

ИЗВЕШТАЈ О ОЦЕНИ ДОКТОРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ
REPORT ON THE ASSESSMENT OF THE DOCTORAL DISSERTATION

I ПОДАЦИ О КОМИСИЈИ
DATA ABOUT THE COMMITTEE

1. Датум и орган који је именовао комисију:

07. 09. 2023. декан Факултета техничких наука, Универзитета у Новом Саду је на основу одлуке Наставно-научног већа Факултета техничких наука у Новом Саду, а у складу са Статутом факултета, именовао Комисију за оцену и одбрану докторске дисертације.

Date and authority that appointed the Committee:

September 7, 2023, the dean of the Faculty of Technical Sciences appointed the committee for the evaluation and defense of the doctoral dissertation, based on the decision of the Academic council of the Faculty of Technical Sciences, University of Novi Sad, in accordance with the Faculty Statute.

2. Састав комисије у складу са *Правилима докторских студија Универзитета у Новом Саду*:

The committee members in accordance with *the Rules of Doctoral Studies of the University of Novi Sad*:

1. Др Јелена Иветић Dr. Jelena Ivetić	Ванредни професор Associate Professor	Теоријска и примењена математика, 01. 04. 2021. Theoretical and applied mathematics, April 1, 2021.
презиме и име surname and name	звање title	ужа научна област и датум избора narrow scientific field and date of election to the title
Факултет техничких наука, Нови Сад Faculty of Technical Sciences, Novi Sad		Председник President
установа у којој је запослен-а institution where he/she is employed		функција у комисији function in the commission

- | | | | |
|----|---|------------------------------------|---|
| 2. | Др Микеле Пагани
Dr. Michele Pagani | Редовни професор
Full Professor | Информатика
Informatics |
| | презиме и име
surname and name | звање
title | ужа научна област и датум избора
narrow scientific field and date of election to the title |
| | Laboratoire de l'Informatique du Parallélisme
École Normale Supérieure de Lyon, France | | Члан
Member |
| | установа у којој је запослен-а
institution where he/she is employed | | функција у комисији
function in the commission |
-
- | | | | |
|----|---|---------------------------------------|---|
| 3. | Др Зоран Петрић
Dr. Zoran Petrić | Научни саветник
Research Professor | Математика, математичка
логика, 19. 11. 2008.
Mathematics, Mathematical
logic, November 19, 2008 |
| | презиме и име
surname and name | звање
title | ужа научна област и датум избора
narrow scientific field and date of election to the title |
| | Математички институт САНУ, Београд
Mathematical Institute SANU, Belgrade | | Члан
Member |
| | установа у којој је запослен-а
institution where he/she is employed | | функција у комисији
function in the commission |
-
- | | | | |
|----|---|---|---|
| 4. | Др Јована Обрадовић
Dr. Jovana Obradović | Научни сарадник
Research Assistant Professor | Математика, алгебарска
топологија, 29. 12. 2020.
Mathematics, algebraic
topology, December 29,
2020 |
| | презиме и име
surname and name | звање
title | ужа научна област и датум избора
narrow scientific field and date of election to the title |
| | Математички институт САНУ, Београд
Mathematical Institute SANU, Belgrade | | Члан
Member |
| | установа у којој је запослен-а
institution where he/she is employed | | функција у комисији
function in the commission |

5.	Др Силвиа Гилезан Dr. Silvia Gilezan	Редовни професор Full Professor	Теоријска и примењена математика, 24. 02. 2005. Theoretical and applied mathematics, February 2, 2005
	презиме и име surname and name	звање title	ужа научна област и датум избора narrow scientific field and date of election to the title
	Факултет техничких наука, Нови Сад Faculty of Technical Sciences, Novi Sad		Ментор Mentor
	установа у којој је запослен-а institution where he/she is employed		функција у комисији function in the commission
6.	Др Зоран Огњановић Dr. Zoran Ognjanović	Научни саветник Research Professor	Математика, математичка логика, 19. 11. 2008. Mathematics, Mathematical logic, November 19, 2008
	презиме и име surname and name	звање title	ужа научна област и датум избора narrow scientific field and date of election to the title
	Математички институт САНУ, Београд Mathematical Institute SANU, Belgrade		Ментор Mentor
	установа у којој је запослен-а institution where he/she is employed		функција у комисији function in the commission
II ПОДАЦИ О КАНДИДАТУ DATA ABOUT THE CANDIDATE			
1. Име, име једног родитеља, презиме: Симона, Ђорђа, Прокић (рођ. Каштеровић) Name, parent name, surname: Simona, Đorđa, Prokić (née Kašterović)			
2. Датум рођења, општина, држава: 12. 3. 1992, Брчко, Босна и Херцеговина Birth date, place and country: March 12, 1992, Brčko, Bosnia and Herzegovina			

3. Назив факултета, назив претходно завршеног нивоа студија и стечени стручни/академски назив: Факултет техничких наука, Нови Сад, мастер академске студије Математика у техници, мастер инжењер примењене математике Name of the faculty, name of the study program of graduate academic studies and acquired professional title: Faculty of Technical Sciences, Novi Sad, master academic studies Mathematics in Engineering, Master in Applied Mathematics 4. Година уписа на докторске студије и назив студијског програма докторских студија: 2017, Математика у техници Year of enrollment in doctoral studies and the name of the study program of doctoral studies: 2017, Mathematics in Engineering
III НАСЛОВ ДОКТОРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ: III PHD THESIS TITLE: „Вероватносно закључивање у израчунавању и теорији функционалних типова” “Probabilistic reasoning in computation and simple type theory”
ПРЕГЛЕД ДОКТОРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ: OVERVIEW OF THE DOCTORAL DISSERTATION Навести кратак садржај са назнаком броја страница, поглавља, слика, схема, графикона и сл. Докторска дисертација је написана на енглеском језику, на 179 страна и подељена је у 6 поглавља са следећим садржајем: Апстракт (на енглеском језику) Резиме (на српском језику) 1 Увод 1.1 Вероватносно програмирање 1.2 Семантике могућих светова 1.3 Вероватносне логике 1.4 Главни доприноси и структура тезе 2 Вероватносно израчунавање 2.1 Вероватносни лемба рачун 2.1.1. Синтакса 2.1.2. Операциона семантика 2.1.3. Контекстна еквиваленција 2.2 Вероватносна апликативна бисимулација 2.2.1. Симулација је пре-конгруенција 2.3 Пуна апстракција 2.4 Закључак 3 Крипкеове семантике за цео рачун са функционалним типовима 3.1 Цела комбинаторна логика са функционалним типовима 3.2 Крипкеове семантике за $CL^{\rightarrow, \times, +}$ 3.3 Сагласност и потпуност $CL^{\rightarrow, \times, +}$ 3.4 Закључак 4 Логика комбинаторне логике 4.1 Комбинаторна логика са функционалним типовима 4.2 Логика комбинаторне логике 4.2.1. Синтакса LCL

