

Dinamika

Dinamika materijalne tačke – Njutnovi zakoni,...

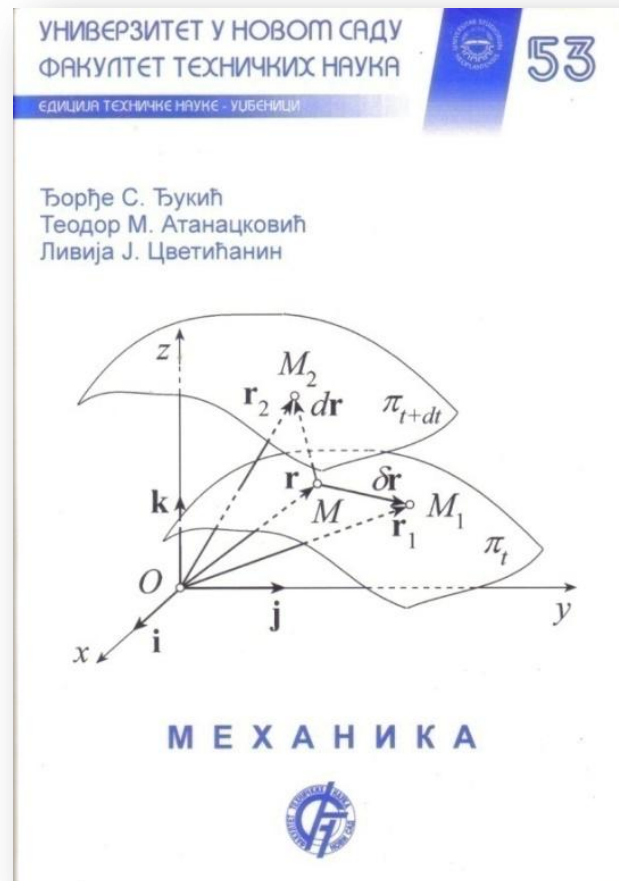
Kinematika i dinamika

Miodrag Zuković

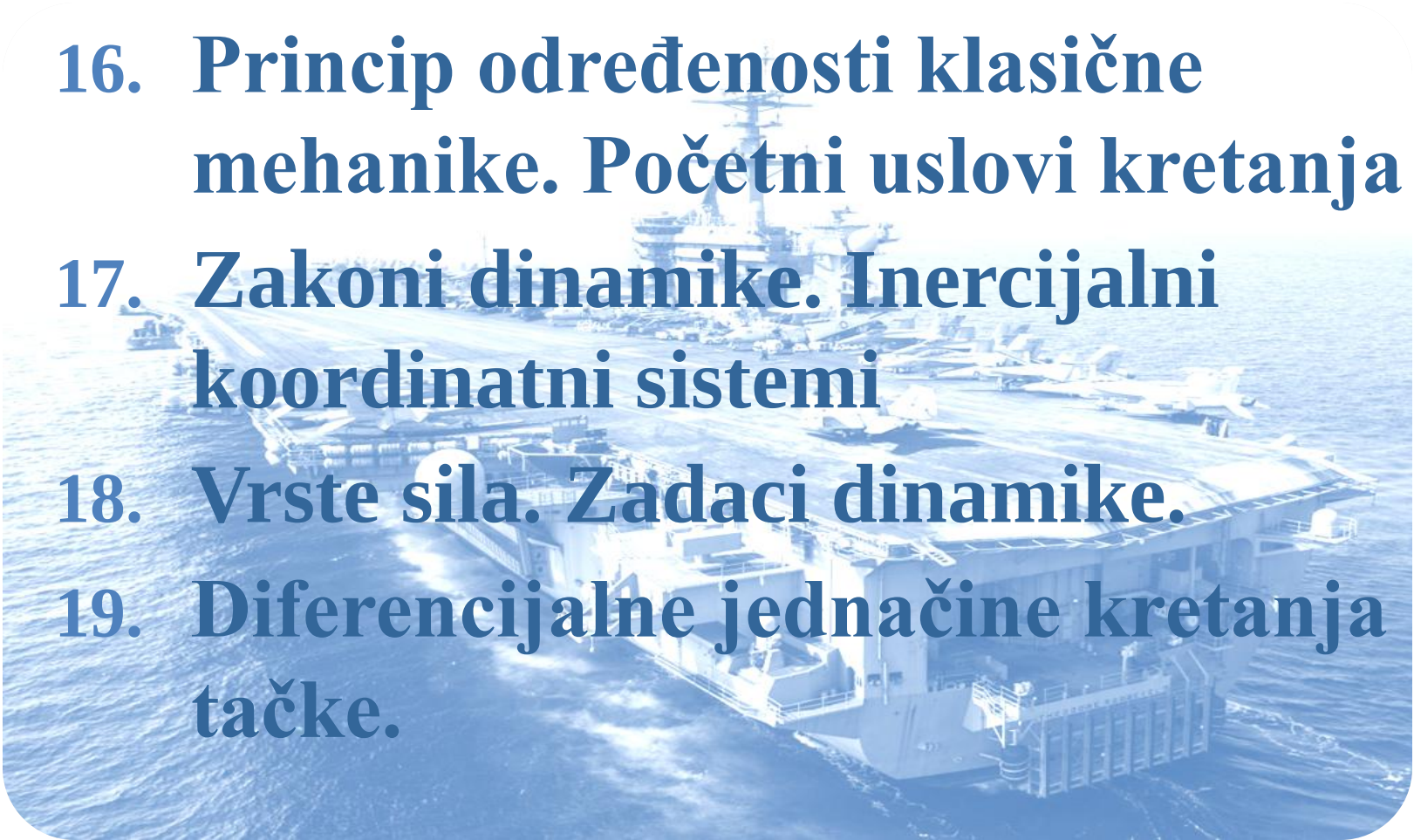
Novi Sad, 2021.

Literatura

- Đorđe S. Đukić, Teodor M. Atanacković, Livija J. Cvetićanin:
Mehanika, Fakultet tehničkih nauka u Novom Sadu, Novi Sad, 2003.



Šta ćemo naučiti?

- 
- An aerial photograph of a large aircraft carrier sailing on the ocean. The ship is white with a grey deck, and several fighter jets are visible on the flight deck. The water is a deep blue, and the sky is a lighter blue. The image is used as a background for the text.
- 16. Princip određenosti klasične mehanike. Početni uslovi kretanja**
 - 17. Zakoni dinamike. Inercijalni koordinatni sistemi**
 - 18. Vrste sila. Zadaci dinamike.**
 - 19. Diferencijalne jednačine kretanja tačke.**

16. Princip određenosti klasične mehanike.

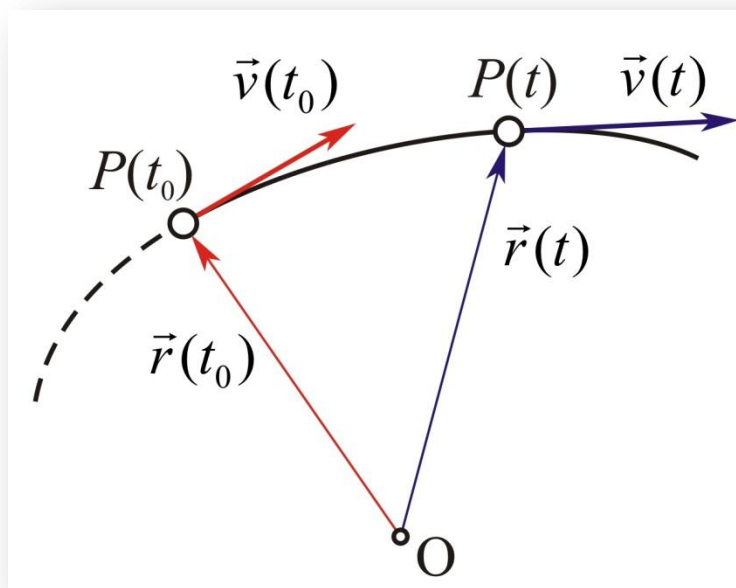
Početni uslovi kretanja

- **Njutn-Laplosov princip određenosti** klasične mehanike tvrdi da početno stanje mehaničkog sistema, stanje u početnom trenutku vremena t_0 , koje je određeno položajem i brzinama tačaka sistema (), jednoznačno određuje njegovo dalje kretanje ($t > t_0$).

