



FTN Novi Sad



Predmet: Mehanika 2 (06 - GG14) zimski semestar 2019/20

Mehanika 2

Zvonko Rakarić

**Predavanje 4 : Dinamika materijalne tačke.
Kinetička energija. Rad sile. Potencijalna energija**



Mehanika 2

Građevinarstvo FTN Novi Sad

4. nedelja

Predmetni nastavnik: Zvonko Rakarić

Kabinet 220 blok F (FTN Novi Sad)

Konsultacije:

Email: zvonko@uns.ac.rs
 zzvonkorr@gmail.com

I DEO: KRETANJE I MIROVANJE TAČKE

Sadržaj 4. nedelje

2 DINAMIKA MATERIJALNE TAČKE

2.7 Kinetička energija i njene promene. Elementarni rad sile

2.7.1 Kinetička energija

2.7.2 Elementarna i konačna promena kinetičke energije

2.7.3 Elementarni rad sile

2.8 Rad sile

2.9 Zakon o promeni kinetičke energije materijalne tačke

2.10 Potencijalna energija. Rad potencijalnih sila

2.10.1 Potencijalne sile. Elementarna potencijalna energija

2.10.2 Potencijalna energija sile težine

2.10.3 Potencijalna energija elastične sile

2.10.4 Ukupna potencijalna energija

2.7 Kinetička energija. Konačna i elementarna promena kinetičke energije

2.7.1 Kinetička energija

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2$$

$$E_k = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} = \frac{1}{2} m \vec{v} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} m v^2$$

$$E_k = \frac{1}{2} m \dot{s}^2 = E_k = \frac{1}{2} m v^2$$

- Primer 2.19: Koliko iznosi konetička energija harmonijskog oscilatora (Slika 2.4) u proizvoljnom položaju tokom kretanja? Koliko iznosi pri prolasku tela kroz ravnotežni položaj? Kolika je maksimalna vrednost kinetičke energije? Kretanje HO je definisano sa •

$$x(t) = A \sin \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t + \alpha \right)$$

2.7.2 Konačna i elementarna promena kinetičke energije

$$\Delta E_k = E_{k2} - \Delta E_{k1}$$

Konačna promena kinetičke energije

$$\Delta E_k > 0$$

$$\Delta E_k = 0$$

$$\Delta E_k < 0$$

$$dE_k$$

elementarna promena kinetičke energije

Primer 2.20: Za koliko se promeni kinetička energija () harmonijskog oscilatora HO (kretanje HO je opisano sa) prilikom njegovog kretanja između najudaljenijeg položaja (1) ravnotežnog položaja (2)? Da li je promena kinetičke energije ista za deo kretanja od ravnotežnog do najudaljenijeg, i od najudaljenijeg do ravnotežnog? Koordinata x se meri od ravnotežnog položaja.

2.7.3 Rad sile

$$dA^{F_{ix}} = (\pm) F_{ix} dx$$

$$dE_k = \sum dA^{F_{ix}}$$

$$m\vec{a} = \vec{F} \rightarrow m \frac{d\vec{v}}{dt} = \sum \vec{F}_i \rightarrow m \frac{d\vec{v}}{dt} \frac{d\vec{r}}{d\vec{r}} = \sum \vec{F}_i \rightarrow m\vec{v} d\vec{v} = \sum \vec{F}_i d\vec{r}$$

$$dA^{\vec{F}_i} = \vec{F}_i \cdot d\vec{r}$$

$$dA^{\vec{F}_i} > 0$$

$$dA^{\vec{F}_i} = 0$$

$$dA^{\vec{F}_i} < 0$$

$$m\vec{v} d\vec{v} = \sum \vec{F}_i d\vec{r} \rightarrow d\left(\frac{1}{2}m\vec{v} \cdot \vec{v}\right) = \sum dA^{\vec{F}_i} \rightarrow dE_k = \sum dA^{\vec{F}_i}$$

$$A^{F_{ix}} = \int dA^{F_{ix}} = (\pm) \int_{x_1}^{x_2} F_{ix} dx$$

$$A^{F_{ix}} = F_{ix} \int_{x_1}^{x_2} dx = F_{ix} \Delta x = F_{ix} (x_2 - x_1)$$

$$A_{1-2}^{F_k} = \int_{x_1}^{x_2} F_k dx = k \int_{x_1}^{x_2} x dx = k \left(\frac{x_2^2}{2} - \frac{x_1^2}{2} \right)$$

$$A^{\vec{F}} = \int dA^{\vec{F}} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} d\vec{r}$$