- 4.2.2. Аксиоматизација за LCL
- 4.2.3. Семантика за LCL
- 4.3 Сагласност и потпуност једнакосне теорије
- 4.4 Сагласност и потпуност аксиоматизације LCL
 - 4.4.1. Сагласност LCL
 - 4.4.2. Јака потпуност LCL
- 4.5 Сагласност и потпуност комбинаторне логике са функционалним типовима
- 4.6 Закључак
- 5 Вероватносно закључивање у теорији типова
 - 5.1 Логика LPP_2
 - 5.1.1. Синтакса LPP_2
 - 5.1.2. Семантика за LPP_2
 - 5.1.3. Аксиоматизација за LPP_2
 - 5.1.4. Сагласност и јака потпуност логике LPP_2
 - 5.2 Синтакса PCL
 - 5.3 Семантика за PCL
 - 5.4 Аксиоматизација за PCL
 - 5.5 Сагласност и јака потпуност логике PCL
 - 5.6 Закључак
- 6 Закључак
 - 6.1 Кратак преглед резултата
 - 6.2 Стање у области
 - 6.3 Даљи правци истраживања

Литература

Дисертација садржи 169 литературних јединица. Кључна докуменатација дата на почетку тезе садржи изводе и основне податке о докторској дисертацији на српском и енглеском језику.

OVERVIEW OF THE DOCTORAL DISSERTATION

The doctoral dissertation is written in English, it contains 179 pages and it is divided into 6 chapters with the following content:

Abstract

Summary in Serbian

- 1. Introduction
 - 1.1 Probabilistic programming
 - 1.2 Possible world semantics
 - 1.3 Probability logics
 - 1.4 Main contributions and the structure of the thesis
- 2. Probabilistic computation
 - 2.1 Probabilistic lambda calculus
 - 2.1.1 Syntax
 - 2.1.2 Operational semantics
 - 2.1.3 Context equivalence
 - 2.2 Probabilistic applicative bisimulation
 - 2.2.1 Similarity is a precongruence
 - 2.3 Full abstraction
 - 2.4 Concluding remarks
- 3. Kripke-style semantics of full simply typed calculus
 - 3.1 Full simply typed combinatory logic
 - 3.2 Kripke-style semantics of $CL^{\neg, \times, +}$

- 3.3 Soundness and completeness of $CL^{-,\times,+}$
- 3.4 Concluding remarks
- 4. Logic of combinatory logic
 - 4.1 Simply typed combinatory logic
 - 4.2 Logic of combinatory logic
 - 4.2.1 Syntax LCL
 - 4.2.2 Axiomatization of LCL
 - 4.2.3 Semantics of LCL
 - 4.3 Soundness and completeness of the equational theory
 - 4.4 Soundness and completeness of the axiomatization of LCL
 - 4.4.1 Soundness of LCL
 - 4.4.2 Strong completeness of LCL
 - 4.5 Soundness and completeness of the simply typed combinatory logic
 - 4.6 Concluding remarks
- 5. Probabilistic reasoning in type theory
 - 5.1 The logic LPP_2
 - 5.1.1 Syntax LPP_2
 - 5.1.2 Semantics of LPP_2
 - 5.1.3 Axiomatization of LPP_2
 - 5.1.4 Soundness and strong completeness of LPP_2
 - 5.2 Syntax PCL
 - 5.3 Semantics of PCL
 - 5.4 Axiomatization of PCL
 - 5.5 Soundness and completeness of PCL
 - 5.6 Concluding remarks
- 6. Conclusion
 - 6.1 Summary of contributions
 - 6.2 Related work
 - 6.3 Future work

Bibliography

The dissertation contains 169 literature references. The documentation given at the beginning of the thesis contains extracts and fundamental data about the doctoral dissertation in both Serbian and English.

V ВРЕДНОВАЊЕ ПОЈЕДИНИХ ДЕЛОВА ДОКТОРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ: EVALUATION OF INDIVIDUAL PART OF THE DOCTORAL DISSERTATION:

Докторска дисертација се састоји од 6 поглавља. Кратак преглед сваког поглавља представљен је у наставку:

Апстракт

Апстракт даје кратак сажетак тезе, истиче оригинални допринос дисертације и даје кратак преглед структуре дисертације по поглављима. Такође, наведени су оригинални научни радови кандидаткиње који су објављени, а који су проистекли из истраживања у оквиру тезе.

Прво поглавље - Увод

У поглављу 1 дат је преглед историјског развоја формалних система који су изучавани у тези. Ово поглавље је подељено у три целине. У поглављу 1.1 је дат кратак увод у развој и значај вероватносних програма. Затим је описан један од основних проблема у овој програмској парадигми, а то је еквивалентност програма. Кандидаткиња је описала познате резултате у литератури и нека од отворених питања који су били основна мотивација за истраживањем. У поглављу 1.2 детаљано је описан историјски развој семантика могућих светова при чему су истакнуте основне карактеристике ових семантика. Такође, наведени су неки од најзначајнијих доказа потпуности разних логика у односу на семантике могућих светова. Наглашен је значај Крипкеових семантика, које су настале као семантике за модалне логике, али су касније прилагођене за интуиционистичку логику, друге неklasичне логике као и типизирани ламбда рачун. Поголавље 1.3 описује историјски развој вероватносних логика. Кандидаткиња је описала развој од античких времена до данас, када су развијена вероватносна проширења разних логика чиме су добијена окружења за вероватносно резонување о различитим логичким структурама.