Početno
stanje kretanja:

$$\vec{r}_0 = \vec{r}(t_0)$$

$$\vec{v}_0 = \vec{v}(t_0)$$



Stanje kretanja:

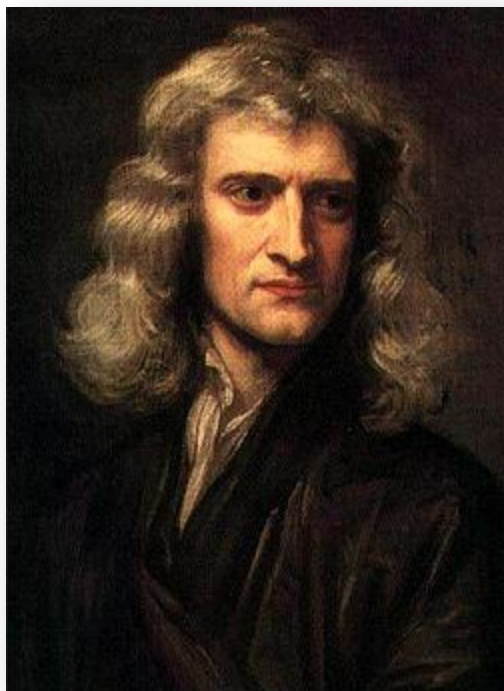
$$\vec{r}(t)$$

$$\vec{v}(t)$$

17. Zakoni dinamike. Inercijalni koordinatni sistemi

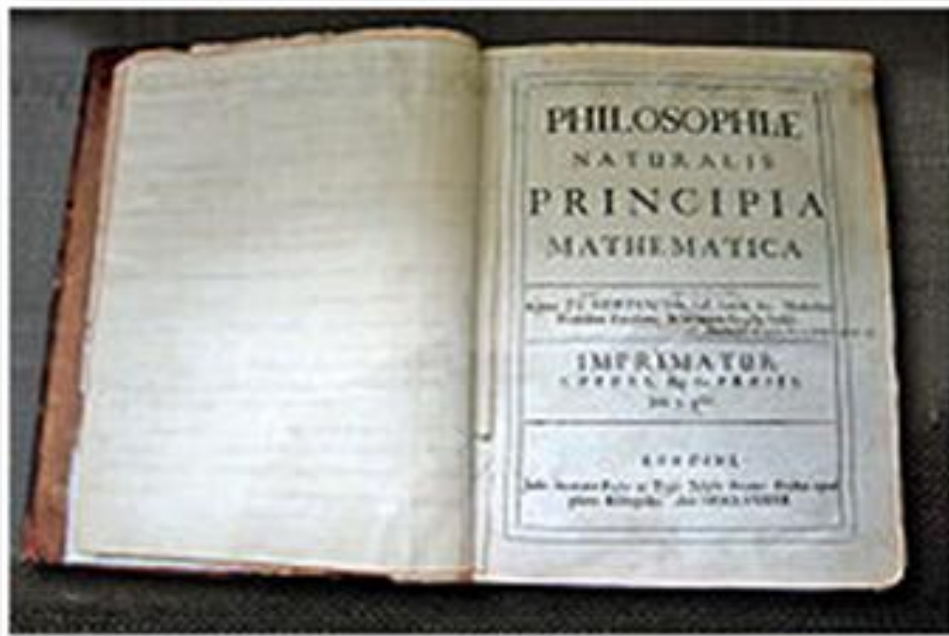
Njutnovi zakoni dinamike

- Prvi Njutnov zakon – zakon inercije
- Drugi Njutnov zakon – osnovni zakon dinamike
- Treći Njutnov zakon – zakon akcije i reakcije



Sir Isaac Newton

(25 December 1642 – 20 March 1727)



Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica
(Matematički principi prirodne filozofije), 1697.

Prvi Njutnov zakon – zakon inercije

- Svako telo ostaje u stanju mirovanja ili jednolikog pravolinijskog kretanja dok pod dejstvom sile ne bude prinuđeno da to svoje stanje promeni.
- Tačka ostaje u miru ako je bila u miru u početnom trenutku t_0 . Kreće se jednoliko i pravolinijski, konstantnom brzinom $\mathbf{v}_0$, ako je u početnom trenutku t_0 imala brzinu $\mathbf{v}_0$.

$$\vec{r}(t_0) = \vec{r}_0, \vec{v}(t_0) = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{r}(t) = \vec{r}_0, \vec{v}(t) = \vec{0}$$

$$\vec{r}(t_0) = \vec{r}_0, \vec{v}(t_0) = \vec{v}_0 \quad \Rightarrow \quad \vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t, \vec{v}(t) = \vec{v}_0$$

- Ovim zakonom se ukazuje na svojstvo tačke da zadrži stanje mirovanja ili jednolikog pravolinijskog kretanja (prirodna stanja kretanja) – inernost.
- Masa – mera inercije – [kg]

Prvi Njutnov zakon – zakon inercije

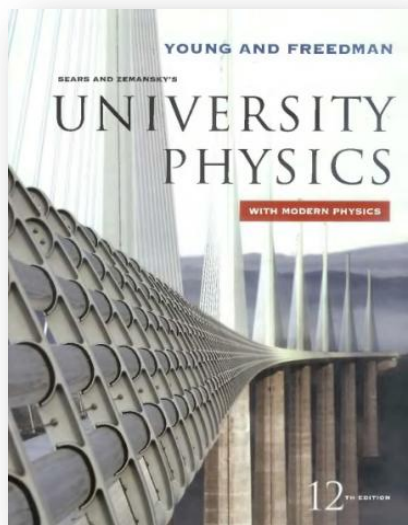
- Slučaj kada na telo deluje više sila:

$$\vec{F}_r = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \vec{0}$$

Prvi Njutnov zakon – zakon inercije

- Primer (Ne)Poznavanja prvog Njutnovog zakona:

U naučno fantastičnom filmskom klasiku “Rocketship X-M” iz 1950. svemirskom brodu, koji se kreće u vakuumu, daleko od bilo kog nebeskog tela, iznenada otkazuje motor. Brod usporava i staje.?



Conceptual Example 4.2 Zero net force means cons

In the classic 1950 science fiction film *Rocketship X-M*, a spaceship is moving in the vacuum of outer space, far from any planet, when its engine dies. As a result, the spaceship slows down and stops. What does Newton's first law say about this event?

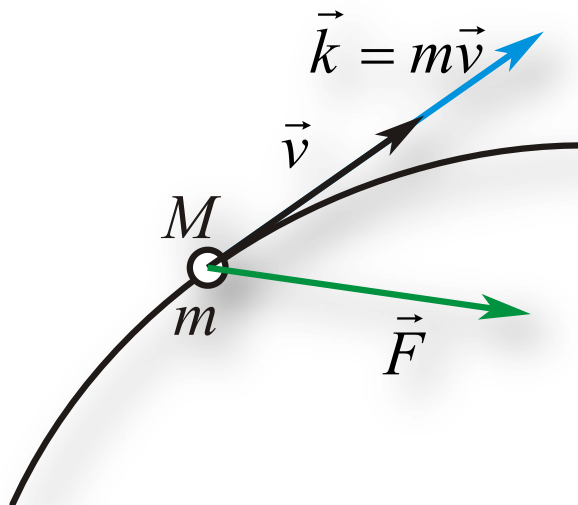
Drugi Njutnov zakon- osnovni zakon dinamike

Promena kretanja proporcionalna je sili koja deluje na telo i vrši se u pravcu sile.

Promena (izvod) količine kretanja materijalne tačke jednaka je sili koja na tu tačku deluje.

Količina kretanja

$$\vec{k} = m\vec{v}$$

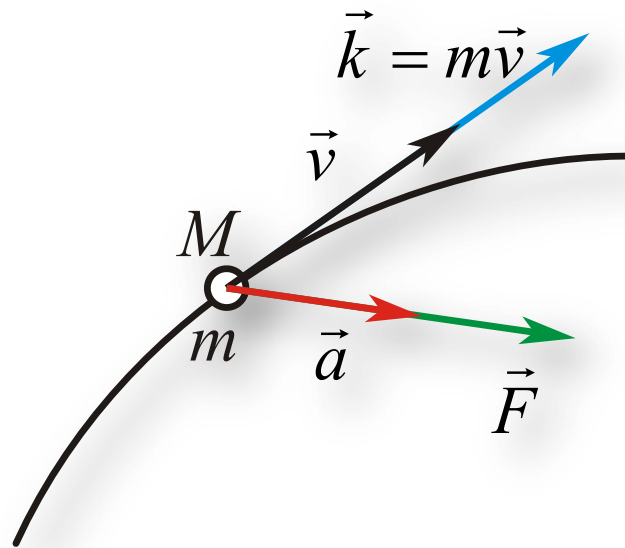


$$\frac{d\vec{k}}{dt} = \vec{F}$$

Drugi Njutnov zakon – „uobičajeni oblik”

- Proizvod mase i ubrzanja tačke jednak je sili koja na tačku deluje.

$$m = \text{const},$$
$$\dot{\vec{k}} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m\vec{a}$$



$$m\vec{a} = \vec{F}$$

$$\vec{F} = \vec{F}_r = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i$$

Drugi Njutnov zakon – vezano kretanje

$$m\vec{a} = \vec{F} + \vec{R}$$

$$\vec{F} = \vec{F}_r = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i$$

$$\vec{R} = \vec{R}_r = \sum_{j=1}^M \vec{R}_j$$

Drugi Njutnov zakon

- **Primer:** Voziš svoj Porsche Carrera GT auto-putem “pravima kao strela”, konstantnom brzinom 150km/h. Prestižeš VW “bubu” iz 1971 godine koja se kreće konstantnom brzinom 75km/h. Na koje vozilo dejstvuje veća rezultujuća sila?



Conceptual Example 4.3 Constant velocity means zero net force

You are driving a Porsche Carrera GT on a straight testing track at a constant speed of 150 km/h. You pass a 1971 Volkswagen Beetle doing a constant 75 km/h. For which car is the net force greater?

