

**Приказ решења диференцијалне једначине
која даје зависност струје RL потрошача од напона на његовим крајевима**

1. део – побуда (U_p) константна по периодима времена

$$L \cdot \frac{di}{dt} + R \cdot i = U_p, \quad U_p = 0V \text{ или } U_p = U_B$$

У почетном кораку једначина ће бити приказана у преуређеном облику:

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L} \cdot i = \frac{1}{L} \cdot U_p$$

или

$$\frac{di}{dt} + K \cdot i = M$$

где је $K=R/L$ и $M=U_p/L$.

У ком облику се добија решење хомогеног дела једначине, тј.

$$\frac{di}{dt} + K \cdot i = 0 ?$$

Када се други сабирак пребаци на леву страну и цео израз интегрални у времену:

$$\int \frac{di}{i} = \int -K \cdot dt \Rightarrow \ln(i) + A = -K \cdot t + B \text{ или } \ln(i) = -K \cdot t + C$$

где су A, B и C чланови који уважавају почетне услове.

Следи:

$$i = e^{-K \cdot t + C} = D \cdot e^{-K \cdot t}$$

Уважавањем почетног услова у тренутку t_0 , тј. $i(t_0)=I_0$, добија се

$$I_0 = D \cdot e^{-K \cdot t_0} \Rightarrow D = I_0 \cdot e^{K \cdot t_0} \Rightarrow i = I_0 \cdot e^{-K \cdot (t-t_0)}.$$

Да би се решила почетна једначина, значи уважила и побуда, U_p/L , оставиће се могућност да се i изрази преко производа два временски променљива члана: $i=u \cdot v$. Следи:

$$\frac{di}{dt} = \frac{du}{dt} \cdot v + u \cdot \frac{dv}{dt}$$

а када се уврсти у почетни израз

$$\frac{du}{dt} \cdot v + u \cdot \frac{dv}{dt} + K \cdot u \cdot v = M \text{ или } \frac{du}{dt} \cdot v + u \left(\frac{dv}{dt} + K \cdot v \right) = M.$$

Нека v задовољи хомогени део решења i :

$$\frac{dv}{dt} + K \cdot v = 0 \Rightarrow v = V_0 \cdot e^{-K \cdot (t-t_0)}$$

а онда на u остаје да задовољи остатак израза:

$$\frac{du}{dt} \cdot V_0 \cdot e^{-K \cdot (t-t_0)} = M \quad \text{или} \quad du = \frac{M}{V_0} \cdot e^{-K \cdot t_0} \cdot e^{K \cdot t} \cdot dt$$

Пошто се обе стране израза интеграле, добиће се

$$u = \frac{M \cdot e^{-K \cdot t_0}}{V_0 \cdot K} \cdot e^{K \cdot t} + E.$$

Уважавањем почетних услова, тј. $u(t_0)=U_0$ може се одредити члан E :

$$U_0 = \frac{M}{V_0 \cdot K} + E \Rightarrow E = U_0 - \frac{M}{V_0 \cdot K}$$

односно

$$u = U_0 + \frac{M}{V_0 \cdot K} \cdot (e^{K \cdot (t-t_0)} - 1).$$

Враћамо се траженој променљивој i

$$i = u \cdot v = \left[U_0 + \frac{M}{V_0 \cdot K} \cdot (e^{K \cdot (t-t_0)} - 1) \right] \cdot [V_0 \cdot e^{-K \cdot (t-t_0)}] = \left(U_0 \cdot V_0 - \frac{M}{K} \right) \cdot e^{-K \cdot (t-t_0)} + \frac{M}{K}.$$

Уважавањем почетног услова $i(t_0)=I_0$, добија се $I_0 = U_0 \cdot V_0$, односно

$$i = \left(I_0 - \frac{M}{K} \right) \cdot e^{-K \cdot (t-t_0)} + \frac{M}{K}$$

а када се замене M и K и да је $\tau=1/K=L/R$ временска константа потрошача, коначно решење диференцијалне једначине је

$$i = \left(I_0 - \frac{U_P}{R} \right) \cdot e^{-\frac{(t-t_0)}{\tau}} + \frac{U_P}{R}.$$

Ако се препозна да i тежи ка вредности $I_\infty=U_P/R$ како тече време, израз се може приказати и у облику:

$$i = (I_0 - I_\infty) \cdot e^{-\frac{(t-t_0)}{\tau}} + I_\infty.$$

2. део – потрошач садржи константан члан (E), а побуда (u_p) је просторепериодична

$$L \cdot \frac{di}{dt} + R \cdot i + E = u_p, \quad u_p = \sqrt{2} \cdot U_{AC} \cdot \sin(\omega t)$$

Једначину ћемо разматрати у облику:

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L} \cdot i = -\frac{1}{L} \cdot E + \frac{1}{L} \cdot u_p.$$

Почетна вредност струје i у тренутку t_0 , односно почетном углу $\omega t_0 = \alpha$ износи

$$i(\alpha) = I_{min}.$$

Примениће се суперпозиција у анализи дејства оба члана побуде. Струја, i , се може приказати као збир чинилаца од којих један потиче од члана E и имаће експоненцијални облик одзива, i^{EXP} , а други, који потиче од простопериодичне побуде, ће имати простопериодичан облик, $i^\sim$:

$$i = i^{EXP} + i^\sim$$

где је i^{EXP} решење једначине:

$$\frac{di^{EXP}}{dt} + \frac{R}{L} \cdot i^{EXP} = -\frac{1}{L} \cdot E,$$

а $i^\sim$ је решење једначине:

$$\frac{di^\sim}{dt} + \frac{R}{L} \cdot i^\sim = \frac{1}{L} \cdot u_p.$$

Применом решења добијеног из претходног дела следи:

$$i^{EXP}(t) = \left(I_0^{EXP} + \frac{E}{R} \right) \cdot e^{-\frac{(t-t_0)}{\tau}} - \frac{E}{R}.$$

или када се време нормализује кружном учестаношћу, ω , тј. пређе у домен угла, и за почетни угао узме $\omega t_0 = \alpha$:

$$i^{EXP}(\omega t) = \left(I_\alpha^{EXP} + \frac{E}{R} \right) \cdot e^{-\frac{(\omega t - \alpha)}{\omega \tau}} - \frac{E}{R}.$$

Простопериодичан део $i^\sim$ се може срачунати преко импедансе потрошача на начин:

$$i^\sim = \sqrt{2} \cdot I^\sim \cdot \sin(\omega t - \varphi)$$

где је

$$I^\sim = \frac{U_{AC}}{|Z_{AC}|} = \frac{U_{AC}}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \quad \text{и} \quad \varphi = \arctg \frac{\omega L}{R}.$$

У почетном тренутку који одговара $\omega t_0 = \alpha$ ће бити

$$i^\sim(\alpha) = \sqrt{2} \cdot I^\sim \cdot \sin(\alpha - \varphi).$$

Почетне вредности појединачних чланова морају задовољити

$$i(\alpha) = I_{min} = i_{\alpha}^{EXP} + i^{\sim}(\alpha)$$

одакле следи

$$i_{\alpha}^{EXP} = I_{min} - \sqrt{2} \cdot I^{\sim} \cdot \sin(\alpha - \varphi).$$

Заменом добијених израза за одзиве и почетне услове добија се за i :

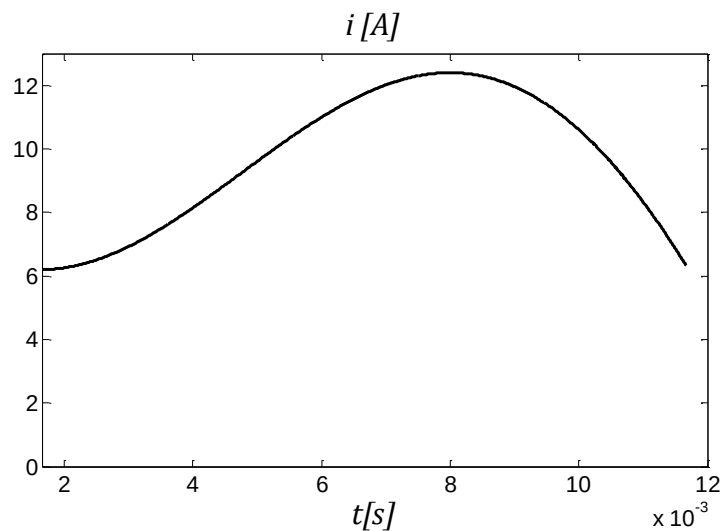
$$i(\omega t) = \left(I_{min} - \sqrt{2} \cdot I^{\sim} \cdot \sin(\alpha - \varphi) + \frac{E}{R} \right) \cdot e^{-\frac{(\omega t - \alpha)}{\omega \tau}} - \frac{E}{R} + \sqrt{2} \cdot I^{\sim} \cdot \sin(\omega t - \varphi)$$

где су $I^{\sim}$ и φ дати горе наведеним изразима.

На слици је дат одзив струје i добијен применом крајњег израза за следеће податке о колу:
 $U_{AC}=230V$, $f=50Hz$, $E_{DC}=129,33V$, $R_{DC}=5\Omega$, $L_{DC}=100mH$,

за угао укључења: $\alpha=\pi/6$,

и почетни услов: $I_{min}=6,2A$ (који одговара устаљеном стању).



Временски облик струје i добијен применом крајњег израза