Друго поглавље - Вероватносно израчунавање

У поглављу 2 изучаван је вероватносни ламбда рачун $\Lambda_{\Phi, \text{let}}$, односно нетипизирани ламбда рачун проширен са два оператора: вероватносним оператором избора Φ и let-in оператором. Посматран је рачун где је имплементирана лења позив-по-имену стратегија евалуације. На самом почетку поглавља јасно су издвојени главни резултати овог поглавља и представљена је структура поглавља. У поглављу 2.1 уведени су основни појмови везани за ламбда рачун $\Lambda_{\Phi, \text{let}}$. Дефинисани су језик посматраног рачуна, операциона семантика и контекстна еквиваленција. У поглављу 2.2 уведен је појам вероватносне апликативне бисимулације за $\Lambda_{\Phi, \text{let}}$ -рачун. Најпре је уведен појам означеног ланца Маркова и релације вероватносоне апликативне бисимулације над њим. Затим је операциона семантика за $\Lambda_{\Phi, \text{let}}$ представљена као означен ланац Маркова и дефинисана је вероватносна апликативна бисимулација за $\Lambda_{\Phi, \text{let}}$.

Први резултат представљен у овом поглављу је доказ да је вероватносна апликативна бисимулација конгруенција, што за последицу има да је садржана у контекстној еквиваленцији. Овај доказ је добијен применом Ховеовог метода. Други главни резултат је доказ да важи и обрат, односно доказ да је контекстна еквиваленција садржана у вероватносно апликативној бисимулацији. Са циљем да се докаже и овај смер, у поглављу 2.3 уведен је појам теста и релација еквиваленције тестирањем. Коришћен је познат резултат да се релације бисимулације и еквиваленције тестирањем подударују. Кандидат је доказао да за сваки тест постоји контекст такав да је вероватноћа успешности теста примењеног на терм једнака вероватноћи конвергенције терма који се добије применом контекста на дати терм. Као последица овог тврђења добија се да је контекстна еквиваленција садржана у еквиваленцији тестирањем. Узимајући у обзир претходно наведене резултате, доказано је да се три релације еквиваленције: контекстна еквиваленција, бисимулација и еквиваленција тестирањем, поклапају. Резултати овог поглавља представљају оригиналне резултате објављене у [4].

Треће поглавље - Крипкеове семантике за цео рачун са функционалним типовима

У трећем поглављу је проучаван $CL^{\rightarrow, *, +}$ -рачун, односно комбинаторна логика са функционалним типовима, која је проширена типовима суме, типовима производа, празним типом и јединичним типом. На самом почетку поглавља јасно су издвојени главни резултати овог поглавља и представљена је структура поглавља. У поглављу 3.1 су јасно дефинисани основни појмови везани за $CL^{\rightarrow, *, +}$ -рачун, дефинисани су језик рачуна, операциона семантика и типски систем. Главни допринос овог поглавља је дефиниција нових семантика за $CL^{\rightarrow, *, +}$ -рачун. У поглављу 3.2 дефинисане су Крипкеове семантике за $CL^{\rightarrow, *, +}$ -рачун. Дефиниција је дата у неколико корака:

1. Дефинисана је Крипкеова апликативна структура за $CL^{\rightarrow, *, +}$.
2. Дефинисан је појам екстензионалне Крипкеове апликативне структуре за $CL^{\rightarrow, *}$.
3. Дефинисан је појам Крипкеове апликативне структуре са комбинаторима.
4. Дефинисан је Крипкеов модел као екстензионална Крипкеова апликативна структура са комбинаторима којој је придружена валуација променљивих.

Главни резултати овог поглавља јесу докази сагласности и потпуности $CL^{\rightarrow, *, +}$ -рачуна у односу на предложене семантике, који су дати у поглављу 3.3. Такође, показано је да је једнакосна теорија $CL^{\rightarrow, *, +}$ -рачуна сагласна и потпуна у односу на предложене семантике. Како се дефиниције једнакосне теорије и типског система преклапају (сваки систем у својој дефиницији користи правила другог система), сагласност једнакосне теорије и сагласност типског система су доказани у оквиру једног тврђења применом математичке индукције. Доказ је представљен јасно и са довољно детаља. Потпуност једнакосне теорије и потпуност типског система су доказани као одвојена тврђења користећи сличну идеју. Кандидаткиња је дефинисала посебну класу модела које је назвала канонички модели и доказала неке њихове особине из којих су следиле потпуност једнакосне теорије и потпуност типског система. Крипкеове семантике представљене у овом поглављу су први пут уведене у [1].

Четврто поглавље - Логика комбинаторне логики

У четвртном поглављу је уведен нови формални систем, Логика комбинаторне логики LCL , који представља исказно проширење комбинаторне логики са функционалним типовима. На самом почетку поглавља јасно су издвојени главни резултати овог поглавља и представљена је структура поглавља. У поглављу 4.1 су дефинисани основни појмови везани за комбинаторну логику са функционалним типовима. Јасно су представљени језик, једнакосна теорија и типски систем, као и неке особине типског система. Логика LCL је уведена у поглављу 4.2, где су дефинисани језик логики LCL , аксиоматизација и семантика. Логика LCL је добијена дефинисањем класичне исказне логики над комбинаторном логиком са функционалним типовима. Значај логики LCL се огледа у томе што она представља формални систем за исказно резонување о типизираним комбинаторним термима, што омогућава примену метода као што су DPLL процедура, метод резолуције, SAT решавачи, SMT решавачи и други, на комбинаторну логику са функционалним типовима. Аксиоматизација логики LCL је добијена из типског система комбинаторне логики са функционалним типовима и аксиоматског система класичне исказне логики. Семантика логики LCL је дефинисана као екстензионална апликативна структура проширена специјалним елементима, који одговарају основним комбинаторима, којој је придружена валуација променљивих.