SOLUTION

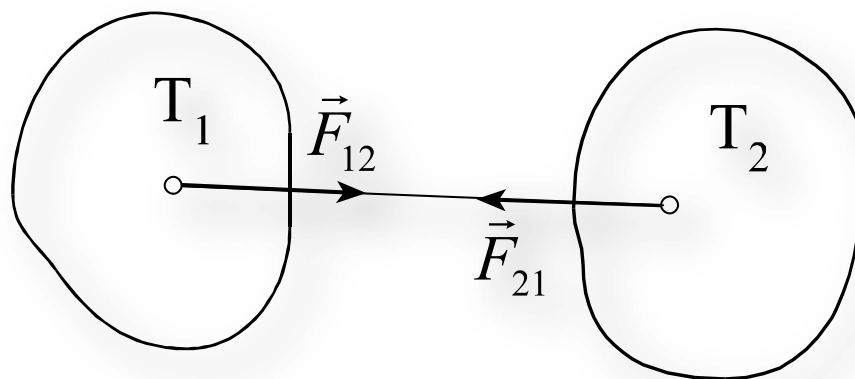
The key word in this question is “net.” Both cars are in equilibrium because their velocities are both constant; therefore the *net* force on each car is *zero*.

This conclusion seems to contradict the “common sense” idea that the faster car must have a greater force pushing it. It’s true that

the forward force on your Porsche is much greater than that on the Volkswagen (thanks to your Porsche’s high-power engine). But there is also a *backward* force acting on each car due to road friction and air resistance. The only reason these cars need engines is to counteract this backward force so that the vector sum of the forward and backward forces will be zero and the car will travel with constant velocity. The backward force on your Porsche is greater because of its greater speed, so its engine has to be more powerful than the Volkswagen’s.

Treći Njutnov zakon- zakon akcije i reakcije

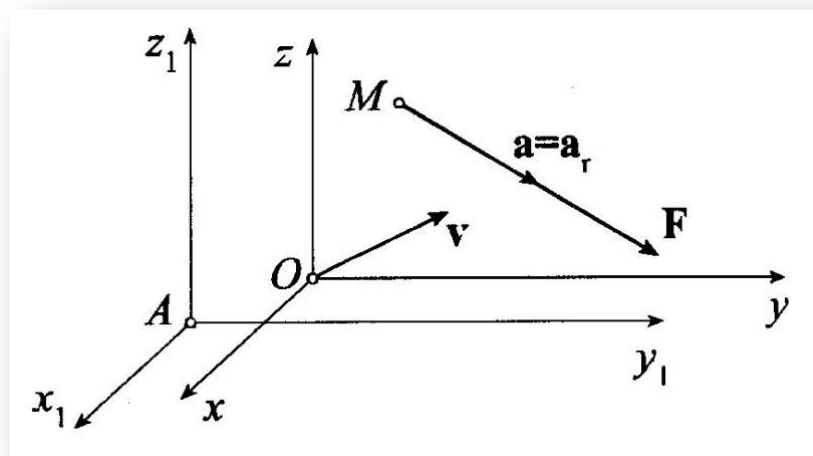
- Dejstvu (akciji) uvek je jednako protivdejstvo (reakcija) ili: međusobna dejstva dvaju tela uvek su jednaka i suprotno usmerena.



$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$$

Inercijalni koordinatni sistemi

- Drugi Njutnov zakon ima potpuno isti oblik u pokretnom koordinatnom sistemu ($Oxyz$) koji se kreće translatorno konstantnom brzinom v kao i u nepokretnom koo. sis. ($Ax_1y_1z_1$).



$$Ax_1y_1z_1 \rightarrow m\vec{a} = \vec{F}$$

$$m(\vec{a}_p + \vec{a}_r + \vec{a}_c) = \vec{F}$$

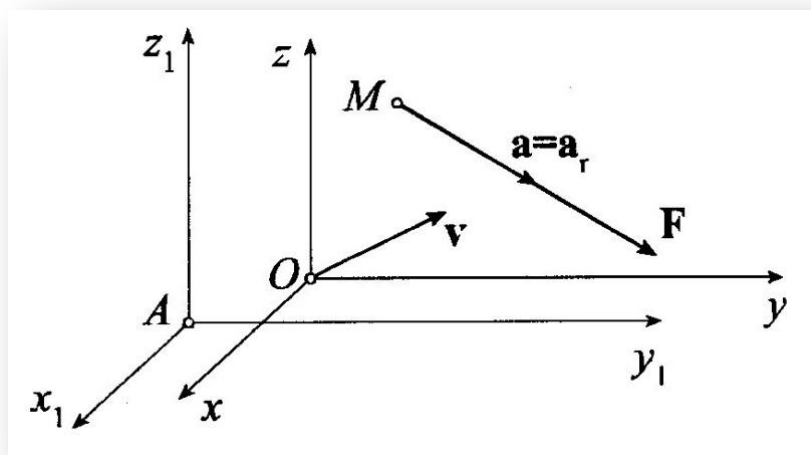
$$\vec{v} = \overrightarrow{const} \rightarrow \vec{a}_p = \vec{a}_c = 0$$

$$Oxyz \rightarrow m\vec{a}_r = \vec{F}$$

Inercijalni koordinatni sistemi

Princip relativnosti klasične mehanike (Galilej).

- Koordinatni sistemi koji se kreću translatorno konstantnom brzinom $\mathbf{v}$ u odnosu na apsolutno nepokretni sistem nazivaju se **inercijalni** koordinatni sistemi.



$$Ax_1y_1z_1 \rightarrow m\vec{a} = \vec{F}$$

$$m(\vec{a}_p + \vec{a}_r + \vec{a}_c) = \vec{F}$$

$$\vec{v} = \overrightarrow{const} \rightarrow \vec{a}_p = \vec{a}_c = 0$$

$$Oxyz \rightarrow m\vec{a}_r = \vec{F}$$

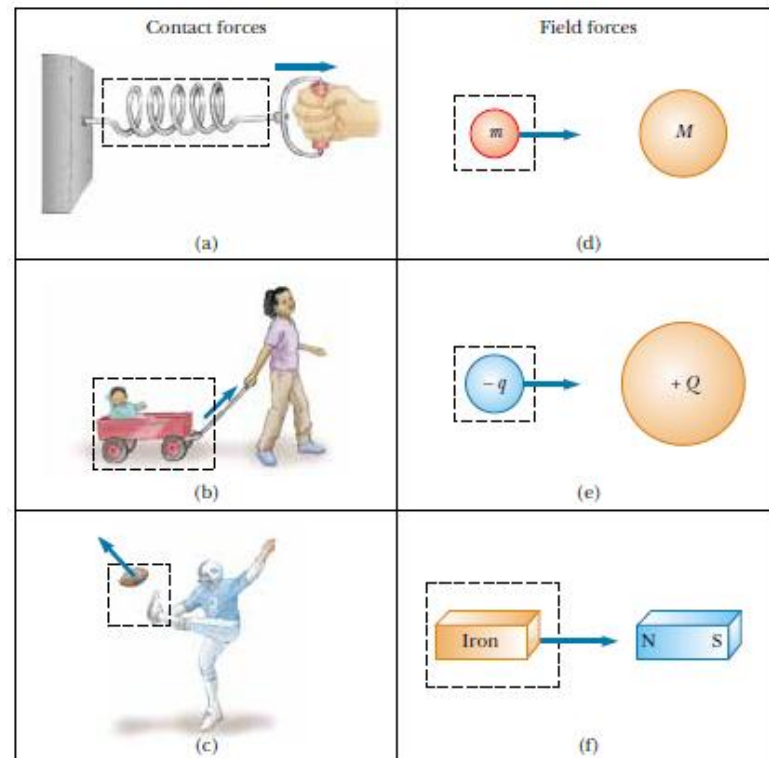
18. Vrste sila. Zadaci dinamike

Vrste sila (Sile u mehanici)

- U opštem slučaju sila može zavisiti od vremena, položaja i brzine tačke:

$$\vec{F} = \vec{F}(t, \vec{r}, \vec{v})$$

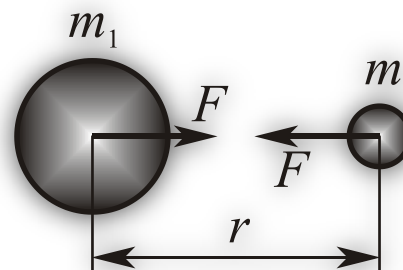
- Dva načina delovanja sile:
 - **Indirektni** (posredstvom fizičkog polja)
 - **Direktni** (neposredni kontakt)
- **Polje sile.** Ako u svakoj geometrijskoj tački ograničenog ili neograničenog dela prostora na materijalnu tačku, koja se nađe u njoj, deluje sila, onda je taj prostor polje te sile.