2.8 Zakon o promeni kinetičke energije materijalne tačke

$$dE_k = \sum F_{ix} dx \rightarrow \int_1^2 dE_k = \sum \int_{x_1}^{x_2} F_{ix} dx \rightarrow E_{k2} - E_{k1} = \sum A_{1-2}^{F_{ix}}$$

Primer 2.21 Brzinu materijalne tačke iz Primera 2.6 (kretanje niz strmu ravan) odrediti primenom zakona o promeni kinetičke energije.

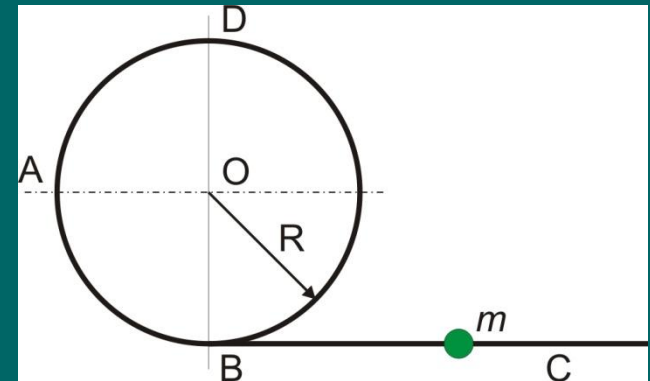
Primer 2.22 Brzinu materijalne tačke (iz Primera 2.17 – kretanje materijalne tačke po cilindričnoj površi) pri njenom prolasku kroz najniži položaj, odrediti primenom zakona o promeni kinetičke energije.

Primer 2.23 U Primeru 2.18 odrediti brzinu materijalne tačke pri prolasku kroz položaj u kojem je štap horizontalan.

Primer 2.24 Materijalna tačka mase m se kreće po liniji putanje koja se sastoji od pravolinijskog i kružnog dela.

Ako je kretanje započelo iz položaja A bez početne brzine, odrediti brzinu koju materijalna tačka ima u položaju C koji se nalazi na rastojanju $L = 2R$ od B. Na kružnom delu nema trenja između materijalne tačke i podloge. Na pravolinijskom delu postoji trenje, gde je dinamički koeficijent trenja između materijalne tačke i horizontalne vođice poznat i iznosi

Odrediti brzinu u C, u slučaju da umesto trenja klizanja, postoji viskozno trenje.



2.9 Potencijalna energija. Rad potencijalnih sila

2.9.1 Potencijalne sile. Elementarna potencijalna energija

$$dE_p^F = -dA^F$$

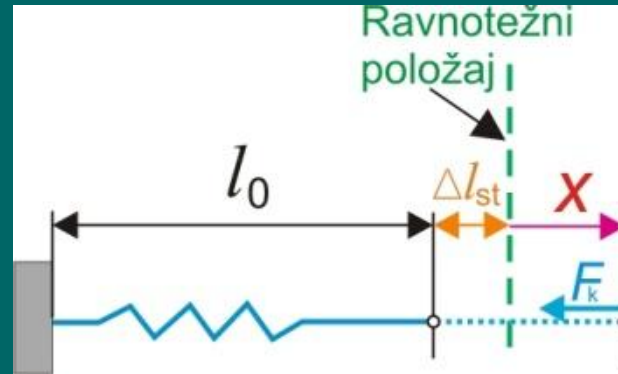
$$A_{1-2}^F = E_{p1}^F - E_{p2}^F$$

2.9.2 Potencijalna energija sile težine

$$E_p^{mg} = \int dE_p^{mg} = \mp mg \int dy = \mp m g y + C$$

$$E_p^{mg} = \pm mgh$$

2.9.3 Potencijalna energija elastične sile



$$F_k = k\Delta l = k(\Delta l_{st} + x) \rightarrow dA^{F_k} = -k(\Delta l_{st} + x) dx$$