У овом поглављу је представљено неколико оригиналних резултата. Прво је у поглављу 4.3 доказано да је једнакосна теорија комбинаторне логики са функционалним типовима сагласна и потпуна у односу на предложену семантику за LCL . У поглављу 4.4 су дати детаљни докази сагласности и јаке потпуности аксиоматизације логики LCL у односу на предложену семантику. У оба доказа сагласности је примењен принцип математичке индукције, док су докази потпуности изведени дефинисањем посебне класе LCL -модела и доказивањем њихових особине из којих следе докази потпуности. У доказу јаке потпуности аксиоматизације логики LCL је примењена Хенкинова конструкција доказа. Поглавље 4.5 даје доказ да је предложена семантика за LCL такође нова семантика за комбинаторну логику са функционалним типовима. Посматрана је комбинаторна логика за функционалним типовима проширена правилом за типизирање које

осигурава да једнаки терми имају исти тип. Дати су докази да је овај систем сагласан и потпун у односу на семантику за логику *LCL*. Тиме је доказано да је логика *LCL* заправо конзервативно проширење комбинаторне логики са функционалним типовима.

Пето поглавље - Вероватносно закључивање у теорији типова

Пето поглавље уводи вероватносно проширење логики комбинаторне логики, *PCL*. На самом почетку поглавља јасно су издвојени главни резултати овог поглавља и представљена је структура поглавља. Кандидат је најпре у поглављу 5.1 представио логику *LPP₂*, која је вероватносно проширење класичне исказне логики, јер је логика *PCL* развијена примењујући сличан метод као за логику *LPP₂*. Поглавље 5.2 дефинише језик логики *PCL*, који је добијен проширењем језика логики *LCL* вероватносним операторима облика $P \geq s$ са следећим значењем: вероватноћа је бар s . У поглављу 5.3 је дефинисана семантика логики *PCL*. Семантика је заснована на структурама дефинисаним над могућим световима, где у сваком свету постоји коначно адитивна мера. Доказано је да логика *PCL* није компактна, што за последицу има да за коначну аксиоматизацију која је сагласна неће важити јака потпуност. У поглављу 5.4 представљена је бесконачна аксиоматизација логики *PCL*, која има једно правило са пребројивим скупом премиса. Аксиоматизација логики *PCL* је добијена из аксиоматизације логики *LCL* и аксиоматизације вероватносне логики. Логика *PCL* представља формални модел за вероватносно закључивање о типизираним изразима. Идеја о формалном моделу за вероватносно резонување о типизираним изразима је први пут представљена у радовима [3] и [5].

Главни резултат овог поглавља јесу докази сагласности и јаке потпуности аксиоматизације логики *PCL* у односу на предложене семантике, који су дати у поглављу 5.5. Доказ сагласности је добијен применом математичке индукције. У доказу јаке потпуности је примењена Хенкинова конструкција доказа. Најпре је доказано да сваки конзистентан скуп може бити проширен до максимално конзистентног скупа. Затим је за дати максимално конзистентан скуп дефинисан канонички модел који задовољава тачно оне формуле које припадају скупу. Помоћу овог модела доказано је да је сваки конзистентан скуп задовољив, одакле следи јака потпуност логики *PCL*.

Шест поглавље - Закључак

Шесто поглавље је подељено у три целине. У поглављу 6.1 су сумирани научни доприноси кандидаткиње представљени у дисертацији. У поглављу 6.2 је представљено стање у областима истраживања које су повезане са темом дисертације укључујући директно цитирање релевантне литературе. Поглавље 6.3 садржи дискусију о отвореним проблемима и могућностима за даљи наставак истраживања за сваку од области проучаваних у овој тези.

Попис **литературе** дат је после шестог поглавља. Литература је веома исцрпна, приказана је прегледно и цитирана на адекватан начин. Такође, обухвата најзначајније радове из области, који су релевантни за проучавану тематику.

На основу свега наведеног, **Комисија позитивно оцењује све делове докторске дисертације.**

V EVALUATION OF INDIVIDUAL PART OF THE DOCTORAL DISSERTATION

Abstract gives a brief summary of the doctoral dissertation, presents original results of the dissertation and gives the overview of the chapters of the dissertation. Also, the list of the published papers that are related to the research topic is given.

Chapter 1-Introduction

Chapter 1 gives an overview of the historical development of the formal systems that are studied in the dissertation. This chapter comprises three sections. In Section 1.1, an introduction into development and the significance of the probabilistic programs is given. One of the main challenges in probabilistic

programming, namely program equivalence, is described. Candidate presents some known results from the literature and some open questions that have been the main motivation for the research. Section 1.2 describes the historical development of possible world semantics, and highlights some of its main features. Also, some of the most popular completeness proofs for different logics with respect to the possible world semantics are listed. Further, it describes the significance of Kripke semantics, which has been developed as semantics of modal logics and has been adapted for other logics such as intuitionistic logic, other non-classical logics, and recently for typed lambda calculus. Section 1.3 describes the development of probability logics. The candidate has described the development from ancient times to the present, when probabilistic extensions of different logic are developed and thus the frameworks for probabilistic reasoning about different logical structures are obtained.

Chapter 2 - Probabilistic computation

Chapter 2 studies the probabilistic λ -calculus $\Lambda_{\oplus, \text{let}}$, that is the pure, untyped λ -calculus extended with two operators: the probabilistic choice operator $\oplus$ and the let-in operator. The implemented evaluation strategy is a lazy call-by-name evaluation. At the beginning of the chapter, the main contributions of the chapter are listed and the structure of the chapter is given. In Section 2.1, basic notions about probabilistic lambda calculus $\Lambda_{\oplus, \text{let}}$ are introduced. The language of the calculus, its operational semantics and context equivalence are defined. Section 2.2 introduces the notion of a probabilistic applicative bisimulation for $\Lambda_{\oplus, \text{let}}$. First, the notion of labelled Markov chain and probabilistic applicative bisimulation over it are defined. Then the operational semantics of $\Lambda_{\oplus, \text{let}}$ is presented as a labelled Markov chain and the probabilistic applicative bisimulation for $\Lambda_{\oplus, \text{let}}$ is defined.