Vrste sila (Sile u mehanici)

- Gravitaciona sila

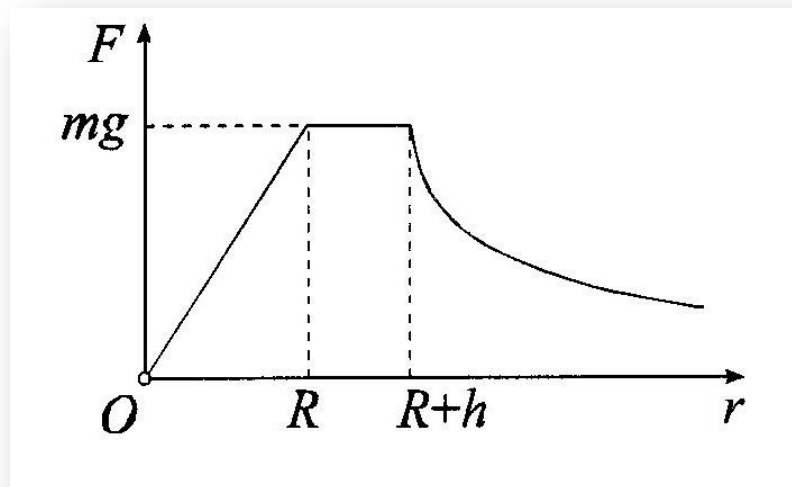
$$F = k \frac{m_1 m_2}{r^2}$$



- Sila težine

$$F = mg$$

$$k = 6,67 \times 10^{-11} \left[\frac{\text{kg m}^2}{\text{s}^2} \right]$$



Dijagram sile delovanja Zemlje na tela,
u zavisnosti od njihovog rastojanja r od težišta Zemlje.

Vrste sile (Sile u mehanici)

- Elektromagnetne sile

- Električna sila $F = k_1 \frac{q_1 q_2}{r^2}; \quad \vec{F} = q\vec{E}$

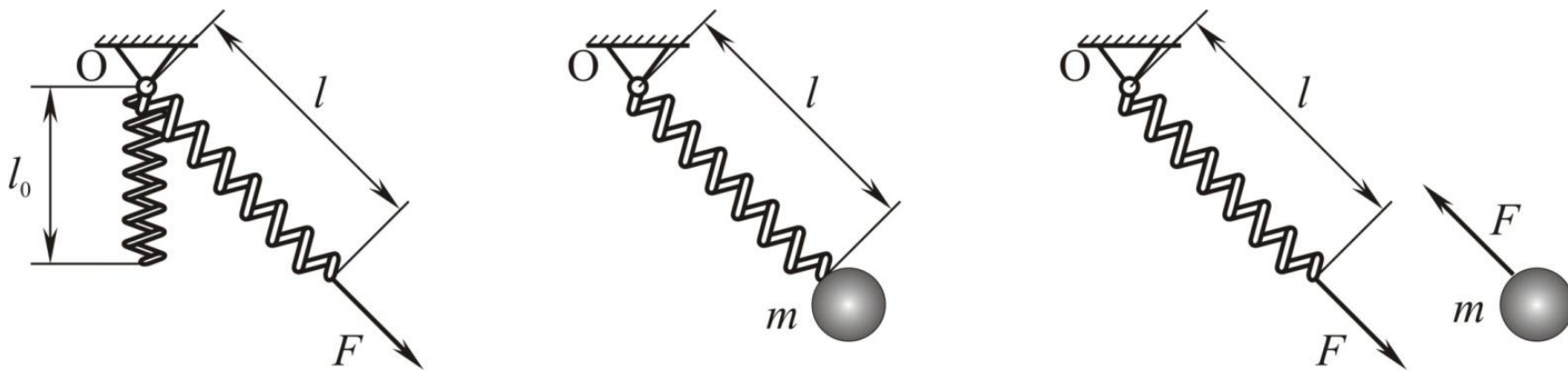
- Magnetne sila $\vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B})$

- Elektromagnetna sila $\vec{F} = q\vec{E} + q(\vec{v} \times \vec{B})$

- Nuklearne sile

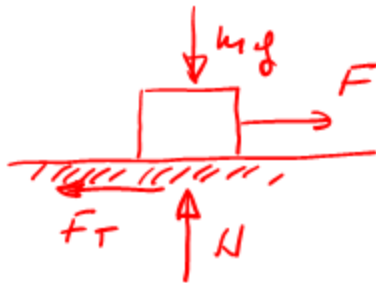
Vrste sila (Sile u mehanici)

- Sila trenja (Sila suvog Kulonovog trenja)
- Sila zavisna od deformacija. Sila u opruzi:



$$F = c \Delta l; \quad \Delta l = l - l_0$$

MYPOBAHE



$$F_T \leq F_{gr}$$

$$\underline{F_T \leq \mu_s N}$$

KPETAHE



$$\underline{F_T = \mu_d N}$$

$$\underline{F_T = \mu N}$$

Vrste sila (Sile u mehanici)

- Sila fluidnog otpora

$$\vec{F}_w = -\kappa f(v) \vec{t}$$

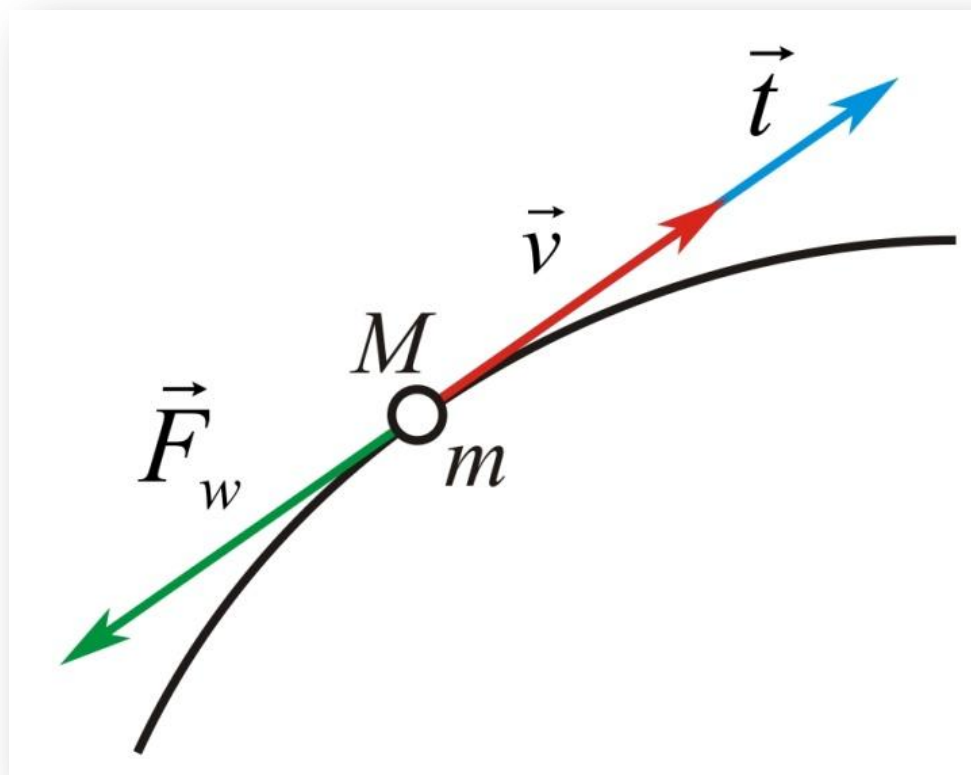
$$\vec{t} = \frac{\vec{v}}{v}$$

$$\vec{F}_w = -\kappa f(v) \frac{\vec{v}}{v}$$

$$f(v) = \alpha v$$

$$f(v) = \beta v^2$$

$$f(v) = \alpha v + \beta v^2 + \dots$$



Vrste sila (Sile u mehanici)

• гравитациона сила између Сунца и Земље	$3,5 \times 10^{22} \text{ N}$
• погонска сила шатла при лансирању	$3,1 \times 10^7 \text{ N}$
• вучна сила локомотиве	$8,9 \times 10^5 \text{ N}$
• тежина јабуке средње величине	1 N
• најмање јаје инсекта	$2 \times 10^{-6} \text{ N}$
• електрична сила између протона и електрона у атому водоника	$8,2 \times 10^{-8} \text{ N}$
• тежина бактерије	$1 \times 10^{-18} \text{ N}$
• тежина атома водоника	$1,6 \times 10^{-26} \text{ N}$
• тежина електрона	$8,9 \times 10^{-30} \text{ N}$
• гравитациона сила између протона и електрона у атому водоника	$3,6 \times 10^{-47} \text{ N}$

Dva zadatka dinamike

- Prvi zadatak dinamike

- Dato: $\vec{r} = \vec{r}(t)$ (ili $\vec{v} = \vec{v}(t)$ ili $\vec{a} = \vec{a}(t)$)

- Odrediti: $\vec{F} = \vec{F}(t)$

$$m\vec{a} = \vec{F}$$



$$\begin{aligned}\vec{F} &= m\vec{a} \\ \vec{F}(t) &= m\ddot{\vec{r}}(t)\end{aligned}$$

