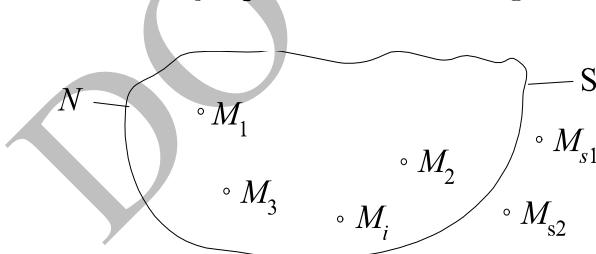


Poglavlje 2

Dinamika sistema materijalnih tačaka

2.1 Sistem materijalnih tačaka. Pojam o vezama. Broj stepeni slobode kretanja

Skup N materijalnih tačaka M_i u kome kretanje svake tačke zavisi od položaja i kretanja svih ostalih tačaka tog skupa, čini sistem materijalnih tačaka. Na slici 2.1 sistem materijalnih tačaka je u unutrašnjosti zatvorenog prostora S . Sve materijalne tačke, na primer M_{s1} i M_{s2} , koje se nalaze izvan datog sistema materijalnih tačaka, a čije se kretanje ne uzima u proučavanje, nazivaju se spoljašnje tačke. Ako kretanje tačaka sistema nije sprečeno nikakvim ograničenjima, onda je sistem slobodan.



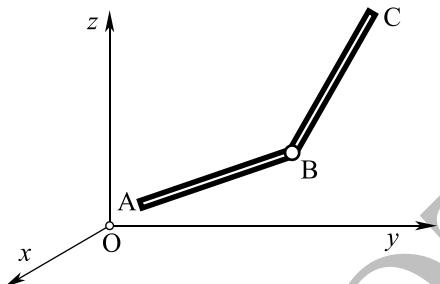
Slika 2.1:

U slučaju da su položaji i pomeranja tačaka sistema ograničena nekim uslovima, sistem je neslobodan ili vezan. U proučavanju dinamike materijalnih tačaka neobično važnu ulogu ima pojam stepena slobode kretanja sistema. Zato se ponavlja definicija ovog po-

jma iz kinematike: broj nezavisnih kretanja, ili broj nezavisnih parametara, koji jednoznačno određuju položaj svih tačaka materijalnog sis-

tema tokom kretanja, naziva se broj stepeni slobode kretanja.

Ako slobodan sistem ima N tačaka, tada je položaj sistema potpuno određen sa $3N$ Dekartovih koordinata ovih tačaka. Ako su te Dekartove koordinate međusobno povezane nekim relacijama, koje se nazivaju jednačine veza, a kojih ima p , onda je broj stepena slobode kretanja $n = 3N - p$. Mora biti $n > 0$, odnosno $p < 3N$ da bi sistem bio pokretan. Ako je $n = 0$, odnosno $p = 3N$, tada se sve Dekartove koordinate tačaka sistema nalaze iz jednačina veza i sistem je nepokretan. Veze koje ograničavaju koordinate tačaka sistema nazivaju se geometrijskim ili holonomnim. Postoje i veze koje ograničavaju brzine tačaka sistema koje se nazivaju neholonomne veze.



Slika 2.2:

štapova konstantna, tj.

Posmatrajmo tri materijalne tačke A , B i C vezane lakin štapovima dužina b_1 i b_2 (Slika 2.2) i koje mogu slobodno da se kreću u prostoru. Položaj ovog sistema u prostoru je potpuno određen položajem tri tačke A , B i C , tj. poznavanjem devet Dekartovih koordinata ovih tačaka. Međutim, pošto su štapovi kruti, mora biti zadovoljen uslov da su rastojanja između krajnjih tačaka

$$(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2 = b_1^2,$$

$$(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2 + (z_B - z_C)^2 = b_2^2.$$

Ove jednačine su jednačine veza. Ima ih, $p = 2$, pa je broj stepeni slobode kretanja ovog sistema $n = 3N - p = 9 - 2 = 7$. Očigledno, ove veze su holonomne i stacionarne.

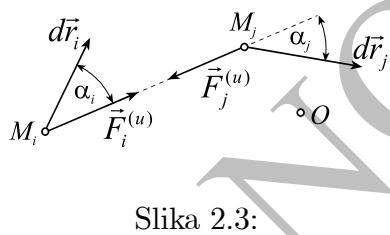
Prethodne veze, koje ne zavise eksplisitno od vremena, nazivaju se stacionarne ili skleronomne. Ako vreme ulazi u jednačinu veze eksplisitno ona je nestacionarna ili reonomna. Ako su dužine b_1 i b_2 u prethodnim jednačinama veza poznate eksplisitne funkcije vremena, onda su to nestacionarne veze.

Veze koje ograničavaju koordinate tačaka sistema nazivaju se geometrijskim ili holonomnim. Postoje i veze koje ograničavaju brzine tačaka sistema koje se nazivaju neholonomne veze.

2.2 Sile u sistemu materijalnih tačaka

Sve sile koje deluju na tačke materijalnog sistema mogu se podeliti sa dva međusobno nezavisna stanovišta:

1. Sa stanovišta da li izazivaju kretanje tačaka sistema ili ga sprečavaju, sile se dele na aktivne sile i reakcije veza. Dalje, sa \vec{F}_i označava se aktivna sila a sa \vec{R}_i reakcija veza koje deluju na i -tu tačku sistema.
2. Sa stanovišta gde je izvor sile one se dele na unutrašnje i spoljašnje. Unutrašnje sile su rezultat međusobnog dejstva tačaka istog sistema. Spoljašnje sile su rezultat dejstva tačaka koje se nalaze van datog materijalnog sistema na tačke posmatranog sistema. Unutrašnja sila, koja deluje na i -tu tačku sistema označava se sa $\vec{F}_i^{(u)}$ a spoljašnja sa $\vec{F}_i^{(s)}$.



Slika 2.3:

Sve sile, pa i unutrašnje, javljaju se u parovima. Izdvaje se dve tačke M_i i M_j (Slika 2.3) iz materijalnog sistema i posmatra njihovo međusobno dejstvo. Unutrašnja sila $\vec{F}_i^{(u)}$ je rezultat dejstva tačke M_j na tačku M_i , dok je sila $\vec{F}_j^{(u)}$ rezultat dejstva tačke M_i na tačku M_j . Po trećem zakonu dinamike, ove dve sile su istog intenziteta i pravca a suprotnog smera, odnosno važi

$$\vec{F}_i^{(u)} = -\vec{F}_j^{(u)}. \quad (2.1)$$

Uočavaju se sledeća svojstva unutrašnjih sila:

1. Pošto se sve unutrašnje sile javljaju u parovima, koji zadovoljavaju uslov (2.1), glavni vektor svih unutrašnjih sила jednak je nuli

$$\vec{F}_g^{(u)} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{(u)} = \vec{0}. \quad (2.2)$$

2. Pošto se sve unutrašnje sile javljaju u parovima, koji zadovoljavaju uslov (2.1), glavni moment svih unutrašnjih sila za bilo koju tačku O jednak je nuli

$$\vec{\mathfrak{M}}_{gO}^{(u)} = \sum_{i=1}^N \vec{M}_O^{\vec{F}_i^{(u)}} = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{(u)} = \vec{0}. \quad (2.3)$$

3. Rad unutaršnjih sila $\vec{F}_i^{(u)}$ i $\vec{F}_j^{(u)}$ na elementarnim pomeranjima $d\vec{r}_i$ i $d\vec{r}_j$ tačaka sistema M_i i M_j iznosi

$$dA_{ij}^{(u)} = \vec{F}_i^{(u)} \cdot d\vec{r}_i + \vec{F}_j^{(u)} \cdot d\vec{r}_j.$$

Zbog slike 2.3 ovaj izraz postaje

$$dA_{ij}^{(u)} = F_i^{(u)}(dr_i \cos \alpha_i - dr_j \cos \alpha_j).$$

Izraz u zagradi predstavlja projekciju pomeranja tačaka M_i i M_j na pravac $M_i M_j$. Taj izraz u zagradi je jednak nuli samo ako je rastojanje između ovih tačaka konstantno tokom kretanja. Za ceo sistem rad svih unutrašnjih sila biće jednak nuli ako sve tačke sistema obrazuju kruto telo. Odavde se zaključuje, da je rad unutrašnjih sila sistema materijalnih tačaka različit od nule ako bar jedno rastojanje između dve tačke M_i i M_j tog sistema nije konstantno tokom kretanja.

Posmatrajmo kretanje materijalnog sistema N tačaka, čije su mase m_i ($i = 1, 2, \dots, N$) i čiji je položaj određen vektorima položaja \vec{r}_i u odnosu na neku nepokretnu tačku O . Ako se svaka tačka izoluje iz sistema i sva dejstva na tu tačku zamene silama dejstva ostalih tačaka sistema, odnosno silom $\vec{F}_i^{(u)}$, i onih van njega, odnosno silom $\vec{F}_i^{(s)}$, onda za kretanje svake tačke važi drugi Njutnov zakon

$$m_i \vec{a}_i = \vec{F}_i^{(u)} + \vec{F}_i^{(s)}, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (2.4)$$

gde je $\vec{a}_i = \ddot{\vec{r}}_i$ apsolutno ubrzanje i -te tačke sistema. Nalaženje kretanja svih tačaka sistema, pri zadatim silama, je povezano sa integracijom diferencijalnih jednačina kretanja koje odgovaraju prethodnim vektorskim jednačinama. To je vrlo obiman i složen problem i on se u dinamici materijalnih sistema uglavnom izbegava. Isto tako, nekad nam ne

treba pojedinačno kretanje svake tačke sistema, već samo neke globalne karakteristike kretanja celog sistema, pa su i za rešavanje ovog problema jednačine (2.4) nepogodne.

Problem kretanja materijalnog sistema se rešava na dva načina:

1. Primenom opštih zakona dinamike,
2. Metodama analitičke dinamike.

Opšti zakoni dinamike sistema su posledice jednačina kretanja (2.4). U dinamici sistema tačaka postoje četiri opšta zakona dinamike, za jedan više nego u dinamici materijalne tačke. To je zato što se za proučavanje sistema uvodi i jedan nov pojam, pojam središta ili centra mase materijalnog sistema, koji nije postojao u dinamici tačke.

2.3 Centar mase sistema materijalnih tačaka

Posmatrajmo sistem N materijalnih tačaka masa m_i , čiji su vektori položaja u odnosu na neku nepokretnu tačku O dati sa \vec{r}_i (Slika 2.4a). Pod ukupnom masom sistema M podrazumeva se algebarski zbir masa m_i svih tačaka sistema

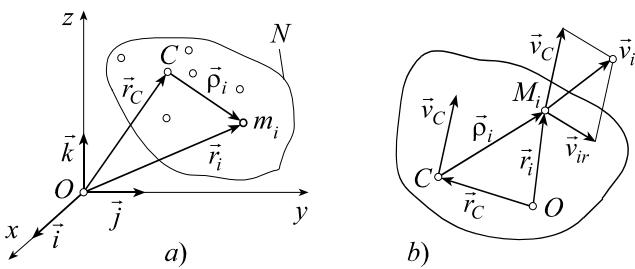
$$M = \sum_{i=1}^N m_i. \quad (2.5)$$

Centar mase, središte materijalnog sistema ili centar inercije definisan je vektorom položaja \vec{r}_c na sledeći način

$$\vec{r}_c = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i, \quad (2.6)$$

ili skalarno, na primer u Dekartovom koordinatnom sistemu, sa

$$x_c = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i x_i, \quad y_c = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i y_i, \quad z_c = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i z_i. \quad (2.7)$$



Slika 2.4:

nalazi u delu prostora u kome se nalazi više većih masa nego u drugim delovima prostora. Centar mase je pojam koji ne zavisi od sila koje deluju na tačke sistema. Ako se sistem tačaka nalazi u polju zemljine teže tada je $M = G/g$ i $m_i = G_i/g$, gde su G i G_i težine celog sistema i pojedinih tačaka. Zamenom ovih relacija u (2.7), zaključuje se da se tada centar mase poklapa sa težištem sistema.

Pisanjem (2.6) u obliku

$$M \vec{r}_c = \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i,$$

i diferenciranjem ovog izraza po vremenu dobija se

$$M \vec{v}_c = \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i, \quad M \vec{a}_c = \sum_{i=1}^N m_i \vec{a}_i, \quad (2.8)$$

gde su \vec{v}_c i \vec{a}_c brzina i ubrzanje centra mase a \vec{v}_i i \vec{a}_i brzina i ubrzanje tačke M_i sistema.

U opštim zakonima dinamike najčešće se položaj tačaka sistema određuje u odnosu na centar mase vektorom $\vec{\rho}_i$ (Slike 2.4a i 2.4b). Vidi se da je

$$\vec{r}_i = \vec{r}_c + \vec{\rho}_i. \quad (2.9)$$

Diferenciranjem ovog izraza po vremenu dobija se

$$\vec{v}_i = \vec{v}_c + \vec{v}_{ir}, \quad (2.10)$$

Centar mase je geometrijska tačka u prostoru, koja se može nalaziti u omeđenoj oblasti prostora u kojoj se nalazi sistem, ali i izvan te oblasti. U opštem slučaju, centar mase se ne poklapa ni sa jednom tačkom sistema. Centar mase se

gde je $\overrightarrow{v}_{ir} = \dot{\overrightarrow{\rho}}_i$ brzina kretanja tačke M_i u odnosu (Slika 2.4b) na centar mase C . Zamenom izraza (2.9) u (2.6), i izraza (2.10) u (2.8), uz korišćenje (2.5), dobijaju se relacije

$$\sum_{i=1}^N m_i \overrightarrow{\rho}_i = \overrightarrow{0}, \quad \sum_{i=1}^N m_i \overrightarrow{v}_{ir} = \overrightarrow{0}, \quad (2.11)$$

koje se često koriste pri izvođenju opštih zakona dinamike sistema materijalnih tačaka.

2.4 Mere kretanja sistema

Kao i kod proučavanja kretanja materijalne tačke, i kod analize kretanja sistema materijalnih tačaka koriste se tri mere kretanja: količina kretanja, moment količine kretanja i kinetička energija.

2.4.1 Količina kretanja sistema

Posmatrajmo sistem od N materijalnih tačaka M_i masa m_i , koje u datom trenutku vremena imaju brzine \overrightarrow{v}_i . Količina kretanja i -te tačke sistema je $\vec{K}_i = m_i \overrightarrow{v}_i$. Vektor količine kretanja sistema definiše se kao vektorski zbir količina kretanja svih tačaka sistema

$$\vec{K} = \sum_{i=1}^N \vec{K}_i = \sum_{i=1}^N m_i \overrightarrow{v}_i, \quad (2.12)$$

koji se zbog (2.8) može dati i u obliku

$$\vec{K} = M \overrightarrow{v}_c. \quad (2.13)$$

U Dekartovim koordinatama, količina kretanja sistema materijalnih tačaka ima komponente

$$K_x = M \dot{x}_c, \quad K_y = M \dot{y}_c, \quad K_z = M \dot{z}_c, \quad (2.14)$$

gde su K_x , K_y i K_z količine kretanja sistema u pravcu koordinatnih osa x, y, z .

2.4.2 Moment količine kretanja sistema

Vektor momenta količine kretanja i -te tačke sistema M_i u odnosu na neku nepokretnu tačku O iznosi $\vec{L}_{Oi} = \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i$, gde se vektor položaja \vec{r}_i meri od tačke O do tačke M_i . Moment količine kretanja sistema materijalnih tačaka definiše se kao vektorski zbir momenata količina kretanja pojedinih tačaka sistema

$$\vec{L}_O = \sum_{i=1}^N \vec{L}_{Oi} = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i. \quad (2.15)$$

Ako se izraz (2.15) projektuje na ose nepokretnog koordinatnog sistema $Oxyz$ dobijaju se projekcije vektora \vec{L}_O na te ose, a to su istovremeno momenti količine kretanja za te ose

$$\begin{aligned} L_x &= m_i(y_i \dot{z}_i - z_i \dot{y}_i), \\ L_y &= m_i(z_i \dot{x}_i - x_i \dot{z}_i), \\ L_z &= m_i(x_i \dot{y}_i - y_i \dot{x}_i). \end{aligned}$$

Zamenom izraza (2.9) i (2.10) u izraz (2.15), i vodeći računa da su vektori \vec{r}_c i \vec{v}_c zajednički za sve članove pod znakom sabiranja, dobija se

$$\begin{aligned} \vec{L}_O &= \vec{r}_c \times \vec{v}_c \sum_{i=1}^N m_i + \left(\sum_{i=1}^N m_i \vec{\rho}_i \right) \times \vec{v}_c \\ &\quad + \vec{r}_c \times \left(\sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_{ir} \right) + \sum_{i=1}^N \vec{\rho}_i \times m_i \vec{v}_{ir}, \end{aligned}$$

što zbog (2.5) i (2.11) postaje

$$\vec{L}_O = \vec{L}_c + \vec{r}_c \times M \vec{v}_c, \quad (2.16)$$

gde je

$$\vec{L}_c = \sum_{i=1}^N \vec{\rho}_i \times m_i \vec{v}_{ir}, \quad (2.17)$$

moment količine relativnog kretanja sistema u odnosu na centar mase, gde su \vec{v}_{ir} relativne brzine tačaka sistema u odnosu na centar mase sistema.

I pored toga što su izrazi (2.15) i (2.17) formalno isti ipak postoji duboka razlika između njih. \vec{L}_O je vektor momenta količine kretanja sistema za nepomičnu tačku O , gde se količine kretanja tačaka sistema izračunavaju pomoću njihovih apsolutnih brzina. \vec{L}_c je vektor momenta količine kretanja u odnosu na pokretan centar mase C , ali se količine kretanja tačaka računaju pomoću njihovih relativnih brzina u odnosu na centar mase.

Naglasimo da kod momenta količine kretanja važi ista veza momenta količine kretanja za tačku i momenta količine kretanja za neku osu z koja prolazi kroz tu tačku, koja postoji između momenta sile za tačku i osu. Naime, moment količine kretanja za osu z je projekcija na tu osu momenta količine kretanja za tačku O , koja leži na osi z .

$$\vec{k} \cdot \vec{L}_O \equiv L_z, \quad (2.18)$$

gde je \vec{k} jedinični vektor z ose.

2.4.3 Kinetička energija sistema

Kinetička energija sistema materijalnih tačaka je algebarski zbir kinetičkih energija svih tačaka sistema. Brzine u kinetičkoj energiji su apsolutne brzine tačaka sistema. Ako je E_{ki} kinetička energija i -te tačke mase m_i onda je kinetička energija sistema

$$E_k = \sum_{i=1}^N E_{ki} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i v_i^2 \geq 0. \quad (2.19)$$

Pošto je kinetička energija sistema zbir samo pozitivnih veličina to je i ona uvek pozitivna, a može biti jednaka nuli samo ako su istovremeno brzine svih tačaka sistema jednake nuli.

Ako su x_i , y_i i z_i Dekartove koordinate tačke M_i sistema u nepokretnom koordinatnom sistemu $Oxyz$, onda prethodni izraz postaje

$$E_k = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2).$$

Ako se brzina svake tačke sistema izrazi preko brzine centra mase, prema relaciji (2.10), tada se iz izraza (2.19) dobija

$$\begin{aligned} E_k &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (\vec{v}_c + \vec{v}_{ir}) \cdot (\vec{v}_c + \vec{v}_{ir}) \\ &= \frac{1}{2} v_c^2 \sum_{i=1}^N m_i + \vec{v}_c \cdot \left(\sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_{ir} \right) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i v_{ir}^2, \end{aligned}$$

odnosno zbog uslova (2.5) i (2.11)

$$E_k = \frac{1}{2} M v_c^2 + E_{kr}^c, \quad (2.20)$$

gde je

$$E_{kr}^c = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i v_{ir}^2 \quad (2.21)$$

kinetička energija relativnih kretanja svih tačaka sistema u odnosu na centar mase. Činjenica iskazana jednačinom (2.20), da je kinetička energija sistema zbir kinetičke energije translatornog kretanja centra mase i kinetičke energije relativnog kretanja tačaka sistema u odnosu na centar mase, često se naziva Kenigova¹ teorema.

2.5 Opšti zakoni dinamike sistema tačaka

Svi opšti zakoni dinamike sistema materijalnih tačaka izvode se iz vektorske jednačine kretanja tačaka sistema u obliku (2.4)

$$m_i \vec{a}_i = \vec{F}_i^{(u)} + \vec{F}_i^{(s)}, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (2.22)$$

gde su sva dejstva na i -tu tačku sistema iskazana jednom unutrašnjom $\vec{F}_i^{(u)}$ i jednom $\vec{F}_i^{(s)}$ spoljašnjom silom.

¹S. König, 1712 – 1757.

2.5.1 Zakon o kretanju centra mase

Sabiranjem svih N vektorskih jednačina (2.22), i zbog relacija (2.8) i (2.2), dobija se zakon o kretanju centra mase sistema:

$$M \vec{a}_c = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{(s)}. \quad (2.23)$$

Centar mase materijalnog sistema se kreće kao jedna materijalna tačka, čija je masa jednaka masi celog sistema, i na koju deluju sve spoljašnje sile sistema.

Kao što se vidi, unutrašnje sile nemaju uticaj na kretanje centra mase sistema.

U zavisnosti od izabranog koordinatnog sistema u kome se posmatra kretanje centra mase ovoj vektorskoj jednačini odgovara određen broj skalarnih jednačina. Na primer, u Dekartovom sistemu one glase

$$M \ddot{x}_c = \sum_{i=1}^N F_{ix}^{(s)}, \quad M \ddot{y}_c = \sum_{i=1}^N F_{iy}^{(s)}, \quad M \ddot{z}_c = \sum_{i=1}^N F_{iz}^{(s)}, \quad (2.24)$$

gde su $F_{ix}^{(s)}$, $F_{iy}^{(s)}$ i $F_{iz}^{(s)}$ projekcije spoljašnjih sila na ose x , y i z .

Ako je suma svih spoljašnjih sila, koje deluju na tačke sistema, jednaka nuli, onda iz (2.23) sledi da je brzina centra mase \vec{v}_c konstantna, pa se centar mase kreće jednoliko i pravolinijski, odnosno po inerciji².

Ako je suma projekcija svih spoljašnjih sila na neku osu, na primer y osu, jednaka nuli, onda iz (2.24) sledi da je brzina centra mase u pravcu te ose \dot{y}_c konstantna. Tada se centar mase kreće po inerciji u pravcu y ose.

2.5.2 Zakon o promeni količine kretanja sistema

Pomnožimo vektorskiju jednačinu (2.23), koja predstavlja zakon o kretanju centra mase sistema, sa dt . Time se, ako je masa celog sistema

²Na primer, uticaj gravitacionih sila vaskonskih objekata na Sunčev sistem je zanemarljiv, pa se centar mase Sunčevog sistema kreće brzinom od približno 18 [km/s] ka jednoj tački sazvežđa Herkulesa.

konstantna, i zbog činjenice da je $\vec{a}_c = d\vec{v}_c/dt$, dobija

$$d(M\vec{v}_c) = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{(s)} dt,$$

odnosno zbog (2.13)

$$d\vec{K} = \sum_{i=1}^N d\vec{I}_i^{(s)}, \quad (2.25)$$

gde je $d\vec{I}_i^{(s)} = \vec{F}_i^{(s)} dt$ elementarni impuls sile $\vec{F}_i^{(s)}$. Znači, elementarna promena količine kretanja sistema jednaka je sumi elementarnih impulsa svih spoljašnjih sila. Ako se ovaj izraz integrali od trenutka t_0 do trenutka t_1 dobija se

$$\vec{K}_1 - \vec{K}_0 = \sum_{i=1}^N \vec{I}_{i01}^{(s)}, \quad (2.26)$$

gde je

$$\vec{I}_{i01}^{(s)} = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F}_i^{(s)} dt, \quad (2.27)$$

konačan impuls sile $\vec{F}_i^{(s)}$ u vremenskom intervalu između početnog trenutka t_0 i krajnjeg trenutka t_1 kretanja sistema. Ovo je zakon o promeni količine kretanja:

Svaka konačna promena količine kretanja sistema u nekom vremenskom intervalu jednaka je vektorskoj sumi konačnih impulsa svih spoljašnjih sila za to vreme.

Ovaj zakon je prvi integral jednačina kretanja sistema i pogodan je za upotrebu kad god je moguće izračunati konačne impulse spoljašnjih sila bez poznavanja zakona kretanja.

I ovaj se vektorski zakon može posmatrati u raznim koordinatnim

sistemima. U Dekartovom sistemu, odgovarajuće skalarne jednačine glase

$$\begin{aligned} K_{1x} - K_{0x} &= \sum_{i=1}^N I_{i01x}^{(s)}, \\ K_{1y} - K_{0y} &= \sum_{i=1}^N I_{i01y}^{(s)}, \\ K_{1z} - K_{0z} &= \sum_{i=1}^N I_{i01z}^{(s)}, \end{aligned} \quad (2.28)$$

gde, kao i uvek, donji indeks x , y ili z označava projekciju vektora na odgovarajuću osu.

2.5.3 Zakon o promeni momenta količine kretanja sistema

Momentna tačka je nepokretna.

Neka je \vec{r}_i vektor položaja tačke M_i u odnosu na neku nepokretnu tačku O . Vektorskim množenjem sa vektorima \vec{r}_i jednačina (2.22) i dodavanjem nula u obliku $\vec{v}_i \times m_i \vec{v}_i$ njihovim levim stranama nakon sabiranja tako dobijenih jednačina dobija se

$$\sum_{i=1}^N (\vec{r}_i \times m_i \vec{a}_i + \vec{v}_i \times m_i \vec{v}_i) = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{(s)} + \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{(u)}.$$

Članovi na desnoj strani ove jednačine su momenti svih spoljašnjih i unutrašnjih sila za tačku O a transformacija leve strane dovodi do relacije

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i = \sum_{i=1}^N \vec{M}_O^{F_i^{(s)}} + \sum_{i=1}^N \vec{M}_O^{F_i^{(u)}}.$$

Odavde se, koristeći (2.3), dobija zakon o promeni momenta količine kretanja sistema za nepokretnu tačku O :

$$\dot{\vec{L}}_O = \sum_{i=1}^N \vec{M}_O^{F_i^{(s)}}. \quad (2.29)$$

Brzina promene momenta količine kretanja sistema za neku nepokretnu tačku O jednaka je sumi momenata svih spoljašnjih sila, za istu tačku.

U slučaju kada u sistemu postoje i kruta tela na njih sem sila mogu delovati i spregovi. Tada se moment količine kretanja računa i za kruta tela a spregovi dodaju momentima svih spoljašnjih sila. Tako jednačina (2.29) postaje

$$\dot{\vec{L}}_O = \sum_{i=1}^N \vec{M}_O^{\vec{F}_i^{(s)}} + \vec{\mathfrak{M}}, \quad (2.30)$$

gde je $\vec{\mathfrak{M}}$ rezultujući spreg svih spregova koji deluju na kruta tela.

I u ovom zakonu nema uticaja unutrašnjih sila. Ovaj zakon se naročito koristi pri proučavanju obrtnih kretanja sistema.