The first contribution of chapter 2 is the proof that the probabilistic applicative bisimilarity is a congruence. Consequently, the probabilistic applicative bisimilarity is included in the context equivalence. This proof is obtained by Howe's technique. The second main contribution of the chapter is the proof that context equivalence is included in probabilistic applicative bisimilarity. In order to prove this, in Section 2.3 the notions of testing language and testing equivalence are introduced. The chapter uses the well-known result that the bisimilarity and testing equivalence coincide. Candidate has proved that for every test there is a context such that the success probability of the test applied to a term is equal to the convergence probability of the context applied to the term. As a consequence, context equivalence is included in the testing equivalence. From all the presented results, it follows that three equivalence relations: context equivalence, bisimilarity and testing equivalence, coincide. This chapter presents original results published in [4].

Chapter 3 - Kripke-style semantics of full simply typed calculus

Chapter 3 studies the full simply typed combinatory logic $CL^{\rightarrow, \times, +}$, that is the simply typed combinatory logic extended with product types, sum types, empty type and unit type. At the beginning of the chapter, the main contributions of the chapter are listed and the structure of the chapter is given. In Section 3.1, basic notions about the full simply typed combinatory logic $CL^{\rightarrow, \times, +}$ are introduced. The language of $CL^{\rightarrow, \times, +}$, its operational semantics and type assignment system are defined. The main contribution of this chapter is the definition of new semantics of $CL^{\rightarrow, \times, +}$. In Section 3.2, Kripke-style semantics of $CL^{\rightarrow, \times, +}$ are defined. The definition of semantics comprises several steps:

1. The definition of a Kripke applicative structure for $CL^{\rightarrow, \times, +}$.
2. The definition of an extensional Kripke applicative structure for $CL^{\rightarrow, \times, +}$.
3. The definition of a Kripke applicative structure with combinators.
4. The Kripke model is defined as an extensional Kripke applicative structure with combinators equipped with a valuation of variables.

The main results of the chapter are the soundness and completeness of the type assignment system $CL^{\rightarrow, \times, +}$ with respect to the presented semantics, and they are given in Section 3.3. The proof of soundness and completeness of the equational theory of $CL^{\rightarrow, \times, +}$ with respect to the proposed semantics is given.

Since the equational theory and the type assignment system are defined simultaneously (the equality is used in the definition of the type assignment system and the typing derivations are used in the definition of the equality), the soundness of the equational theory and the soundness of the type assignment system are proved at the same time using the principle of mathematical induction. The proof of completeness of the equational theory and the proof of the completeness of the type assignment system are given separately, nevertheless, they are both based on the notion of a canonical model. The candidate has defined a class of models, called canonical models, and has proved some of its properties which imply the completeness proofs. The Kripke-style semantics presented in this chapter has been introduced in [1].

Chapter 4 - Logic of combinatory logic

Chapter 4 introduces a new formal system, the Logic of Combinatory Logic *LCL*, which is the propositional extension of the simply typed combinatory logic. At the beginning of the chapter, the main contributions of the chapter are listed and the structure of the chapter is given. Section 4.1 presents basic notions about the simply typed combinatory logic. The language, the equational theory and the type assignment system of simply typed combinatory logic are defined, and some properties of the type assignment system are presented. The logic *LCL* is introduced in Section 4.2, where its language, axiomatization and semantics are defined. The logic *LCL* is obtained by defining the classical propositional logic over the simply typed combinatory logic. The significance of the logic *LCL* lies in the fact that it is a framework for propositional reasoning about typed combinatory terms, so we can employ the well-established methods such as DPLL, resolution method, SAT solvers, SMT solvers to reason about the simply typed combinatory logic. The axiomatization of *LCL* has arisen from the type assignment system of the simply typed combinatory logic and the axiomatic system of classical propositional logic. The semantics of *LCL* is an extensional applicative structure extended with special elements corresponding to primitive combinators equipped with a valuation of term variables.

This chapter presents several original results. First, in Section 4.3 it is proved that the equational theory of the simply typed combinatory logic is sound and complete with respect to the proposed semantics of *LCL*. In Section 4.4, detailed proofs of soundness and strong completeness of the axiomatization of *LCL* with respect to the proposed semantics are given. Both soundness proofs are obtained by principle of mathematical induction, whereas completeness proofs are obtained from a construction of a class of *LCL*-models and proofs of their properties which imply completeness proofs. In the strong completeness proof for the axiomatization of *LCL*, Henkin-style completeness method is used. Section 4.5 shows that the proposed semantics of *LCL* is a novel semantics of the simply typed combinatory logic. The simply typed combinatory logic containing the typing rule that ensures that equal terms inhabit the same type is considered. It is proved that this logic is sound and complete with respect to the proposed semantics of *LCL*. As a consequence, the logic of combinatory logic is a conservative extension of the simply typed combinatory logic.

Chapter 5 - Probabilistic reasoning in type theory

Chapter 5 introduces the probabilistic extension of the logic of combinatory logic *PCL*. At the beginning of the chapter, the main contributions of the chapter are listed and the structure of the chapter is given. Since the logic *PCL* is developed following the approach used for the logic *LPP₂*, the candidate presented logic *LPP₂*, which is a probabilistic extension of the classical propositional logic, in Section 5.1. Section 5.2 defines the language of the logic *PCL*, which is obtained as an extension of the language of the logic *LCL* with probability operators of the form $P \geq s$ with the intended meaning: probability is at least s . In Section 5.3, the semantics of *PCL* is introduced. The semantics of *PCL* is based on the possible world approach, where the set of possible worlds is equipped with a finitely additive probability measure. It is proved that the logic *PCL* is not compact. Consequently, any finite axiomatization of the logic *PCL* which is sound cannot be strongly complete. In Section 5.4, the infinite axiomatization of *PCL* is given, the axiomatization contains a rule with a countable set of premises. The axiomatization of *PCL* comprises the axioms and rules from the axiomatization of *LCL* and the axioms and rules from the axiomatization of probability logic. The logic *PCL* is a formal model for probabilistic reasoning about typed statements. The idea of development of a formal model for probabilistic reasoning about typed statements was first introduced in [3] and [5].