Dva zadatka dinamike

- **Drugi zadatak dinamike**

- Dato: $\vec{F} = \vec{F}(t, \vec{r}, \vec{v})$

- Odrediti: $\vec{r} = \vec{r}(t)$

Diferencijalna jednačina
kretanja (vektorska)

$$m\vec{a} = \vec{F}$$



$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}$$

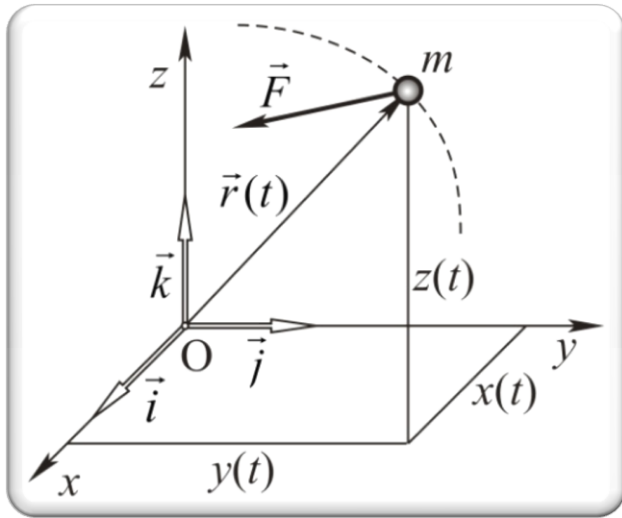
Početni uslovi:

$$t = t_0,$$

$$\vec{r}(0) = \vec{r}_0, \vec{v}(0) = \vec{v}_0$$

19. Diferencijalne jednačine kretanja tačke

Diferencijalne jednačine kretanja - Dekartov koordinatni sistem



$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, \quad \vec{v} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}$$

$$\vec{a} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}$$

$$\vec{F} = \vec{F}_r = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i$$

$$\begin{aligned} &= \left(\sum_{i=1}^N F_{ix} \right) \vec{i} + \left(\sum_{i=1}^N F_{iy} \right) \vec{j} + \left(\sum_{i=1}^N F_{iz} \right) \vec{k} \\ &= F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k} \end{aligned}$$

$$m\vec{a} = \vec{F}(t, \vec{r}, \vec{v})$$

Diferencijalne jednačine kretanja (skalarne)

$$m\ddot{x} = F_x(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$$

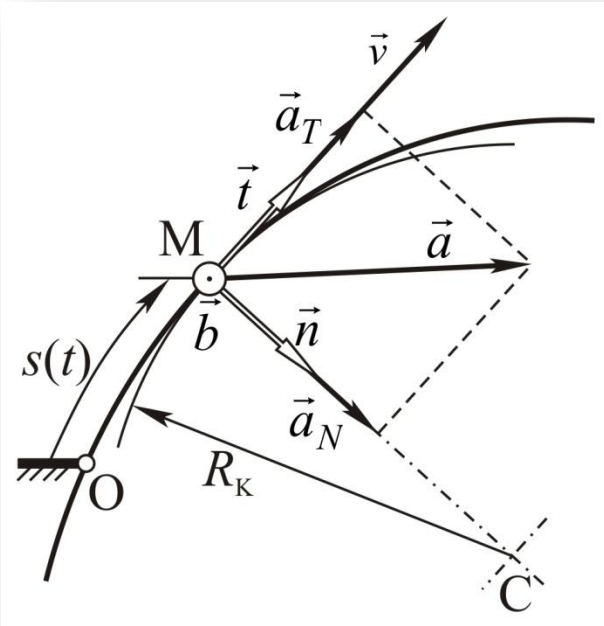
$$m\ddot{y} = F_y(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$$

$$m\ddot{z} = F_z(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$$

Početni uslovi:

$$\begin{aligned} t = t_0, \quad x(0) = x_0, y(0) = y_0, z(0) = z_0, \\ \dot{x}(0) = \dot{x}_0, \dot{y}(0) = \dot{y}_0, \dot{z}(0) = \dot{z}_0. \end{aligned}$$

Diferencijalne jednačine kretanja - Prirodni koordinatni sistem



$$\vec{v} = v_T \vec{t} = \dot{s} \vec{t}$$

$$\vec{a} = a_T \vec{t} + a_N \vec{n} = \ddot{s} \vec{t} + \frac{\dot{s}^2}{R_k} \vec{n}$$

$$\vec{F} = F_T \vec{t} + F_N \vec{n} + F_B \vec{b}$$

$$m\vec{a} = \vec{F}(t, \vec{r}, \vec{v})$$

Diferencijalne jednačine
kretanja (skalarne)

$$m\ddot{s} = F_T(t, s, \dot{s})$$

$$m \frac{\dot{s}^2}{R_k} = F_N(t, s, \dot{s})$$

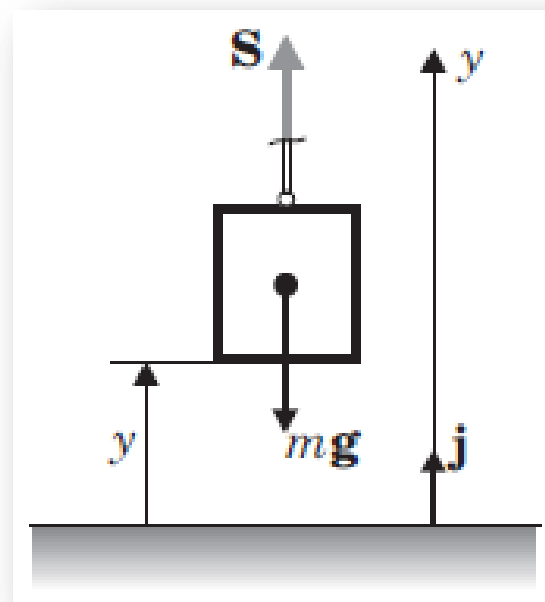
$$0 = F_B(t, s, \dot{s})$$

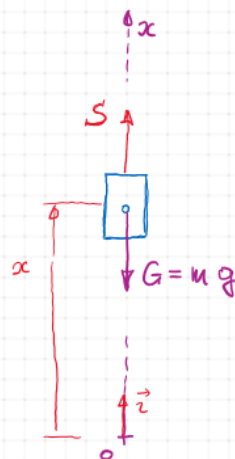
Početni uslovi:

$$t = t_0, \quad s(0) = s_0, \quad \dot{s}(0) = \dot{s}_0.$$

Primer (Prvi zadatak dinamike)

Lift, čija je masa zajedno sa putnicima m , započinje kretanje bez početne brzine. Tokom prvog vremenskog intervala $t \in [0, t_1]$ kreće se ubrzano $a = a_1 > 0$; zatim tokom intervala $t \in [t_1, t_2]$ kreće jednoliko $v_1 = \text{const}$, a u poslednjem intervalu $t \in [t_2, t_3]$ kreće se usporeno $a = -a_2 < 0$ do zaustavljanja $v(t_3) = 0$. Odrediti silu u užetu lifta tokom ovog kretanja.





II 1b.3.

$$m \vec{a} = \vec{F}$$

$$m \vec{a} = \vec{G} + \vec{S}$$

$$\vec{r} = x \vec{z}, \vec{v} = \dot{x} \vec{z}, \vec{a} = \ddot{x} \vec{z}$$

$$m (\dot{x} \vec{z}) = (-mg \vec{z}) + (S \vec{z}) \quad / \cdot \vec{z}$$

$$m \ddot{x} = -mg + S$$

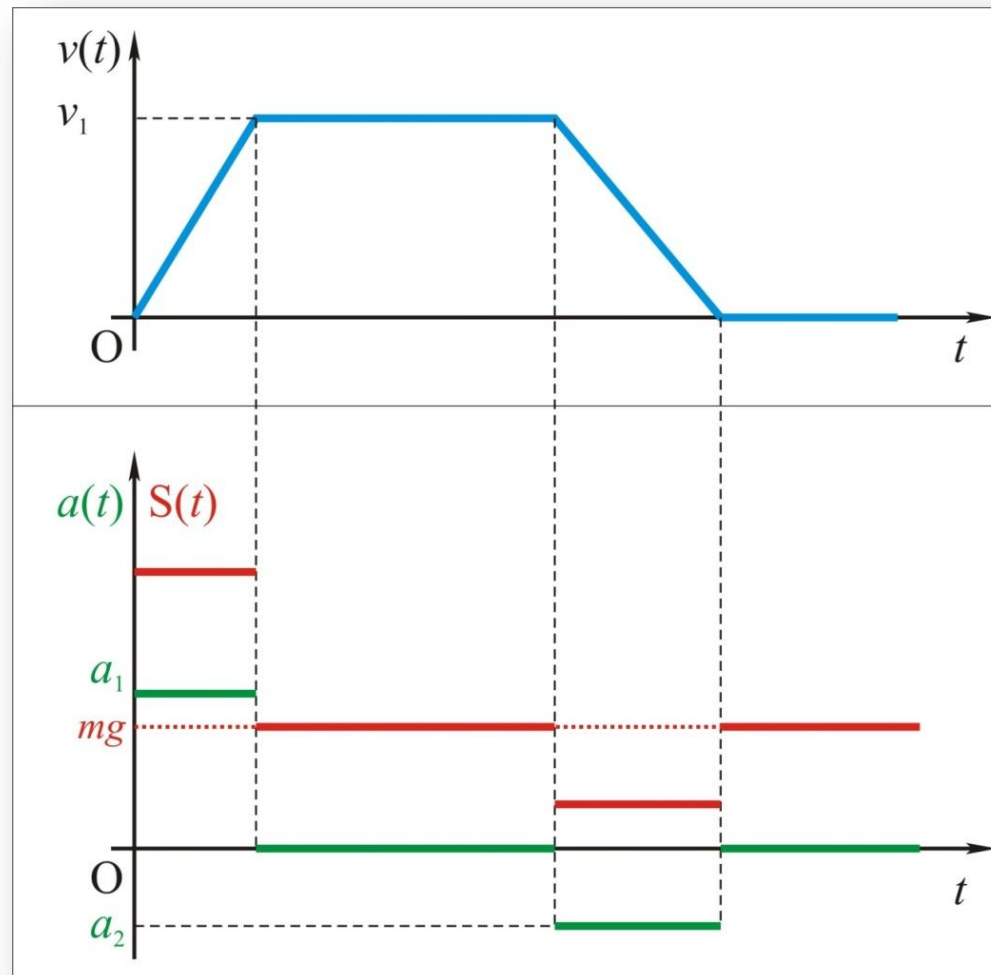
$$\underline{S = mg + m \ddot{x}}$$

I $t_0 - t_1 \rightarrow \ddot{x} = a_1 > 0 \rightarrow \underline{S = mg + m a_1}$