Koristeći vezu (2.18) momenta količine kretanja za neku osu i za tačku na toj osi i usvajanjem Dekartovog koordinatnog sistema $Oxyz$, ova vektorska jednačina se zamenjuje sa tri skalarne

$$\dot{L}_x = \sum_{i=1}^N M_x^{\vec{F}_i^{(s)}} + \mathfrak{M}_x, \quad \dot{L}_y = \sum_{i=1}^N M_y^{\vec{F}_i^{(s)}} + \mathfrak{M}_y, \quad \dot{L}_z = \sum_{i=1}^N M_z^{\vec{F}_i^{(s)}} + \mathfrak{M}_z, \quad (2.31)$$

gde su L_x , L_y i L_z momenti količine kretanja, a desne strane momenti spoljašnjih sila i sprega $\vec{\mathfrak{M}}$, za koordinatne ose x , y i z .

Momentna tačka je centar mase.

Za mnoge probleme, a naročito u dinamici krutog tela, pogodnije je promenu momenta količine kretanja posmatrati, umesto u odnosu na nepokretnu tačku O , u odnosu na centar mase, koji je u opštem slučaju pokretan. Zamenjujući izraze (2.16) i (2.9) u (2.30) i koristeći činjenicu da je moment i -te spoljašnje sile za nepokretnu tačku O dat sa $\vec{r}_i \times \vec{F}_i^{(s)}$, dobija se

$$\dot{\vec{L}}_c + \vec{v}_c \times M \vec{v}_c + \vec{r}_c \times M \vec{a}_c = \vec{r}_c \times \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{(s)} + \sum_{i=1}^N \vec{\rho}_i \times \vec{F}_i^{(s)} + \vec{\mathfrak{M}}.$$

Pošto se centar mase sistema kreće u skladu sa zakonom (2.23) i pošto je vektorski proizvod $\vec{v}_c \times M \vec{v}_c$ jednak nuli, prethodna relacija postaje

$$\dot{\vec{L}}_c = \sum_{i=1}^N \vec{M}_c^{F_i^{(s)}} + \vec{\mathfrak{M}}, \quad (2.32)$$

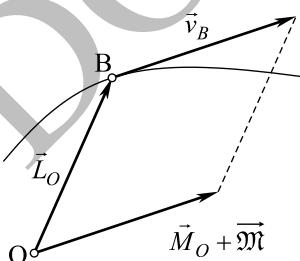
gde su sa desne strane momenti spoljašnjih sila za centar mase C i rezultujući spreg $\vec{\mathfrak{M}}$. Ovo je zakon o promeni momenta količine kretanja sistema za centar mase.

I pored velike sličnosti zakona (2.32) i (2.29) napominjemo i njihovu razliku: U izrazu (2.29) momentna tačka O je nepokretna a moment količine kretanja se izračunava preko absolutnih brzina tačaka sistema. U zakonu (2.32) momentna tačka C je pokretna a moment količine kretanja se izračunava pomoću relativnih brzina tačaka sistema u odnosu na centar mase C .

Posmatrajmo primenu zakona (2.32) na kretanje Sunčevog sistema, na koji deluju samo unutrašnje sile, jer su sve spoljašnje sile zanemarljivo male. Za takvo kretanje, iz (2.32), sledi zaključak Laplasa da je vektor momenta količine kretanja Sunčevog sistema za centar mase \vec{L}_c konstan-tan.

Slično izrazima (2.31), i vektorska jednačina (2.32) može se zameniti sa tri skalarne jednačine u Dekartovom koordinatnom sistemu čiji se koordinatni početak nalazi u centru mase C .

Kinematička slika teoreme o promeni vektora momenta količine kretanja sistema. Rezalova teorema



Slika 2.5:

Kao što je poznato, veličina $d\vec{L}_O/dt$ može da se posmatra kao brzina tačke B kraja vektora \vec{L}_O (Slika 2.5) u prostoru $OL_xL_yL_z$

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{v}_B.$$

Pošto je prema (2.30)

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O + \vec{\mathfrak{M}},$$

gde je \vec{M}_O zbir momenata svih spoljašnjih sila koje deluju na sistem a $\vec{\mathfrak{M}}$ zbir svih spregova koji deluju na kruta tela, sledi da je

$$\vec{v}_B = \vec{M}_O + \vec{\mathfrak{M}}. \quad (2.33)$$

Ovaj rezultat se iskazuje u vidu Rezalove teoreme: *Brzina vektora momenta količine kretanja sistema materijalnih tačaka i krutih tela u odnosu na neki centar O, jednak je glavnom momentu svih spoljašnjih sila i spregova, koji deluju na sistem u odnosu na isti centar.*

2.5.4 Zakoni o promeni kinetičke energije.

Posmatrajmo kretanje sistema N materijalnih tačaka masa m_i . Na svaku tačku sistema deluje jedna unutrašnja i jedna spoljašnja sila. Za izolovanu i -tu tačku sistema važi zakon o promeni kinetičke energije tačke u elementarnom obliku

$$dE_{ki} = dA_i^{(s)} + dA_i^{(u)}, \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

gde su $dA_i^{(s)}$ i $dA_i^{(u)}$ elementarni radovi spoljašnje i unutrašnje sile, koje deluju na tu tačku. Ako se sve ove jednačine saberi dobija se zakon o elementarnoj promeni kinetičke energije sistema materijalnih tačaka

$$dE_k = dA^{(s)} + dA^{(u)}, \quad (2.34)$$

gde je E_k , prema (2.19), kinetička energija sistema, $dA^{(s)} = \sum dA_i^{(s)}$ je elementarni rad svih spoljašnjih sila u sistemu, a $dA^{(u)} = \sum dA_i^{(u)}$ elementarni rad svih unutrašnjih sila u sistemu.

Neka M_0 i M_1 označavaju dva položaja svih tačaka sistema M_{i0} i M_{i1} . Tada se, integracijom izraza (2.34) u tim granicama, i koristeći (1.37), dobija

$$E_{k1} - E_{k0} = A_{01}^{(s)} + A_{01}^{(u)}.$$

Ova relacija iskazuje zakon o promeni kinetičke energije sistema:

Svaki konačan priraštaj kinetičke energije materijalnog sistema, pri pomeranju sistema iz jednog položaja u drugi, jednak je zbiru radova svih spoljašnjih i unutrašnjih sila sistema na tom pomeranju.

Prema ranije iznesenim činjenicama, vidi se da je ovaj zakon prvi integral jednačina kretanja i pogodan je za upotrebu kad god je moguće izračunati rad svih sila bez poznavanja kretanja sistema.

Ovo je jedini opšti zakon dinamike u kojem se pojavljuje uticaj unutrašnjih sila. U opštem slučaju, kada se tačke sistema kreću jedna u odnosu na drugu, rad unutrašnjih sila je različit od nule.

2.5.5 Zakon o održanju ukupne mehaničke energije.

Neka su sve spoljašnje i unutrašnje sile koje deluju na tačke sistema konzervativne, odnosno neka se za svaku od ovih sila može naći potencijalna energija. Potencijalna energija svih spoljašnjih i unutrašnjih sila sistema se definiše vezom

$$d\Pi = -(dA^{(s)} + dA^{(u)}).$$

Zamenom ovog izraza u (2.34) sledi da je $d(E_k + \Pi) = 0$, odnosno da mora biti

$$E_k + \Pi = E, \quad (2.35)$$

gde se konstanta E izračunava iz početnih uslova kretanja. Ova relacija govori da je za vreme kretanja materijalnog sistema pod dejstvom konzervativnih sila zbir kinetičke i potencijalne energije sistema, koji se naziva ukupna ili totalna mehanička energija sistema, konstantan. Ovo je zakon o održanju ukupne ili totalne mehaničke energije sistema:

Zbir kinetičke energije materijalnog sistema i potencijalne energije svih spoljašnjih i unutrašnjih sila sistema ostaje tokom kretanja konstantan, ako su sve spoljašnje i unutrašnje sile u sistemu potencijalne, odnosno konzervativne.

Napomene:

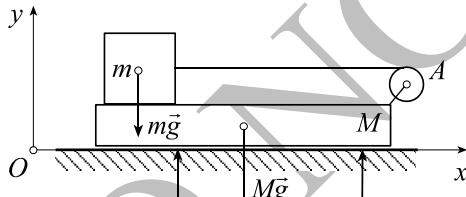
1. Ako se u sistemu nalazi telo koje se kreće translatorno, prema rezultatima kinematike, posmatra se kao materijalna tačka.
2. Za rešavanje svakog problema kretanja sistema materijalnih tačaka potrebno je upotrebiti onoliko skalarnih jednačina opštih zakona dinamike koliko sistem ima stepeni slobode kretanja. Te skalarne jednačine mogu biti diferencijalne jednačine drugog reda, ili ako se koristi neki opšti zakon dinamike, koji je prvi integral, i diferencijalne jednačine prvog reda.
3. U nekom problemu može se koristiti ili zakon o promeni kinetičke energije sistema ili zakon o održanju mehaničke energije sistema.

Istovremeno se oba zakona ne mogu koristiti jer oni iskazuju istu osobinu sistema ali jedan preko rada a drugi preko potencijala sila, a poznato je da su ove veličine međusobno povezane.

Primer 14 Na horizontalnoj glatkoj podlozi nalazi se paralelopiped mase M (Slika 2.6) i dužine L . Na njemu se nalazi kocka zanemarljivih dimenzija mase m , koja je povezana nerastegljivim užetom za laki kotur u tački A . Između kocke i paralelopipeda nema trenja. U početnom trenutku sistem je u miru. Ako se, namotavanjem užeta na kotur, kocka pomeri za dužinu b po paralelopipedu odrediti pomeranje paralelopipeda.

Usvojimo da sistem čine kocka i paralelopiped. Tada su spoljašnje sile, sile zemljine teže $m\vec{g}$ i $M\vec{g}$ i reakcije idealne veze na paralelopiped, prikazane na slici. Sila u užetu i sila reakcije veze između kocke i paralelopipeda su unutrašnje sile. Pošto je projekcija spoljašnjih sile u pravcu odabrane x ose jednaka nuli korišćenjem zakona o kretanju centra mase u pravcu x ose dobija se

$$(m + M)\ddot{x}_c = 0.$$



Slika 2.6:

kocke iznosi

$$x_c = \frac{mx_m + Mx_M}{m + M} = \frac{m(x_M - \frac{L}{2}) + Mx_M}{m + M}.$$

Kada se kocka pomeri za b po površini paralelopipeda položaj centra mase je određen izrazom

$$x_c^* = \frac{mx_m^* + Mx_M^*}{m + M} = \frac{m(x_M^* - \frac{L}{2} + b) + Mx_M^*}{m + M},$$

Odavde je $\dot{x}_c = C_1$, gde je C_1 integraciona konstanta. Zbog mirovanja sistema u početnom trenutku vremena, dobija se $C_1 = 0$, pa je $\dot{x}_c = 0$ stalno tokom kretanja, odnosno $x_c = \text{const.}$ tj. centar mase ne menja položaj za vreme kretanja sistema. Prema (2.7), položaj centra mase pre pomeranja

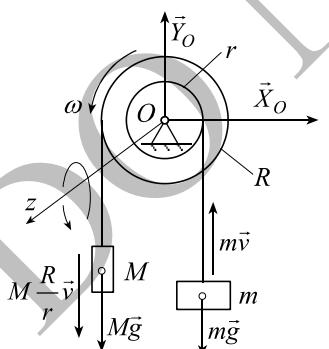
gde je x_M^* novi položaj centra paralelopipeda. Pošto je $x_c = x_c^*$, dobija se pomeranje paralelopipeda

$$x_M^* - x_M = -\frac{m}{m+M}b.$$

Znači, zbog minusa na desnoj strani prethodnog rezultata, ako se kocka pomeri u desno, onda se paralelopiped pomera u levo jer je $x_M^* < x_M$.

Primer 15 Teret mase m vezan je za kraj nerastegljivog užeta koje se namotava na cilindar poluprečnika r . Na drugi cilindar poluprečnika R , koji je kruto vezan sa prvim, namotano je drugo nerastegljivo uže koje se odmotava i na čijem kraju je teret mase M . Mase cilindara se zanemaruju. Cilindri se mogu obrtati oko cilindričnog zgloba O (Slika 2.7). Odrediti ubrzanje mase M .

Neka sistem čine tereti mase m i M i cilindri. Ako se mase m i M mogu kretati samo u vertikalnom pravcu onda ovaj sistem ima jedan stepen slobode kretanja. Zato je, za rešavanje problema, potrebna samo jedna skalarna jednačina opštih zakona dinamike. Prema ranijim preporukama, a pošto se radi o obrtnom kretanju cilindara, najpogodniji je zakon o promeni momenta količine kretanja $\dot{L}_z = \sum M_z \vec{F}_i^{(s)}$ za z osu koja je normalna na ravan kretanja i prolazi kroz tačku O .



Slika 2.7:

Kod primene ovog zakona, prvo se usvoji pozitivan smer obrtanja momenata sila i količine kretanja oko ose z . Neka je to smer naznačen na slici 2.7. Ako je v brzina pravolinijskog kretanja mase m , onda pošto uže ne proklizava po cilindru, ugaona brzina obrtanja cilindra oko tačke O iznosi $\omega = v/r$. Brzina mase M je jednaka brzini dela užeta koje se odmotava, tj. $v_M = R\omega = Rv/r$. Vektori količine kretanja masa m i M su nacrtani na slici i iznose mv i MRv/r , pa je moment količine kretanja za osu z

$$L_z = mvr + M \frac{R}{r} v R.$$

Spoljašnje sile koje deluju na sistem su težine tegova, $m\vec{g}$ i $M\vec{g}$, i reakcije \vec{X}_0 i \vec{Y}_0 cilindričnog zgoba O . Njihov moment za osu z iznosi

$$MgR - mgr,$$

pa jednačina (2.31) postaje

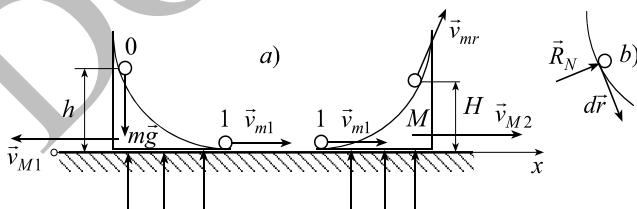
$$(mr + M \frac{R^2}{r})\dot{v} = (MR - mr)g.$$

Odavde, traženo ubrzanje mase m iznosi

$$a = \dot{v} = \frac{(MR - mr)g}{mr + M \frac{R^2}{r}}$$

Primer 16 Dva jednaka i simetrična tela oblika kocke iz koje je izvađena četvrtina cilindra imaju mase M . Poluprečnik cilindra je r koji je istovremeno i stranica kocke. Tela su postavljena na glatku horizontalnu ravan i dodiruju se uzduž jedne ivice. Sa levog tela se, u jednom trenutku i to sa visine h , pusti bez početne brzine materijalna tačka mase m . Površine tela su glatke. Odrediti do koje se visine H na desnom telu tačka penje (Slika 2.8a).

Tačka kreće naniže po levom telu, koje se usled toga pomera u levo. Prema tome, sistem ima dva nezavisna kretanja, odnosno dva stepena slobode kretanja. Za vreme kretanja tačke po levom telu desno telo miruje. Za rešavanje problema potrebne su dve skalarne jednačine opštih zakona dinamike.



Slika 2.8:

Sa 0 označimo položaj sistema koji odgovara početku kretanja a sa 1 položaj u trenutku kada tačka napušta levo telo. Spoljašnje sile, koje deluju na sistem, su sile težine i reakcija horizontalne podloge. Neka su \vec{v}_{M1}

i \vec{v}_{m1} brzine tela i tačke u položaju 1. Primenom zakona o promeni kinetičke energije sistema za položaje 0 i 1 dobija se

$$E_{k1} - E_{k0} = A_{01}^{(s)} + A_{01}^{(u)}, \quad \frac{m}{2}v_{m1}^2 + \frac{M}{2}v_{M1}^2 = mgh, \quad (A)$$

jer je kinetička energija u položaju 0 jednaka nuli a rad vrši samo spoljašnja sila $m\vec{g}$ na pomeranju na dole materijalne tačke m za visinu h . Unutrašnje sile, reakcija tela \vec{R}_N na tačku i pritisak tačke $-\vec{R}_N$ na telo, ne vrše rad jer je prenosno pomeranje tela isto za obe sile dok je relativno pomeranje (Slika 2.8b) tačke normalno na pravac sile \vec{R}_N . Zakon o promeni količine kretanja sistema u pravcu x ose glasi

$$K_{1x} - K_{0x} = \sum_{i=1}^N I_{i01x}^{(s)}, \quad mv_{m1} - Mv_{M1} = 0, \quad (B)$$

jer je količina kretanja u položaju 0 jednaka nuli i nema impuls-a spoljašnjih sila u pravcu x ose. Rešavanjem jednačina (A) i (B) dobija se brzina tačke po napuštanju tela

$$v_{m1} = \sqrt{\frac{2ghM}{m+M}}. \quad (D)$$

Po napuštanju levog tela, a zbog njegovog pomeranja u levo, tačka se delom kreće po horizontalnoj ravni. Pošto je horizontalna ravan glatka, tačka nailazi na desno telo sa istom brzinom v_{m1} . Dalje, posmatramo sistem koji čine desno telo i materijalna tačka.

Pri kretanju tačke po desnom telu, položaj 1 odgovara nailasku tačke na to telo a položaj 2 trenutku kada tačka dostigne najveću visinu H na telu. Za vreme ovog kretanja, kretanje tela je prenosno kretanje za tačku a kretanje tačke u odnosu na telo relativno. Zato je brzina tačke zbir njene prenosne i relativne brzine, odnosno

$$\vec{v}_m = \vec{v}_M + \vec{v}_{mr}.$$

U položaju 2, kada tačka dostigne najviši položaj na telu ona relativno miruje u odnosu na to telo, pa je $v_{mr2} = 0$ i $v_{m2} = v_{M2}$. Primenom zakona o promeni kinetičke energije sistema za položaje 1 i 2 dobija se

$$\begin{aligned} E_{k2} - E_{k1} &= A_{12}^{(s)} + A_{12}^{(u)}, \\ \frac{m}{2}v_{m2}^2 + \frac{M}{2}v_{M2}^2 - \frac{m}{2}v_{m1}^2 &= -mgH, \end{aligned} \quad (E)$$

gde samo sila $m\vec{g}$ vrši rad na pomeranju za visinu H . Zakon o promeni količine kretanja za položaje 1 i 2 daje

$$K_{2x} - K_{1x} = \sum_{i=1}^N I_{i12x}^{(s)}, \quad Mv_{M2} + mv_{m2} - mv_{m1} = 0. \quad (F)$$

Pošto je u položaju 2 $v_{m2} = v_{M2}$, rešavanjem jednačina (E) i (F) i korišćenjem relacije (D) dobija se najviši položaj tačke na desnom telu

$$H = \left(\frac{1}{1 + \frac{m}{M}} \right)^2 h.$$

Poslednji izraz pokazuje da je $H < h$. Kada bi se materijalna tačka kretala po telima čvrsto vezanim za podlogu visina H bila bi jednaka sa početnom visinom h . Kada su tela pokretna, deo izvršenog rada sile $m\vec{g}$ pri kretanju materijalne tačke na dole troši se na pokretanje tela i podizanje tačke na visinu H . To je uzrok smanjivanja visine penjanja H u odnosu na polaznu visinu tačke h .

2.6 Dalamberov princip za sistem tačaka

Posmatramo kretanje sistema materijalnih tačaka koje je opisano jednačinama (2.4). Ako se uvede inercijalna sila i -te materijalne tačke sistema u obliku

$$\vec{F}_i^{(in)} = -m_i \vec{a}_i,$$

te jednačine postaju

$$\begin{aligned} \vec{F}_1^{(in)} + \vec{F}_1^{(s)} + \vec{F}_1^{(u)} &= \vec{0}, \\ \vec{F}_2^{(in)} + \vec{F}_2^{(s)} + \vec{F}_2^{(u)} &= \vec{0}, \end{aligned}$$

.....

$$\vec{F}_N^{(in)} + \vec{F}_N^{(s)} + \vec{F}_N^{(u)} = \vec{0}. \quad (2.36)$$

Posle sabiranja ovih svih jednačina, a pošto je $\sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{(u)} = \vec{0}$, dobija se

$$\vec{F}_g^{(in)} + \vec{F}_g^{(s)} = \vec{0}, \quad (2.37)$$

gde je glavni vektor inercijalnih sila

$$\vec{F}_g^{(in)} = - \sum_{i=1}^N m_i \vec{a}_i = -M \vec{a}_C, \quad (2.38)$$

i

$$\vec{F}_g^{(s)} = \sum_{k=1}^N \vec{F}_k^{(s)}, \quad (2.39)$$

glavni vektor svih spoljašnjih sila u sistemu.

Ako se svaka jednačina sistema (2.36) vektorski pomnoži sa odgovarajućim vektorom položaja \vec{r}_i dobija se

$$\vec{r}_i \times \vec{F}_i^{(in)} + \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{(s)} + \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{(u)} = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, N),$$

a posle sabiranja dobijenih jednačina po svim tačkama sistema

$$\sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{(in)} + \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{(s)} + \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{(u)} = \vec{0}.$$

Pošto je suma svih momenata unutrašnjih sila jednaka nuli, odnosno $\sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{(u)} = \vec{0}$, prethodna relacija postaje

$$\vec{\mathfrak{m}}_O^{(s)} + \vec{\mathfrak{m}}_O^{(in)} = \vec{0}, \quad (2.40)$$

gde su glavni moment spoljašnjih sila i glavni moment inercijalnih sila oblika

$$\vec{\mathfrak{m}}_O^{(s)} = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{(s)}, \quad (2.41)$$

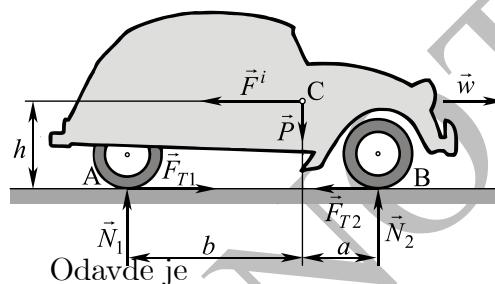
$$\vec{\mathfrak{m}}_O^{(in)} = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{(in)}. \quad (2.42)$$

Po svojoj suštini jednačine (2.37) i (2.40) su ekvivalentne sa jednačinama koje opisuju zakon o promeni količine kretanja i o promeni momenta količine kretanja sistema, ali se od njih samo razlikuju po obliku. Ove jednačine se mnogo koriste u proučavanju kretanja krutog tela.

Važno je napomenuti da ne treba porediti Dalamberov princip gde je uvođenje inercijalnih sila čisto formalno, sa dinamikom relativnog kretanja gde je njihovo uvođenje imalo dubok fizički smisao. Treba podvući da inercijalne sile ne zadovoljavaju osobinu pravih sila koje se uvek javljaju u parovima i deluju na dva tela u prostoru.

Primer 17 Automobil težine P , kreće se po pravolinijskom horizontalnom putu ubrzanjem w . Težište automobila C se nalazi na visini h iznad puta, a a i b su rastojanja osa prednjeg i zadnjeg točka od vertikale kroz težište automobila.

- Odrediti vertikalne pritiske N_2 i N_1 prednjih i zadnjih točkova automobila na put.
- Na koji način treba da se kreće automobil da bi pritisci njegovih prednjih i zadnjih točkova na put bili jednaki (Slika 2.9).



Slika 2.9:

Prema (2.40) suma momenata svih spoljašnjih i inercijalnih sila za tačku A mora biti jednak nuli pa je

$$N_2(a+b) - Pb + \frac{P}{g}wh = 0.$$

$$N_2 = P \frac{b - \frac{wh}{g}}{a+b}.$$

Za drugu jednačinu bira se suma svih spoljašnjih i inercijalnih sila u vertikalnom pravcu

$$N_1 + N_2 - P = 0,$$

pa je

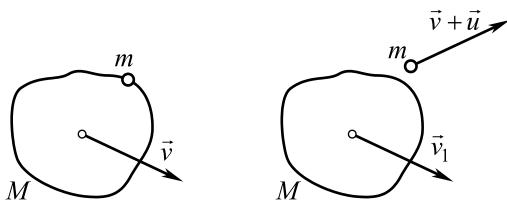
$$N_1 = P \frac{a + \frac{wh}{g}}{a+b}.$$

Da bi sile N_1 i N_2 bile jednake ubrzanje automobila mora da bude

$$w = \frac{g}{2h}(b-a).$$

2.7 Osnovi mehanike tačke promenljive mase

U svim dosadašnjim proučavanjima kretanja tačke njena masa je bila konstantna. Međutim u tehnici ima dosta problema kretanja tačke kod kog se njena masa menja tokom kretanja. Takva tačka je tačka promenljive mase.



Slika 2.10:

Primer tačke promenljive mase je avion čija se masa tokom leta neprekidno menja usled izbacivanja sagorelih produkata goriva. Na moru ledene sante se ili smanjuju ili povećavaju pa samim tim neprekidno menjaju svoju masu.

Osnovna pretpostavka mehanike tačke promenljive mase je da se svaka promena mase odvija neprekidno. Znači za tačku promenljive mase je $M = f(t)$, odnosno masa je funkcija vremena, gde je $f(t)$ neprekidna funkcija vremena. Neka se u početnom trenutku kretanja posmatra sistem od dve materijale tačke mase M i mase m . Te dve mase se kreću zajedno sa absolutnom brzinom \vec{v} (Slika 2.10). Zato sistem ove dve tačke ima u tom trenutku količinu kretanja

$$\vec{K}_1 = (M + m) \vec{v}. \quad (2.43)$$

Neka se čestica mase m trenutno izdvoji iz sistema relativnom brzinom \vec{u} u odnosu na drugu tačku. Zbog toga se brzina te tačke menja i postaje \vec{v}_1 pa će sada količina kretanja celog sistema biti

$$\vec{K}_2 = M \vec{v}_1 + m(\vec{v} + \vec{u}), \quad (2.44)$$

gde je $\vec{v} + \vec{u}$ absolutna brzina tačke koja se odvojila. Usled odvajanja mase dolazi do promene količine kretanja sistema

$$\Delta \vec{K} = \vec{K}_2 - \vec{K}_1 = M \Delta \vec{v} + m \vec{u},$$

gde je $\Delta \vec{v} = \vec{v}_1 - \vec{v}$ promena brzine tačke mase M . Neka je masa tačke koja se odvaja $m = -\Delta M$ tada je promena količine kretanja sistema

$$\Delta \vec{K} = M \Delta \vec{v} - \Delta M \vec{u},$$

odnosno

$$\frac{\Delta \vec{K}}{\Delta t} = M \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} - \vec{u} \frac{\Delta M}{\Delta t}.$$

Pošto se vreme neprekidno menja, prelaskom na granični proces kada Δt teži elementarnom priraštaju vremena dt dobija se da je $\Delta \vec{K} \rightarrow d\vec{K}$, $\Delta \vec{v} \rightarrow d\vec{v}$ i $\Delta M \rightarrow dM$. Zato, prethodna jednačina postaje

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = M \frac{d\vec{v}}{dt} - \vec{u} \frac{dM}{dt}. \quad (2.45)$$

Pošto je prema zakonu o promeni količine kretanja materijalnog sistema

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = \vec{F}^{(s)},$$

gde je $\vec{F}^{(s)}$ rezultanta svih spoljašnjih sila koje deluju na tačku promenljive mase, dobija se

$$M \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}^{(s)} + \vec{u} \frac{dM}{dt}, \quad (2.46)$$

a to je osnovna diferencijalna jednačina kretanja tačke promenljive mase, odnosno osnovna jednačina raketne dinamike ili jednačina Meščerskog. Veličina

$$\vec{\Phi} = \vec{u} \frac{dM}{dt} \quad (2.47)$$

naziva se reaktivna sila.