The main contributions of the chapter are the soundness and strong completeness of the given axiomatization with respect to the proposed semantics, and they are given in Section 5.5. The proof of soundness is obtained by mathematical induction. In the completeness proof, Henkin-style completeness method is used. First, it is proved that every consistent set can be extended to a maximal consistent set. Then, a canonical model is defined, which is a PCL-model that satisfies only formulas from the maximal consistent set. This model is used to prove that every consistent set is satisfiable, and as a consequence the proof of strong completeness is obtained.

Chapter 6 - Conclusion

Chapter 6 consists of three sections. Section 6.1 summarizes the scientific contributions of the candidate presented in the thesis. Section 6.2 analyses work closely related to the topic of the dissertation, including the direct citation of relevant literature. Section 6.3 contains a discussion about open questions and possibilities for further research in each of the fields studied in the dissertation.

The **bibliography** is given after the sixth chapter. The literature is comprehensive, it is presented clearly and cited adequately. It also includes the most important papers in the field, which are relevant to the examined topic.

Based on all the above, **the Committee positively evaluates all parts of the doctoral dissertation.**

VI СПИСАК НАУЧНИХ И СТРУЧНИХ РАДОВА КОЈИ СУ ОБЈАВЉЕНИ ИЛИ ПРИХВАЋЕНИ ЗА ОБЈАВЉИВАЊЕ НА ОСНОВУ РЕЗУЛТАТА ИСТРАЖИВАЊА У ОКВИРУ РАДА НА ДОКТОРСКОЈ ДИСЕРТАЦИЈИ:

LIST OF SCIENTIFIC AND PROFESSIONAL PAPERS THAT HAVE PUBLISHED OR ACCEPTED FOR PUBLICATION ON THE BASIS OF THE RESEARCH RESULTS IN THE FRAMEWORK OF WORK ON DOCTORAL DISSERTATION:

1. **Simona Kašterović** and Silvia Ghilezan. Kripke-style semantics and completeness for full simply typed lambda calculus. J. Log. Comput., 30(8):1567-1608, 2020. doi: 10.1093/logcom/exaa055. URL: <https://doi.org/10.1093/logcom/exaa055>. (IF 2019 = 0.8) **(M21)**
2. Silvia Ghilezan, **Simona Kašterović**. Semantics for Combinatory Logic With Intersection Types, Frontiers in Computer Science, volume 4, 2022. doi: 10.3389/fcomp.2022.792570. URL: <https://www.frontiersin.org/articles/10.3389/fcomp.2022.792570> (IF 2022 = 2.6)
3. Silvia Ghilezan, Jelena Ivetić, **Simona Kašterović**, Zoran Ognjanović and Nenad Savić. Towards probabilistic reasoning in type theory - the intersection type case. In A. Herzig and J. Kontinen, editors, Foundations of Information and Knowledge Systems-11th International Symposium, FoIKS 2020, Dortmund, Germany, February 17-21, 2020, Proceedings, volume 12012 of Lecture Notes in Computer Science, pages 122-139. Springer, 2020. doi: 10.1007/978-3-030-39951-1_8. URL https://doi.org/10.1007/978-3-030-39951-1_8 **(M33)**
4. **Simona Kašterović** and Michele Pagani. The discriminating power of the let-in operator in the lazy call-by-name probabilistic lambda-calculus. In H. Geuvers, editor, 4th International Conference on Formal Structures for Computation and Deduction, FSCD 2019, June 24-30, 2019, Dortmund, Germany, volume 131 of LIPIcs, pages 26:1-26:20. Schloss Dagstuhl-Leibniz-Zentrum für Informatik, 2019. doi: 10.4230/LIPIcs.FSCD.2019.26. URL:

<https://doi.org/10.4230/LIPIcs.FSCD.2019.26>. (M33)

5. Silvia Ghilezan, Jelena Ivetić, **Simona Kašterović**, Zoran Ognjanović and Nenad Savić. Probabilistic reasoning about simply typed lambda terms. In Logical Foundations of Computer Science - International Symposium LFCS, volume 10703 of Lecture Notes in Computer Science, pages 170-189. Springer, 2018. (M33)
6. **Simona Kašterović** and Silvia Ghilezan. Probabilistic reasoning about typed combinatory logic. In 11th International Conference on Logic and Applications - LAP 2022, pages 29-31, Dubrovnik, Croatia, September 26-29, 2022. (M34)
7. **Simona Kašterović** and Silvia Ghilezan. Towards probabilistic reasoning about typed combinatory terms. In 28th International Conference on Types for Proofs and Programs - TYPES 2022, Nantes, France, June 20-23, 2022. (M34)
8. **Simona Kašterović** and Silvia Ghilezan. Towards logic of combinatory logic. In 10th International Conference on Logic and Applications - LAP 2021, pages 34-36, Dubrovnik, Croatia, September 20 - 24, 2021. (M34)
9. **Simona Kašterović** and Silvia Ghilezan. Kripke-style semantics for full simply typed lambda calculus. In 9th International Conference on Logic and Applications - LAP 2020, pages 12-14, September 21 - 25, 2020. (M34)
10. Silvia Ghilezan and **Simona Kašterović**. Towards completeness of full simply typed lambda calculus. In 26th International Conference on Types for Proofs and Programs - TYPES 2020, pages 164 – 166, March 2-5, 2020. (M34)
11. Silvia Ghilezan, Jelena Ivetić, **Simona Kašterović**, Zoran Ognjanović, and Nenad Savić. Towards probabilistic reasoning about typed lambda terms. In 24th International Conference on Types for Proofs and Programs - TYPES 2018, pages 41-42, Braga, Portugal, June 18 - 21, 2018. (M34)
12. **Simona Kašterović** and Michele Pagani. Towards probabilistic testing of lambda terms. In 7th International Conference on Logic and Applications - LAP 2018, pages 21-23, Dubrovnik, Croatia, September 24-28, 2018. (M34)
13. Silvia Ghilezan, Jelena Ivetić, **Simona Kašterović**, Zoran Ognjanović, and Nenad Savić. Towards probabilistic reasoning about simply typed lambda terms. In 7th Conference on Probability Logics and Applications - VLP 2017, Belgrade, Serbia, November 8, 2017. (M64)
14. **Simona Kašterović** and Silvia Ghilezan. Logic of combinatory logic. CoRR, abs/2212.06675, 2022. doi: 10.48550/arXiv.2212.06675. URL <https://arxiv.org/abs/2212.06675>