II $t_1 - t_2 \rightarrow \dot{x} = v_1 = \text{const} \rightarrow \underline{S = mg}$
 $\ddot{x} = 0$

III $t_2 - t_3 \rightarrow \ddot{x} = -a_2 < 0 \rightarrow \underline{S = mg - m a_2}$

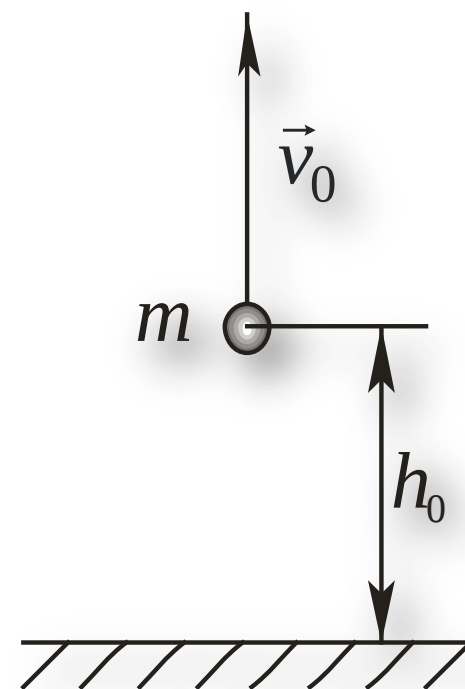
IV $t_3 - \rightarrow x = \text{const} \rightarrow \underline{S = mg}$
 $\dot{x} = \ddot{x} = 0$



Primer – Hitac naviše - (Drugi zadatak dinamike)

Materijalna tačka, mase m , kreće se u homogenom polju sile zemljine teže. Sa visine h_0 iznad površine Zemlje bačena je vertikalno uvis brzinom v_0 . Zanemarujući sve sile osim sile težine odrediti:

- a) kretanje materijalne tačke,
- b) maksimalnu visinu leta H .



Primer - Rešenje

$$m\vec{a} = \vec{F} \rightarrow m\ddot{y}\vec{j} = -mg\vec{j} \rightarrow$$

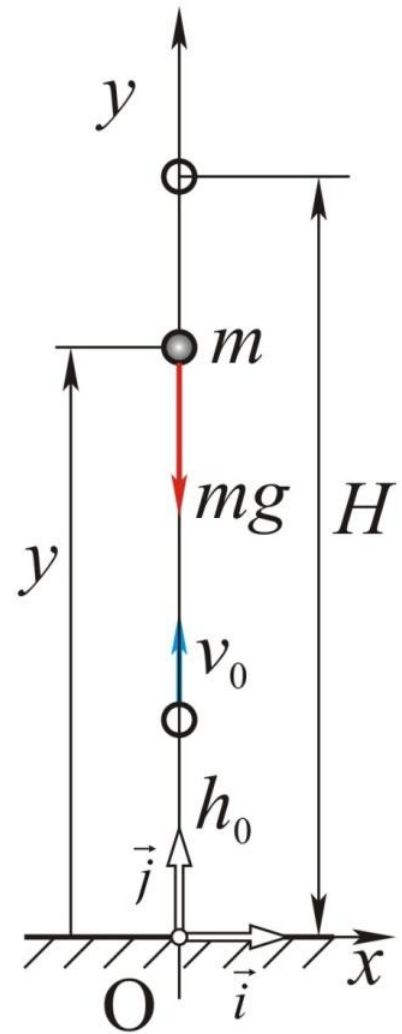
$$\ddot{y} = -g$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{r}(0) = y(0)\vec{j} = h_0\vec{j} \\ \vec{v}(0) = \dot{y}(0)\vec{j} = v_0\vec{j} \end{array} \right\} \rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} y(0) = h_0, \\ \dot{y}(0) = v_0 \end{array} \right\}$$

$$\dot{y}(t) = -gt + v_0, y(t) = -g\frac{t^2}{2} + v_0t + h_0$$

$$\dot{y}(t_1) = -gt_1 + v_0 = 0 \rightarrow t_1 = \frac{v_0}{g} \rightarrow H = y(t_1) = \frac{v_0^2}{2g} + h_0$$



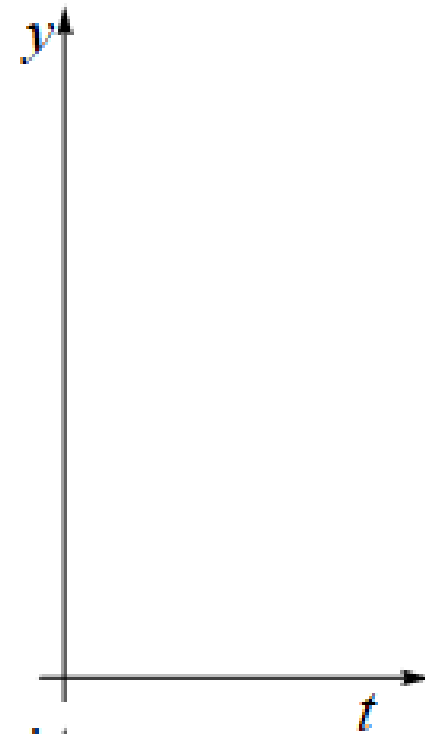
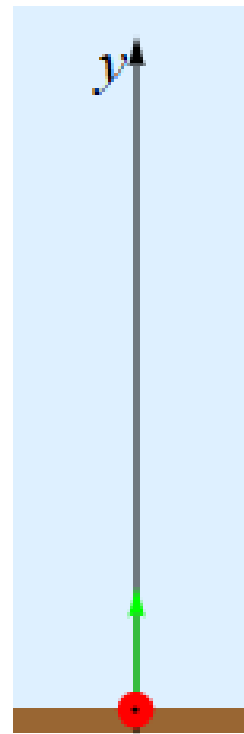
$$y(0) = h_0 = 0$$

