

3. i 4. PREDAVANJE (11.03.-17.03.) sa zadacima za samostalni rad

Tomas Nemeš

Pitanja na mail predmetnog nastavnika: nemes.tomas@uns.ac.rs

ili predmetnog asistenta: Ilić Strahinja ilistrah@uns.ac.rs

March 18, 2020

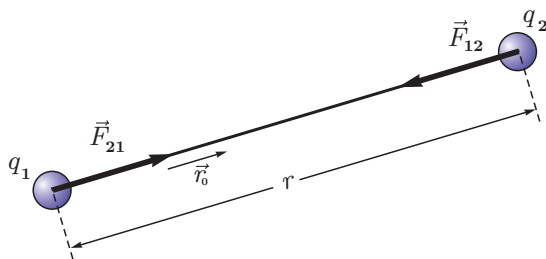
1 Osnovi elektrostatike

Elektromagnetna interakcija je do sada najbolje izučena interakcija i najviše se primenjuje. Moderna civilizacija bitno zavisi od trenutno postojećih i buduće izmišljenih naprava koje se baziraju na manipulaciji naelektrisanih čestica. Međutim do samo pre nešto više od 200 godina, razumevanje električnih pojava bilo je na nivou razlikovanja dve vrste naelektrisanja, recepta za naelektrisanje različitih materijala i konstatacije da usled naelektrisanja tela, ona mogu da se privlače ili odbijaju. Formulisanjem zakona Kulona u matematičkoj formi (1784.), učinjen je bitan napredak i postavljena polazna osnova za razumevanje elektromagnetnih pojava.

1.1 Kulonov zakon

Kulonov zakon definiše silu između dva tačkasto naelektrisana tela:

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{r}_0 \quad (1)$$

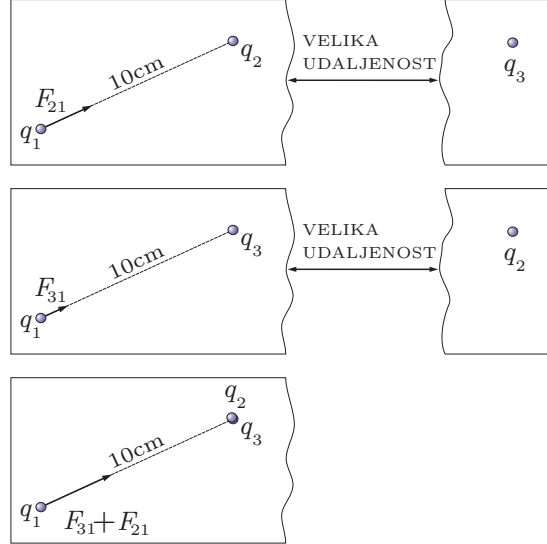


Slika 1 Uz definiciju Kulonovog zakona. Prikazan je primer kada su naelektrisanja raznoimena (npr. $q_1 > 0$ i $q_2 < 0$ ili $q_1 < 0$ i $q_2 > 0$.)

Dva tačkasto naelektrisanja koja miruju odbijaju se ili privlače silom koja je proporcionalna njihovim količinama naelektrisanja, a obrnuto proporcionalna kvadratu njihovog međusobnog rastojanja. U konstanti proporcionalnosti figuriše permitivnost vakuuma $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$. Poznato je da količina naelektrisanja može biti pozitivna ili negativna, shodno tome ispred količine naelektrisanja treba staviti odgovarajući predznak. S obzirom na ovu činjenicu, za razliku od gravitacione sile (Njutnov zakon gravitacije) koja je evek privlačna električna sila može biti i odbojna. Istoimena naelektrisanja (++) ili -- se međusobno odbijaju, a raznoimena (+- ili -+) se privlače. Ukoliko želimo da izračunamo samo intenzitet Kulonove sile, treba izostaviti vektorske oznake i predznake naelektrisanja:

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \quad (2)$$

Za elektrostatičku silu važi princip superpozicije. U tom smislu razmotrimo jedan eksperiment koji je prikazan na Slici 2. Pretpostavimo da raspolažemo sa tri tačkasta naelektrisanja q_1 , q_2 i q_3 . Pretpostavimo da smo izmerili silu F_1 između q_1 i q_2 kada su se ona nalazila na rastojanju $r = 10\text{cm}$, a q_3 se nalazi jako daleko. Zatim smo umesto q_2 stavili q_3 pri čemu smo q_2 premestili na veliko rastojanje od q_1 i q_3 , i izmerili silu F_2 . U trećem eksperimentu, vratili smo q_2 odmah uz q_3 i izmerili silu F_3 . Ispostavilo bi se da je ukupna sila sada jednaka zbiru prethodne dve $F_3 = F_1 + F_2$. Zaključak je da se sila kojom dva naelektrisanja deluju ne menja zbog prisustva trećeg naelektrisanja.



Slika 2 Eksperiment koji demonstrira princip superpozicije.

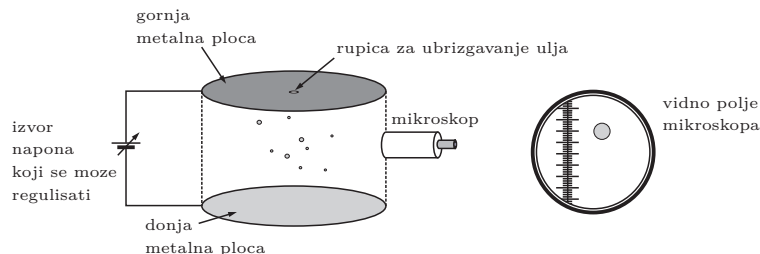
Dakle isto kao i kod gravitacione sile važi princip superpozicije. Odnosno ukoliko želimo da izračunamo ukupnu silu između naelektrisanja koje je nepravilno raspoređeno i tačkastog naelektrisanja, nepravilno telo se izdeli na mnogo tačkastih a zatim nađe vektorski zbir svih pojedinačnih sila.

$$\vec{F}_R = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \quad (3)$$

Ispravnost Kulonovog zakona ispitana je na vrlo malim rastojanjima, reda veličine 10^{-18}m , ali i na rastojanjima reda veličine kilometara. Novija saznanja iz teorije kvantne elektrodinamike donose činjenicu da ukoliko Kulonov zakon nebi važio na velikim rastojanjima, tada bi foton morao imati masu mirovanja različitom od nule. Međutim ovo bi impliciralo da bi se u vakuumu crvena i plava svetlost prostirala različitim brzinama, što se neopaža. Robert Miliken, početkom prethodnog veka, eksperimentalno je utvrdio da je količina naelektrisanja uvek celobrojni umnožak jedne iste količine naelektrisanja koje se naziva elementarno naelektrisanje. Ovo se može izraziti u vidu formule:

$$q = Ne \quad (4)$$

$N = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ i $e = 1,602 \cdot 10^{-19}\text{C}$. Danas kada imamo jasnu sliku o strukturi materije i strukturi atoma, nije teško da se prihvati činjenica o kvantizaciji naelektrisanja. Jezgro se sastoji od neutralnih čestica neutrona i pozitivno naelektrisanih čestica protona. Svaki proton je naelektrisan jednim pozitivnim elementarnim naelektrisanjem. Omotač atoma čine elektroni koji su negativno naelektrisani takođe sa po jednim negativnim naelektrisanjem. Naelektrisanje tela vrši se samo prelaskom elektrona sa jednog tela na drugo. S obzirom da je masa elektrona zanemarljiva u odnosu na masu atomskog jezgra, pri naelektrisanju tela promena mase tela se ne opaža. Pozitivno naelektrisana tela imaju samo manjak elektrona, dok negativna imaju višak. S obzirom da u klasičnim demonstracijama naelektrisanja tela ebonitim i staklenim šipkama dolazi do premeštanja velikog broja elektrona, elementarnost naelektrisanja se tu ne opaža. Eksperiment kojim je Miliken dokazao da postoji najmanja količina naelektrisanja prikazan je na Slici 3.