Relacija (2.46) igra istu ulogu u dinamici tačke promenljive mase kao i drugi Njutnov zakon u dinamici tačke sa konstantnom masom: *Pri kretanju tačke promenljive mase u svakom trenutku vremena je proizvod mase i ubrzanja jednak geometrijskom zbiru sila $\vec{F}^{(s)}$ koje deluju na tačku i reaktivne sile $\vec{\Phi}$.*

Osnovna jednačina dinamike promenljive mase je izvedena pod pretpostavkom da se masa izdvaja iz sistema. Ako bi se sprovedla ista razmatranja ali uz pretpostavku da se masa pripaja sistemu onda bi odgovarajuća jednačina bila ista kao i (2.46) ali bi tada bilo $dM > 0$.

2.7.1 Kretanje rakete.

Posmatra se horizontalan let rakete pod dejstvom samo reaktivne sile koja je posledica isticanja sagorelih gasova iz tela rakete. Početna brzina rakete je v_0 a gorivo ističe konstantnom brzinom u . Smer kretanja

rakete je suprotan od smera isticanja gasova. Pošto na telo deluje samo reaktivna sila kretanje rakete je pravolinijsko. Diferencijalna jednačina kretanje rakete ima oblik (2.46)

$$M \frac{dv}{dt} = -u \frac{dM}{dt}.$$

Posle integracije odavde se dobija

$$v = v_0 - \int_0^t u \frac{dM}{M}, \quad (2.48)$$

odnosno pošto je brzina isticanja gasova u konstantna

$$v = v_0 + u \ln \frac{M_0}{M(t)}, \quad (2.49)$$

gde je M_0 masa rakete u početnom trenutku vremena, znači za $t = 0$. Neka je masa tela rakete m_{tr} a m_g promenljiva masa goriva. Onda je $M_0 = m_{tr} + m_{g0}$ i $M(t) = m_{tr} + m_g$, gde je m_{g0} početna masa goriva. Sada je

$$v = v_0 + u \ln \frac{m_{tr} + m_{g0}}{m_{tr} + m_g}.$$

Kada svo gorivo izgori raketa dostiže svoju najveću brzinu. Znači, za $m_g = 0$ dobija se

$$v_{\max} = v_0 + u \ln \left(1 + \frac{m_{g0}}{m_{tr}} \right). \quad (2.50)$$

Ova relacija (2.50) često se naziva jednačina Ciolkovskog. Iz (2.50) se vidi da najveća brzina leta rakete zavisi od početne brzine rakete v_0 , od relativne brzine isticanja sagorelih gasova u i od odnosa početne mase goriva m_{g0} i mase tela rakete m_{tr} . Taj količnik m_{g0}/m_{tr} zove se *broj Ciolkovskog*. Vidi se da maksimalna brzina rakete ne zavisi od načina sagorevanja goriva, odnosno ne zavisi od zakona promene mase goriva sa vremenom.

Primer 18 Kako treba da se menja masa rakete da bi se ona kretala vertikalno naviše konstantnom brzinom \vec{v}_0 , ako je relativna brzina isticanja produkata sagorevanja konstantna i jednaka u . Uzeti u obzir i promenu gravitacione sile sa promenom visine. Otpor vazduha zanemariti. Početna masa tela rakete je m_0 .

Postavi se koordinatni početak koordinatnog sistema u centar Zemlje (Slika 2.11). Privlačna sila zemlje je

$$F = f \frac{Mm}{z^2},$$

gde je M masa zemlje, m masa rakete, z rastojanje tela od centra zemlje i f univerzalna gravitaciona konstanta. Pošto je na površini zemlje za $z = R$, gde je R poluprečnik zemlje,

$$F = mg,$$

dobija se

$$fM = gR^2,$$

pa je

$$F = \frac{mgR^2}{z^2}.$$

Jednačina Meščerskog projektovana na osu kretanja z , a zbog konstantnosti brzine ($dv/dt = 0$), ima oblik

$$-\frac{mgR^2}{z^2} - u \frac{dm}{dt} = 0,$$

$$\frac{dm}{dt} = -\frac{mgR^2}{uz^2}.$$

Ako se ova jednačina pomnoži sa dt a zbog $v = \frac{dz}{dt}$ dobija se $dt = dz/v$, odnosno

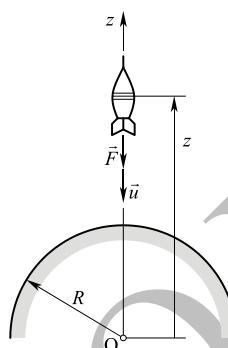
$$v \frac{dm}{m} = -\frac{gR^2}{u} \frac{dz}{z^2}.$$

Odavde se posle integracije dobija

$$\ln m |_{m_0}^{m(t)} = \frac{gR^2}{uv} \frac{1}{z} |_R^z,$$

odnosno

$$\ln m(t) - \ln m_0 = \frac{gR^2}{uv} \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{R} \right).$$



Slika 2.11:

Odavde je konačno

$$m(t) = m_0 e^{\frac{gR^2}{uv} \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{R} \right)}.$$

Pošto je u problemu $z = R + vt$ sledi da je

$$m(t) = m_0 e^{-\frac{gRt}{u(R+vt)}}.$$

Primer 19 Raketa čija se masa smanjuje sa vremenom po zakonu

$$dm/dt = -q = \text{const.},$$

ispaljena je horizontalno. Brzina isticanja produkata sagorevanja je konstantna. Na raketu deluje turbulentna sila atmosferskog otpora $F_w = -kv^2$, gde je v brzina rakete, a k zadata konstanta. Naći maksimalnu brzinu rakete v_{\max} .

Masa rakete se menja po zakonu

$$m = m_0 - qt,$$

pa je jednačina Meščerskog oblika

$$(m_0 - qt) \frac{dv}{dt} = -kv^2 + qu.$$

Razdvajanjem promenljivih dobija se

$$\frac{dv}{qu - kv^2} = \frac{dt}{m_0 - qt},$$

i posle integracije

$$\frac{c}{2u} \ln \frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}} = -\ln(m_0 - qt) + \ln C_1, \quad (2.51)$$

gde je

$$c = \sqrt{\frac{qu}{k}}.$$

Iz početnog uslova da je za $t = 0$ i $v = 0$ dobija se

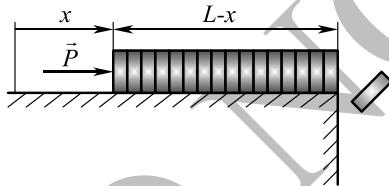
$$C_1 = m_0.$$

Kada svo gorivo izgori masa rakete će biti jednaka masi tela rakete m_{tr} . To će biti u trenutku vremena $t_k = (m_0 - m_{tr})/q$. Zbog ovoga iz (2.51) se dobija maksimalna brzina rakete

$$v_{\max} = c \frac{\left(\frac{m_0}{m_{tr}}\right)^{\frac{2u}{c}} - 1}{\left(\frac{m_0}{m_{tr}}\right)^{\frac{2u}{c}} + 1}.$$

Primer 20 Veliki broj malih pločica, čija je ukupna težina G , leži na ivici stola i nalazi se u miru. U početnom trenutku vremena počne da deluje konstantna sila P na kockice (Slika 2.12). Odrediti brzinu ovih pločica u funkciji koordinate x na slici za slučajevе:

1. Ako je površina stola hrapava i koeficijent trenja klizanja između pločica i stola f ,
2. Ako je površina stola idealno glatka.
3. Kolika je ova brzina kada polovina svih pločica padne sa idealno glatkog stola?



Slika 2.12:

Neka je masa jedinice pločice μ , tada

je

$$\mu = \frac{G}{gL}.$$

Pošto je relativna brzina u horizontalnom pravcu odvajanja pločica jednak nuli diferencijalna jednačina kretanja glasi

$$\mu(L-x)\ddot{x} = P - \mu g(L-x)f,$$

odnosno

$$\ddot{x} = \frac{P}{\mu(L-x)} - gf.$$

Množenjem ove jednačine sa dx i imajući u vidu da je $\ddot{x}dx = \dot{x}d\dot{x}$ posle integracije dobija se

$$\frac{\dot{x}^2}{2} = -\frac{P}{\mu} \ln(L-x) - gfx + C,$$

gde je C konstanta integracije. Iz početnog uslova da za $t = 0$, $x = 0$ i $\dot{x} = 0$ dobija se $C = (P/\mu) \ln L$. Sada je konačno brzina pločica na hrapavom stolu

$$\dot{x} = \sqrt{\frac{2P}{\mu} \ln \frac{L}{L-x} - 2g f x}.$$

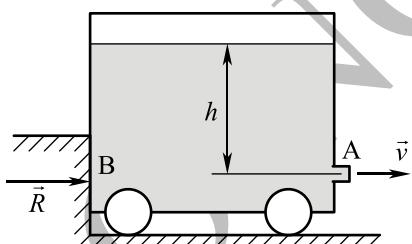
Ako je površina stola idealno glatka ova brzina je

$$\dot{x} = \sqrt{\frac{2P}{\mu} \ln \frac{L}{L-x}}.$$

Kada polovina pločica padne sa idealno glatkog stola, za $x = L/2$, ova brzina iznosi

$$\dot{x}_{L/2} = \sqrt{\frac{2PgL}{G} \ln 2}.$$

Primer 21 Rezervoar ispunjen vodom se nalazi na horizontalnoj podlozi po kojoj može da se kotrlja bez klizanja. U rezervoaru je tečnost specifične težine γ . Iz rezervoara ističe tečnost u horizontalnom pravcu kroz otvor A. Odrediti pritisak rezervoara na prepreku u tački B (Slika 2.13).



Slika 2.13:
je jednaka absolutnoj brzini isticanja tečnosti jer je rezervoar u miru.
Prema tome je

$$u = v = \sqrt{2gh}.$$

Element mase koji istekne u jedinici vremena biće

$$\frac{dM}{dt} = -Av \frac{\gamma}{g},$$

Od sila koje deluju na rezervoar tu su težina rezervoara, vertikalni otpor podloge, otpor pregrade u tački B i reaktivna sila isticanja tečnosti. Pošto se rezervoar ne kreće reaktivna sila i sila otpora pregrade su u ravnoteži. Znači ovde je

$$R + u \frac{dM}{dt} = 0.$$

Relativna brzina isticanja tečnosti

je jednaka absolutnoj brzini isticanja tečnosti jer je rezervoar u miru.

pa je reaktivna sila

$$\Phi = Av^2 \frac{\gamma}{g}$$

i pritisak na pregradu u tački B ima istu vrednost

$$R = Av^2 \frac{\gamma}{g} = 2Ah\gamma.$$

Poglavlje 3

Dinamika krutog tela

Kruto telo je specijalan slučaj sistema materijalnih tačaka sa konstantnim međusobnim rastojanjem između tačaka. Kruto telo može biti sačinjeno od konačnog ili beskonačnog broja materijalnih tačaka. Konstantno rastojanje između tačaka sistema može biti beskonačno malo, ali i konačno. Ova razlika u broju tačaka sistema i njihovom međusobnom rastojanju govori samo o načinu na koji je materija raspoređena u prostoru.

Rezultati ovog poglavlja mogu se primenjivati ne samo za proučavanje kretanja jednog krutog tela, već i za sistem više krutih tela ili sistema krutih tela i materijalnih tačaka.

Naglasimo da je pri kretanju krutog tela rad njegovih unutrašnjih sila u zakonu promene kinetičke energije sistema ili u zakonu o održanju totalne mehaničke energije jednak nuli. Pošto se tako u svim opštim zakonima dinamike pri proučavanju kretanja krutog tela unutrašnje sile ne pojavljuju, dalje se koristi oznaka \vec{F}_i za spoljašnju silu $\vec{F}_i^{(s)}$ koja deluje na kruto telo.

Ako se proučava kretanje krutih tela i tačaka u polju zemljine teže, onda je centar mase sistema istovremeno i težište sistema.

3.1 Rad sprega

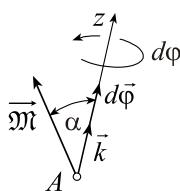
Na kruto telo, sem spoljašnjih sila \vec{F}_i , može da deluje i spreg $\vec{\mathfrak{M}}$. Pod dejstvom sprega $\vec{\mathfrak{M}}$ telo može da se obrne za elementarni ugao $d\varphi$ oko neke ose z . Pošto je spreg slobodan vektor on se uvek može dovesti do

presecanja sa osom z u nekoj njenoj tački A (Slika 3.1). Elementarnom uglu obrtanja $d\varphi$ odgovara vektor elementarnog obrtanja $\vec{d\varphi} = d\varphi \vec{k}$, gde je \vec{k} jedinični vektor pravca ose z . Elementarni rad sprega $\vec{\mathfrak{M}}$ na tom obrtanju definišan je skalarnim proizvodom vektora sprega $\vec{\mathfrak{M}}$ i vektora elementarnog obrtanja $\vec{d\varphi}$

$$dA^M = \vec{\mathfrak{M}} \cdot \vec{d\varphi}. \quad (3.1)$$

Ako je α ugao između vektora $\vec{\mathfrak{M}}$ i z ose (Slika 3.1) ovaj elementarni rad postaje

$$dA^M = d\varphi \cdot \mathfrak{M} \cos \alpha = \mathfrak{M}_z d\varphi, \quad (3.2)$$

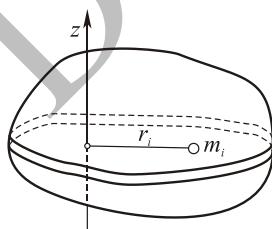


Slika 3.1:
obrtanja.

gde je $\mathfrak{M}_z = \mathfrak{M} \cos \alpha$ projekcija vektora sprega na osu z . Kao i kod rada sile, ovaj rad je pozitivan ako je ugao α oštar, a negativan ako je on tup. Spreg ne vrši elementarni rad ako je vektor sprega normalan na pravac ose

3.2 Moment inercije krutog tela

Pri složenijem kretanju krutog tela, nego što je translatorno, vrlo važnu ulogu igra oblik tela, veličina tela i način na koji je masa raspoređena u telu u odnosu na neku osu, koja može prolaziti kroz telo ali i ne mora. Centar mase ne karakteriše u potpunosti raspored mase sistema u odnosu na tu osu. Momenti inercije krutog tela igraju pri obrtnom kretanju tela istu ulogu koju igra masa tela pri translatornom kretanju.



Slika 3.2:

Znači, pri proučavanju kretanja krutog tela, koja se razlikuju od translatornog, važan je raspored mase krutog tela u odnosu na neku osu z (Slika 3.2). Osa z zauzima stalan pravac prema telu, bez obzira koji položaj telo zauzima u prostoru. Za nepromenljiv položaj ose z u odnosu na telo moment inercije je konstantna veličina. Ta veličina je nezavisna od vremena i položaja tela u prostoru.

Uoči se u telu njegov elementarni deo mase m_i i kroz njega se postavi ravan normalna na osu z . Rastojanje prodora ose z kroz tu ravan od mase m_i je najkraće rastojanje mase m_i od ose z , koje je označeno sa r_i . Moment inercije tela za osu z je definisan zbirom po celom telu proizvoda mase m_i i kvadrata rastojanja r_i mase m_i od ose z , odnosno

$$J_z = \sum_i m_i r_i^2. \quad (3.3)$$

Iz ove definicije se vidi da moment inercije zavisi samo od oblika tela i rasporeda njegove mase u odnosu na osu z , a ne zavisi od načina kretanja tela. Moment inercije tela je skalarna veličina i ima dimenziju mase pomnožene sa kvadratom dužine. Tehnička jedinica momenta inercije je kgm^2 . Odnos J_z/M , gde je M masa tela, ima dimenziju kvadrata dužine. Obeležimo ovu veličinu sa i_z^2 . Tako je

$$i_z^2 = \frac{J_z}{M}, \quad J_z = Mi_z^2. \quad (3.4)$$

Veličina i_z naziva se *poluprečnik inercije* tela u odnosu na osu z .

Izračunavanje momenata inercije homogenih tela pravilnog geometrijskog oblika vrši se metodom integralnog računa. U slučaju nehomogenih tela ili tela nepravilnog oblika momenti inercije se nalaze eksperimentalno.

Pri neprekidnom rasporedu mase u telu u izrazu (3.3) m_i se zamenjuje sa elementarnom masom dm , a r_i sa r . U tom slučaju sabiranje se zamenjuje sa integracijom u odnosu na celu masu tela M , odnosno

$$J_z = \int_{(M)} r^2 dm, \quad (3.5)$$

gde oznaka (M) znači da se integracija obavlja po celoj masi tela.

U slučaju neprekidnog rasporeda mase u homogenom telu je $dm = \rho dV$, gde je ρ gustina materijala tela a dV elementarni deo zapremine tela, pa izraz (3.5) postaje

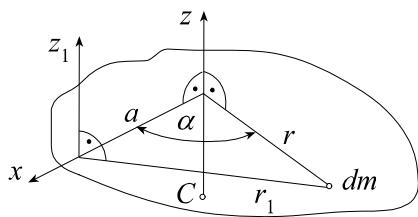
$$J_z = \rho \int_{(V)} r^2 dV. \quad (3.6)$$

Ako u tački O usvojimo koordinatni početak tri Dekartove koordinatne ose x , y i z onda su momenti inercije za te ose

$$J_x = \rho \int_V (y^2 + z^2)dV, \quad J_y = \rho \int_V (x^2 + z^2)dV, \quad J_z = \rho \int_V (y^2 + x^2)dV, \quad (3.7)$$

gde su x , y i z koordinate elementarne mase dm .

3.2.1 Moment inercije za paralelne ose



Slika 3.3:

Često je poznat, na primer iz tehničkih priručnika, moment inercije tela za osu z , koja prolazi kroz centar mase tela C (Slika 3.3), a u dinamičkim jednačinama je potreban moment inercije tela za osu z_1 , koja je paralelna osi z i nalazi se na rastojanju a od nje. Da bi se uspostavila neka veza između momenata inercije za paralelne ose, uoči se u telu elementarna masa dm . Kroz masu se postavi ravan upravna na ose z i z_1 . Elementarna masa i prodori osa z i z_1 kroz tu ravan formiraju trougao sa stranicama dužina a , r i r_1 i uglom α između stranica a i r . Kosinusna teorema za taj trougao daje $r_1^2 = a^2 + r^2 - 2ra \cos \alpha$.

U produžetku stranice dužine a usmeri se osa x , koja se meri od ose z . Sa slike se vidi da je x koordinata mase dm jednaka $r \cos \alpha$, odnosno $x = r \cos \alpha$, pa prethodni izraz postaje $r_1^2 = a^2 + r^2 - 2ax$. Moment inercije tela za osu z_1 je definisan sa

$$J_{z_1} = \int_M r_1^2 dm = a^2 \int_M dm + \int_M r^2 dm - 2a \int_M x dm.$$

Rastojanje centra mase tela, odnosno tačke C , u pravcu x ose je određeno sa

$$x_c = \frac{\int_M x dm}{M},$$

a ono je očigledno jednako nuli (Slika 3.3), pa je poslednji član u prethodnom izrazu jednak nuli. Integral $\int_{(M)} dm$ u izrazu za moment inercije tela za osu z_1 je M , član $\int_{(M)} r^2 dm$ je moment inercije tela u odnosu na osu z . Tako se dobija

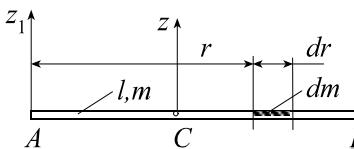
$$J_{z_1} = J_z + a^2 M, \quad (3.8)$$

odnosno Hajgens-Štajnerova¹ teorema:

Moment inercije tela u odnosu na neku osu z_1 jednak je zbiru momenta inercije tela za njoj paralelnu osu z , koja prolazi kroz centar mase C i proizvoda mase tela i kvadrata rastojanja između tih paralelnih osa.

Zbog oblika veze (3.8) momenata inercije za dve paralelne ose sledi da je od momenata inercije za skup svih paralelnih osa najmanji moment inercije za osu koja prolazi kroz centar mase C .

Primer 22 Moment inercije štapa.



Slika 3.4:
štapa m/l onda je $dm = (m/l)dr$, pa se zamenom u (3.5) dobija

Posmatrajmo homogeni štap dužine l i mase m . Traži se moment inercije štapa za osu z_1 koja je normalna na štap i prolazi kroz kraj štapa A (Slika 3.4). Kao element mase usvoji se masa dm dela štapa dužine dr , u kome su tačke približno na istom rastojanju r od ose z_1 . Ako je masa jedinice dužine štapa m/l onda je $dm = (m/l)dr$, pa se zamenom u (3.5) dobija

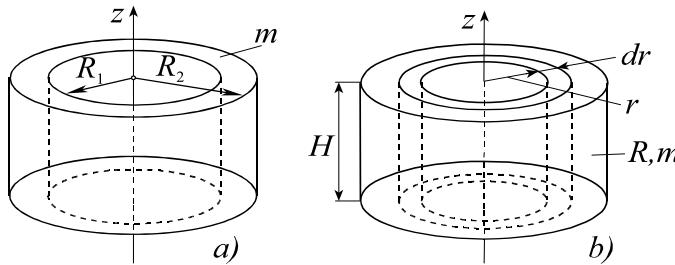
$$J_{z_1} = \int_0^l r^2 \frac{m}{l} dr = \frac{m}{3} l^2.$$

Prema (3.4) poluprečnik inercije štapa za osu z_1 iznosi $i_{z_1} = l/\sqrt{3}$. Prema Hajgens - Štajnerovoj teoremi, momenti inercije za paralelne ose z i z_1 su povezani relacijom (3.8) pa je moment inercije štapa za težišnu osu z

$$J_z = J_{z_1} - m \left(\frac{l}{2} \right)^2 = \frac{m}{12} l^2.$$

Primer 23 Moment inercije kružnog cilindra i diska male debljine.

¹ C. Huygens, 1629 – 1695, J. Steiner, 1796 – 1863.



Slika 3.5:

Posmatrajmo pravi kružni homogeni cilindar poluprečnika osnove R , mase m i visine H . Neka je osa z osa simetrije cilindra. Neka elementarna masa bude tanka cev umutar cilindra debljine dr , čiji su delići na približno

istom rastojanju od ose z (Slika 3.5b). Ako je ρ masa jedinice zapremine tela onda je masa tanke cevi $dm = 2\rho\pi r dr H$, i moment inercije za osu z

$$J_z = \int_0^R r^2 \rho 2\pi r H dr = \frac{1}{2} m R^2 \quad (3.9)$$

jer je masa cilindra $m = \rho R^2 \pi H$. Odgovarajući poluprečnik inercije za osu z iznosi $i_z = R/\sqrt{2}$. Pošto moment inercije kružnog cilindra ne zavisi od veličine visine cilindra H , to ovi rezultati važe i za disk poluprečnika R male debljine.

Primer 24 Moment inercije šupljeg cilindra.

Moment inercije šupljeg cilindra spoljašnjeg poluprečnika R_2 (Slika 3.5a) u odnosu na njegovu poduznu osu simetrije nalazi se kao razlika momenata inercije punih cilindara poluprečnika R_1 i R_2 . Koristeći (3.9) dobija se

$$J_z = \frac{m_2 R_2^2}{2} - \frac{m_1 R_1^2}{2}.$$

Mase punih cilindara su

$$m_1 = \rho H \pi R_1^2, \quad m_2 = \rho H \pi R_2^2,$$

pa je

$$J_z = \frac{\rho \pi H}{2} (R_2^4 - R_1^4) = \frac{\rho \pi H}{2} (R_2^2 + R_1^2)(R_2^2 - R_1^2).$$

Pošto je masa šupljeg cilindra

$$m = m_2 - m_1 = \rho \pi H (R_2^2 - R_1^2)$$

ovaj izraz postaje

$$J_z = \frac{m}{2}(R_2^2 + R_1^2). \quad (3.10)$$

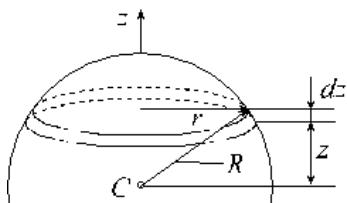
Primer 25 Moment inercije tanke cevi i tanke kružne homogene žice.

Posmatrajmo izuzetno tanku homogenu cev mase m (Slika 3.5a). Traži se moment inercije tela za osu simetrije cevi z . Pošto je cev tanka može se smatrati da je $R_2 \approx R_1 = r$ pa je moment inercije

$$J_z = mr^2.$$

Vidi se da ovaj moment inercije ne zavisi od dužine cevi, pa je to moment inercije i tanke kružne homogene žice poluprečnika r i mase m .

Primer 26 Moment inercije lopte.



Slika 3.6:

Tražimo moment inercije homogene lopte poluprečnika R za osu z koja prolazi kroz težište C lopte (Slika 3.6). Presecanjem lopte sa dve ravni, koje su normalne na osu z , a na međusobnom rastojanju dz , dobija se disk poluprečnika r , gde je $r^2 = R^2 - z^2$. Masa tog diska je $dm = \rho r^2 \pi dz$, gde je ρ masa jedinice zapremine lopte. Moment inercije ovog diska iznosi

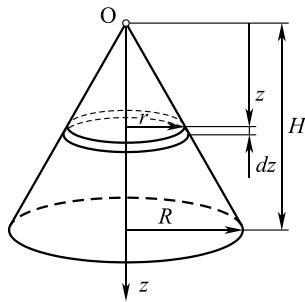
$$dJ_z = \frac{1}{2}r^2 dm = \frac{1}{2}(R^2 - z^2)^2 \rho \pi dz.$$

Integracijom ovog izraza po celoj masi lopte, tj. od $-R$ do $+R$, dobija se moment inercije lopte za osu z

$$J_z = \frac{2}{5}mR^2,$$

gde je $m = 4\rho\pi R^3/3$ masa lopte. Prema (3.9) odgovarajući poluprečnik inercije homogene lopte za osu z iznosi $i_z = R\sqrt{2/5}$.

Primer 27 Moment inercije homogenog kružnog konusa.