$$\dot{y}(0) = v_0 = 10\text{m/s}$$

$$g = 9.81\text{m/s}^2$$

$$t_1 = \frac{v_0}{g} = 1.02\text{s}$$

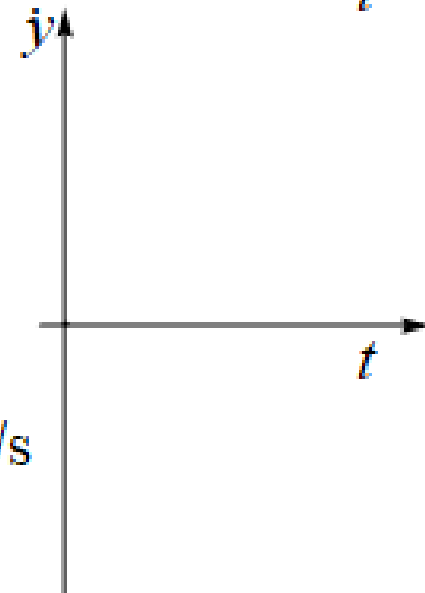
$$H = \frac{v_0^2}{2g} = 5.1\text{m}$$



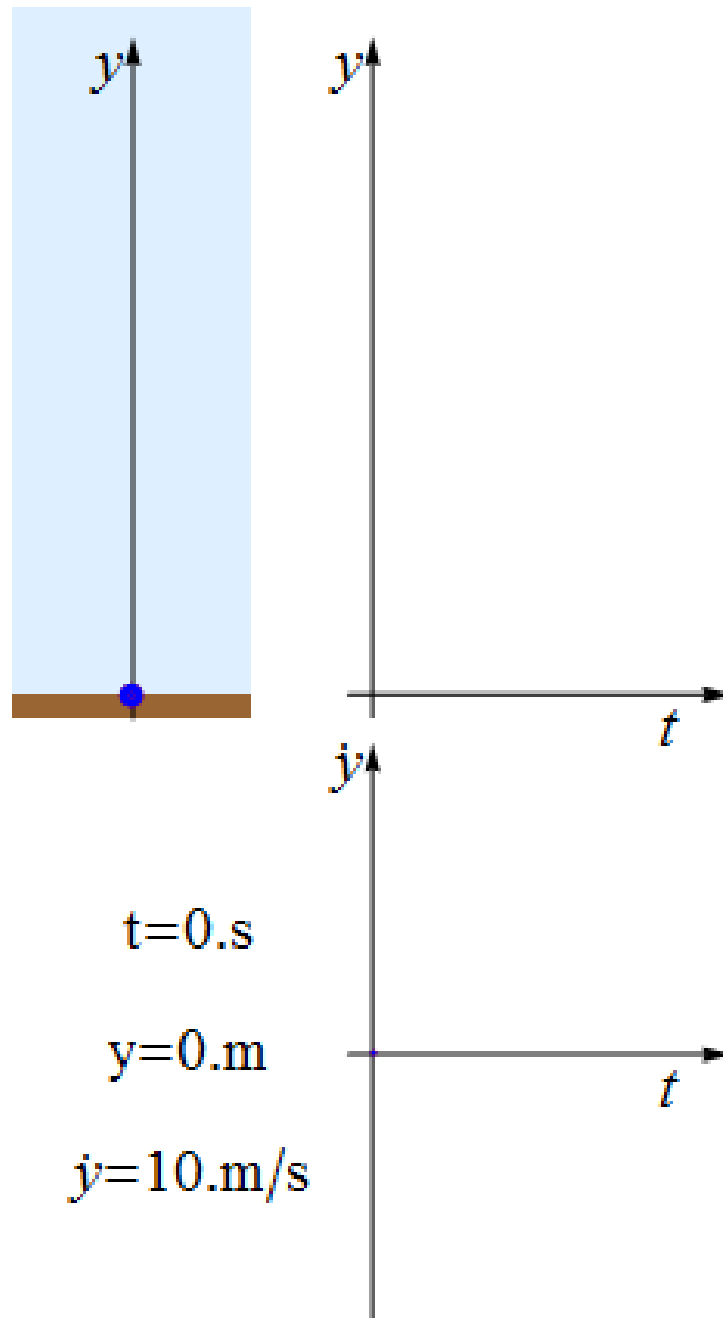
$$t=0.00\text{s}$$

$$y=0.00\text{m}$$

$$\dot{y}=10.00\text{m/s}$$

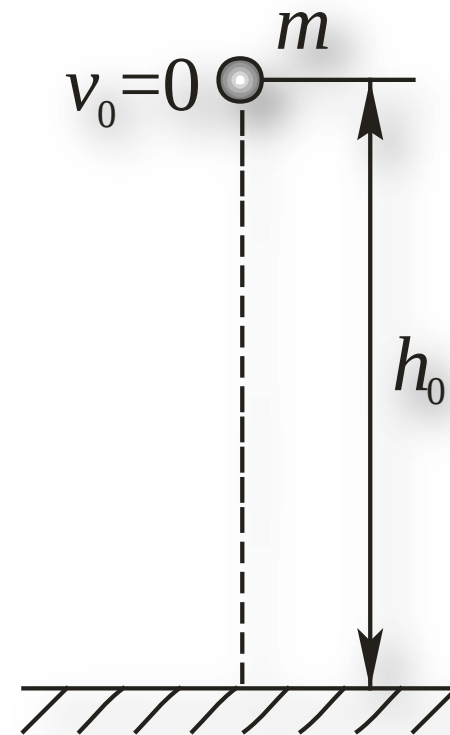


Hitac naviše – sa i
bez otpora,
poređenje

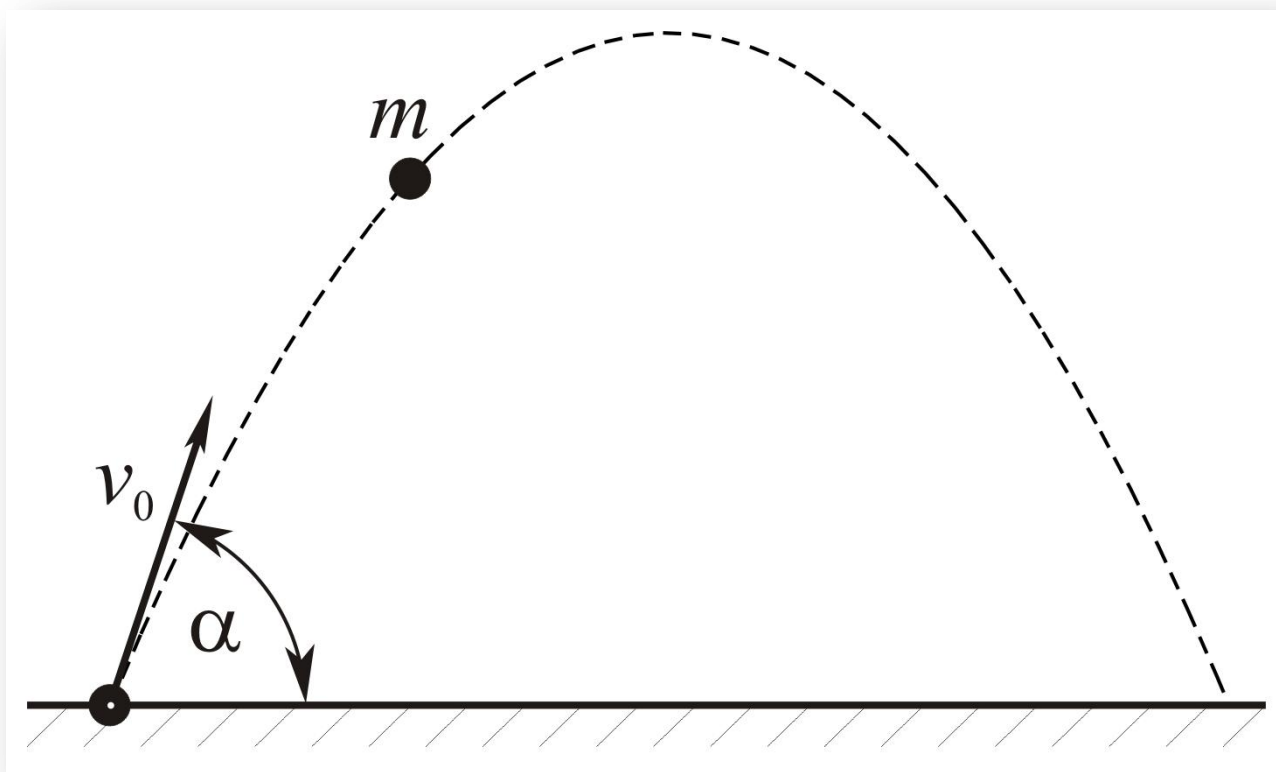


Primer – Slobodan pad u sredini sa otporom

Materijalna tačka, mase m , kreće se u homogenom polju sile zemljine teže. Sa visine h_0 iznad površine Zemlje započinje kretanje bez početne brzina. Ako na nju deluje i sila otpora vazduha, čiji je intenzitet proporcionalan brzini tačke, odrediti kako se menja brzina tačke tokom vremena.