$$dE_p^{F_k} = k(\Delta l_{st} + x) dx$$

$$E_p^{F_k} = \int dE_p^{F_k} = \int k(\Delta l_{st} + x) dx = k\Delta l_{st} x + \frac{1}{2}k x^2 + C$$

$$E_p^{F_k} (x = -\Delta l_{st}) = 0 = \Delta l_{st} (-\Delta l_{st}) + \frac{1}{2} k (\Delta l_{st})^2 + C$$

$$\rightarrow C = \frac{1}{2} k (\Delta l_{st})^2$$

$$E_p^{F_k} = \Delta l_{st} x + \frac{1}{2} k x^2 + \frac{1}{2} k (\Delta l_{st})^2 = \frac{1}{2} (\Delta l_{st} + x)^2$$

Primer 2.26. Primenom zakona o promeni kinetičke energije, odrediti diferencijalnu jednačinu oscilovanja tela na vertikalnoj opruzi. Radove potencijalnih sila odrediti koristeći odgovarajuće izraze za pozencijalne energije.

2.9.4 Ukupna potencijalna energija

$$E_p = E_p^{mg} + E_p^{F_k} = -mgx + \frac{1}{2}(\Delta l_{st} + x)^2 =$$
$$\frac{1}{2}k\Delta l_{st}^2 + (k\Delta l_{st} - mg)x + \frac{1}{2}kx^2$$

$$E_p = E_p^{st} + \frac{1}{2}kx^2$$



2.,10 Mehanička energija i njena promena

$$E = E_k + E_p$$

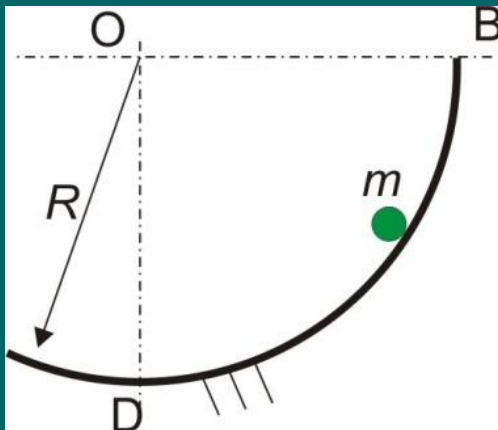
- Mehanička energija raste- Ovo znači da mehanička energija koja se dovodi u sistem je veća od energije koja se odvodi iz njega
- Mehanička energija opada – Ovo znači da energija koja se odvodi iz sistema je veća od mehaničke energije koja se dovodi.
- Mehanička energija može da bude i konstantna –Ovo znači da je energija koja se dovodi u sistem jednaka energiji koja se odvodi iz njega.

$$E_{k2} - E_{k1} = \sum A_{1-2}^{Fi} \rightarrow E_{k2} - E_{k1} = \left(\sum A_{1-2}^{Fi} \right)^{pot} + \left(\pm \sum A_{1-2}^{Fi} \right)^{nepot}$$

$$E_{k2} - E_{k1} = E_{p1} - E_{p2} + \left(\pm \sum A_{1-2}^{F_i} \right)^{nepot}$$

$$E_{k2} + E_{p2} = E_{k1} + E_{p1} + \left(\pm \sum A_{1-2}^{F_i} \right)^{nepot}$$

$$E_2 = E_1 + \left(\pm \sum A_{1-2}^{F_i} \right)^{nepot}$$



Primer 2.27 Materijalna tačka mase m se pušta bez početne brzine iz položaja B da se kreće po nepokretnoj glatkoj cilindričnoj površi poluprečnika R . Kretanje se odvija u vertikalnoj ravni u homogenom polju sile zemljine teže.

a) Koliko stepeni slobode ima ovo kretanje materijalne tačke? Objasniti odgovor.

b) Koliki rad učini sila težine od položaja B do D?