Slika 3 Principijalna šema aparature koju je koristio Miliken za određivanje elementarnog naelektrisanja.

Dve metalne paralelne ploče jednakih dimenzija priključene su na izvor napona koji se može regulisati. Pomoću ovog izvora postiže se da ploče mogu biti naelektrisane istim količinama naelektrisanja ali suprotnog znaka. Polaritet ploča se takođe može menjati. Gornja može biti pozitivno naelektrisana, a donja negativno ili obrnuto. Takođe, ploče mogu biti i neutralne. Na gornjoj ploči nalazi se mikronska rupica kroz koju se ubrizgava ulje, koje se raspršuje na vrlo sitne kaplice. Prilikom raspršivanja, kapljice se naelektrišu usled trenja. Pojedinačne kapljice zatim se posmatraju mikroskopom koji ima mernu skalu za dužinu. Kada su ploče neutralne kapljica pod dejstvom gravitacione sile pada naniže ali zbog sile viskoznog trenja, koja deluje suprotno od smera kretanja, kapljica počne da se kreće stalnom brzinom. Odnosno gravitaciona sila i sila viskoznog trenja se izjednače:

$$mg = 6\pi\eta rv \quad (5)$$

gde je m masa uočene kapljice, g ubrzanje zemljine teže, η koeficijent viskoznosti, r poluprečnik kapljice i v brzina kretanja kapljice. Radi jednostavnosti, u ovom razmatranju zanemarena je sila potiska vazduha. Gustina kapljice, s obzirom da je ona sfernog oblika, data je izrazom:

$$\rho = \frac{3m}{4\pi r^3} \quad (6)$$

Ako pomoću (6) iz (5) eliminišemo poluprečnik kapljice r , nalazimo gravitacionu silu koja deluje na kapljicu:

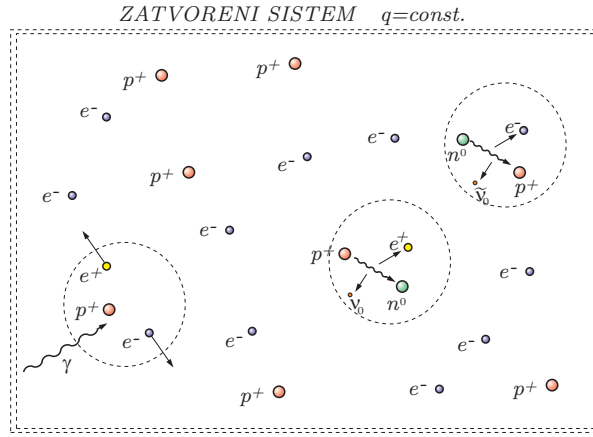
$$mg = \pi \sqrt{\frac{162\eta^3 v^3}{\rho g}} \quad (7)$$

Gustina kapljice jednaka je gustini ulja pa je prethodno merljiva veličina. Koeficijent viskoznosti vazduha takođe je poznata veličina u datim uslovima. Sledi da se gravitaciona sila mg može odrediti posmatranjem kretanja kapljice kroz mikroskop, odnosno mereći njenu brzinu kada ploče nisu naelektrisane. Sledeći korak u eksperimentu, podrazumeva uključivanje napona i zaustavljanje kapljice. Tada su električna sila i gravitaciona sila izjednačene:

$$q \frac{U}{d} = mg \quad (8)$$

gde je U napon, a d razmak između ploča. Iz ovih razmatranja može se zaključiti, da je za merenje količine naelektrisanja svake kapljice potrebno izmeriti njenu brzinu i napon pri kome se kapljica zaustavlja. Ponavljajući eksperiment više hiljada puta, Miliken je utvrdio da se količine naelektrisanja kojom se naelektrišu kapljice uvek razlikuju za celobrojni umnožak naelektrisanja koje iznosi $e = 1,59 \cdot 10^{-19} C$. Vrednost za elementarno naelektrisanje koje je dobijeno savremenim metodama iznosi $e = 1,602 \cdot 10^{-19} C$. Njegova merenja definitivno su pokazala da postoji ne deljiva količina naelektrisanja i za ovo otkriće on je dobio Nobelovu nagradu 1923. godine.