Slika 3.7:

Neka je konus visine H , poluprečnika osnove R i od materijala gustine ρ . Tada je masa konusa

$$m = \frac{\rho}{3} R^2 \pi H.$$

Za određivanje momenta inercije konusa u odnosu na osu z on se podeli na tanke diskove debljine dz koji su normalni na osu z . Masa jednog takvog diska je (Slika 3.7)

$$dm = \rho \pi r^2 dz.$$

Sa slike je

$$\frac{r}{R} = \frac{z}{H}, \quad r = z \frac{R}{H},$$

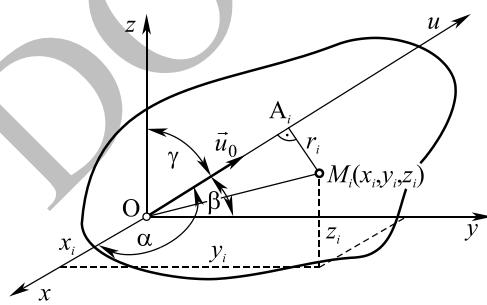
pa je moment inercije jednog elementarnog diska

$$dJ_z = \frac{1}{2} r^2 dm = \frac{1}{2} \left(z \frac{R}{H} \right)^4 \rho \pi dz,$$

odnosno moment inercije konusa

$$J_z = \frac{\rho \pi}{2} \frac{R^4}{H^4} \int_0^H z^4 dz = \frac{\rho \pi}{10} R^4 H = \frac{3}{10} m R^2.$$

3.2.2 Moment inercije tela u odnosu na proizvoljnu osu



Slika 3.8:

U bilo kojoj tački O krutog tela usvoje se tri uzajamno upravne ose x , y i z . Kroz tačku O povuče se prava u koja sa osama x , y i z zaklapa uglove α , β i γ (Slika 3.8). Moment inercije krutog tela u odnosu na osu u je zavisан od uglova α , β i γ . Bilo koja tačka

tela M_i nalazi se na rastojanju r_i od ose u . Moment inercije tela za osu u iznosi

$$J_u = \sum_i m_i r_i^2,$$

gde se suma odnosi na sve tačke tela. Iz pravouglog trougla OM_iA_i sledi da je

$$r_i^2 = \overline{OM_i}^2 - \overline{OA_i}^2.$$

Ako su x_i, y_i i z_i koordinate tačke M_i onda je

$$\overrightarrow{OM_i} = x_i \vec{i} + y_i \vec{j} + z_i \vec{k}, \quad \overline{OM_i}^2 = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2.$$

Pošto je jedinični vektor \vec{u}_0 pravca ose u dat sa

$$\vec{u}_0 = \cos \alpha \vec{i} + \cos \beta \vec{j} + \cos \gamma \vec{k},$$

dobija se

$$\overrightarrow{OA_i} = \overrightarrow{OM_i} \cdot \vec{u}_0 = x_i \cos \alpha + y_i \cos \beta + z_i \cos \gamma.$$

Posle zamene izraza za $\overrightarrow{OM_i}$ i $\overrightarrow{OA_i}$ u izraz za r_i^2 dobija se

$$r_i^2 = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 - (x_i \cos \alpha + y_i \cos \beta + z_i \cos \gamma)^2.$$

Pošto je $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$ izraz za moment inercije J_u postaje

$$\begin{aligned} J_u &= J_x \cos^2 \alpha + J_y \cos^2 \beta + J_z \cos^2 \gamma \\ &\quad - 2J_{yz} \cos \beta \cos \gamma - 2J_{xz} \cos \alpha \cos \gamma - 2J_{xy} \cos \alpha \cos \beta, \end{aligned} \quad (3.11)$$

gde su

$$J_x = \sum_i m_i (y_i^2 + z_i^2), \quad (3.12)$$

$$J_y = \sum_i m_i (z_i^2 + x_i^2), \quad (3.13)$$

$$J_z = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2),$$

momenti inercije tela za ose x, y i z a veličine

$$\begin{aligned} J_{xy} &= \sum m_i x_i y_i, \\ J_{xz} &= \sum m_i x_i z_i, \\ J_{yz} &= \sum m_i y_i z_i, \end{aligned} \quad (3.14)$$

zovu se *centrifugalni momenti inercije* u odnosu na ose xy , xz i yz . Izraz (3.11) daje traženu zavisnost momenta inercije J_u od uglova α , β i γ . U slučaju neprekidno raspoređene mase tela izrazi (3.13) i (3.17) su slični ali je sabiranje po masama tela \sum zamenjeno sa integracijom po masi tela $\int_{(M)}$, koordinate tačke M_i x_i , y_i i z_i su zamenjene sa koordinatama proizvoljne tačke tela x , y i z i m_i je zamenjeno sa elementarnom masom dm tela. Tako su sad momenti inercije za ose x , y i z dati sa

$$J_x = \int_{(M)} (y^2 + z^2) dm, \quad (3.15)$$

$$J_y = \int_{(M)} (z^2 + x^2) dm, \quad (3.16)$$

$$J_z = \int_{(M)} (y^2 + x^2) dm, \quad (3.17)$$

dok se centrifugalni momenti inercije u odnosu na ose xy , xz i yz oblika

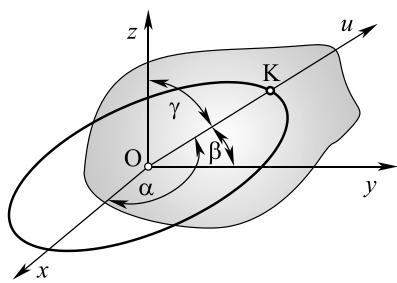
$$J_{xy} = \int_{(M)} xy dm, \quad (3.18)$$

$$J_{xz} = \int_{(M)} xz dm, \quad (3.19)$$

$$J_{yz} = \int_{(M)} yz dm. \quad (3.20)$$

3.2.3 Elipsoid inercije. Glavne ose inercije.

Jednačina (3.11), koja daje vezu između momenta inercije J_u i uglova α , β i γ dopušta jednostavnu geometrijsku interpretaciju.



Slika 3.9:

Kroz proizvoljnu tačku O krutog tela provuku se tri upravne ose x , y i z i osa Ou koja zaklapa uglove α , β i γ sa osama x , y i z (Slika 3.9). Ako je J_u moment inercije tela za osu Ou onda se na tu osu nanese odsečak

$$\overline{OK} = \frac{1}{\sqrt{J_u}}.$$

Ako se prava Ou kreće u prostoru $Oxzy$ stalno prolazeći kroz tačku O onda tačka K zauzima različite položaje u prostoru. Traži se geometrijsko mesto tačaka K .

Tačka K ima koordinate

$$\begin{aligned} x &= \overline{OK} \cos \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sqrt{J_u}}, \\ y &= \overline{OK} \cos \beta = \frac{\cos \beta}{\sqrt{J_u}}, \\ z &= \overline{OK} \cos \gamma = \frac{\cos \gamma}{\sqrt{J_u}}. \end{aligned}$$

Ako se iz ovih izraza izračunaju kosinusi uglova α , β i γ

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= x \sqrt{J_u}, \\ \cos \beta &= y \sqrt{J_u}, \\ \cos \gamma &= z \sqrt{J_u}, \end{aligned}$$

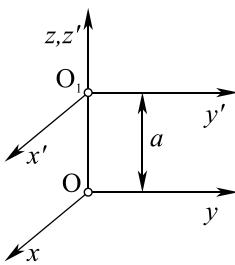
i zamene u (3.11) i tako dobijena jednačina podeli sa J_u dobija se

$$J_x x^2 + J_y y^2 + J_z z^2 - 2J_{yz}yz - 2J_{xz}xz - 2J_{xy}xy = 1, \quad (3.21)$$

a to je geometrijsko mesto tačaka x, z, y krajeva duži OK .

Pošto su momenti inercije i centrifugalni momenti inercije $J_x, J_y, J_z, J_{xy}, J_{xz}, J_{yz}$ konstantne veličine to izraz (3.21) predstavlja jednačinu neke površine. Lako je dokazati da je dobijena površina elipsoid. Iz strukture ovog izraza vidi se da površina nema beskonačno udaljenih tačaka. Ovaj elipsoid naziva se *elipsoid inercije*.

Pošto u jednačini (3.21) nema linearnih članova po x, y i z to je centar elipsoida u tački O . Kada je tačka O centar elipsoida inercije onda se elipsoid inercije (3.21) naziva *centralni elipsoid inercije*.



Slika 3.10:

Ova geometrijska razmatranja važna su zbog toga što nas lako dovode do vrlo važnog pojma o glavnim osama inercije (Slika 3.10).

Poznato je da elipsoid ima tri uzajamno upravne ose simetrije. Takođe je poznato da ako se ove ose uzmu za koordinatne ose tada u jednačini (3.21) otpadaju mešoviti članovi koji sadrže proizvode xy , xz i yz . Ose simetrije elipsoida inercije zovu se *glavne ose inercije*. Isto tako prema navedenoj osobini *glavne ose inercije su one ose za koje su centrifugalni momenti inercije jednaki nuli*, odnosno

$$J_{xz} = J_{yz} = J_{yx} = 0.$$

Ako je elipsoid inercije centralni, to se njegove ose simetrije nazivaju *glavne centralne ose inercije*.

Glavne ose inercije i glavne centralne ose inercije se bitno razlikuju.

Glavna centralna osa inercije je glavna osa inercije u svim svojim tačkama.

Uoči se proizvoljna tačka O tela. Neka je osa Oz glavna osa inercije u tački O . Tada je

$$J_{xz} = J_{yz} = 0. \quad (3.22)$$

Uzmimo sada drugu tačku O_1 na ovoj osi z na udaljenju a od tačke O . U tački O_1 usvojimo koordinatni sistem x' , y' i z' . Sada je

$$\begin{aligned} J_{x'z'} &= \sum m_i x'_i z'_i = \sum m_i x_i (z_i - a) = J_{xz} - a M x_c, \\ J_{y'z'} &= \sum m_i y'_i z'_i = \sum m_i y_i (z_i - a) = J_{yz} - a M y_c, \end{aligned}$$

jer je $x'_i = x_i$, $y'_i = y_i$, $z'_i = z_i - a$, $\sum m_i x_i = M x_c$ i $\sum m_i y_i = M y_c$, gde je M masa celog sistema a x_c i y_c su koordinate centra mase ovog sistema. Ako je osa Oz glavna osa inercije onda važe uslovi (3.22). Ako osa Oz prolazi i kroz centar mase sistema mora biti $x_c = 0$ i $y_c = 0$ pa je konačno i $J_{x'z'} = J_{y'z'} = 0$. Tako je osa z glavna centralna osa inercije i u tački O_1 .

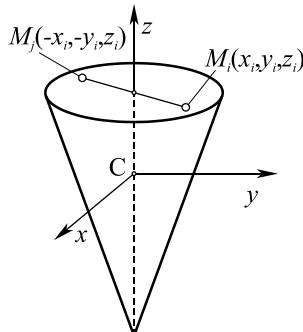
Ako su izabrane koordinatne ose x , y i z glavne ose inercije uslov (3.22) je ispunjen pa se iz (3.11) dobija

$$J = J_u = J_x \cos^2 \alpha + J_y \cos^2 \beta + J_z \cos^2 \gamma. \quad (3.23)$$

Prema tome za određivanje glavnih osa inercije tela u nekoj tački potrebno je izvršiti transformaciju koordinatnih osa tako da se jednačina (3.11) svede na oblik (3.23). Napominje se da se takva opšta transformacija koordinatnih osa ovde ne razmatra. Takva proučavanja vrše se u analitičkoj geometriji.

Navode se još dve važne osobine koje znatno olakšavaju u praktičnim problemima pronalaženje glavnih osa inercije.

1. Ako homogeno telo ima osu simetrije ta osa je glavna centralna osa inercije.



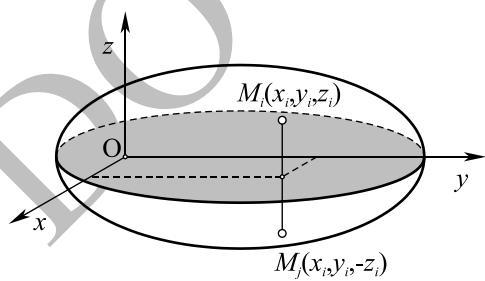
Slika 3.11:

Ako telo ima osu simetrije težište mu se nalazi na toj osi (Slika 3.11). Usmeri se osa Cz po osi simetrije, a ose Cx i Cy normalno na ovu osu. Tada svakoj tački tela $M_i(x_i, y_i, z_i)$ odgovara simetrična tačka tela $M_i(-x_i, -y_i, z_i)$ pa je prema tome

$$\begin{aligned} J_{yz} &= \sum m_i y_i z_i = 0, \\ J_{xz} &= \sum m_i x_i z_i = 0. \end{aligned}$$

Odavde je jasno da je osa Cz glavna centralna osa inercije.

2. Ako homogeno telo ima ravan simetrije onda je osa normalna na tu ravan glavna osa inercije.

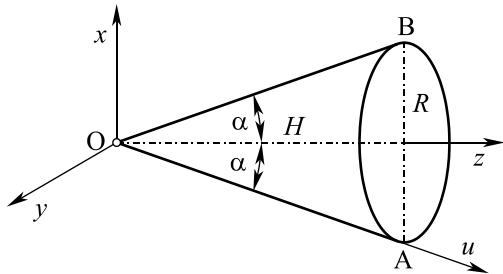


Slika 3.12: $J_{yz} = \sum m_i y_i z_i = 0,$
 $J_{xz} = \sum m_i x_i z_i = 0,$

Na slici 3.12 pokazuje se homogeno telo koje ima ravan simetrije. U proizvoljnoj tački O ove ravni simetrije povuku se ose Ox i Oy i osa Oz normalno na njih. Pošto u ovom slučaju svakoj tački $M_i(x_i, y_i, z_i)$ odgovara simetrična tačka $M_j(x_i, y_i, -z_i)$ u odnosu na ravan simetrije mora biti

pa je jasno Oz glavna osa inercije.

Primer 28 Moment inercije konusa za izvodnicu.



Slika 3.13:

Dati su momenti inercije konusa

$$J_x = J_y = M \frac{12H^2 + 3R^2}{20},$$

$$J_z = \frac{3}{10} MR^2.$$

Naći moment inercije konusa za izvodnicu Ou (Slika 3.13). Sa slike se vidi da je z osa simetrije konusa pa je to glavna centralna osa inercije i zbog toga je $J_{xz} = J_{yz} = 0$. Ravan yOz je ravan simetrije konusa pa je osa x glavna osa inercije i $J_{xy} = 0$. Sada se moment inercije za izvodnicu konusa dobija prema izrazu (3.23)

$$J_u = J_x \cos^2 \alpha_1 + J_y \cos^2 \beta_1 + J_z \cos^2 \gamma_1,$$

gde su α_1, β_1 i γ_1 uglovi koje prava u gradi sa osama x, y i z . Sa slike je

$$\begin{aligned}\cos \alpha_1 &= \cos(90^\circ + \alpha) = -\sin \alpha = -\frac{R}{\sqrt{R^2 + H^2}}, \\ \cos \beta_1 &= \cos 90^\circ = 0, \\ \cos \gamma_1 &= \cos \alpha = \frac{H}{\sqrt{R^2 + H^2}}.\end{aligned}$$

Sada je

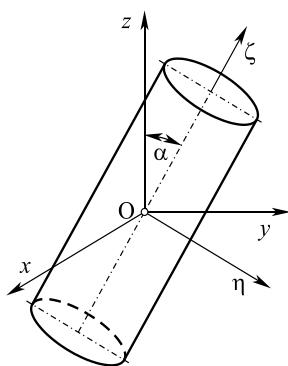
$$J_u = J_x \frac{R^2}{R^2 + H^2} + J_z \frac{H^2}{R^2 + H^2},$$

i konačno

$$J_u = \frac{3}{20} MR^2 \frac{6H^2 + R^2}{H^2 + R^2}.$$

Primer 29 Centrifugalni moment inercije valjka.

Prema slici 3.14 naći momente inercije J_{xz}, J_{yz} i J_{xy} valjka za ose x, y i z . Centar mase valjka se nalazi u koordinatnom početku O . Osa z gradi sa osom simetrije valjka ugao α . Osnova valjka je poluprečnika r , visina mu je $2h$ a masa m . Ose y, z, η i ζ nalaze se u vertikalnoj ravni.



Slika 3.14:

Momenti inercije valjka za njegovu uzdužnu osu ζ i za osu η koja je normalna na uzdužnu osu iznose

$$J_\zeta = m \frac{r^2}{2}, \quad J_\eta = \frac{m}{12} (4h^2 + 3r^2). \quad (3.24)$$

Rotira se koordinatni sistem Oxy oko ose x tako da se osa y poklopi sa osom η a osa z sa osom ζ . Pošto su ose $Ox, O\eta$ i $O\zeta$ glavne centralne ose inercije to je

$$\begin{aligned} J_{x\eta} &= \int_{(M)} x \eta dm = 0, \\ J_{x\zeta} &= \int_{(M)} x \zeta dm = 0, \\ J_{\eta\zeta} &= \int_{(M)} \eta \zeta dm = 0. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Sa slike se vidi da važi sledeća veza koordinata

$$\begin{aligned} x &= x, \\ y &= \eta \cos \alpha + \zeta \sin \alpha, \\ z &= \zeta \cos \alpha - \eta \sin \alpha. \end{aligned}$$

Sada su traženi centrifugalni momenti inercije

$$\begin{aligned} J_{xy} &= \int_{(M)} xy dm = \int_{(M)} x(\eta \cos \alpha + \zeta \sin \alpha) dm = \\ &= (\cos \alpha) \int_{(M)} x \eta dm + (\sin \alpha) \int_{(M)} x \zeta dm = \\ &= J_{x\eta} \cos \alpha + J_{x\zeta} \sin \alpha = 0, \\ J_{xz} &= \int_{(M)} xz dm = (\cos \alpha) \int_{(M)} x \zeta dm - (\sin \alpha) \int_{(M)} x \eta dm \\ &= J_{x\zeta} \cos \alpha - J_{x\eta} \sin \alpha = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 J_{yz} &= \int_M yz dm = \int_M (\eta \cos \alpha + \varsigma \sin \alpha)(\varsigma \cos \alpha - \eta \sin \alpha) dm = \\
 &= J_{\eta\varsigma} \cos 2\alpha + \frac{1}{2}(J_\eta - J_\varsigma) \sin 2\alpha,
 \end{aligned}$$

odnosno koristeći (3.24) i treću jednačinu (3.25) dobija se konačno

$$J_{yz} = \frac{m}{2} \left(\frac{h^2}{3} - \frac{r^2}{4} \right) \sin 2\alpha \quad (3.26)$$

Primer 30 *Moment inercije konusa za osu koja je normalna na osu simetrije.*

Izračunava se moment inercije konusa za osu x koja je normalna na osu simetrije z (Slika 3.15). Konus se izdeli na elementarne delove debljine dz . Ako je masa jednog tog elementarnog dela

$$dM = \rho r^2 \pi dz,$$

onda je po Štajnerovoj teoremi

$$dJ_x = dJ_{x'} + z^2 dM. \quad (3.27)$$

Međutim pošto je

$$dJ_{x'} = \frac{r^2 dM}{4},$$

$$r = \frac{R}{H} z, \quad dr = \frac{R}{H} dz.$$

Korišćenjem prethodnih izraza dobija se

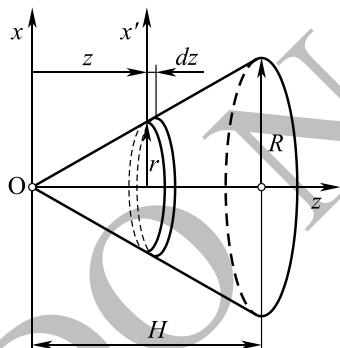
$$dJ_x = \frac{\rho \pi}{4} \frac{R^4}{H^4} z^4 dz + \rho \pi \frac{R^2}{H^2} z^4 dz.$$

Integracijom ovog izraza po promenljivoj z u granicama od $z = 0$ do $z = H$ i uzimajući u obzir da je

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{3M}{R^2 \pi H},$$

gde je V zapremina konusa, odnosno $V = R^2 \pi H / 3$, konačno se dobija

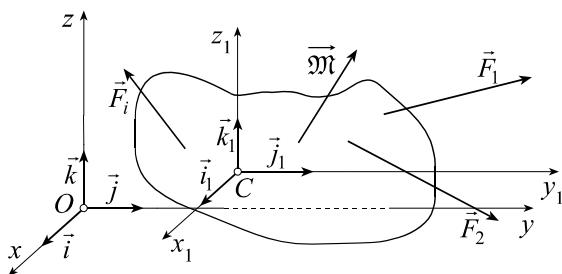
$$J_x = \frac{3M}{20} (R^2 + 4H^2).$$



Slika 3.15:

3.3 Translatorno kretanje krutog tela

Posmatrajmo kretanje tela mase m na koje deluju spoljašnje sile \vec{F}_i , $i = 1, 2, \dots, N$ i jedan spreg $\vec{\mathfrak{M}}$ (Slika 3.16). U kinematici je konstatovano da



Slika 3.16:

tornog kretanja tela primenjuje se zakon o kretanju centra mase tela (2.23)

$$m \vec{a}_c = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i, \quad (3.28)$$

i zakon o promeni momenta količine kretanja tela oko centra mase (2.32)

$$\dot{\vec{L}}_c = \vec{\mathfrak{M}} + \sum_{i=1}^N \vec{M}_c^{\vec{F}_i}. \quad (3.29)$$

Pri translatornom kretanju tela brzine tačaka tela u odnosu na centar mase su jednake nuli, odnosno $\vec{v}_{ir} = \vec{0}$, i izraz (2.17) postaje $\vec{L}_c = \vec{0}$, pa iz (3.29) sledi uslov

$$\vec{\mathfrak{M}} + \sum_{i=1}^N \vec{M}_c^{\vec{F}_i} = \vec{0}. \quad (3.30)$$

Znači, ako u početnom trenutku kretanja sve tačke tela imaju iste brzine $\vec{v}_i = \vec{v}$ i ako je ispunjen uslov (3.30) onda se telo kreće translatorno. Tada je kretanje centra mase, a i svih ostalih tačaka tela, određeno jednačinom (3.28).

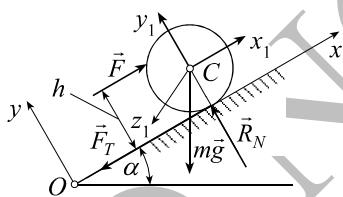
pri translatornom kretanju krutog tela sve tačke tela imaju iste putanje (paralelno pomerene), brzine i ubrzanja. Međutim, kinematika ne daje uslove koje spoljašnje sile i spreg moraju zadovoljiti, da bi kretanje tela bilo translatorno. Odgovor na ovo pitanje daje dinamika.

Za proučavanje transla-

Ako se u centru mase C postavi koordinatni početak Dekartovog koordinatnog sistema $Cx_1y_1z_1$ onda je vektorski uslov (3.30) zamenjen sa tri skalarna uslova da je zbir momenata svih spoljašnjih sila \vec{F}_i i sprega \vec{m} za svaku od osa x_1 , y_1 i z_1 jednak nuli, odnosno

$$\begin{aligned}\mathfrak{m}_{x_1} + \sum_{i=1}^N M_{x_1}^{\vec{F}_i} &= 0, \\ \mathfrak{m}_{y_1} + \sum_{i=1}^N M_{y_1}^{\vec{F}_i} &= 0, \\ \mathfrak{m}_{z_1} + \sum_{i=1}^N M_{z_1}^{\vec{F}_i} &= 0.\end{aligned}\quad (3.31)$$

Primer 31 Homogeni kružni cilindar poluprečnika r i mase m može da se kreće po hrapavoj strmoj ravni nagiba α prema horizontali (Slika 3.17). Koeficijent trenja klizanja je μ . Naći rastojanje h od strme ravni na kome treba da deluje konstantna sila \vec{F} paralelno sa strmom ravnim, ako se cilindar kreće translatorno. Naći i kretanje centra mase cilindra.



Slika 3.17:

Na cilindar deluju spoljašnje sile težina $m\vec{g}$, sila \vec{F} , sila trenja klizanja \vec{F}_T i sila normalne reakcije podloge \vec{R}_N . Izabrane koordinatne ose su nacrtane na slici. Pošto se sve sile nalaze u ravni Cx_1y_1 , momenti tih sila za ose x_1 i y_1 su jednaki nuli pa su dva uslova od tri (3.31) identički zadovoljena. Treći uslov glasi da je zbir momenata svih sila za osu z_1 jednak nuli, odnosno

$$\mathfrak{m}_{z_1} + \sum M_{z_1}^{\vec{F}_i} = F(h - r) + F_T r = 0.$$

Jednačine pravolinijskog kretanja centra mase u ravni Oxy (3.28), a u pravcu x i y osa, glase

$$m\ddot{x}_c = F - F_T - mg \sin \alpha, \quad m\ddot{y}_c = 0 = R_N - mg \cos \alpha,$$

jer se centar mase ne kreće u pravcu y ose. Ako se cilindar kreće bez obrtanja onda se on mora klizati po strmoj ravni. To znači da je sila trenja

dostigla svoju graničnu vrednost, odnosno $F_T = \mu R_N$, pa se rešavanjem prethodnih jednačina nalazi

$$\begin{aligned} R_N &= mg \cos \alpha, \quad F_T = \mu mg \cos \alpha, \\ h &= r \left(1 - \frac{mg}{F} \mu \cos \alpha \right), \\ \ddot{x}_c &= \frac{F}{m} - g(\sin \alpha + \mu \cos \alpha). \end{aligned}$$

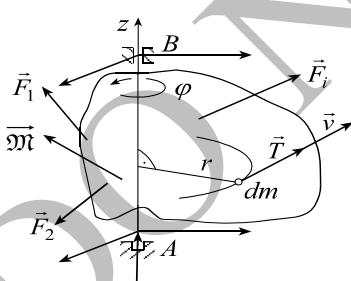
Pošto je desna strana poslednje jednačine konstantna, ona se jednostavno integrali dajući zakon kretanja centra mase

$$x_c = \left[\frac{F}{m} - g(\sin \alpha + \mu \cos \alpha) \right] \frac{t^2}{2} + C_1 t + C_2,$$

gde su C_1 i C_2 integracione konstante, koje se određuju iz početnih uslova kretanja.

3.4 Obrtanje krutog tela oko nepomične ose

3.4.1 Diferencijalna jednačina obrtanja tela oko nepomične ose



Slika 3.18:

Posmatrajmo kruto telo koje može da se obrće oko nepomične ose z i na koje deluju spoljašnje sile \vec{F}_i i jedan spreg \vec{m} (Slika 3.18). U spoljašnje sile se uključuju i reakcije cilindričnog ležišta B i potpornog ležišta A . Obrtanje oko nepomične ose ima jedan stepen slobode kretanja, pa je kretanje potpuno određeno uglom obrtanja φ tela u odnosu na neku osnovnu ravan. Zato je kretanje potpuno određeno samo jednom skalarnom jednačinom opštih zakona dinamike. To je zakon (2.31) o promeni momenta količine kretanja tela za osu z

$$\dot{L}_z = \sum_{i=1}^N M_z^{\vec{F}_i} + \vec{m}_z, \quad (3.32)$$

gde je \mathfrak{M}_z projekcija vektora sprega $\vec{\mathfrak{M}}$ na osu z . Vidi se sa slike 3.18 da reakcije ležišta u tačkama A i B ne ulaze u ove jednačine, jer nemaju momente za osu z .