VII ЗАКЉУЧЦИ ОДНОСНО РЕЗУЛТАТИ ИСТРАЖИВАЊА: CONCLUSIONS AND RESULTS OF THE RESEARCH

Дисертација даје значајан допринос развоју формалних модела за вероватносно закључивање у израчунавању и теорији типова и развоју Крипкеових семантика за моделе израчунавања.

- Проучаван је вероватносни ламбда рачун са let-in оператором где је примењена лења позив-по-имену стратегија евалуације и изучаван је проблем еквиваленције вероватносних програма у овом окружењу. Циљ је био пронаћи ефикасан метод за доказивање контекстне еквиваленције. Дати су докази да се у посматраном рачуну релација вероватносне апликативне бисимулације и релација контекстне еквиваленције поклапају, што чини вероватносну апликативну бисимулацију погодним методом за доказивање контекстне еквиваленције.
- Уведена је нова Крипкеова семантика за комбинаторну логику са функционалним типовима која је проширена типовима производа, типовима суме, празним типом и јединичним типом. Дати су детаљни докази да је типски систем посматраног рачуна сагласан и потпун у односу на уведене семантике.
- Развијен је потпуно нов концепт вероватносног закључивања у теорији типова и рачунима са типовима који је заснован на новом моделу за вероватносно закључивање о типизираним програмима. Најпре је уведена нова логика, под називом Логика комбинаторне логике, која представља исказно проширење комбинаторне логике са функционалним типовима. Показано је да је уведена логика сагласна и потпуна у односу на предложене семантике. Затим је логика комбинаторне логике проширена вероватносним операторима, чиме је добијена логика која омогућава вероватносно закључивање о типизираним програмима. Такође, дати су докази сагласности и потпуности добијене логике у односу на предложене семантике.

У завршним разматрањима сумирани су резултати истраживања, представљено је стање у областима истраживања и наведени су отворени проблеми и могућности за даљи наставак истраживања.

Комисија са задовољством констатује да је кандидаткиња успешно, на научно адекватан и ефикасан начин поставила спроведена истраживања, те на крају донела закључке о резултатима. Дисертација пружа оригиналан и научно значајан допринос у областима вероватносних модела израчунавања, Крипкеових семантика за моделе израчунавања и формалних модела за вероватносно закључивање о типизираним програмима.

CONCLUSIONS AND RESULTS OF THE RESEARCH

The dissertation provides a significant contribution to the development of formal models for probabilistic reasoning in computation and type theory, and the development of Kripke-style semantics of models of computation.

- The lazy call-by-name probabilistic lambda calculus with a let-in operator has been studied and the question of equivalence of probabilistic programs in the probabilistic setting has been addressed. The goal was to find an effective method for context equivalence proofs. It is proved that in the lazy call-by-name probabilistic lambda calculus with a let-in operator the probabilistic applicative bisimilarity and the context equivalence coincide. Therefore, the probabilistic applicative bisimilarity is an effective method for proving context equivalence of probabilistic programs in this setting.
- A novel Kripke-style semantics of the full simply typed combinatory logic that is the simply typed combinatory logic extended with product types, sum types, the empty type and the unit type, is introduced. The proofs of soundness and completeness of the type assignment system for the full

simply typed combinatory logic are given.

- A novel concept of probabilistic reasoning in type theory and calculi with types is developed. It is based on a newly introduced formal model for probabilistic reasoning about typed programs. First, a new logic, called Logic of combinatory logic, which is a propositional extension of the simply typed combinatory logic, is introduced. It is proved that the logic of combinatory logic is sound and complete with respect to the proposed semantics. Further, the logic of combinatory logic is extended with probability operators, and the logic for probabilistic reasoning about typed programs is obtained. Also, the proofs of soundness and completeness of the obtained logic with respect to the proposed semantics are given.

In the concluding remarks, the scientific contributions of the research are summarized, the work closely related to the topics of the dissertation is presented, and open questions and possibilities for further research are given.

The Committee is pleased to conclude the candidate has successfully, in a scientifically adequate and efficient manner, conducted the research and has drawn conclusions about the results. The dissertation provides an original and scientifically significant contribution within the fields of probabilistic models of computation, Kripke-style semantics of the models of computation and formal models for probabilistic reasoning about typed programs.

VIII ОЦЕНА НАЧИНА ПРИКАЗА И ТУМАЧЕЊА РЕЗУЛТАТА ИСТРАЖИВАЊА: EVALUATION OF THE PRESENTATION AND OF RESEARCH RESULTS:
Садржај дисертације је приказан јасно, структурирано и систематично. Оригинални резултати истраживања су прецизно формулисани и детаљно теоријски доказани. На основу добијених резултата изведени су јасни закључци и утврђени битни и оригинални научни доприноси. Кандидаткиња је овладава савременим знањима из области и у потпуности спровела истраживања која су била дефинисана планом приказаним у пријави теме докторске дисертације. У складу са наведеним, комисија позитивно оцењује начин приказа и тумачења резултата истраживања докторске дисертације. Рад је проверен у софтверу за детекцију плагијаризма (iThenticate), у Библиотеци ФТН-а, о чему је комисија извештена. На основу ове провере, нису пронађени докази о плагијаризму и утврђено је да докторска дисертација кандидата Симоне Прокић представља оригинални рукопис. EVALUATION OF THE PRESENTATION AND OF RESEARCH RESULTS: The content of the dissertation is presented clearly, well structured and systematic. The original results are precisely formulated and theoretically proven in detail. The candidate has mastered the state-of-the-art knowledge in the field and fully conducted the research that was defined by the research plan presented in the application for the topic of the doctoral dissertation. Following the above, the Committee positively evaluates the presentation and interpretation of the results of the doctoral dissertation. The dissertation was checked in the plagiarism detection software (iThenticate) in the Library of the Faculty of Technical Sciences and the Committee has been informed about this. Based on this examination, no evidence of plagiarism has been found, and it has been determined that the doctoral dissertation of the candidate, Simona Prokić, represents an original manuscript.
IX КОНАЧНА ОЦЕНА ДОКТОРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ: FINAL ASSESSMENT OF THE DOCTORAL DISSERTATION::
1. Да ли је дисертација написана у складу са образложењем наведеним у пријави теме? Докторска дисертација је у потпуности написана у складу са образложењем у пријави теме. Is the dissertation written following the explanation given in the research proposal? The dissertation is written in full accordance with the explanation given in the research proposal.