Važna činjenica je da se u zatvorenom sistemu ukupna količina naelektrisanja održava. Nemoguće je da se neki zatvoreni sistem spontano naelektriše ili neutrališe. Proton može da se transformiše u jezgru atoma na neutron, ali raspad je praćen i emisijom čestice pozitrona koje upravo nosi isto naelektrisanje kao i proton. Neutron se opet može transformisati u proton, pri čemu dobijamo višak pozitivnog naelektrisanja, ali se u istom procesu stvara i elektron, pa je opet zadovoljen zakon održanja ukupne količine naelektrisanja. Ukoliko foton dovoljne energije prođe u blizini atomskog jezgra, moguć je proces stvaranja pozitron-elektron para. Međutim i ovde se ukupno naelektrisanje ne menja. U prirodi nije nađen proces koji narušava zakon održanja naelektrisanja. Zatvoreni sistem i neki od opisanih procesa ilustrovani su na Slici 4.

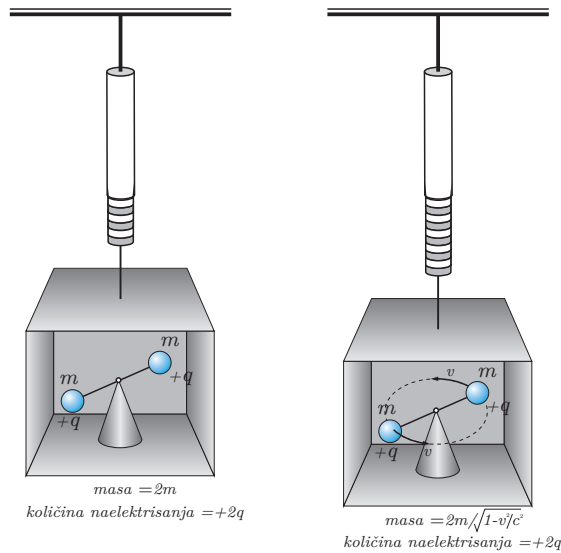


Slika 4 Zatvoreni sistem u kome se ukupna količina naelektrisanja održava. U crtkanim kružnicama prikazani su procesi koji ne narušavaju zakon održanja ukupne količine naelektrisanja.

S obzirom na sličnost Njutnovog zakona i Kulonovog zakona: "umesto masa u Kulonovom zakonu figurišu količine naelektrisanja", moglo bi se zaključiti da u naelektrisanju i masi ima neke sličnosti. Na primer, prema specijalnoj teoriji relativnosti, ukoliko se brzina objekta povećava, raste i njegova masa. Dakle po analogiji imamo opravdanja da pretpostavimo da važi relacija $q = q_0 / \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$. Međutim eksperimenti pokazuju da to nije tako. Količina naelektrisanja nekog objekta nezavisna je od sistema referencije u kome se posmatra. Odnosno količina naelektrisanja nekog objekta ne zavisi od brzine njegovog kretanja. Ova zakonitost naziva se invarijantnost naelektrisanja, i može se zapisati u vidu formule:

$$q = inv. \quad (9)$$

Na primer u atomu vodonika, proton miruje, a elektron se kreće velikom brzinom oko protona. Ukoliko naelektrisanje nebi bilo invarijantno, atom nebi bio u potpunosti neutralan. Ni jedan eksperiment i sa drugim atomima nije pokazao odstupanje od invarijantnosti naelektrisanja. Na Slici 5 je prikazan zamišljen eksperiment koji dokazuje ovo pravilo.