Uočimo u telu elementarnu masu dm na rastojanju r od ose obrtanja. Pri obrtanju tela oko ose z , element dm se kreće po krugu poluprečnika r , pa je njegova brzina $v = r\dot{\varphi}$ i pada u pravac tangente na taj krug. U istom pravcu i smeru sa brzinom je i elementarna količina kretanja $dK = r\dot{\varphi}dm$. Moment za osu z ove količine kretanja iznosi $dL_z = rdK$, odnosno $dL_z = \dot{\varphi}r^2dm$. Integracijom ovog izraza po celoj masi tela, a pošto je ugaona brzina $\dot{\varphi}$ ista za sve tačke tela, dobija se moment količine kretanja tela za osu z

$$L_z = J_z\dot{\varphi}, \quad (3.33)$$

gde je uočena struktura J_z (3.5) momenta inercije tela za osu z . Pošto osa z zauzima uvek isti položaj u odnosu na telo, u izrazu (3.33) moment inercije za osu z je konstantan, pa zamenom ovog izraza u (3.32), sledi diferencijalna jednačina obrtanja krutog tela oko nepomične ose z

$$J_z\ddot{\varphi} = \sum_{i=1}^N M_z^{\vec{F}_i} + \mathfrak{M}_z. \quad (3.34)$$

Ova jednačina predstavlja traženu diferencijalnu jednačinu obrtanja krutog tela oko nepomične ose z . Poređenjem ove jednačine sa drugim Njutnovim zakonom za pravolinijsko kretanje materijalne tačke $m\ddot{x} = F$, zaključuje se da moment inercije tela za osu z predstavlja meru inertnosti obrtanja tela oko te ose. Ako je desna strana jednačine (3.34) jednaka nuli, iz nje sledi da se telo obrće sa konstantnom ugaonom brzinom $\dot{\varphi}$, odnosno po inerciji.

Pomoću ove jednačine obrtanja krutog tela oko nepomične ose, moguće je rešavati sledeće zadatke:

- Za zadat zakon kretanja tela $\varphi = f(t)$ i zadat moment inercije J_z moguće je naći moment spoljašnjih sila \vec{F}_i i projekciju sprega \mathfrak{M}_z na osu z koji deluju na telo obezbeđujući telu obrtanje po zadatom zakonu

$$\sum_{i=1}^N M_z^{\vec{F}_i} + \mathfrak{M}_z = J_z\ddot{\varphi}.$$

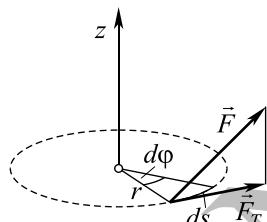
2. Za zadat glavni moment spoljašnjih sila za osu z , zadatu projekciju sprega \mathfrak{M}_z i za zadate početne uslove kretanja $\varphi = \varphi_0$ i $\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0$ i poznat moment inercije J_z moguće je naći integracijom zakon obrtanja $\varphi = \varphi(t)$.
3. Za izmereno $\ddot{\varphi}$ i zadato $\sum_{i=1}^N M_z^{\vec{F}_i} + \mathfrak{M}_z$ moguće je eksperimentalno naći moment inercije tela J_z .

Prilikom obrtanja krutog tela oko nepomične ose važi zakon o promeni kinetičke energije tela ili zakon o održanju totalne mehaničke energije, ako je moguće izračunati rad spoljašnjih sila i sprega $\vec{\mathfrak{M}}$. U ovim zakonima kinetička energija tela ima poseban oblik. Kinetička energija elementarne mase dm (Slika 3.18) iznosi

$$dE_k = \frac{1}{2}dmv^2 = \frac{1}{2}dmr^2\dot{\varphi}^2,$$

pa se integracijom ovog izraza po masi tela dobija

$$E_k = \frac{1}{2}J_z\dot{\varphi}^2, \quad (3.35)$$



odnosno kinetička energija tela pri njegovom obrtanju oko nepomične ose z . Elementarni rad dA sile \vec{F} na elementarnom pomeranju ds iznosi

Slika 3.19:

$$dA = F_T ds,$$

gde je F_T projekcija sile na pravac tangente putanje pokretne tačke a ds pređeni elementarni luk po njenoj putanji. Kako je $ds = rd\varphi$ (Slika 3.19) to sledi da je

$$dA = F_T rd\varphi = M_z d\varphi, \quad (3.36)$$

gde je M_z moment sile \vec{F} za osu z . Ako se jednačina (3.34) pomnoži sa $\dot{\varphi}$ dobija se

$$J_z \dot{\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = \sum_{i=1}^N M_z^{\vec{F}_i} \frac{d\varphi}{dt} + \mathfrak{M}_z \frac{d\varphi}{dt}.$$

Množenjem ove jednačine sa dt , pošto je J_z konstantno, dobija se

$$d\left(\frac{1}{2}J_z\dot{\varphi}^2\right) = \sum_{i=1}^N dA_i + dA_{M_z},$$

gde je $dA_i = M_z^{\vec{F}_i} d\varphi$ elementarni rad sile \vec{F}_i i $dA_{M_z} = \vec{M}_z d\varphi$ elementarni rad sprega \vec{M} .

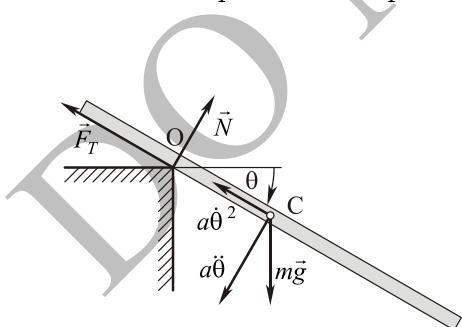
Integracijom ove jednačine u granicama od t_0 do t , odnosno u granicama od $\dot{\varphi}_0 = \omega_0$ do $\dot{\varphi} = \omega$ i od φ_0 do φ dobija se

$$\frac{1}{2}J_z(\omega^2 - \omega_0^2) = A_{\varphi_0\varphi}^{\vec{F}} + A_{\varphi_0\varphi}^{\vec{M}},$$

gde je $A_{\varphi_0\varphi}^{\vec{F}}$ rad sile \vec{F} a $A_{\varphi_0\varphi}^{\vec{M}}$ rad sprega \vec{M} za obrtanje od φ_0 do φ .

Ova jednačina izražava teoremu o promeni kinetičke energije kružnog tela pri njegovom obrtanju oko nepomične ose. *Promena kinetičke energije kružnog tela koje se obrće oko nepomične ose u nekom vremenskom intervalu jednak je radu spoljašnjih sile \vec{F}_i i sprega \vec{M} koji deluju na telo u istom vremenskom intervalu.*

Primer 32 Teški homogeni štap mase m i dužine l postavljen je na ivicu stola tako da mu je težište udaljeno od ivice za dužinu a . Štap se pusti iz mira i horizontalnog položaja da se obrće oko ivice stola. Ako je koeficijent trenja klizanja između štapa i stola μ , odrediti ugao između štapa i horizontale pri kome će početi klizanje štapa (Slika 3.20).



Slika 3.20:

Primenom zakona o kretanju središta sistema u prirodnom koordinatnom sistemu dobija se

$$\begin{aligned} ma\ddot{\theta} &= mg \cos \theta - N, \\ ma\dot{\theta}^2 &= F_T - mg \sin \theta. \end{aligned}$$

Diferencijalna jednačina obrtanja štapa oko tačke O daje

$$J_O\ddot{\theta} = mga \cos \theta.$$

Pošto je $J_O = ml^2/12 + ma^2$, to prethodna jednačina postaje

$$\ddot{\theta} = \frac{12ag}{l^2 + 12a^2} \cos \theta.$$

Pošto je $\ddot{\theta} = d\dot{\theta}/dt$ to je $\ddot{\theta} = (d\dot{\theta}/d\theta)(d\theta/dt)$, odnosno $\ddot{\theta} = \dot{\theta}(d\dot{\theta}/d\theta)$ pa poslednja jednačina dobija oblik

$$\dot{\theta} d\dot{\theta} = \frac{12ag}{l^2 + 12a^2} \cos \theta d\theta,$$

i posle integracije

$$\dot{\theta}^2 = \frac{24ag}{l^2 + 12a^2} \sin \theta + C.$$

Pošto je u početnom trenutku vremena za $t = 0$ $\theta = 0$ i $\dot{\theta} = 0$ vrednost integracione konstante je $C = 0$. Klizanje štapa u tački O nastaje kada bude $F_T = \mu N$. Ako se u ovu relaciju zamene dobijene vrednosti za F_T i N preko izračunatih veličina $\dot{\theta}$ i $\ddot{\theta}$ dobija se

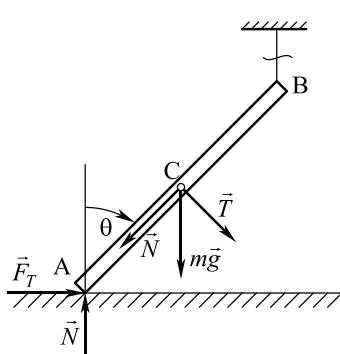
$$(36a^2 + l^2) \sin \theta = \mu l^2 \cos \theta,$$

pa je traženi kritični ugao θ_{kr}

$$\tan \theta_{kr} = \frac{\mu l^2}{36a^2 + l^2}.$$

Primer 33 Jedan kraj homogenog štapa dužine l i težine $G = mg$ oslanja se na hrapavu horizontalnu ravan (Slika 3.21). Štap se održava u ravnotežnom položaju pod uglom $\theta_0 = 30^\circ$ prema vertikalnom pravcu pomoću užeta koje je vezano za kraj štapa B . Ako nakon presecanja užeta štap započne obrtanje oko tačke A odrediti:

1. Ugaono ubrzanje štapa odmah posle presecanja užeta,
2. Normalnu reakciju i silu trenja u tački A odmah posle presecanja užeta,
3. Koliki je koeficijent klizanja po presecanju užeta.



Slika 3.21:

Diferencijalna jednačina obrtanja štapa oko tačke A glasi

$$J_A \ddot{\theta} = \frac{mgl}{2} \sin \theta, \quad (a)$$

dok su diferencijalne jednačine kretanja centra mase štapa u prirodnom koordinatnom sistemu oblika

$$m \frac{l}{2} \ddot{\theta} = mg \sin \theta - N \sin \theta + F_T \cos \theta,$$

$$m \frac{l}{2} \dot{\theta}^2 = mg \cos \theta - N \cos \theta - F_T \sin \theta \quad (b)$$

Pošto je u početnom trenutku vremena za $t = 0$, $\theta_0 = 0$, jer štap polazi iz stanja mirovanja a iz relacije (a) za $\theta_0 = 30^\circ$ dobija se $\ddot{\theta}_0 = 3g/4l$ i iz (b) sledi

$$N = \frac{13mg}{16}, \quad F_T = mg \frac{3\sqrt{3}}{16}.$$

Pošto je $F_T < \mu N$, odgovarajući koeficijent trenja klizanja iznosi

$$\mu > 0.3997.$$

Primer 34 Homogeni štap AB dužine l i težine P vezan je zglobno za horizontalan štap CA koji je kruto spojen za vertikalno vratilo CD koje se obrće konstantnom ugaonom brzinom ω . Odrediti silu u užetu koje održava štap AB pod ugлом α prema vertikali, ako je ugao DBA = 90° i dužina štapa CA = a (Slika 3.22).

Posmatra se elementarni deo mase dm štapa AB (Slika 3.22). Pošto je obrtanje sa konstantnom ugaonom brzinom ω to je elementarna inercijalna sila paralelna sa štapom CA i iznosi

$$dF_N^i = (a + \xi \sin \alpha) \omega^2 dm.$$

Moment ove sile za tačku A ima vrednost

$$dM_A^i = dF_N^i \xi \cos \alpha,$$

$$dM_A^i = \rho \xi \cos \alpha (a + \xi \sin \alpha) \omega^2 d\xi,$$

gde je $dm = \rho d\xi$ a ρ gustina po jedinici dužine materijala štapa. Moment inercijalnih sila za tačku A glasi

$$M_{gA}^i = \rho \omega^2 \cos \alpha \int_0^l (a\xi + \xi^2 \sin \alpha) d\xi.$$

Posle integracije dobija se

$$M_{gA}^i = \rho \omega^2 \cos \alpha \left(a \frac{l^2}{2} + \frac{l^3}{3} \sin \alpha \right).$$

Po Dalamberovom principu zbir momenata svih spoljašnjih i inercijalnih sila mora biti za tačku A jednak nuli, pa je

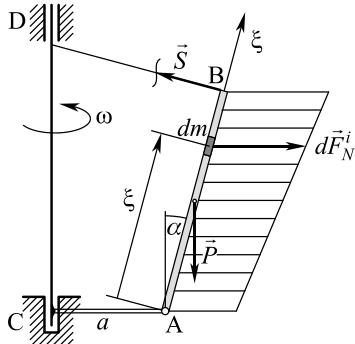
$$\sum M_A = M_{gA}^i + P \frac{l}{2} \sin \alpha - Sl = 0.$$

Iz ovog izraza sledi da je

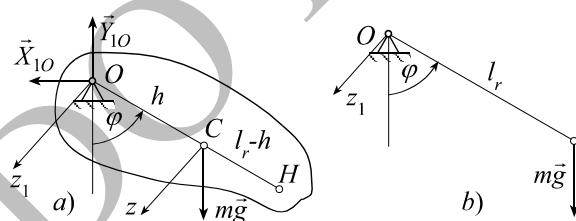
$$S = \frac{P}{2} \left[\sin \alpha + \frac{\omega^2}{g} \left(a \cos \alpha + \frac{l}{3} \sin 2\alpha \right) \right],$$

jer je $\rho l = M = P/g$ masa štapa.

Slika 3.22:



3.4.2 Fizičko klatno



Slika 3.23:

Fizičkim klatnom naziva se kruto telo proizvoljnog oblika koje može da se obrće oko horizontalne ose z_1 koja ne prolazi kroz težište tela i koje se kreće samo pod dejstvom sile zemljine teže. Kao kod svakog tela koje se obrće oko nepomične ose, položaj fizičkog klatna je u

potpunosti određen uglom obrtanja φ u ravni koja je normalna na osu z_1 (Slika 3.23a). Ako se klatno malo izvede iz vertikalnog ravnotežnog položaja ono vrši oscilacije oko tog položaja.

Primenivši diferencijalnu jednačinu obrtanja tela oko nepomične ose dobija se

$$J_{z_1} \ddot{\varphi} = -Mgh \sin \varphi,$$

gde je J_{z_1} moment inercije fizičkog klatna za horizontalnu osu z_1 kroz tačku O .

Ako se posmatraju male oscilacije klatna, odnosno ako je φ malo tokom kretanja važi aproksimacija da je $\sin \varphi \approx \varphi$ pa prethodna jednačina postaje

$$\ddot{\varphi} + \omega^2 \varphi = 0, \quad (3.37)$$

gde je

$$\omega^2 = \frac{Mgh}{J_{z_1}},$$

kvadrat kružne frekvencije slobodnih oscilacija fizičkog klatna.

Opšte rešenje diferencijalne jednačine (3.37) glasi

$$\varphi = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t,$$

gde su C_1 i C_2 integracione konstante. Ako je u početnom trenutku vremena $t = 0$ klatno bilo zaokrenuto za ugao $\varphi = \varphi_0$ i pušteno bez početne brzine tada je $C_1 = \varphi_0$ i $C_2 = 0$ pa se dobija zakon kretanja fizičkog klatna

$$\varphi = \varphi_0 \cos \omega t.$$

Odavde se vidi da fizičko klatno pod dejstvom sile zemljine teže, bez uzimanja u obzir otpora vazduha tom kretanju i pri malim kretanjima oko položaja ravnoteže vrši harmonijske oscilacije. Period tog oscilovanja fizičkog klatna iznosi

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{J_{z_1}}{Mgh}}. \quad (3.38)$$

Redukovana dužina fizičkog klatna

Upoređivanjem diferencijalne jednačine fizičkog klatna sa diferencijalnom jednačinom matematičkog klatna (vidi (1.90)) vidi se da su zakoni kretanja fizičkog i matematičkog klatna isti pod uslovom da su im koeficijenti u diferencijalnim jednačinama jednaki i da su započeli kretanje

sa istim početnim uslovima. Prema tome, vidi se da svakom fizičkom klatnu odgovara matematičko klatno određene dužine koje se kreće isto kao i dato fizičko klatno. Dužinu tog ekvivalentnog klatna određujemo izjednačavanjem koeficijenata u odgovarajućim diferencijalnim jednačinama.

Kako je kod matematičkog klatna

$$\omega^2 = \frac{g}{l},$$

a kod fizičkog

$$\omega^2 = \frac{Mgh}{J_{z_1}},$$

to da bi se oba klatna kretala istovetno mora biti

$$\frac{g}{l_r} = \frac{Mgh}{J_{z_1}}.$$

Odavde je

$$l_r = \frac{J_{z_1}}{Mh}. \quad (3.39)$$

Ova veličina naziva se *redukovana dužina fizičkog klatna*.

Tačka koja se nalazi na rastojanju $\overline{OH} = l_r$ od obrtne ose, zove se *centar oscilacija fizičkog klatna* ili *Hajgensov centar*.

Ako je J_z moment inercije klatna u odnosu na osu z koja je paralelna sa osom vešanja, a prolazi kroz njegovo težište, onda je po Štajnerovoj teoremi veza momenata inercije data sa

$$J_{z_1} = J_z + Mh^2,$$

pa je

$$l_r = h + \frac{J_z}{Mh}. \quad (3.40)$$

Odavde sledi da je uvek

$$l_r > h,$$

odnosno da je težište klatna C uvek između tačke vešanja klatna O i centra oscilacija H . Hajgensov centar ima dve interesantne osobine.

1. Tačke O i H mogu da izmene mesta, odnosno ako klatno obesimo da osciluje oko ose kroz tačku H onda će centar oscilacija fizičkog klatna biti u tački O .

Iz (3.40) sledi da je

$$l_r - h = \frac{J_z}{Mh}.$$

Međutim sa slike se vidi da je $l_r - h = b$, pa je prema tome

$$hb = \frac{J_z}{M}.$$

Ako se uvede poluprečnik inercije $J_z = i_z^2 M$ dobija se

$$hb = i_z^2,$$

odnosno

$$i_z = \sqrt{hb}.$$

Ako je tačka vešanja fizičkog klatna tačka H onda je redukovana dužina fizičkog klatna

$$l_r = \frac{J_H}{Mb} = \frac{J_z + Mb^2}{Mb} = b + \frac{i_z^2}{b}.$$

Pošto je $hb = i_z^2$ ovaj izraz postaje

$$l_r = b + h,$$

što je isto kao kad je tačka vešanja bila u tački O .

Na ovoj osobini zasnovan je poznati eksperiment za određivanje ubrzanja g zemljine teže pomoću *Katerovog klatna*.

2. Dodavanjem materijalne tačke proizvoljne mase m u hajgensov centar H period fizičkog klatna se ne menja.

Postavi se tačka proizvoljne mase m na spojnu pravu OC klatna a na udaljenju x od tačke vešanja O . Diferencijalna jednačina kretanja sistema klatno plus materijalna tačka glasi

$$(J_{z_1} + mx^2)\ddot{\varphi} = -(Mgh + mgx) \sin \varphi.$$

Za male oscilacije ova jednačina postaje

$$\ddot{\varphi} + \omega^2 \varphi = 0,$$

gde je kvadrat kružne frekvencije

$$\omega^2 = \frac{g(Mh + mx)}{J_{z_1} + mx^2},$$

a period

$$T = T_0 \sqrt{\frac{1 + \frac{mx^2}{J_{z_1}}}{1 + \frac{mx}{Mh}}}.$$

Uvođenjem oznake $T_O = 2\pi\sqrt{J_{z_1}/Mgh}$, gde je T_O period oscilacija klatna bez dodatne mase m i izjednačavanjem izraza $(1 + \frac{mx^2}{J_O})/(1 + \frac{mx}{Mh})$ sa jedinicom dobija se da je

$$x = \frac{J_{z_1}}{Mh}.$$

Međutim, ovaj izraz je identičan sa izrazom za redukovani dužinu fizičkog klatna (3.39), pa je

$$x = l_r.$$

Znači ako se u tački H , odnosno u centru oscilovanja fizičkog klatna, doda proizvoljna masa m , period oscilovanja se ne menja.

Primer 35 Ravna figura obrće se proizvoljno oko nepomične ose. Naći rezultantu inercijalnih sila (Slika 3.24).

Neka se ploča obrće oko ose koja je normalna na ravan hartije. Neka je $\overline{OC} = h$ rastojanje težišta ploče od ose O . Po definiciji je glavni vektor inercijalnih sila oblika

$$\vec{F}_g^i = \sum (-m_i \vec{a}_i) = -M \vec{a}_c.$$

Ubrzanje centra mase \vec{a}_c ima dve komponente, tangencijalnu i normalnu

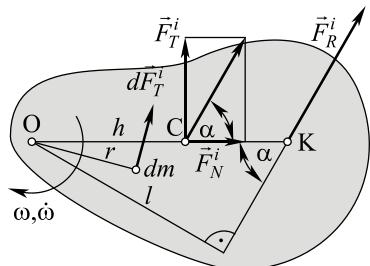
$$a_T = h\dot{\omega}, \quad a_N = h\omega^2.$$

Pod pretpostavkom da je smer ugaonog ubrzanja $\dot{\omega}$, kao što je na slici označeno, tangencijalna i normalna komponenta i intenzitet inercijalne sile imaju oblik

$$F_{gT}^i = Mh\dot{\omega}, \quad F_{gN}^i = Mh\omega^2, \quad F_g^i = \sqrt{(F_{gT}^i)^2 + (F_{gN}^i)^2} = Mh\sqrt{\dot{\omega}^2 + \omega^4}.$$

Pravac glavnog vektora sa pravcem OK gradi ugao α koji je određen sa

$$\tan \alpha = \frac{F_{gT}^i}{F_{gN}^i} = \frac{\dot{\omega}}{\omega^2}.$$



Slika 3.24:
U cilju određivanja glavnog momenta inercijalnih sila, uoči se prozvoljna tačka tela mase dm koja se nalazi na rastojanju r od tačke obrtanja O . Za tačku O moment ima samo tangencijalnu komponentu inercijalne sile pa je

$$d\mathfrak{M}_O^i = rdF_{gT}^i = rr\dot{\omega}dm.$$

Ukupni moment inercijalnih sila iznosi

$$\mathfrak{M}_O^i = \left(\int_{(M)} r^2 dm \right) \dot{\omega} = J_O \dot{\omega},$$

gde je J_O moment inercije ploče za tačku O , ili preciznije za osu kroz tačku O koja je normalna na ravan ploče. Za rezultantu inercijalnih sila važi da je

$$lF_g^i = |\mathfrak{M}_O^i|,$$

pa je konačno

$$l = \frac{J_O \dot{\omega}}{Mh\sqrt{\dot{\omega}^2 + \omega^4}}.$$

Mesto određeno dužinom l određuje se presekom pravca rezultante inercijalnih sila sa normalom na njen pravac iz tačke O , pa je sa slike

$$l = \overline{OK} \sin \alpha, \quad \overline{OK} = \frac{l}{\sin \alpha} = \frac{l\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}}{\tan \alpha}.$$

Ako se ovde zameni vrednost za l i $\tan \alpha$ dobija se

$$\overline{OK} = \frac{J_O}{Mh} = l_r.$$

Konačno zaključujemo, rezultanta inercijalnih sila ploče prolazi kroz centar oscilovanja fizičkog klatna koje je na rastojanju od tačke obrtanja za redukovana dužina fizičkog klatna l_r .

3.4.3 Eksperimentalno određivanje momenata inercije

Matematičko izračunavanje momenata inercije homogenih tela nepravilnog geometrijskog oblika je vrlo teško i složeno. Međutim ako je telo nehomogeno, odnosno ako mu se gustina menja od tačke do tačke izračunavanje preko integrala postaje nemoguće ako nije poznat zakon promene gustine sa promenom položaja u telu. U tim slučajevima momenti inercije se obično određuju eksperimentalno. Za eksperimentalno određivanje momenata inercije ima nekoliko načina. Svi ovi načini su zasnovani na posmatranju tela koje se obrće oko nepomične ose.

1. Metoda oscilacije klatna. Ova metoda zasniva se na korišćenju izraza (3.38) za period malih oscilacija klatna. Optino telo se stavi na obrtnu osu tako da može da osciliše oko nje kao fizičko klatno.

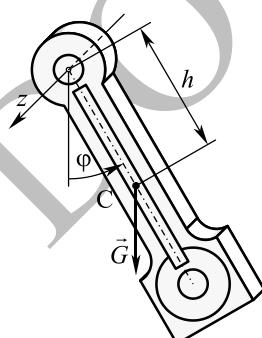
Mereći period oscilacija tela, pod uslovom da nam je poznat položaj težišta tela u odnosu na osu (Slika 3.25) dobija se

$$J_{Oz} = \frac{GhT^2}{4\pi^2},$$

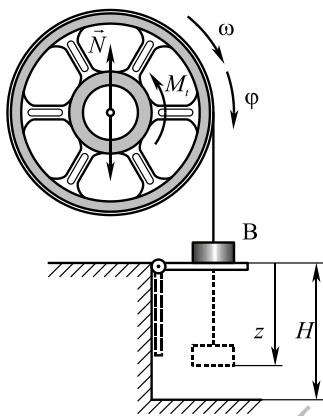
gde je G sila zemljine teže klatna. Ako je osa Oz_1 paralelna osi Oz i prolazi kroz težište tela onda je moment inercije za nju

Slika 3.25:

$$J_{Oz_1} = J_{Oz} - \frac{G}{g}h^2.$$



2. Metoda spuštanja tereta. Da bi se odredio moment inercije zamjaca poluprečnika R u odnosu prema njegovoj težišnoj osi Ox , obavije se oko njegovog obima tanka žica (Slika 3.26) za koju se učvrsti teg B , težine G_1 . Ovaj teret se stavi na horizontalnu ploču. Oslobodivši teret ove veze zamajac se počne obrnati. Odredi se vreme T_1 spuštanja tereta G_1 sa zadate visine H . Isti postupak se ponovi sa drugim teretom G_2 i nađe se njegovo vreme spuštanja T_2 . Vrše se dva merenja da bi se eliminisao uticaj trenja u ležištima.



Slika 3.26:

Prepostavi se da su momenti trenja u ležištima konstantni i da ne zavise od težine tega koji visi na užetu. Masa užeta se zanemaruje. Sistem se sastoji iz zamajca, užeta i tega. Od spoljašnjih sila u sistemu imamo težinu zamajca koja deluje u njegovom središtu, otpor ležišta N , konstantni otpor trenja koji deluje i vidu sprega na zamajac i težinu tega koji izaziva kretanje. Sada se može primeniti zakon o promeni kinetičke energije sistema, jer su sve sile koje vrše rad konstantne pa im se rad može izračunati.