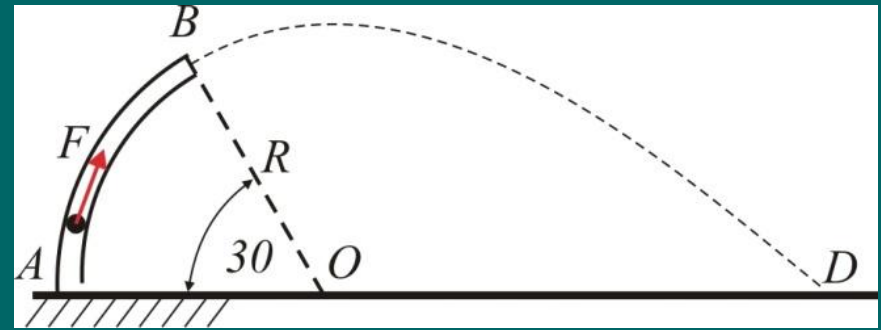
v) Kolika je promena kinetičke energije od položaja B do D?

g) Kolika je promena mehaničke energije od položaja B do D?

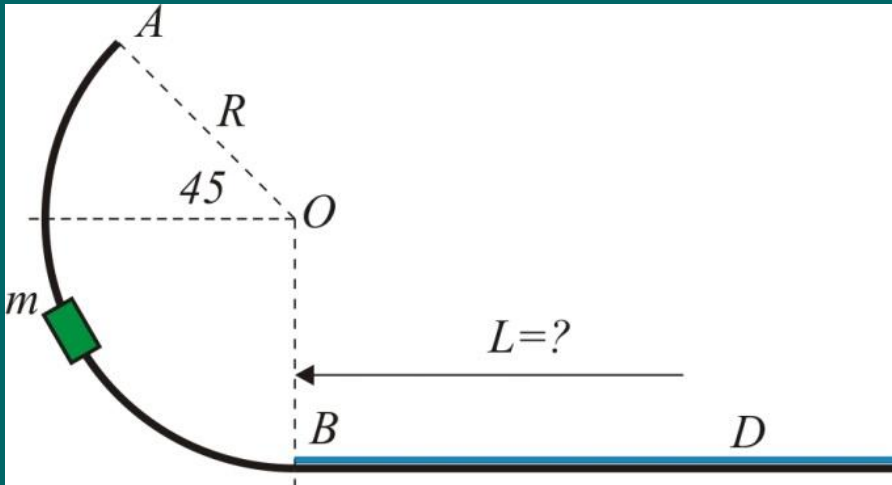
d) Odrediti brzinu koju materijalna tačka ima u položaju D.

e) Odrediti ubrzanje koje materijalna tačka ima u položaju D.

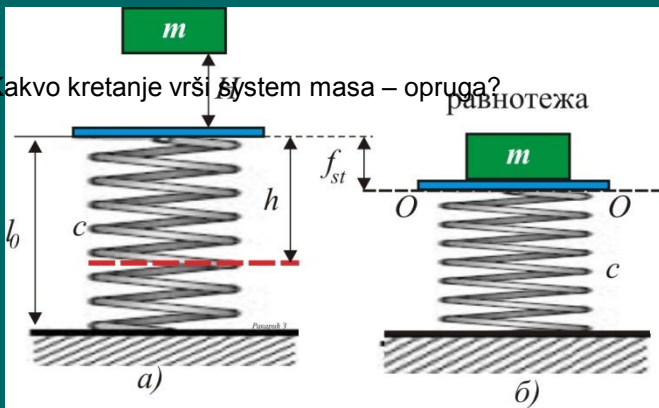
Primer 2.28. Materijalna tačka mase m započinje kretanje bez početne brzine iz položaja A unutar glatke cevi oblika kružnog luka poluprečnika R . Kretanje se odvija u homogenom polju sile zemljine teže i pod dejstvom sile F konstantnog inteziteta i pravca tangente na cev. Materijalna tačka napušta cev u položaju B kada i dejstvo sile F prestaje. Odrediti: a) Reakciju cevi neposredno pre nego što tačka napusti cev; b) Intenzitet brzine u položaju D; c) Šta se dešava sa ukupnom mehaničkom energijom tokom kretanja od A do D (raste, opada ili je konstantna)?



Primer 2.28. Materijalna tačka mase m započinje kretanje bez početne brzine iz položaja A unutar glatke cevi oblika kružnog luka poluprečnika R . Kretanje se odvija u homogenom polju sile zemljine teže i pod dejstvom sile F konstantnog inteziteta i pravca tangente na cev. Materijalna tačka napušta cev u položaju B kada i dejstvo sile F prestaje. Odrediti: a) Reakciju cevi neposredno pre nego što tačka napusti cev; b) Intenzitet brzine u položaju D; c) Šta se dešava sa ukupnom mehaničkom energijom tokom kretanja od A do D (raste, opada ili je konstantna)?