Slika 5 Misaoni eksperiment koji pokazuje da je naelektrisanje invarijantno u odnosu na Lorencove transformacije.

1.2 Pojam električnog polja

Posmatramo usamljeno naelektrisanje q_0 . U odsustvu drugih naelektrisanja nema sile koje deluje na to naelektrisanje. Međutim ukoliko u blizini q_0 postavimo tačksto naelektrisanje q , očigledno dolazi do promene, tj. javlja se električna sila na naelektrisanje q_0 . Kažemo da naelektrisanje q stvara električno polje u prostoru, koje deluje na naelektrisanje q_0 . Do egzaktno definicije električnog polja dolazimo pomoću Kulonovog zakona.

$$\vec{F} = q_0 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \vec{r}_0 = q_0 \vec{E} \quad (10)$$

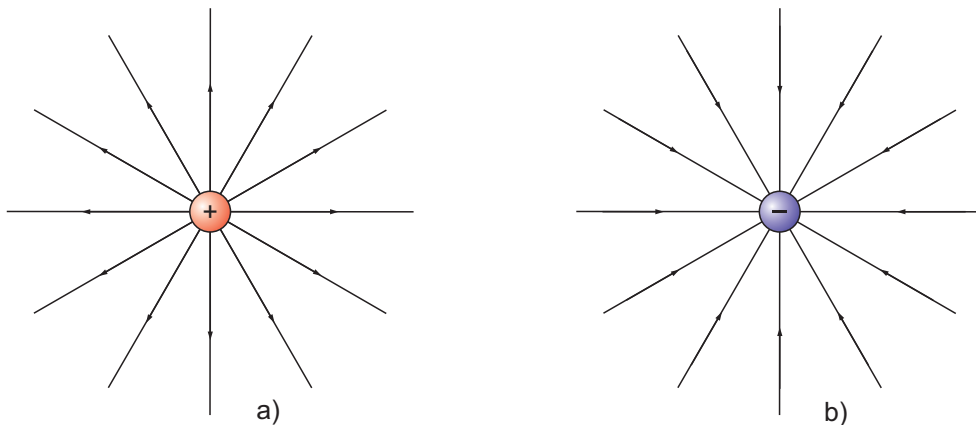
U tom smislu električno polje tačkastog naelektrisanja je:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \vec{r}_0 \quad (11)$$

Intenzitet električnog polja izražava se u jedinicama N/C (Njutn po Kulonu) ili V/m (Volt po metru). Za električno polje isto kao i za silu važi princip superpozicije:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots + \vec{E}_n \quad (12)$$

Električno polje u nekoj tački jednako je vektorskom zbiru električnih polja koja potiču od svih prisutnih naelektrisanja. Uobičajno je da se električno polje vizuelno prikaže u vidu linija sila električnog polja (Slika 6).

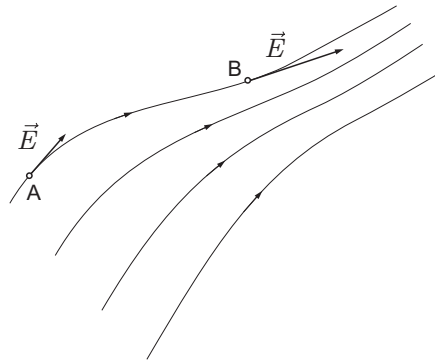


Slika 6 Linije sila električnog polja tačkastog naelektrisanja. a) pozitivno naelektrisanje b) negativno naelektrisanje.