Težina tega i moment trenja u ležištu vrše radove

$$\begin{aligned} A(G_1) &= G_1 z, \\ A(M_t) &= -M_t \varphi. \end{aligned}$$

Pošto je pomeranje tereta G_1 u vezi sa uglom obrtanja zamajca dobija se

$$z = R\varphi, \quad (\text{a})$$

pa je rad sila sistema

$$A = G_1 z - M_t \frac{z}{R}.$$

Pošto je ugaona brzina zamajca $\omega = \dot{\varphi} = \dot{z}/R$, kinetička energija zamajca ima oblik

$$E_{k1} = \frac{J}{2}\omega^2 = \frac{J}{2R^2}\dot{z}^2,$$

a tereta G_1

$$E_{k2} = \frac{G_1}{2g} \dot{z}^2.$$

Pošto je sistem u početnom trenutku bio u miru to je $E_k(0) = 0$ pa se iz zakona o promeni kinetičke energije dobija

$$\frac{1}{2} \left(\frac{J}{R^2} + \frac{G_1}{g} \right) \dot{z}^2 = \left(G_1 - \frac{M_t}{R} \right) z,$$

odnosno

$$\dot{z} = \lambda \sqrt{z},$$

gde je

$$\lambda = \sqrt{\frac{2 \left(G_1 - \frac{M_t}{R} \right)}{\left(\frac{J}{R^2} + \frac{G_1}{g} \right)}}.$$

Razdvajanjem promenljivih dobija se

$$\frac{dz}{\sqrt{z}} = \lambda dt,$$

a posle integracije

$$\sqrt{z} = \frac{\lambda}{2} t + C,$$

gde je C konstanta integracije. Pošto je za $t = 0$, $z = 0$ to je $C = 0$ pa se dobija

$$z = \frac{\lambda^2}{4} t^2.$$

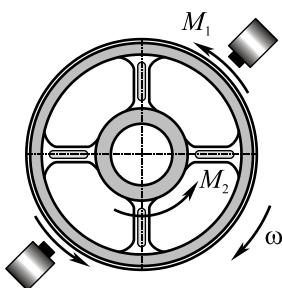
Kada je $t = T_1$ za G_1 i $t = T_2$ za G_2 onda je $z = H$ pa je

$$H = \frac{\left(G_1 - \frac{M_t}{R} \right)}{2 \left(\frac{J}{R^2} + \frac{G_1}{g} \right)} T_1^2, \quad H = \frac{\left(G_2 - \frac{M_t}{R} \right)}{2 \left(\frac{J}{R^2} + \frac{G_2}{g} \right)} T_2^2. \quad (\text{b})$$

Iz ove dve jednačine (b) nalaze se dve vrednosti za moment trenja M_t . Njihovim izjednačavanjem nalazi se moment inercije zamajca J

$$J = R^2 \frac{\frac{1}{2H} (G_1 - G_2) - \frac{1}{g} \left(\frac{G_1}{T_1^2} - \frac{G_2}{T_2^2} \right)}{\frac{1}{T_1^2} - \frac{1}{T_2^2}}$$

Primer 36 Elektromagnetna kočnica.



Slika 3.27:

Za brza kočenja zamajca primjenjuje se elektromagnetna kočnica. Ona se sastoji od dva dijametalno položena pola sa navojcima na njima, koji se napajaju konstantnom strujom. Struje indukovane u masi zamajca rađaju moment kočenja M_1 , koji je proporcionalan brzini v na obimu zamajca: $M_1 = kv$, gde je k koeficijent koji zavisi od magnetnog toka i dimenzija zamajca. Moment trenja (Slika 3.27) M_2 u ležištu može se smatrati konstantnim. D je prečnik zamajca, J je moment inercije zamajca u odnosu na osu obrtanja. U trenutku kada je uključena kočnica zamajac se obrtao ugaonom brzinom ω_0 .

Odrediti vremenski interval posle kog se zamajac zaustavlja.

Od momenta spoljašnjih sila koje deluju na zamajac imamo moment trenja u ležištu zamajca M_2 i moment kočenja M_1 koji zamajcu saopštava kočnica. Pošto oba momenta koče zamajac biće osnovna diferencijalna jednačina obrtanja zamajca

$$J \frac{d\omega}{dt} = -M_1 - M_2.$$

Kako je po uslovu zadatka $M_1 = kv = kD\omega/2$, jer je obimna brzina $v = D\omega/2$ gornja jednačina postaje

$$J \frac{d\omega}{dt} = -\frac{kD\omega}{2} - M_2.$$

Razdvajanjem promenljivih dobija se

$$\frac{Jd\omega}{kD\omega + 2M_2} = -\frac{dt}{2},$$

Odavde, posle integracije dobija se

$$\frac{J}{kD} \ln(kD\omega + 2M_2) = -\frac{t}{2} + C,$$

gde je C konstanta integracije. Iz početnih uslova da je za $t = 0$, $\omega = \omega_0$ dobija se

$$C = \frac{J}{kD} \ln(kD\omega_0 + 2M_2),$$

i konačno rešenje problema

$$t = \frac{2J}{kD} \ln \frac{kD\omega_0 + 2M_2}{kD\omega + 2M_2}.$$

Kada se zamajac zaustavi tada je $\omega = 0$, pa je vreme kočenja zamajca T

$$T = \frac{2J}{kD} \ln \left(\frac{kD\omega_0}{2M_2} + 1 \right).$$

Primer 37 Određivanje momenta trenja u ležistima.

Radi određivanja momenta trenja u ležistima vratila M_t učvrste se za vratilo zamajci čiji je moment inercije u odnosu na podužnu osu vratila poznat i iznosi J . Zamajcima se da početna ugaona brzina ω_0 pa se oni vrte do zaustavljanja posle proteklog vremena T . Odrediti moment trenja smatrajući ga konstantnim.

Diferencijalna jednačina obrtanja glasi

$$J \frac{d\omega}{dt} = -M_t.$$

Integracijom se dobija

$$\omega = -\frac{M_t}{J}t + C.$$

Pošto je u trenutku $t = 0$, $\omega = \omega_0$, to je $C = \omega_0$ pa je

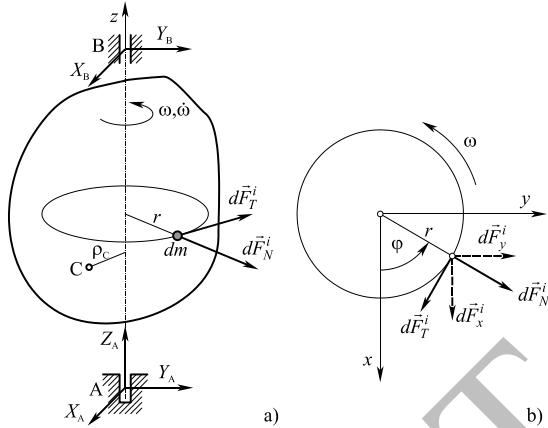
$$\omega = -\frac{M_t}{J}t + \omega_0.$$

Odavde je za $t = T$ $\omega = 0$ pa se dobija

$$M_t = \frac{J\omega_0}{T}.$$

3.4.4 Reakcije u ležištima tela koje se obrće oko nepomične ose

Glavni vektor i glavni moment inercijalnih sila tela koje se obrće oko nepomične ose



Slika 3.28:

dinate te tačke x , y i z . Pošto je obrtanje tela proizvoljno, to dm ima i tangencijalno i normalno ubrzanje. Saglasno Dalamberovom principu, na tačku deluju tangencijalna i normalna inercijalna sila koje su jednake proizvodu iz elementarne mase i odgovarajućeg ubrzanja sa promenjenim smerom vektora. Znači da je

$$\begin{aligned} dF_T^i &= r\dot{\omega}dm, \\ dF_N^i &= r\omega^2dm. \end{aligned}$$

Pošto su ove sile u ravni koja je paralelna sa ravni Axy to su projekcije inercijalnih sila na koordinatne ose

$$\begin{aligned} dF_x^i &= dF_N^i \cos \varphi + dF_T^i \sin \varphi, \\ dF_y^i &= dF_N^i \sin \varphi - dF_T^i \cos \varphi, \\ dF_z^i &= 0, \end{aligned}$$

Posmatra se kruto homogeno telo koje može da se obrće oko ose Az na potpuno proizvoljan način. Zadatak je da se odredi glavni vektor \vec{F}_g^i i glavni moment $\vec{\mathfrak{M}}_{gA}^i$ inercijalnih sila ovog tela (slika 3.28). Neka je za telo kruto vezan koordinatni sistem $Axyz$ koji se kreće zajedno sa njim.

U telu se posmatra elementarna masa dm koja se nalazi na rastojanju r od ose obrtanja Az . Neka su ko-

odnosno

$$\begin{aligned} dF_x^i &= r\omega^2 dm \cos \varphi + r\dot{\omega} dm \sin \varphi, \\ dF_y^i &= r\omega^2 dm \sin \varphi - r\dot{\omega} dm \cos \varphi, \\ dF_z^i &= 0. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Zbog veza

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi, \\ y &= r \sin \varphi, \end{aligned}$$

ovi izrazi postaju

$$\begin{aligned} dF_x^i &= x\omega^2 dm + y\dot{\omega} dm, \\ dF_y^i &= y\omega^2 dm - x\dot{\omega} dm, \\ dF_z^i &= 0. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Momenti ovih inercijalnih sila za koordinatne ose x , y i z iznose

$$\begin{aligned} dM_x^i &= -z dF_y^i = -z(y\omega^2 dm - x\dot{\omega} dm), \\ dM_y^i &= z dF_x^i = z(x\omega^2 dm + y\dot{\omega} dm), \\ dM_z^i &= -r dF_T^i = -r^2 \dot{\omega} dm. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Integracijom jednačina (3.42) po celokupnoj masi tela M dobija se glavni vektor inercijalnih sila ili tačnije projekcije glavnog vektora na ose pokretnog koordinatnog sistema $Axyz$

$$\begin{aligned} F_x^i &= \omega^2 \int_{(M)} x dm + \dot{\omega} \int_{(M)} y dm, \\ F_y^i &= \omega^2 \int_{(M)} y dm - \dot{\omega} \int_{(M)} x dm, \\ F_z^i &= 0. \end{aligned}$$

Kako je za neprekidno raspoređenu masu

$$\int_{(M)} x dm = Mx_c, \quad \int_{(M)} y dm = My_c, \quad (3.44)$$

gde su x_c i y_c koordinate centra mase krutog tela, konačno se dobija

$$\begin{aligned} F_x^i &= \omega^2 M x_c + \dot{\omega} M y_c, \\ F_y^i &= \omega^2 M y_c - \dot{\omega} M x_c, \\ F_z^i &= 0. \end{aligned} \quad (3.45)$$

Intenzitet ovog vektora iznosi

$$F_g^i = M \rho_c \sqrt{\dot{\omega}^2 + \omega^4}, \quad (3.46)$$

gde je $\rho_c = \sqrt{x_c^2 + y_c^2}$ najkraće rastojanje težišta tela od obrtne ose Az .

Projekcije glavnog momenta inercijalnih sila dobijaju se integracijom jednačina (3.43) po celokupnoj masi tela

$$\begin{aligned} M_{gx}^i &= -\omega^2 \int_{(M)} yz dm + \dot{\omega} \int_{(M)} xz dm, \\ M_{gy}^i &= \omega^2 \int_{(M)} zx dm + \dot{\omega} \int_{(M)} yz dm, \\ M_{gz}^i &= -\dot{\omega} \int_{(M)} r^2 dm = -\dot{\omega} \int_{(M)} (x^2 + y^2) dm. \end{aligned}$$

Uvođenjem aksijalnog J_z i centrifugalnih momenata inercije J_{xz} i J_{yz} za osu z ovi izrazi postaju

$$\begin{aligned} M_{gx}^i &= -\omega^2 J_{yz} + \dot{\omega} J_{xz}, \\ M_{gy}^i &= \omega^2 J_{xz} + \dot{\omega} J_{yz}, \\ M_{gy}^i &= -\dot{\omega} J_z, \end{aligned} \quad (3.47)$$

gde su

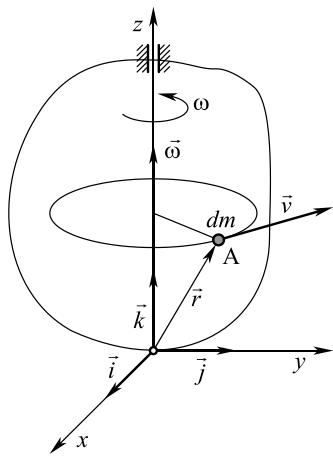
$$J_z = \int_{(M)} (x^2 + y^2) dm, \quad J_{xz} = \int_{(M)} xz dm, \quad J_{yz} = \int_{(M)} yz dm. \quad (3.48)$$

Intenzitet glavnog momenta inercijalnih sila u ravni xy iznosi

$$M_{gxy}^i = \sqrt{(M_{gx}^i)^2 + (M_{gy}^i)^2} = \sqrt{(J_{xz})^2 + (J_{yz})^2} \sqrt{\dot{\omega}^2 + \omega^4}. \quad (3.49)$$

Jednačine (3.45) i (3.47) u potpunosti definišu projekcije glavnog vektora i glavnog momenta inercijalnih sila krutog homogenog tela koje se obrće oko nepomične ose Az .

**Vektor količine kretanja i momenta
količine kretanja krutog tela koje se obrće oko
nepomične ose**



Slika 3.29:

Posmatra se telo na slici 3.29. Iz kinematike je poznato da se brzina bilo koje tačke tela koje se obrće oko nepomične ose može iskazati Ojlerovim izrazom

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}, \quad (3.50)$$

Ovaj izraz važi za svaku tačku pa i za krajeve jediničnih vektora \vec{i} , \vec{j} i \vec{k} pa je

$$\begin{aligned}\vec{i} &= \vec{\omega} \times \vec{i}, \\ \vec{j} &= \vec{\omega} \times \vec{j}, \\ \vec{k} &= \vec{\omega} \times \vec{k}.\end{aligned}$$

Pošto je vektor \vec{k} konstantan to je $\vec{k} = \vec{0}$. Ugaona brzina krutog tela je u pravcu ose z , odnosno

$$\vec{\omega} = \omega \vec{k}. \quad (3.51)$$

Korišćenjem poznatih relacija $\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$ i $\vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}$ dobija se

$$\begin{aligned}\vec{i} &= \omega \vec{j}, \\ \vec{j} &= -\omega \vec{i}, \\ \vec{k} &= \vec{0}.\end{aligned} \quad (3.52)$$

Ma koja tačka krutog tela A mase dm ima vektor položaja u pokretnom koordinatnom sistemu $Oxyz$

$$\vec{r} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}. \quad (3.53)$$

Elementarni vektor količine kretanja tačke A iznosi

$$d\vec{K} = \vec{v} dm = (\vec{\omega} \times \vec{r}) dm.$$

Zbog (3.51) i (3.53) ovaj izraz postaje

$$d\vec{K} = \vec{j}\omega x dm - \vec{i}\omega y dm.$$

Integracijom ovog izraza po celokupnoj masi krutog tela i koristeći (3.44) dobija se

$$\vec{K} = Mx_c\omega \vec{j} - My_c\omega \vec{i}. \quad (3.54)$$

Projekcije ovog vektora na pokretne koordinatne ose x, y i z su

$$\begin{aligned} K_x &= -My_c\omega, \\ K_y &= Mx_c\omega, \\ K_z &= 0. \end{aligned} \quad (3.55)$$

Pošto su veličine M, x_c i y_c konstante u pokretnom koordinatnom sistemu $Oxyz$, to diferenciranje vektora \vec{K} po vremenu i korištenjem (3.52) dovodi do

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = Mx_c\dot{\omega} \vec{j} - Mx_c\omega^2 \vec{i} - My_c\dot{\omega} \vec{i} - My_c\omega^2 \vec{j}. \quad (3.56)$$

Znači projekcije ovog vektora na koordinatne ose x, y i z su

$$\begin{aligned} \dot{K}_x &= -Mx_c\omega^2 - My_c\dot{\omega}, \\ \dot{K}_y &= Mx_c\dot{\omega} - My_c\omega^2, \\ \dot{K}_z &= 0. \end{aligned} \quad (3.57)$$

Elementarni vektor momenta količine kretanja neke tačke A krutog tela iznosi (Slika 3.29)

$$d\vec{L}_O = \vec{r} \times \vec{v} dm = [\vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})]dm.$$

Razvijanjem dvostrukog vektorskog proizvoda dobija se

$$d\vec{L}_O = [r^2\vec{\omega} - (\vec{r} \cdot \vec{\omega})\vec{r}]dm,$$

odnosno pošto je $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ i upotrebom (3.50) do (3.53) sledi

$$d\vec{L}_O = (x^2 + y^2)\omega dm \vec{k} - \omega xz dm \vec{i} - \omega yz dm \vec{j}.$$

Integracijom ovog izraza po masi tela i koristeći oznake (3.48) imamo

$$\vec{L}_O = -J_{xz}\omega \vec{i} - J_{yz}\omega \vec{j} + J_z\omega \vec{k}. \quad (3.58)$$

Projekcije ovog vektora na koordinatne ose iznose

$$\begin{aligned} L_x &= -J_{xz}\omega, \\ L_y &= -J_{yz}\omega, \\ L_z &= J_z\omega. \end{aligned} \quad (3.59)$$

Pošto su momenti inercije u pokretnom koordinatnom sistemu koji se kreće zajedno sa krutim telom konstantni, to se diferenciranjem izraza (3.58) po vremenu, uzimajući u obzir izraze za izvode jediničnih vektora (3.52) dobija

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{i}(-J_{xz}\dot{\omega} + J_{yz}\omega^2) + \vec{j}(-J_{yz}\dot{\omega} - J_{xz}\omega^2) + J_z\dot{\omega}\vec{k}. \quad (3.60)$$

Projekcije ovog vektora su

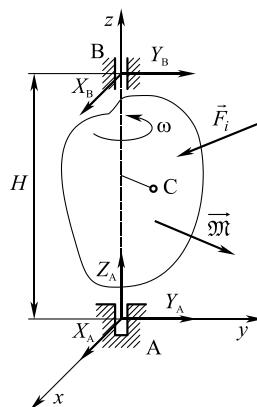
$$\begin{aligned} \dot{L}_x &= -J_{xz}\dot{\omega} + J_{yz}\omega^2, \\ \dot{L}_y &= -J_{yz}\dot{\omega} - J_{xz}\omega^2, \\ \dot{L}_z &= J_z\dot{\omega}. \end{aligned}$$

Prema Dalamberovom principu, ove veličine sa promenjenim znakom su projekcije momenta količine kretanja inercijalnih sila, pa važi vektorska relacija

$$\vec{M}_O^i = -\vec{L}_O. \quad (3.61)$$

Određivanje reakcija u ležištima tela koje se obrće oko nepomične ose

Neka na kruto telo, koje je prinuđeno da se obrće oko nepomične ose, deluje više spoljašnjih sila \vec{F}_i , gde je $i = 1, 2, \dots, N$ broj tih sila, i spoljašnji spreg $\vec{\mathcal{M}}$. Spoljašne sile su i reakcije u ležištima A i B . Ovo kretanje krutog tela ima jedan stepen slobode kretanja. Ovde je problem da se, znajući spoljašnje sile \vec{F}_i i spreg $\vec{\mathcal{M}}$, odredi kretanje tela i da se odrede reakcije u ležištima A i B za vreme kretanja. Ovakav problem određivanja reakcija veza za vreme kretanja materijalnog sistema spada u jednu posebnu oblast dinamike koja se naziva *kinetostatika*.



Slika 3.30:

Neka se telo (Slika 3.30) kreće na poznati način pod dejstvom zadatih sila \vec{F}_i i sprega $\vec{\mathfrak{M}}$. Ugaona brzina i ugaono ubrzanje tog kretanja su ω i $\dot{\omega}$. Neka su reakcije u sfernom ležištu A i cilindričnom B sile $\vec{F}_A(X_A, Y_A, Z_A)$ i $\vec{F}_B(X_B, Y_B)$.

Prema Dalamberovom principu zbir glavnih vektora spoljašnjih sila ($\vec{F}_A + \vec{F}_B + \sum_{i=1}^N \vec{F}_i$) i inercijalnih sila tela \vec{F}_R^i mora da je jednak nuli i zbir glavnog momenta spoljašnjih sila $\vec{M}_A^{\vec{F}_A} + \vec{M}_A^{\vec{F}_B} + \sum_{i=1}^N \vec{M}_A^{\vec{F}_i}$, spoljašnjeg sprega $\vec{\mathfrak{M}}$ i glavnog momenta inercijalnih sila $\vec{\mathfrak{M}}_{RA}^i$ mora da je jednak nuli. Dalamberov princip daje dve sledeće vektorske jednačine

$$\begin{aligned}\vec{F}_A + \vec{F}_B + \vec{F}_R^i + \sum_{i=1}^N \vec{F}_i &= \vec{0}, \\ \vec{M}_A^{\vec{F}_A} + \vec{M}_A^{\vec{F}_B} + \sum_{i=1}^N \vec{M}_A^{\vec{F}_i} + \vec{\mathfrak{M}} + \vec{\mathfrak{M}}_{RA}^i &= \vec{0}. \end{aligned}\quad (3.62)$$

Zbog oblika glavnog vektora inercijalnih sila (3.45) i glavnog momenta inercijalnih sila (3.47) skalarni oblik ovih jednačina glasi

$$X_A + X_B + \sum_{i=1}^N F_{ix} + \omega^2 M x_c + \dot{\omega} M y_c = 0,$$

$$Y_A + Y_B + \sum_{i=1}^N F_{iy} + \omega^2 M y_c - \dot{\omega} M x_c = 0,$$

$$Z_A + \sum_{i=1}^N F_{iz} = 0,$$

$$-Y_B H + \sum_{i=1}^N M_x^{\vec{F}_i} + J_{xz}\dot{\omega} - J_{yz}\omega^2 + \mathfrak{M}_x = 0,$$

$$X_B H + \sum_{i=1}^N M_y^{\vec{F}_i} + J_{yz}\dot{\omega} + J_{xz}\omega^2 + \mathfrak{M}_y = 0,$$

$$\sum_{i=1}^N M_z^{\vec{F}_i} - J_z\dot{\omega} + \mathfrak{M}_z = 0. \quad (3.63)$$

Ovo su najopštije relacije koje se mogu formirati za telo koje se obrće oko nepomične ose i pomoću njih moguće je rešiti dva osnovna zadatka:

1. Znajući momente sila $M_z^{\vec{F}_i}$ za osu obrtanja i projekciju sprega na osu obrtanja \mathfrak{M}_z iz šeste jednačine (3.63), posle integracije, određuje se zakon obrtanja krutog tela $\varphi(t)$ oko ose Az .
2. Posle toga se iz prvih pet jednačina (3.63), koje su sada algebarske jednačine, određuje pet nepoznatih reakcija veza X_A, Y_A, Z_A, X_B i Y_B .

Te reakcije veza imaju vrednosti:

$$\begin{aligned}
 X_A &= \frac{1}{H} \left(\sum_{i=1}^N M_y^{\vec{F}_i} + J_{yz}\dot{\omega} + J_{xz}\omega^2 + \mathfrak{M}_y \right) \\
 &\quad - \left(\sum_{i=1}^N F_{ix} + \omega^2 Mx_c + \dot{\omega} My_c \right), \\
 Y_A &= -\frac{1}{H} \left(\sum_{i=1}^N M_x^{\vec{F}_i} + J_{xz}\dot{\omega} - J_{yz}\omega^2 + \mathfrak{M}_x \right) \\
 &\quad - \left(\sum_{i=1}^N F_{iy} + \omega^2 My_c - \dot{\omega} Mx_c \right), \\
 Z_A &= - \sum_{i=1}^N F_{iz}, \\
 X_B &= -\frac{1}{H} \left(\sum_{i=1}^N M_y^{\vec{F}_i} + J_{yz}\dot{\omega} + J_{xz}\omega^2 + \mathfrak{M}_y \right), \\
 Y_B &= \frac{1}{H} \left(\sum_{i=1}^N M_x^{\vec{F}_i} + J_{xz}\dot{\omega} - J_{yz}\omega^2 + \mathfrak{M}_x \right). \quad (3.64)
 \end{aligned}$$

Vidi se da veličine reakcija veza zavise od spoljašnjih sila i sprega i od dinamičkog stanja tela, odnosno od veličina ω i $\dot{\omega}$. Jedino reakcija veza Z_A ne zavisi od tih veličina ω i $\dot{\omega}$. Vrlo često je potrebno odrediti reakcije u ležištima samo usled obrtanja. Takve reakcije se nazivaju kinetičkim reakcijama i one imaju vrednosti prema (3.64)

$$\begin{aligned} X_{Ak} &= \frac{1}{H} (J_{yz}\dot{\omega} + J_{xz}\omega^2) - (\omega^2 Mx_c + \dot{\omega} My_c), \\ Y_{Ak} &= -\frac{1}{H} (J_{xz}\dot{\omega} - J_{yz}\omega^2) - (\omega^2 My_c - \dot{\omega} Mx_c), \quad Z_{Ak} = 0, \\ X_{Bk} &= -\frac{1}{H} (J_{yz}\dot{\omega} + J_{xz}\omega^2), \quad Y_{Bk} = \frac{1}{H} (J_{xz}\dot{\omega} - J_{yz}\omega^2). \end{aligned} \quad (3.65)$$

Izostavljeni delovi reakcija veza su statičke reakcije veza. One se dobiju kada se u (3.64) izostave članovi sa ω i $\dot{\omega}$. Ove statičke reakcije veza iznose

$$\begin{aligned} X_{As} &= \frac{1}{H} \left(\sum_{i=1}^N M_y^{\vec{F}_i} + \mathfrak{M}_y \right) - \sum_{i=1}^N F_{ix}, \\ Y_{As} &= -\frac{1}{H} \left(\sum_{i=1}^N M_x^{\vec{F}_i} + \mathfrak{M}_x \right) - \sum_{i=1}^N F_{iy}, \\ Z_{As} &= -\sum_{i=1}^N F_{iz}, \\ X_{Bs} &= -\frac{1}{H} \left(\sum_{i=1}^N M_y^{\vec{F}_i} + \mathfrak{M}_y \right), \\ Y_{Bs} &= \frac{1}{H} \left(\sum_{i=1}^N M_x^{\vec{F}_i} + \mathfrak{M}_x \right). \end{aligned} \quad (3.66)$$

Ove reakcije bi postojale i kada bi se telo zaustavilo i bilo u ravnoteži pod dejstvom datog sistema sila i sprega.

Analizirajmo neke posebne slučajeve.

1. Neka je glavni vektor sila inercije (3.46) jednak nuli, odnosno

$$F_g^i = M\rho_c \sqrt{\dot{\omega}^2 + \omega^4} = 0.$$

Pošto je $\dot{\omega}$ i ω različito od nule mora biti

$$\rho_c = \sqrt{x_c^2 + y_c^2} = 0,$$

odnosno

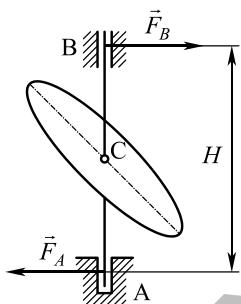
$$x_c = 0, \quad y_c = 0.$$

To znači da je u tom slučaju težište datog tela na obrtnoj osi. Tada su reakcije

$$X_{Ak} = -X_{Bk} = \frac{1}{H} (J_{yz}\dot{\omega} + J_{xz}\omega^2), \quad (3.67)$$

$$Y_{Ak} = -Y_{Bk} = -\frac{1}{H} (J_{xz}\dot{\omega} - J_{yz}\omega^2). \quad (3.68)$$

Kao primer ovakve raspodele mase može da posluži disk na slici 3.31 čije se težište nalazi na osi obrtanja, ali ravan ovog diska nije normalna na osu obrtanja. U ovom slučaju reakcije veza su spregovi pa i inercijalne sile diska moraju biti spregovi. Na veličinu tih spregova presudnu ulogu imaju centrifugalni momenti inercije J_{xz} i J_{yz} . Iz ove analize sledi i sledeća fizička interpretacija centrifugalnih momenata inercije: *Centrifugalni momenti inercije karakterišu stepen dinamičke neuravnoteženosti tela koje se obrće oko nepomične ose.*



Slika 3.31:

1. Uslovi dinamičke uravnoveženosti tela koje se obrće oko nepomične ose.

Posmatranjem izraza (3.68), koji je dobijen iz uslova da se težište nalazi na osi obrtanja, dolazi se do zaključka da su reakcije u ležištima jednake nuli ako je

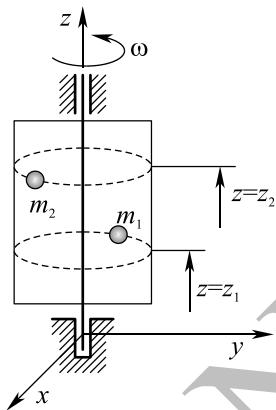
$$\begin{aligned} x_c &= 0, & y_c &= 0, \\ J_{xz} &= 0, & J_{yz} &= 0. \end{aligned} \quad (3.69)$$

Prema tome, da bi telo bilo dinamički uravnoveženo mora da mu težište leži na obrtnoj osi i u isto vreme da su centrifugalni momenti

inercije za tu osu jednaki nuli. Prema ranijoj terminologiji ovakva osa se naziva glavna centralna osa inercije pa sledi zaključak: *Da bi, pri obrtanju tela oko nepomične ose, odgovarajuće kinetičke reakcije bile jednakane nuli potrebno je i dovoljno, da se osa obrtanja poklopi sa jednom od glavnih centralnih osa inercije.* Ovakva osa se često naziva *slobodna ili permanentna osa* pošto su kod nje reakcije u ležištima jednake nuli.

