenziteta da nadvlada elastičnu silu. Pod pretpostavkom da je sila $m_2 a$ dovoljnog intenziteta, doći će do pomeranja relativnog ravnotežnog položaja u smeru dejstva sile $m_2 a$ za veličinu $\Delta = (m_2 a)/k$ i oscilovanja tela 1 u odnosu na telo 2 oko tog novog relativnog ravnotežnog položaja sa amplitudom $\Delta = (m_2 a)/k$. Kao što je pomenuto, ukoliko je krutost k mnogo veća od $m_2 a$, tada $\Delta \to 0$. Ovde se može uočiti osnovni princip rada akcelerometra, uređaja za merenje ubrzanja.

3. Ako je $\ddot{z}_1 = f(t)$, ubrzanje se menja sa vremenom, tada je od značaja način na koji se vrši takva promena tokom vremena. Od karaktera te promene, tj. od funkcije $f(t)$ će zavisiti i partikularno rešenje diferencijalne jednačine u (2.15.2) usled nehomogenog člana, pa samim tim će zavisiti i opšte rešenje. Sa stanovišta oscilacija, od posebnog značaja je slučaj kada je funkcija $f(t)$ periodična sa periodom T_a i gde je period T_a istog reda veličine sa periodom $T = 2\pi\sqrt{m_2/k}$, gde je $k = AE/L$. Ovakvi i slični problemi će se detaljno razmatrati u Glavi 4 koja je posvećena **prinudnim oscilacijama**.
4. Neka je $\ddot{z}_1 = f(t)$, i funkcija f je takođe periodična, ali gde je period T_a mnogo veći od perioda $T = 2\pi\sqrt{m_2/k}$. Drugim rečima, promena ubrzanja tela 2 mnogo sporija od promene relativne koordinate x za slučaj slobodnih oscilacija tela 2 u odnosu na telo 1. Što se tiče mogućeg relativnog kretanja, ovaj slučaj je po karakteru sličan slučaju pod 1. Telo 2 će se kretati zajedno sa telom 1 kao jedno kruto telo. Ovakva sila $m_2\ddot{z}_1$, sa $\ddot{z}_1 = f(t)$, gde je $f(t) = f(t + T_a)$, $T_a \ll 2\pi\sqrt{m_2/k}$, iako promenljiva sa vremenom bi se tretirala kao **kvazi-statička sila** u smislu uticaja na relativne oscilacije tela 2 u odnosu na telo 1 (Međutim, ovo ne znači da bi se ista sila $m_2\ddot{z}_1$ uvek tretirala kao kvazi-statička. To zavisi od sistema na koji dejstvuje). I ovakav slučaj će se detaljnije razmatrati u Glavi 4.

Primer 2.15.7 Za sisteme prikazane na slikama, odrediti sopstvenu kružnu frekvenciju.

DO NOT COPY


Vertikalna ravan
B
m2
L
A
α
k
m1
a)
Horizontalna ravan
B
m2
L
A
α
k
m1
b)
Vertikalna ravan
B
m2
L
m1,J
A
α
k
c)
Vertikalna ravan
B
m,L
A
α
k
d)

DO NOT COPY

DO NOT COPY