Kosi hitac u sredini bez otpora

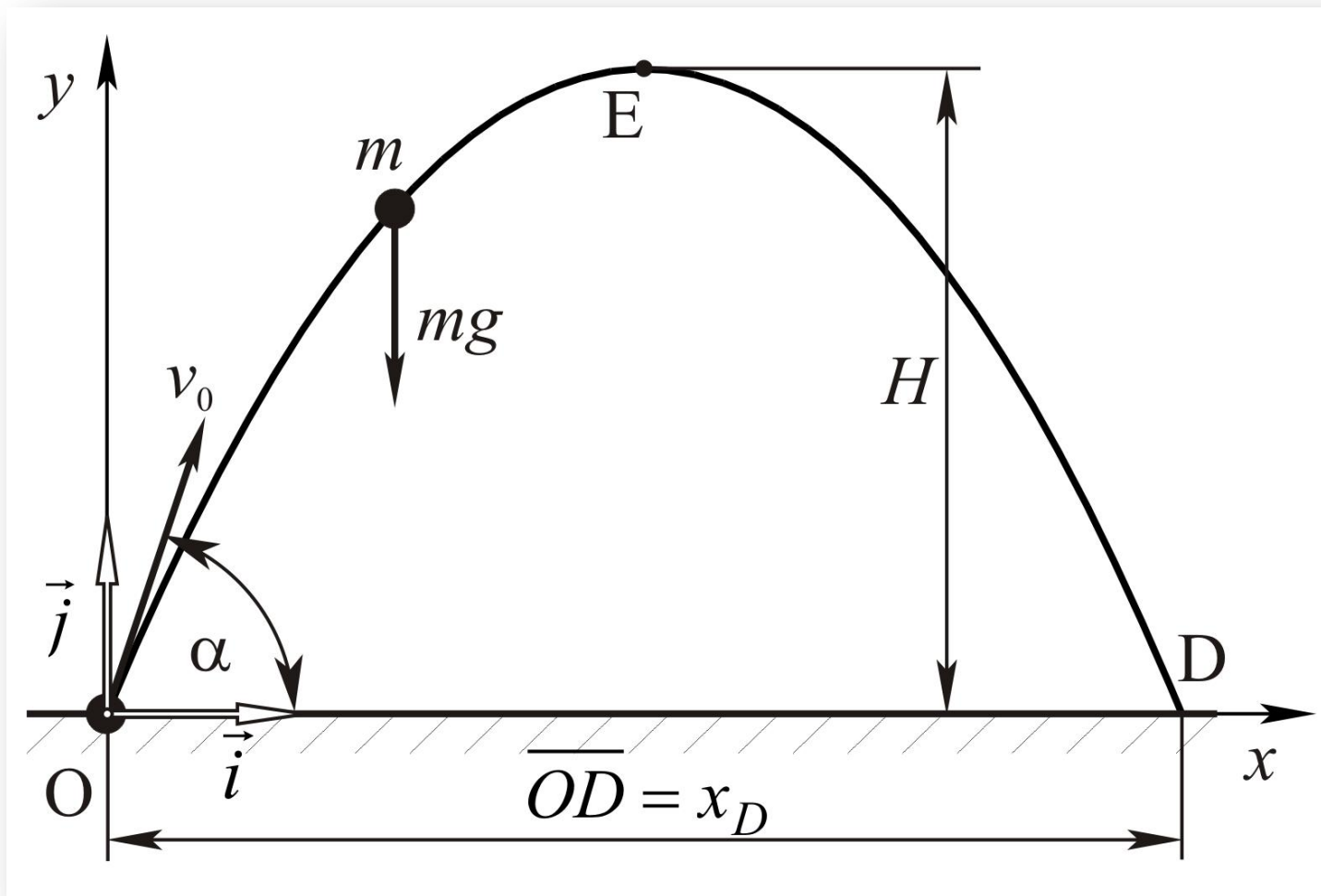


Kosi hitac u sredini bez otpora

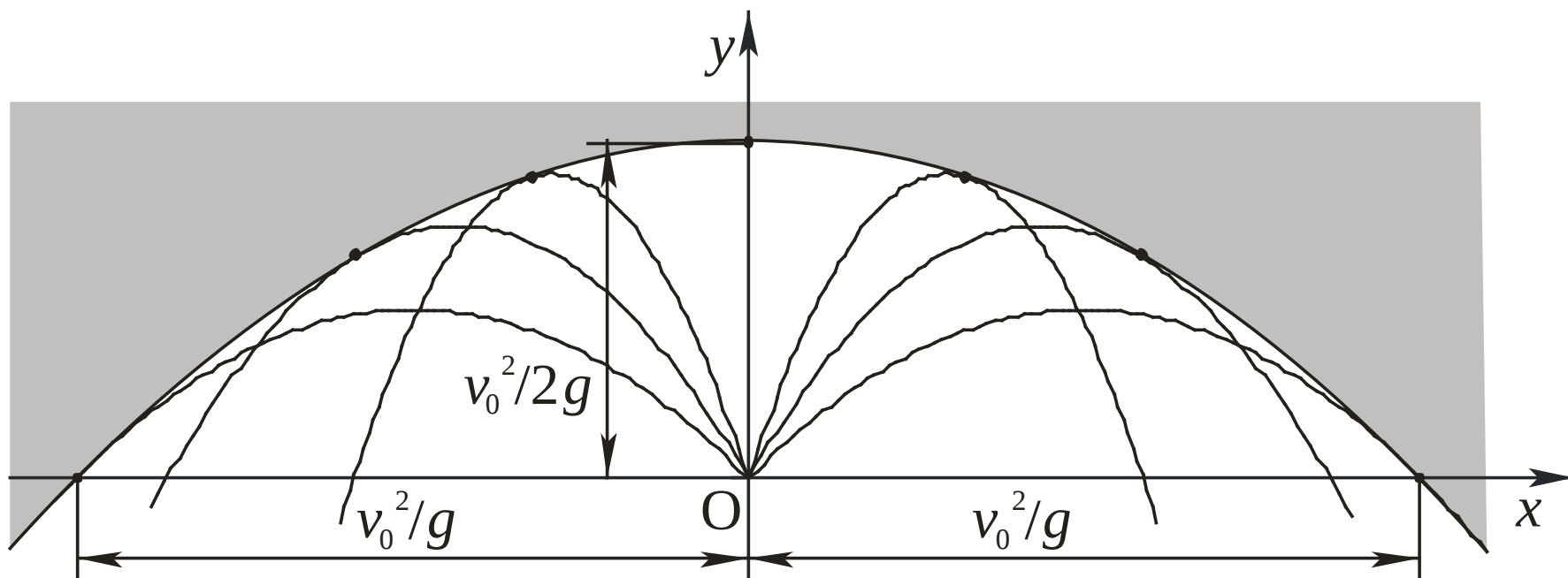


Miloš Teodosić (Srbija-Španija, Evropsko prvenstvo u košarci, Turska 2010.)

Kosi hitac u sredini bez otpora



Kosi hitac u sredini bez otpora – parabola sigurnosti



Mech-in-NS

Projekat je podržan od strane Ministarstva
prosvete, nauke i tehnološkog razvoja
Republike Srbije

[Home](#) [Predmeti](#) [Galerija](#) [Testovi](#) [YouTube kanal](#) [Blog/Forum](#) [Literatura](#) [Kontakt](#)

Dobrodošli na stranicu Mech-in-Ns

Multimedijalna i interaktivna nastava i učenje Inženjerske mehanike

PROJEKAT

Mech-in-NS

<http://www.mech-in-ns.ftn.uns.ac.rs>

Umesto zahvaljivanja na pažnji...

- Jugo 45



- Traktor IMT 539



Ko ima veću snagu?

Umesto zahvaljivanja na pažnji...

- Jugo 45



- Traktor IMT 539



Ko ima veću snagu?

33 kW (45 hp)

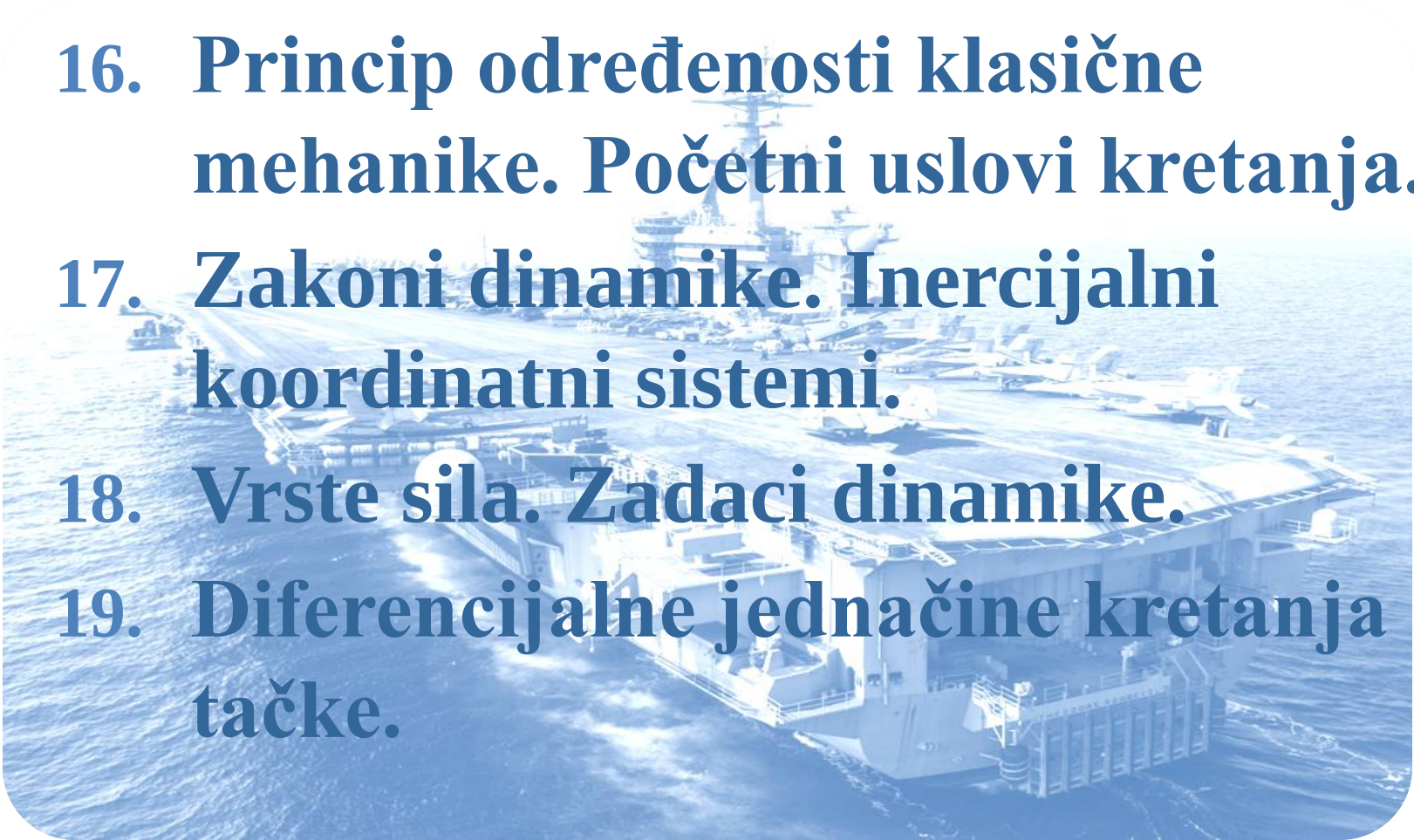
1 kW = 1.34 hp

1 hp = 0,7457 kW

29,5 kW (39 hp)

Najprodavaniji model IMT-a.
Glavna razlika u odnosu na 533
jeste motor od 39 KS, ...

Šta smo naučili?

- 
- An aerial photograph of a large aircraft carrier sailing on the ocean. The ship is white with a grey flight deck. Several fighter jets are visible on the deck. The water is blue with white wake behind the ship.
16. Princip određenosti klasične mehanike. Početni uslovi kretanja.
 17. Zakoni dinamike. Inercijalni koordinatni sistemi.
 18. Vrste sila. Zadaci dinamike.
 19. Diferencijalne jednačine kretanja tačke.

Dinamika

Dinamika materijalne tačke – Njutnovi zakoni,...

Kinematika i dinamika

Miodrag Zuković

Novi Sad, 2021.