Do istog zaključka se dolazi posmatranjem izraza (3.46) i (3.49) za glavni vektor i glavni moment inercijalnih sila

$$\begin{aligned} F_R^i &= M \sqrt{x_c^2 + y_c^2} \sqrt{\dot{\omega}^2 + \omega^4}, \\ M_{gxy}^i &= \sqrt{(J_{xz})^2 + (J_{yz})^2} \sqrt{\dot{\omega}^2 + \omega^4}. \end{aligned} \quad (3.70)$$



Slika 3.32:

Pa kad su ispunjeni uslovi (3.69) i ove veličine su jednakane nuli, pa uslov dinamičke uravnoteženosti može da se iskaže na sledeći način: *Telo je dinamički uravnoteženo onda i samo onda ako su glavni vektor i glavni moment inercijalnih sila jednakani nuli.* Navedena teorija služi kao osnov čitave jedne oblasti tehničke dinamike, odnosno teorije dinamičkog uravnoteženja tela koje se obrće oko nepomične ose. Ovo je vrlo važan problem jer postojanje sasvim male neuravnoteženosti kod obrtnih mašina pri velikim ugaonim brzinama izaziva znatna opterećenja u ležištima pa i teške havarije mašina. U opštem slučaju otklanjanje ove neuravnoteženosti može se postići dodavanjem

ili odstranjivanjem dve koncentrisane mase u proizvoljno izabranim ravнима koje su normalne na osu obrtanja (Slika 3.32). Izbor masa m_1 i m_2 i ravni date sa $z = z_1$ i $z = z_2$ vrši se u saglasnosti sa jednačinama

$$\begin{aligned} Mx_c + m_1x_1 + m_2x_2 &= 0, \\ My_c + m_1y_1 + m_2y_2 &= 0, \\ J_{xz} + m_1x_1z_1 + m_2x_2z_2 &= 0, \\ J_{yz} + m_1y_1z_1 + m_2y_2z_2 &= 0, \end{aligned} \quad (3.71)$$

koje predstavljaju uslov, da posle dodavanja masa obrtna osa postaje glavna centralna osa inercije. Drugim rečima, posle dodavanja masa,

težište tela leži na obrtnoj osi i centrifugalni momenti inercije za tu osu su jednaki nuli. Uklanjanje neuravnoteženosti vrši se danas upotrebom uređaja za balansiranje.

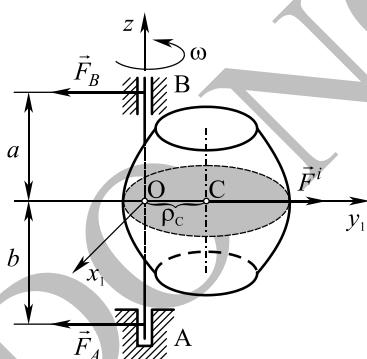
2. Slučaj kada telo ima ravan simetrije normalnu na osu obrtanja.

Posmatra se kruto telo koje se obrće konstantnom ugaonom brzinom ω oko vertikalne ose Oz . Neka telo ima ravan simetrije koja je normalna na osu obrtanja (Slika 3.33). U ovom slučaju za koordinatni početak je zgodno uzeti prodornu tačku O ose z kroz ravan simetrije. Ranije je pokazano da je svaka osa normalna na ravan simetrije tela glavna osa inercije za prodornu tačku ose kroz ravan. Prema tome osa Oz je glavna osa inercije za tačku O . Na osnovu osobine glavnih osa sledi da je

$$J_{x_1 z} = J_{y_1 z} = 0,$$

pa je prema (3.70) spreg inercijalnih sila $M_{x_1 y_1}^i$ jednak nuli. U ovom slučaju inercijalne sile se svode na rezultantnu силу која prolazi kroz centar mase tela. Veličina te rezultante je prema (3.70)

$$F_R^i = M \rho_c \omega^2.$$

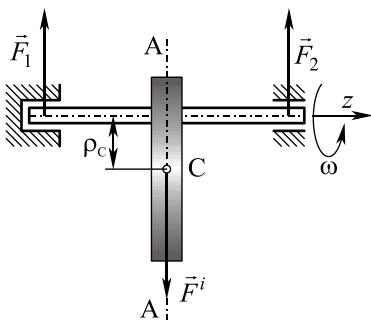


Slika 3.33:

Sa ovom silom uravnotežene su reakcije u osloncima. Očigledno da su kinetičke reakcije paralelne sa rezultantom inercijalnih sila. Ovako telo može da se dinamički uravnoteži dodavanjem samo jedne mase u ravni simetrije tela na pravcu rezultante inercijalnih sila sa suprotne strane od ose obrtanja.

Primer 38 Težište zamajca, težine $G = 3000 [N]$, udaljeno je za $q = 1 [mm]$ od horizontalne ose vratila (Slika 3.34). Ležišta vratila nalaze se na jednakom rastojanju od ravni simetrije zamajca. Zamajac ima ravan simetrije normalnu na osu obrtanja. Odrediti reakcije ležišta vratila ako se ono obrće konstantnom ugaonom brzinom sa $n = 1200$ obrtaja u minuti.

težište zamajca, težine $G = 3000 [N]$, udaljeno je za $q = 1 [mm]$ od horizontalne ose vratila (Slika 3.34). Ležišta vratila nalaze se na jednakom rastojanju od ravni simetrije zamajca. Zamajac ima ravan simetrije normalnu na osu obrtanja. Odrediti reakcije ležišta vratila ako se ono obrće konstantnom ugaonom brzinom sa $n = 1200$ obrtaja u minuti.



Slika 3.34:

Pošto telo ima ravan simetrije normalnu na osu obrtanja z to se sistem inercijalnih sila svodi na rezultantu koja deluje u težištu C . Veličina ove rezultante je

$$F_{1k} = \frac{G}{g} q \left(\frac{n\pi}{30} \right)^2 = \frac{3000}{9.81} 0.001 \left(\frac{1200\pi}{30} \right)^2,$$

$$F_{1k} = F_{2k} = 4829.164233[N].$$

Reakcije u ležištima sastoje se iz dva dela i to:

Statičkih reakcija koje ne zavise od kretanja. Njihov pravac je stalno vertikalalan.

One imaju vrednost

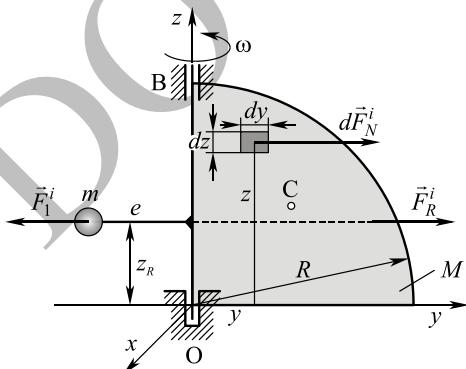
$$F_{1s} = F_{2s} = 1500[N].$$

Kinetičkih reakcija koje su paralelne rezultanti inercijalnih sila \vec{F}_R^i i obrću se oko obrtne ose ugaonom brzinom ω . One imaju vrednost

$$F_{gk}^i = 2414.582116[N].$$

Primer 39 Homogena kružna ploča oblika četvrtine kruga mase M , poluprečnika R , obrće se oko vertikalne ose konstantnom ugaonom brzinom, odrediti:

1. Kinetičke reakcije ležišta,
2. Odrediti položaj dodatne mase m koju treba dodati ploči da kinetičke reakcije budu jednake nuli.



Slika 3.35:

U većini problema nije potrebno koristiti opšte izraze za kinetičke reakcije (3.65) jer nisu laki za pamćenje. Daleko je lakše u svakom problemu izračunati glavni vektor i glavni moment inercijalnih sila, pa formirati jednačine ravnoteže.

Neka elementarna masa ploče odgovara elementu njene površine

$dzdy$ (Slika 3.35). Masa ovog elementa je $dm = \rho dz dy$, gde je ρ masa jedinice površine ploče. Pošto je obrtanje sa konstantnom ugaonom brzinom postoji samo normalna inercijalna sila koja je

$$dF_N^i = y\omega^2 dm.$$

Ukupna inercijalna sila, odnosno inercijalni vektor, je

$$F_R^i = \omega^2 M y_c.$$

Pošto je $y_c = 4R/3\pi$ to je konačno

$$F_R^i = M \frac{4R}{3\pi} \omega^2.$$

Napomena: Pomoću izraza $F_R^i = \omega^2 M y_c$ samo se računa intenzitet sile inercije, ali taj izraz ne određuje ničim položaj sile inercije na telu. Pogrešno je tu silu crtati bilo gde pa i u centru mase tela.

Moment sila inercije postoji samo za osu Ox , jer su momenti inercione sile za ose y i z jednak nuli. Pošto je elementarna inerciona sila $dF_N = y\omega^2 dm$ vrednost elementarnog momenta inercijalnih sila je

$$dM_x^i = -z dF_N = -zy\omega^2 dm,$$

pa je glavni moment inercijalnih sila za osu x jednak

$$M_{gx}^i = -\omega^2 \int_{(M)} zy dm = -J_{yz} \omega^2.$$

Znači potreban je centrifugalni moment inercije J_{yz} date figure. Po definiciji je

$$\begin{aligned} J_{yz} &= \int_{(M)} yz dm = \rho \int_{(M)} yz dy dz = \rho \int_0^R y dy \int_0^{\sqrt{R^2 - y^2}} zdz, \\ J_{yz} &= \frac{\rho}{2} \int_0^R y(R^2 - y^2) dy = \frac{\rho R^4}{8}. \end{aligned}$$

Pošto je masa ploče $M = \rho(R^2\pi/4)$ to je

$$J_{yz} = \frac{1}{2\pi} MR^2.$$

Znači, glavni moment inercijalnih sila ploče ima vrednost

$$M_{gx}^i = -\frac{1}{2\pi} MR^2 \omega^2.$$

U ovom slučaju postoji rezultanta svih inercijalnih sila i inercijalnog momenta jer su sve inercijalne sile u jednoj ravni Oyz a vektor sprega je normalan na tu ravan u pravcu ose x . Mesto rezultante je prema statici određeno relacijom

$$F_g^i z_R = |M_{gx}^i|,$$

pa se dobija rastojanje rezultante u pravcu z ose

$$z_R = \frac{3}{8} R.$$

Da se u ležištima ne pojave kinetičke reakcije potrebno je dodatnu masu m staviti na udaljenju z_R od koordinatnog početka mereno po z osi. Iz uslova da je centrifugalna sila inercije dodatne mase jednaka rezultujućoj inercijanoj sili dobija se

$$m \omega^2 = M \frac{4R}{3\pi} \omega^2,$$

odnosno

$$e = \frac{4MR}{3\pi m}.$$

Ako masa m nije dodata postojaće dinamičke reakcije. Po Dalamberovom principu imamo

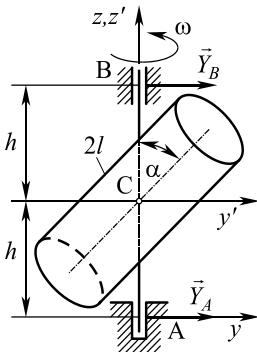
$$\begin{aligned}\sum Y_i &\equiv -F_{Ok} - F_{Bk} + F_g^i = 0, \\ \sum M_O &\equiv F_{Bk}R - F_g^i \frac{3R}{8} = 0.\end{aligned}$$

Odavde se dobija

$$F_{Bk} = \frac{MR\omega^2}{2\pi}, \quad F_{Ok} = \frac{5MR\omega^2}{6\pi}.$$

Ukupne reakcije bi se dobole ako bi se u obzir uzela i težina ploče koja deluje u težištu C ploče.

Primer 40 Homogeni kružni cilindar težine P , poluprečnika r i visine $2l$ obrće se konstantnom ugaonom brzinom ω oko vertikalne ose Az koja prolazi kroz njegovo središte. Centar cilindra leži na sredini rastojanja $\overline{OB} = 2h$ kao što je na slici 3.36 pokazano. Naći reakcije ležišta u tačkama A i B .



Slika 3.36:

Pošto nema ugaonog ubrzanja, a i zbog simetričnog rasporeda masa u odnosu na ravan Ayz , sile reakcije u ležištima biće takođe u ravni Oyz . Iz (3.63) sledi da je

$$\begin{aligned} Y_A + Y_B &= 0, \\ -Y_B 2h - J_{yz} \omega^2 &= 0. \end{aligned}$$

Odavde su reakcije

$$\begin{aligned} Y_A &= -Y_B, \\ Y_B &= -\frac{J_{yz} \omega^2}{2h}. \end{aligned}$$

Za izračunavanje centrifugalnog momenta inercije J_{yz} primenom Štajnerove teoreme pređemo sa osa yz na osu $y'z'$ pa se dobija

$$J_{yz} = J_{y'z'} + My_c z_c = J_{y'z'},$$

a prema (3.26) centrifugalni moment inercije ima oblik

$$J_{yz} = \frac{M}{2} \left(\frac{l^2}{3} - \frac{r^2}{4} \right) \sin 2\alpha,$$

i konačno

$$Y_B = -Y_A = -\frac{P\omega^2}{4gh} \left(\frac{l^2}{3} - \frac{r^2}{4} \right) \sin 2\alpha.$$

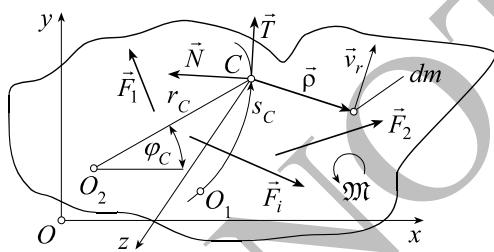
Vidi se da sile reakcija obrazuju spreg sila.

3.5 Ravansko kretanje krutog tela

3.5.1 Diferencijalne jednačine ravanskog kretanja krutog tela

Poznato je da se pod ravanskim kretanjem krutog tela, koje ima tri stepena slobode, podrazumeva kretanje pri kome se sve tačke tela kreću u ravnima koje su paralelne nekoj osnovnoj ravni. Telo se kreće ravanski samo ako su ispunjeni sledeći uslovi:

1. Telo mase m je vrlo tanka ploča koja se kreće u osnovnoj ravni Oxy (Slika 3.37) ili u njoj paralelnoj ravni,
2. Spoljašnje sile \vec{F}_i i spreg \mathfrak{M} deluju u ravni ploče,
3. U početnom trenutku kretanja, ploča kao i vektori početnih brzina svih tačaka ploče nalaze se u osnovnoj ravni Oxy .



Slika 3.37:

Jedan od načina proučavanja ravanskog kretanja je u njegovom razlaganju na kretanje proizvoljno izabranog pola ravanskog kretanja i obrtanja oko tog pola. U opštim zakonima dinamike samo zakon o kretanju centra mase govori o kretanju jedne tačke tela, pa se centar mase bira za pol ravanskog kretanja. Pošto ravansko kretanje

ima tri stepena slobode, za rešavanje problema kretanja dovoljne su tri skalarne jednačine: dve skalarne jednačine u ravni kretanja koje potiču od vektorskog zakona o kretanju centra mase

$$m \vec{a}_c = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i, \quad (3.72)$$

i zakon o promeni momenta količine relativnog kretanja tela oko ose z koja je normalna na ravan kretanja i koja prolazi kroz centar mase C

$$\dot{L}_z = \mathfrak{M} + \sum_{i=1}^N M_z \vec{F}_i. \quad (3.73)$$

Pri relativnom obrtanju tela oko ose z ili oko tačke C sa ugaonom brzinom $\dot{\varphi}$ svaki deo ploče elementarne mase dm , koji je na rastojanju ρ od tačke C , ima količinu kretanja $dm\rho\dot{\varphi}$ i moment količine kretanja $dm\rho^2\dot{\varphi}$. Integracijom ovog izraza po masi tela m , dobija se moment količine relativnog kretanja tela oko tačke C ($L_z \equiv L_c$)

$$L_c = J_c \dot{\varphi},$$

gde je J_c moment inercije tela za tačku C , odnosno za osu z . Zamenom ovog izraza u (3.73), dobija se jednačina obrtanja oko centra mase

$$J_c \ddot{\varphi} = \mathfrak{M} + \sum_{i=1}^N M_c^{\vec{F}_i}. \quad (3.74)$$

U zavisnosti od odabranog koordinatnog sistema za posmatranje kretanja centra mase C , uz sve oznake koje su obrazložene u kinematici, vektorska jednačina (3.72) je ekvivalentna sa sledeće dve skalarne jednačine:

1. Dekartov koordinatni sistem

$$m\ddot{x}_c = \sum_{i=1}^N F_{ix}, \quad m\ddot{y}_c = \sum_{i=1}^N F_{iy}, \quad (3.75)$$

2. Prirodan koordinatni sistem

$$m\ddot{s}_c = \sum_{i=1}^N F_{iT}, \quad m\frac{\dot{s}_c^2}{R_{kc}} = \sum_{i=1}^N F_{iN}, \quad (3.76)$$

3. Polarni koordinatni sistem

$$m(\ddot{r}_c - r_c \dot{\varphi}_c^2) = \sum_{i=1}^N F_{ir}, \quad m(r_c \ddot{\varphi}_c + 2\dot{r}_c \dot{\varphi}_c) = \sum_{i=1}^N F_{ic}. \quad (3.77)$$

U jednačinama (3.75) - (3.77) x_c i y_c su dekartove koordinate centra mase, s_c je krivolinijska koordinata centra mase, r_c i φ_c polarne koordinate centra mase i R_{kc} je poluprečnik krivine putanje centra mase C . U svakom problemu ravanskog kretanja, koriste se ukupno tri skalarne jednačine. To su jednačina (3.74) i dve jednačine (3.75), (3.76) ili (3.77).

3.5.2 Kinetička energija pri ravanskom kretanju krutog tela

Pri proučavanju ravanskog kretanja često se koristi i zakon o promeni kinetičke energije ili zakon o održanju totalne mehaničke energije. Opšti uslovi za primenu ovih zakona su isti kao što je to ranije već više puta podvučeno. Međutim, kinetička energija tela koje se ravanski kreće ima specifičan oblik. Kretanje tela se posmatra kao zbir translacije tela sa brzinom v_c centra mase tela C i relativnog kretanja u odnosu na centar mase sa brzinom v_{ir} . Tako, ukupna kinetička energija tela pri ravanskom kretanju ima oblik (2.20)

$$E_k = \frac{1}{2}mv_c^2 + E_{kr}^c. \quad (3.78)$$

Pri ravanskom kretanju, elementarna masa tela dm (Slika 3.37) ima relativnu brzinu u odnosu na centar mase $v_{ir} = \rho\dot{\phi}$. Zbog toga, kinetička energija relativnog kretanja (2.21) u odnosu na centar mase postaje

$$E_{kr}^c = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i v_{ir}^2 = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 \int_{(m)} \rho^2 dm = \frac{1}{2} J_c \dot{\phi}^2,$$

a ukupna kinetička energija tela (3.78) postaje

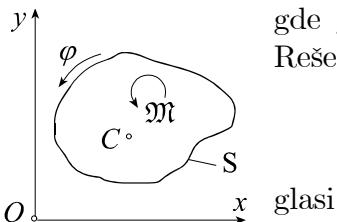
$$E_k = \frac{1}{2}mv_c^2 + \frac{1}{2}J_c\dot{\phi}^2. \quad (3.79)$$

U ovom izrazu u prvom članu se prepoznaće kinetička energija translacije centra mase, dok drugi član predstavlja kinetičku energiju obrtanja tela oko centra mase.

Primer 41 Na ploču S mase m , koja se nalazi na horizontalnoj glatkoj ravni Oxy , u ravni ploče deluje konstantan spreg \mathfrak{M} (Slika 3.38). Ako je ploča u početnom trenutku mirovala treba proučiti kretanje.

Diferencijalne jednačine ravanskog kretanja ploče su (3.74) i (3.75)

$$J_c\ddot{\phi} = \mathfrak{M}, \quad m\ddot{x}_c = 0, \quad m\ddot{y}_c = 0,$$



Slika 3.38:

gde je J_C moment inercije ploče za centar mase.
Rešenje ovih jednačina, uz početne uslove

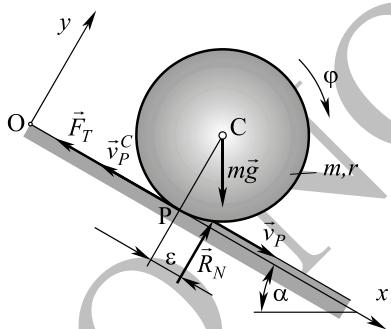
$$\begin{aligned}\varphi(0) &= 0, \quad x_c(0) = x_0, \quad y_c(0) = y_0, \\ \dot{\varphi}(0) &= 0, \quad \dot{x}_c(0) = 0, \quad \dot{y}_c(0) = 0,\end{aligned}$$

$$\varphi = \frac{M}{2J_C}t^2, \quad x_c = x_0, \quad y_c = y_0.$$

Zaključujemo da se telo pod dejstvom sprega M obrće oko centra mase, koji pri tom ostaje nepokretn. Time se potvrđuje, ono što je u osnovama mehanike definisano, da je spreg mera mehaničkog dejstva koje izaziva čisto obrtanje tela.

Primer 42 Kotrljanje tela po deformabilnoj podlozi.

Posmatrajmo cilindar ili disk poluprečnika r i mase m , koji može da se kotrlja po strmoj ravni nagiba α prema horizontali (Slika 3.39). Ovo je vrlo čest primer ravanskog kretanja krutog tela. Po pretpostavci strma ravan je hrapava i deformabilna. Treba proučiti kretanje.



Slika 3.39:

Kretanje centra mase, odnosno centra diska C , posmatra se u Dekartovom koordinatnom sistemu sa dve koordinate x_c i y_c . Obrtanje je opisano uglom obrtanja φ oko ose normalne na ravan diska u centru mase C . Od ove tri koordinate zna se da je stalno za vreme kretanja $y_c = r$, pa problem ima samo dva stepena slobode kretanja. Na disk deluju sledeće sile: težina diska $m\vec{g}$, sila trenja klizanja \vec{F}_T i normalna reakcija podloge \vec{R}_N , koja je pomerena za dužinu ε u odnosu na njen položaj kod krute podloge. ε je koeficijent trenja kotrljanja. Usvoji se Dekartov koordinatni sistem Oxy i smer obrtanja za ugao φ kao na slici 3.39. Jednačine ravanskog kretanja diska (3.74) i (3.75) glase

$$\begin{aligned}J_c \ddot{\varphi} &= F_T r - R_N \varepsilon \\ m \ddot{x}_c &= mg \sin \alpha - F_T, \\ m \ddot{y}_c &= 0 = R_N - mg \cos \alpha.\end{aligned} \tag{A}$$

Ove tri jednačine sadrže četiri nepoznate veličine φ , F_T , R_N i x_c . Za rešavanje problema potrebna je još jedna jednačina. Zna se da se svako kotrljanje tela može odvijati sa ili bez klizanja, pa se nadalje razlikuju ta dva slučaja.

1. Kotrljanje bez klizanja.

Napomena: U kotrljanju bez klizanja sila trenja se po rešavanju problema dobija po intenzitetu i smeru pa nije potrebno tačno predpostaviti njen smer.

Ako se disk kotrlja bez klizanja, tada je poznato da je tačka P dodira diska i strme ravni pol brzine ravanskog kretanja diska, pa je

$$\dot{x}_c = r\dot{\varphi}, \quad (B)$$

a to je potrebna četvrta jednačina za rešavanje problema. U ovom slučaju, zbog postojanja veze (B), kotrljanje diska bez klizanja ima jedan stepen slobode kretanja. Rešavanjem jednačina (A) i (B), uz korišćenje relacija da je $J_c = \frac{mr^2}{2}$ i $\ddot{x}_c = r\ddot{\varphi}$, dobija se

$$\begin{aligned} R_N &= mg \cos \alpha, \\ F_T &= \frac{m}{3}g(\sin \alpha + 2\frac{\varepsilon}{r} \cos \alpha), \\ \ddot{x}_c &= \frac{2}{3}g(\sin \alpha - \frac{\varepsilon}{r} \cos \alpha). \end{aligned}$$

Treća jednačina se jednostavno integrali i dobija zakon kretanja centra mase

$$x_c = \frac{1}{3}g(\sin \alpha - \frac{\varepsilon}{r} \cos \alpha)t^2 + C_1t + C_2,$$

gde su C_1 i C_2 integracione konstante.

Disk se kotrlja bez klizanja ako je $F_T < \mu R_N$, gde je μ koeficijent trenja klizanja. Zbog prethodnih rezultata, ovaj uslov je ispunjen ako je

$$\tan \alpha < 3\mu - 2\frac{\varepsilon}{r}. \quad (C)$$

Pri kotrljanju diska bez klizanja, elementarni rad sile trenja klizanja iznosi

$$dA_T = -F_T dx_p,$$

gde je $dx_p = v_{pT} dt$. Pošto je brzina pola brzine jednaka nuli, tj. $v_{pT} = 0$, sledi da je i $dA_T = 0$, odnosno sledi važan zaključak: sila trenja klizanja pri kotrljanju bez klizanja ne vrši nikakav rad.

Reakcija podloge $R_N = mg \cos \alpha$ zajedno sa komponentom $mg \cos \alpha$ sile mg obrazuje otporni spreg podloge kotrljanju diska. Moment tog sprega iznosi $\varepsilon mg \cos \alpha$, a njegov elementarni rad $dA^\varepsilon = -(\varepsilon mg \cos \alpha) d\varphi$. Pošto se ovaj izraz može integraliti, rad ovog sprega iznosi

$$A^\varepsilon = -(\varepsilon mg \cos \alpha) \varphi,$$

gde je φ ugao obrtanja diska. Ovaj rad se troši na deformaciju podloge i njeno zagrevanje pri kotrljanju.