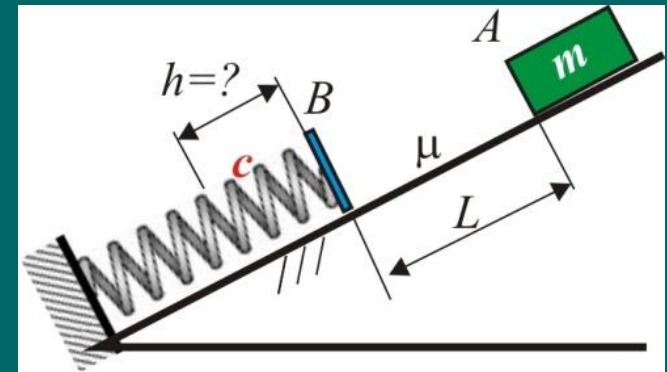


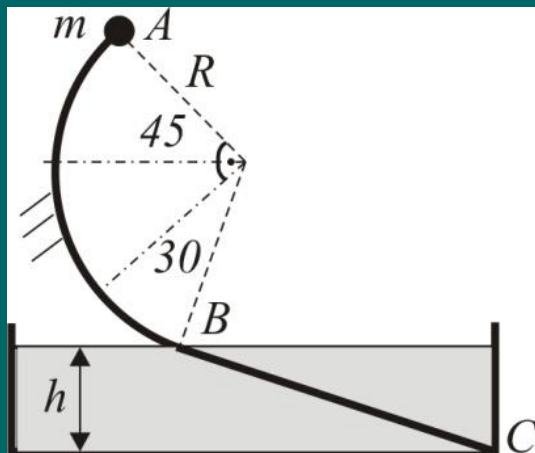
f_{st} Kakvo kretanje vrši system masa – opruga? равнотежа



Primer 2.30 Telo mase m se pušta da slobodno pada sa visine H na laku krutu ploču koja je postavljena na oprugu krutosti c i čija je dužina u nedeformisanom stanju . Nakon što telo dospe do ploče, počinje da sabija oprugu. Odrediti maksimalnu vrednost h do koje će se opruga sabiti. Kolika je vrednost h ako je $H=0$. Uporediti dobijeni rezultat sa statičkom deformacijom opruge . Kakvo kretanje vrši system masa – opruga?

Primer 2.31 Telo mase m se pušta iz položaja A da bez početne brzine klizi po hrapavoj strmoj ravni. Nakon što pređe put L nailazi na oprugu čija je krutost c . Odrediti maksimalnu vrednost za koju će se opruga sabiti. Dinamički koeficijent trenja između tela i strme ravni je μ . Koliki je gubitak mehaničke energije na delu AB ?





Primer 2.32 Materijalna tačka mase m započinje kretanje iz položaja A bez početne brzine po glatkoj kružnoj vođici poluprečnika R koja je postavljena u vertikalnoj ravni. U položaju B tačka napušta kružnu vođicu i dalje se kreće po pravolinijskoj vođici koja je postavljena u posudu sa tečnošću. Tokom kretanja kroz tečnost, javlja se otporna sila čiji je intenzitet $\propto v$. Odrediti vreme kretanja kroz tečnost (vreme od B do C), ako je poznato da je brzina u položaju C dva puta manja od brzine u položaju B. Odrediti i reakciju kružne vođice u položaju B neposredno pre ulaska materijalne tačke u tečnost.

Primer 2.33 Materijalna tačka mase m započinje kretanje iz položaja B bez početne brzine po glatkoj kružnoj putanji poluprečnika R koja je postavljena u vertikalnoj ravni. Tokom kretanja po vođici (od B do A) na materijalnu tačku dejstvuje sila F konstantnog intenziteta i pravca tangente na vođicu. Dejstvo sile F u položaju A prestaje. U položaju A tačka napušta kružnu vođicu i dalje se kreće po pravolinijskoj hrapavoj vođici. Odrediti potrebnu vrednost intenziteta sile F da bi se materijalna tačka zaustavila u položaju C. Takođe, odrediti reakciju vođice neposredno pre napuštanja kružne vođice (položaj A)