2. Да ли дисертација садржи све битне елементе?

Докторска дисертација садржи све битне елементе. Предмет, циљеви и задаци истраживања су прецизно дефинисани. Добијени резултати истраживања, дискусија и закључна разматрања су детаљно описани. Анализирано је стање у области, а списак коришћене литературе указује на темељно проучавање и познавање области истраживања.

Does the dissertation contain all the essential elements?

The dissertation contains all the relevant elements. The subject, objectives and tasks of the research are precisely defined. The research results, discussion and concluding remarks are described in detail. The state of the art is analysed, and a list of references indicates a fundamental knowledge of the field of research.

3. По чему је дисертација оригиналан допринос науци?

Докторска дисертација садржи нове научне резултате, који су верификовани и публиковани у међународном научном часопису и презентовани на релевантним научним конференцијама.

Оригинални доприноси тезе се односе на четири формална система.

- За вероватносни ламбда рачун проширен let-in оператором је доказано да се вероватносна апликативна бисимулација и контекстна еквиваленција подударају.
- Дефинисане су нове Крипкеове семантике за комбинаторну логику са функционалним типовима која је проширена са типовима производа, типовима суме, празним типом и јединичним типом. Доказано је да је типски систем комбинаторне логики са функционалним типовима сагласан и потпун у односу на уведене семантике.
- Уведено је исказно проширење комбинаторне логики са функционалним типовима, које је названо Логика комбинаторне логики (*LCL*). Дефинисани су аксиоматски систем и семантике за *LCL*. Доказано је да је аксиоматизација логики *LCL* сагласна и потпуна у односу на предложене семантике за *LCL*.
- Развијен је потпуно нов концепт вероватносног закључивања у теорији типова и рачунима са типовима. Уведено је вероватносно проширење логики комбинаторне логики (*PCL*). Дефинисани су аксиоматски систем и семантике за *PCL*. Доказано је да је аксиоматизација логики *PCL* сагласна и потпуна у односу на семантику за *PCL*.

What makes the dissertation an original contribution to science?

The dissertation contains novel scientific results, published in an international scientific journal, and presented at international scientific conferences. The original contributions of the dissertation are related to four formal systems.

- For probabilistic lambda calculus extended with let-in operator, it is proved that the probabilistic applicative bisimilarity and context equivalence coincide.
- A novel Kripke-style semantics of the full simply typed combinatory logic, that is the simply typed combinatory logic extended with product types, sum types, the empty type and the unit type, is defined. It is proved that the full simply typed combinatory logic is sound and complete with respect to the proposed semantics.
- A propositional extension of the simply typed combinatory logic, called Logic of combinatory logic (*LCL*), is introduced. The semantics and axiomatic system of *LCL* are defined. It is proved that the axiomatization of *LCL* is sound and complete with respect to the proposed semantics of *LCL*.
- A novel concept of probabilistic reasoning in type theory and calculi with types is developed. A probabilistic extension of the logic of combinatory logic (*PCL*) is introduced. The semantics and axiomatic system of *PCL* are defined. It is proved that the axiomatization of *PCL* is sound and complete with respect to the proposed semantics of *PCL*.

4. Који су недостаци дисертације и какав је њихов утицај на резултат истраживања?

Комисија закључује да докторска дисертација нема недостатака.

What are shortcomings of the dissertation and what is their influence on the research.
The Committee concludes that the doctoral dissertation has no shortcomings.

X	ПРЕДЛОГ: PROPOSAL:
	На основу наведеног, комисија предлаже:
	а) да се докторска дисертација прихвати, а кандидату одобри одбрана; На основу наведеног, Комисија предлаже да се прихвати позитивна оцена докторске дисертације под насловом „Вероватносно закључивање у израчунавању и теорији функционалних типова” и да се кандидаткињи Симони Прокић одобри одбрана. From all of the above, the Committee recommends: a) to accept the doctoral dissertation and approve the defense; On the basis of the above, the Committee proposes to accept a positive evaluation of the doctoral dissertation entitled “Probabilistic reasoning in computation and simple type theory” and to grant the defense to the candidate Simona Prokić.

Место и датум:
Нови Сад, 2. 11. 2023.

1. Др Јелена Иветић, ванредни професор
Dr. Jelena Ivetić

_____, председник
(president)

2. Dr. Michele Pagani, Full Professor

_____, члан (member)

3. Др Зоран Петрић, научни саветник
Dr. Zoran Petrić

_____, члан (member)

4. Др Јована Обрадовић, научни сарадник
Dr. Jovana Obradović

_____, члан (member)

5. Др Силвиа Гилезан, редовни професор
Dr. Silvia Gilezan

_____, ментор (mentor)

6. Др Зоран Огњановић, научни саветник
Dr. Zoran Ognjanović

_____, ментор (mentor)

НАПОМЕНА: Члан комисије који не жели да потпише извештај јер се не слаже са мишљењем већине чланова комисије, дужан је да унесе у извештај образложење односно разлоге због којих не жели да потпише извештај и да исти потпише.