2. Kotrljanje sa klizanjem.

Napomena: U problemu kotrljanja sa klizanjem, sila trenja se mora tačno predpostaviti po smeru.

Ako se disk kotrlja sa klizanjem, tada tačka dodira tela sa podlogom više nije pol brzine ravanskog kretanja, tj. $\dot{x}_c \neq r\dot{\varphi}$, ali je onda sila trenja klizanja dostigla svoju najveću vrednost, pa važi

$$F_T = \mu R_N.$$

U ovom slučaju, ovo je potrebna četvrta jednačina, koja zajedno sa jednačinama (A) dovodi do rešenja problema

$$\begin{aligned} R_N &= mg \cos \alpha, \\ \ddot{x}_c &= g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha), \\ \ddot{\varphi} &= \frac{2}{r} g(\mu - \frac{\varepsilon}{r}) \cos \alpha. \end{aligned}$$

Sada je kretanje centra mase C potpuno nezavisno od obrtanja diska oko centra mase C i kretanje u ovom slučaju ima dva stepena slobode. Integracijom prethodnih jednačina, uz početne uslove da je $\dot{x}_c = 0$ i $\dot{\varphi} = 0$ za $t = 0$, dobija se

$$\dot{x}_c = g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)t, \quad \dot{\varphi} = \frac{2}{r} g(\mu - \frac{\varepsilon}{r})t \cos \alpha.$$

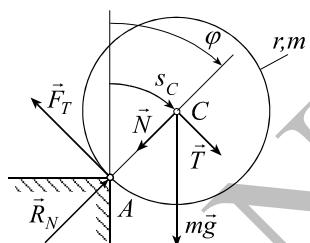
U slučaju kotrljanja sa klizanjem, tačka P diska, koja je pri kotrljanju bez klizanja bila pol brzine, ima sada brzinu $\vec{v}_p = \vec{v}_c + \vec{v}_p^c$, gde je brzina

tačke P u odnosu na tačku C , $v_p^c = r\dot{\varphi}$. Koristeći prethodne rezultate i činjenicu da su brzine \vec{v}_c i \vec{v}_p^c u pravcu x ose, dobija se brzina tačke P

$$v_p = \dot{x}_c - r\dot{\varphi} = (\tan \alpha - 3\mu + 2\frac{\varepsilon}{r})gt \cos \alpha,$$

koja je takođe u pravcu x ose. Pošto se disk kotrlja sa klizanjem ako je, prema (C), $\tan \alpha > 3\mu - 2\frac{\varepsilon}{r}$, tada je brzina tačke P uvek usmerena u pozitivnom smeru x ose.

Primer 43 Na ivici stola nalazi se hrapavi disk poluprečnika r i mase m . Centar mase C nalazi na vertikali iznad tačke A (Slika 3.40) i kreće u horizontalnom pravcu početnom brzinom $v_{c0} = \sqrt{krg/3}$, gde je k konstanta. Koeficijent trenja klizanja između stola i diska iznosi μ . Odrediti vrednost konstante k tako da u početnom trenutku kretanja u kontaktu sa površinom. Naći ugao obrtanja diska u odnosu na početni položaj kada on počinje da proklizava po površini.



Slika 3.40:

Za vreme kretanja, na disk deluju sledeće sile: težina diska $m\vec{g}$, reakcija veze \vec{R}_N , koja je u pravcu zajedničke normale diska i stola u dodirnoj tački A , i sila trenja klizanja \vec{F}_T koja je normalna na \vec{R}_N . Disk započinje kretanje obrtanjem oko tačke A , a kada sila trenja dostigne svoju najveću moguću vrednost on počinje i da kliza po ivici stola. I pored toga što je u početku kretanje obrtanje oko tačke A , pogodnije je kretanje posmatrati sa stanovišta ravanskog kretanja, jer su nam za analizu potrebne vrednosti sila R_N i F_T . Smer ugla φ određuje smer obrtanja.

Kretanje centra mase posmatra se u prirodnom koordinatnom sistemu. Diferencijalne jednačine ravanskog kretanja diska (3.74) i (3.76) glase

$$J_c \ddot{\varphi} = F_T r, \quad (A)$$

$$m \ddot{s}_c = -F_T + mg \sin \varphi, \quad (B)$$

$$m \frac{\dot{s}_c^2}{R_{kc}} = -R_N + mg \cos \varphi, \quad (C)$$

gde je poluprečnik krivine putanje centra mase $R_{kc} = r$. Pošto je, zbog obrtanja centra mase C oko tačke A , $s_c = r\varphi$, jednačine (B) i (C) postaju

$$mr\ddot{\varphi} = -F_T + mg \sin \varphi, \quad mr\dot{\varphi}^2 = -R_N + mg \cos \varphi. \quad (D)$$

Prema uslovima problema, odgovarajući početni uslovi glase

$$\varphi(0) = 0, \quad \dot{\varphi}(0) = \sqrt{\frac{kg}{3r}}.$$

Rešavanjem jednačine (A) i prve jednačine (D) po $\ddot{\varphi}$ i F_T , i pošto je moment inercije $J_c = mr^2/2$, dobija se

$$\ddot{\varphi} = \frac{2g}{3r} \sin \varphi, \quad F_T = \frac{mg}{3} \sin \varphi. \quad (E)$$

Prva jednačina (E), posle množenja sa $\dot{\varphi}$ i upotrebe posrednog diferenciranja² može da se integrali dajući

$$\frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 = -\frac{2g}{3r} \cos \varphi + C_1.$$

Određivanjem integracione konstante C_1 iz početnih uslova dobija se

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{g}{3r} [k + 4(1 - \cos \varphi)]. \quad (F)$$

Do ovog rezultata može se doći i koristeći zakon o promeni kinetičke energije diska za obrtanje oko tačke A ili za ravansko kretanje. Za obrtanje diska oko tačke A , ovaj zakon daje

$$\frac{1}{2}J_A\dot{\varphi}^2 - \frac{1}{2}J_A\dot{\varphi}_0^2 = mgr(1 - \cos \varphi).$$

Po Hajgens-Štajnerovoj teoremi je $J_A = J_c + mr^2 = 3mr^2/2$, pa se prethodna relacija korišćenjem početnih uslova svodi na izraz (F).

Zamenom rezultata (F) u drugu jednačinu (D) dobija se vrednost reakcije R_N

$$R_N = \frac{mg}{3}(7 \cos \varphi - a), \quad (G)$$

² $\ddot{\varphi} = \frac{d\dot{\varphi}}{dt} = \frac{d\dot{\varphi}}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi} \frac{d\dot{\varphi}}{d\varphi}$

gde je $a = 4 + k$.

Da bi disk u početnom trenutku kretanja ostao u kontaktu sa stolom, mora biti $R_N > 0$ za $\varphi = 0$. Ovaj uslov je zadovoljen za $a < 7$, odnosno $k < 3$.

Disk ne proklizava po površini sve dok je sila trenja klizanja F_T manja od granične sile trenja klizanja μR_N . Zbog toga, korišćenjem (G) i (E) dobija se nejednačina $\sin \varphi + \mu a < 7\mu \cos \varphi$, koja se može napisati u obliku

$$(1 + 49\mu^2) \sin^2 \varphi + 2\mu a \sin \varphi + \mu^2(a^2 - 49) < 0.$$

Rešavanjem ove nejednačine, i odbacujući u rešenju nerealne negativne vrednosti za ugao φ , dobija se

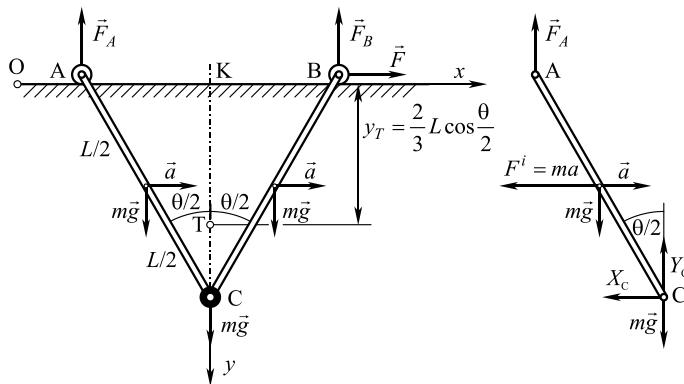
$$0 < \sin \varphi < \frac{\mu}{1 + 49\mu^2} \left[7\sqrt{1 + \mu^2(49 - a^2)} - a \right],$$

odnosno oblast u kojoj nema proklizavanja diska po površini.

3.5.3 Ravansko kretanje sistema krutih tela

U praksi često postoji problem sa ravanskim kretanjem više krutih tela koja su na neki način međusobno povezana. Tada svako telo u sistemu utiče na kretanje svih drugih tela sistema. Pri proučavanju ravanskog sistema krutih tela prvo se ustanovi broj stepeni slobode kretanja. Broj formiranih jednačina kretanja mora biti jednak stepenu slobode kretanja tog sistema. Pri postavljanju jednačina kretanja za sistem krutih tela u ravni mogu se formirati tri jednačine kretanja celog sistema i po tri jednačine kretanja za svako telo izdvojeno iz sistema krutih tela. Pri tom oslobađanju od veza do tada unutrašnje sile postaju spoljašnje. Nekad je pogodno koristiti i zakon o promeni kinetičke energije za ceo sistem krutih tela. Za proučavanje složenijih kretanja sistema krutih tela metode analitičke mehanike su daleko pogodnije od metoda vektorske mehanike.

Primer 44 Dva štapa AC i BC spojeni su masivnim zglobom u tački C čija je masa m . Krajevi štapova A i B imaju na sebi beskonačno male točkiće zanemarljive mase i mogu da klize po horizontalnom pravcu, kao što je na slici 3.41 prikazano. U tački B na sistem deluje konstantna horizontalna sila F usled čega štapovi zaklapaju neki ugao θ među sobom. Ako su dužine oba štapa iste i ako su im mase iste i iznose m , odrediti ugao θ pri ustaljenom kretanju sistema.



Slika 3.41:

Kada se kretanje ustali ugao θ se ne menja tokom kretanja. Ako se sistem posmatra kao celina onda zakon o kretanju sistema u pravcu Ox ose glasi

$$3ma = F, \quad (a)$$

gde je a ubrzanje celog sistema pri translatornom kretanju. Vidi se da je težiste

ovog nepromenljivog sistema na pravcu KC u tački T , koja je određena sa $y_T = (2/3)L \cos \frac{\theta}{2}$, gde je L dužina svakog štapa.

Pošto sistem ne vrši relativno kretanje u odnosu na tačku T to je moment količine relativnog kretanja sistema u odnosu na ovu tačku jednak nuli pa zakon o promeni momenta količine kretanja sistema u odnosu na središte T glasi

$$\sum M_i^{F_{is}} = F_A L \sin \frac{\theta}{2} - F_B L \sin \frac{\theta}{2} + F \frac{2}{3} L \cos \frac{\theta}{2} = 0. \quad (b)$$

Pošto se sistem ne kreće u vertikalnom pravcu zbir svih vertikalnih sila mora biti takođe jednak nuli

$$F_A + F_B - 3mg = 0. \quad (c)$$

Dalje, posmatrajmo recimo samo levi štap izdvojen iz sistema. Ako je inercijalna sila tog štapa $-ma$ nacrtana na slici onda po Dalamberovom principu zbir svih momenata spoljašnjih i inercijalnih sila za momentnu tačku C mora biti nula, odnosno dobija se jednačina

$$\sum M_C = F_A L \sin \frac{\theta}{2} - ma \frac{L}{2} \cos \frac{\theta}{2} - mg \frac{L}{2} \sin \frac{\theta}{2} = 0.$$

Odavde je

$$F_A = \frac{mg}{2} + \frac{ma}{2} \cot \frac{\theta}{2},$$

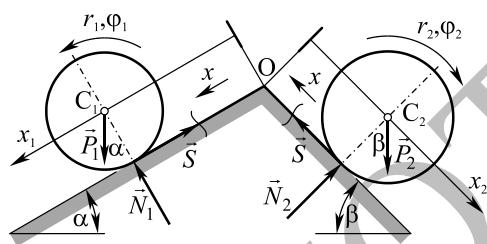
a iz (a), (b) i (c)

$$F_A = \frac{3mg}{2} - ma \cot \frac{\theta}{2}.$$

Izjednačavanjem ove dve vrednosti za F_A dovodi do konačnog rezultata

$$\cot \frac{\theta}{2} = \frac{2g}{3a}.$$

Primer 45 Dva homogena prava kružna cilindra težine P_1 i P_2 , kostrljaju se niz dve glatke strme ravni nagiba α i β . Cilindri su spojeni nerastegljivim užetom, koji je oko njih obavljen. Odrediti ubrzanje konca i silu u njemu kao i ugaona ubrzanja oba cilindra, ako se masa užeta zanemari (Slika 3.42).



Slika 3.42:

a desnog

Pošto je podloga glatka a konac nerastegljiv sigurno da cilindri proklizavaju po strmim ravnim. Neka je pomeranje užeta x . Ako uglove obrtanja cilindra obeležimo sa φ_1 i φ_2 onda je apsolutno ubrzanje centra levog cilindra

$$\ddot{x}_1 = r_1 \ddot{\varphi}_1 + \ddot{x},$$

$$\ddot{x}_2 = r_2 \ddot{\varphi}_2 - \ddot{x}.$$

Pošto su mase cilindara m_1 i m_2 odgovarajući momenti inercije su $J_{C_1} = m_1 r_1^2 / 2$ i $J_{C_2} = m_2 r_2^2 / 2$. Ako silu u užetu obeležimo sa S onda su diferencijalne jednačine kretanja cilindara niz odgovarajuće ravni i jednačine obrtanja cilindara oblika

$$\begin{aligned} m_1 (r_1 \ddot{\varphi}_1 + \ddot{x}) &= P_1 \sin \alpha - S, \\ \frac{1}{2} m_1 r_1^2 \ddot{\varphi}_1 &= S r_1, \end{aligned} \tag{a}$$

$$\begin{aligned} m_2 (r_2 \ddot{\varphi}_2 - \ddot{x}) &= P_2 \sin \beta - S, \\ \frac{1}{2} m_2 r_2^2 \ddot{\varphi}_2 &= S r_2. \end{aligned} \tag{b}$$

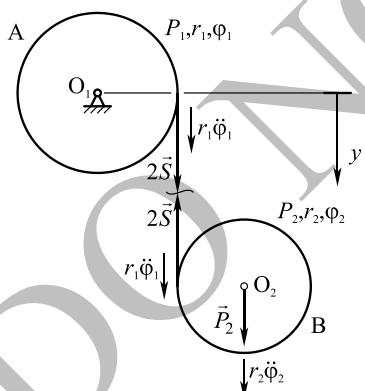
Ako se iz drugih jednačina (a) i (b) izračunaju $\ddot{\varphi}_1$ i $\ddot{\varphi}_2$ i zamene u prve jednačine (a) i (b) dobija se

$$\begin{aligned} m_1\ddot{x} + 3S &= P_1 \sin \alpha, \\ -m_2\ddot{x} + 3S &= P_2 \sin \beta. \end{aligned}$$

Rešavanjem ovih jednačina po \ddot{x} i S sledi

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \frac{P_1 \sin \alpha - P_2 \sin \beta}{P_1 + P_2} g, \\ S &= \frac{P_1 P_2 (\sin \alpha + \sin \beta)}{3(P_1 + P_2)}. \end{aligned}$$

Primer 46 Dva homogena prava kružna cilindra A i B težine P_1 odnosno P_2 poluprečnika osnova r_1 i r_2 obavijeni su sa dva gipka konca koji su simetrično raspoređeni u odnosu prema srednjim poprečnim presecima cilindra. Ose cilindra su horizontalne. Osa O_1 je nepokretna. Cilindar B pada pod dejstvom sile teže i dovodi u kretanje cilindar A. Odrediti ugaona ubrzanja cilindra i silu u užetu.



Slika 3.43:

Ako uglove obrtanja cilindra A i B obeležimo sa φ_1 i φ_2 onda je apsolutno ubrzanje centra cilindra B dato sa (Slika 3.43)

$$\ddot{y}_{O_2} = r_1 \ddot{\varphi}_1 + r_2 \ddot{\varphi}_2.$$

Ako sile u koncima označimo sa $2S$ onda jednačina obrtanja cilindra A glasi

$$\frac{P_1}{2g} r_1^2 \ddot{\varphi}_1 = 2S r_1. \quad (a)$$

Kretanje cilindra B i njegovo obrtanje oko ose O_2 opisano je jednačinama

$$\frac{P_2}{g} (r_1 \ddot{\varphi}_1 + r_2 \ddot{\varphi}_2) = P_2 - 2S, \quad (b)$$

$$\frac{P_2}{2g} r_2^2 \ddot{\varphi}_2 = 2S r_2, \quad (c)$$

Rešavanjem ovih jednačina (a)-(c) po $\ddot{\varphi}_1$, $\ddot{\varphi}_2$ i S dobija se

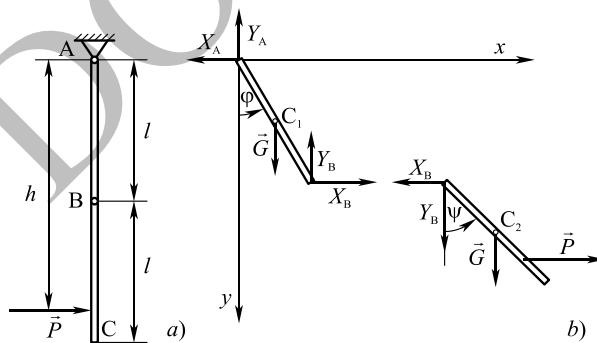
$$\begin{aligned}\ddot{\varphi}_1 &= \frac{2gP_2}{r_1(2P_2 + 3P_1)}, \\ \ddot{\varphi}_2 &= \frac{2gP_1}{r_2(2P_2 + 3P_1)}, \\ S &= \frac{P_1 P_2}{2(2P_2 + 3P_1)}.\end{aligned}$$

Primer 47 Dva jednaka homogena štapa AB i BC spojena su zglobom u tački B . Ceo sistem slobodno visi obešen u zglobu A u polju zemljine teže. U početnom trenutku, kada je sistem bio u miru na sistem počinje da deluje horizontalna sila P (Slika 3.44). Odrediti rastojanje h na kome treba da deluje sila P da bi sistem počeo da se kreće kao jedno kruto telo.

Razdvojimo sistem na delove AB i BC i dejstvo odgovarajućih veza zamениmo silama.

Formiraju se jednačine ravanskog kretanja za svako telo posebno

$$\begin{aligned}m\ddot{x}_{C_1} &= -X_A + X_B, \\ m\ddot{y}_{C_1} &= -Y_A - Y_B + G, \\ J_{C_1}\ddot{\varphi} &= X_A \frac{L}{2} \cos \varphi - Y_A \frac{L}{2} \sin \varphi + Y_B \frac{L}{2} \sin \varphi + X_B \frac{L}{2} \cos \varphi, \\ m\ddot{x}_{C_2} &= -X_B + P, \\ m\ddot{y}_{C_2} &= Y_B + G, \\ J_{C_2}\ddot{\psi} &= X_B \frac{L}{2} \cos \psi + Y_B \frac{L}{2} \sin \psi + P(h - \frac{3L}{2}) \cos \psi. \quad (\text{a})\end{aligned}$$



Slika 3.44:

Međutim veličine \ddot{x}_{C_1} , \ddot{y}_{C_1} , \ddot{x}_{C_2} , \ddot{y}_{C_2} , $\ddot{\varphi}$ i $\ddot{\psi}$ nisu nezavisne već su povezane kinematičkim relacijama koje proističu iz činjenica da je sistem sastavljen od krutih tela. Pošto se štapovi kreću u vertikalnoj ravni sistem ima samo

dva stepena slobode kretanja i položaj štapova je potpuno određen uglovima φ i ψ koje štapovi zaklapaju sa vertikalnim pravcem. U cilju nalaženja veličina \ddot{x}_{C_1} , \ddot{y}_{C_1} , \ddot{x}_{C_2} , \ddot{y}_{C_2} izraze se koordinate centra mase štapova preko uglova obrtanja φ i ψ . Sa slike je

$$\begin{aligned}x_{C_1} &= \frac{L}{2} \sin \varphi, & x_{C_2} &= L \sin \varphi + \frac{L}{2} \sin \psi, \\y_{C_1} &= \frac{L}{2} \cos \varphi, & y_{C_2} &= L \cos \varphi + \frac{L}{2} \cos \psi.\end{aligned}$$

Posle diferenciranja ovih izraza dobija se

$$\begin{aligned}\ddot{x}_{C_1} &= \frac{L}{2} \ddot{\varphi} \cos \varphi - \frac{L}{2} \dot{\varphi}^2 \sin \varphi, & \ddot{y}_{C_1} &= -\frac{L}{2} \ddot{\varphi} \sin \varphi - \frac{L}{2} \dot{\varphi}^2 \cos \varphi, \\ \ddot{x}_{C_2} &= L \ddot{\varphi} \cos \varphi - L \dot{\varphi}^2 \sin \varphi + \frac{L}{2} \ddot{\psi} \cos \psi - \frac{L}{2} \dot{\psi}^2 \sin \psi, \\ \ddot{y}_{C_2} &= -L \ddot{\varphi} \sin \varphi - L \dot{\varphi}^2 \cos \varphi - \frac{L}{2} \ddot{\psi} \sin \psi - \frac{L}{2} \dot{\psi}^2 \cos \psi.\end{aligned}\quad (b)$$

U početnom trenutku kretanja za $t = 0$ je $\varphi = \psi = 0$ i $\dot{\varphi} = \dot{\psi} = 0$ pa sledi

$$\begin{aligned}\ddot{x}_{C_10} &= \frac{L}{2} \ddot{\varphi}_0, & \ddot{y}_{C_10} &= 0, \\ \ddot{x}_{C_20} &= L(\ddot{\varphi}_0 + \frac{1}{2} \ddot{\psi}_0), & \ddot{y}_{C_20} &= 0.\end{aligned}\quad (c)$$

Sada jednačine (a) postaju

$$\begin{aligned}m \frac{L}{2} \ddot{\varphi}_0 &= -X_A + X_B, \\ 0 &= -Y_A - Y_B + G, \\ \frac{mL^2}{12} \ddot{\varphi}_0 &= X_A \frac{L}{2} + X_B \frac{L}{2}, \\ m L (\ddot{\varphi}_0 + \frac{1}{2} \ddot{\psi}_0) &= -X_B + P, \\ 0 &= Y_B + G, \\ \frac{mL^2}{12} \ddot{\psi}_0 &= X_B \frac{L}{2} + P(h - \frac{3L}{2}).\end{aligned}\quad (d)$$

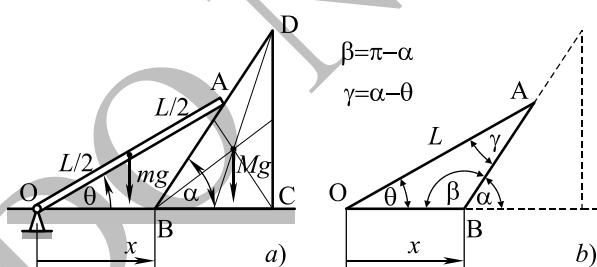
Ovo su osnovne relacije koje važe između sila i ubrzanja u početku kretanja, odnosno u trenutku $t = 0$. Zbog toga ovo nije sistem diferencijalnih jednačina, jer one važe samo u jednom trenutku vremena, već

algebarski sistem jednačina. U ovom sistemu (d) imamo 6 jednačina sa 6 nepoznatih. To su ugaona ubrzanja $\ddot{\varphi}_0$ i $\ddot{\psi}_0$ i reakcije veza X_A, Y_A, X_B i Y_B . Veličina h je unapred zadata. Prema uslovima zadatka telo kreće kao jedno kruto telo. Zbog toga ugaona ubrzanja tela moraju biti ista, odnosno $\ddot{\varphi}_0 = \ddot{\psi}_0$. Koristeći ovaj uslov i rešavanjem algebarskih jednačina (d) nalaze se sve nepoznate veličine

$$\begin{aligned} X_A &= -\frac{P}{11}, & Y_A &= 2G, \\ X_B &= \frac{2}{11}P, & Y_B &= -G, \\ \ddot{\varphi}_0 &= \ddot{\psi}_0 = \frac{6}{11} \frac{P}{mL}, \end{aligned}$$

dok između h i L postoji veza $h = (16/11)L$.

Primer 48 Teški štap mase m i dužine L , vezan je krajem O zglobom za horizontalnu ravan dok se drugim krajem naslanja na kosu ravan klina mase M i nagiba α . (Slika 3.45). U početnom trenutku sistem je bio u miru a štap je zaklapao ugao θ_0 sa horizontalnom ravni. Odrediti brzinu klina u trenutku kada štap zauzme horizontalan položaj. Trenje zanemariti.



Slika 3.45:

Primenjuje se zakon o promeni kinetičke energije. Pošto su sve veze idealne ni jedna reakcija ne vrši rad a takođe i sila Mg . Rad sile zemljine teže mg pri spuštanju štapa do horizontalne ravni iznosi

$$A_{mg} = mg \frac{L}{2} \sin \theta_0. \quad (\text{a})$$

Iz trougla AOB pomoću sinusne teoreme dobija se

$$\frac{\overline{OB}}{\sin(\alpha - \theta)} = \frac{L}{\sin(\pi - \alpha)}.$$

Odavde je pomeranje klina

$$x = \overline{OB} = L \frac{\sin(\alpha - \theta)}{\sin \alpha},$$

pa se diferenciranjem po vremenu dobija brzina klina

$$\dot{x} = -L \frac{\cos(\alpha - \theta)}{\sin \alpha} \dot{\theta}, \quad (b)$$

Kinetička energija sistema je

$$E_k = \frac{1}{2} J_O \dot{\theta}^2 + \frac{M}{2} \dot{x}^2 = \frac{1}{2} \frac{1}{3} m L^2 \dot{\theta}^2 + \frac{M}{2} L^2 \frac{\cos^2(\alpha - \theta)}{\sin^2 \alpha} \dot{\theta}^2.$$

Početna kinetička energija sistema jednaka je nuli a kad štap dodirne pod ona iznosi

$$E_k(\theta = 0) = \frac{1}{6} m L^2 \dot{\theta}_0^2 + \frac{M}{2} L^2 \dot{\theta}_0^2 \cot^2 \alpha.$$

Zakon o promeni kinetičke energije glasi

$$E_k(\theta = 0) - E_{k0} = A_{mg},$$

odnosno

$$\frac{1}{6} m L^2 \dot{\theta}_0^2 + \frac{M}{2} L^2 \dot{\theta}_0^2 \cot^2 \alpha = mg \frac{L}{2} \sin \theta_0.$$

Konačno se odavde dobija

$$\dot{\theta}_0^2 = \frac{3mg \sin \theta_0}{L(m + 3M \cot^2 \alpha)},$$

a iz (b) brzina klina

$$\dot{x}(\theta = 0) = \sqrt{\frac{3mgL \sin \theta_0}{m \tan^2 \alpha + 3M}}.$$

3.6 Obrtanje tela oko nepokretne tačke

3.6.1 Osnovni pojmovi

Ako je kretanje krutog tela ograničeno samo jednim nepokretnim sfernim zglobom, za koji je telo vezano, onda se radi o obrtanju krutog tela oko