Linije sila električnog polja tačkastog naelektrisanja su zrakaste linije koje se simetrično pružaju u sve pravce prostora. Strelica određuje smer vektora električnog polja. Pozitivna naelektrisanja kažemo da su izvori električnog polja, a negativna naelektrisanja ponori električnog polja. U tom smislu, ukoliko u prostoru postoji naelektrisanje, dodeljena je pored geoemtrijskih karakteristika još jedna osobina prostora. U opštem slučaju za proizvoljan raspored naelektrisanja električno polje je vektor koji je funkcija tri kordinate i vremena:

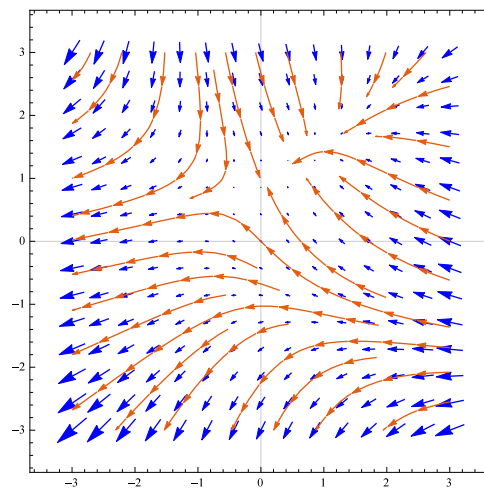
$$\vec{E} = \vec{E}(x, y, z, t), \quad (13)$$

međutim u elektrostatici razmatraju se samo polja koja ne zavise od vremena. Ili koja promene svoju konfiguraciju u vrlo kratkom vremenskom intervalu, odnosno pređu iz jednog statičnog stanja u drugo statično stanje. Uopšte konfiguracija električnog polja određena je rasporedom naelektrisanja i može imati vrlo nepravilni oblik (Slika 7). U oblasti gde su linije gušće, električno polje ima veći intenzitet. Takođe u svakoj tački linije sila, vektor električnog polja je tangenta.



Slika 7 Primer neke konfiguracije linije sila električnog polja. U blizini tačke A linije su ređe nego u tački B. Sledi da je intenzitet u tački B veći nego u A. Takođe vidi se da su vektori električnog polja tangente na linije sila.

Na Slici 9 prikazana je konfiguracija nekog električnog polja koja se dobija pomoću kompjuterskih programa.

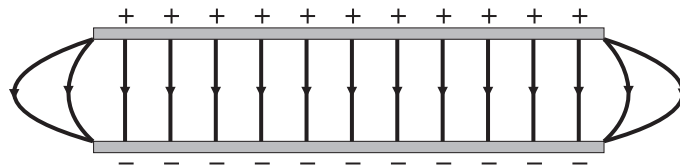


Slika 8 Primer neke složene konfiguracije električnog polja.

Za neke jednostavne raspodele naelektrisanja funkcija $\vec{E}(x, y, z)$ se može odrediti egzaktno. Najjednostavniji primer su dve planparalelne metalne ploče naelektrisanе istom količinom naelektrisanja ali suprotnog znaka (Slika 9). Ukoliko je rastojanje između ploča mnogo manje od dimenzija ploča, električno polje između ploča je homogeno. Koristeći tzv. Gausovu teoremu, može se pokazati da je intenzitet električnog polja unutar ploča dato izrazom:

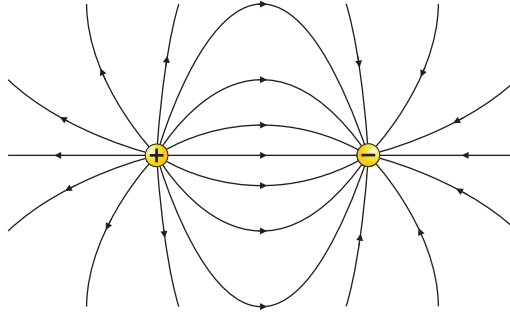
$$E = \frac{q}{\epsilon_0 S} \quad (14)$$

gde je q količina naelektrisanja kojom su naelektrisane ploče, ϵ_0 permitivnost vakuumu i S površina ploča.



Slika 9 Homogeno električno polje formirano između dve naelektrisane planparalelne metalne ploče. U oblasti krajeva električno polje nije homogeno, ali vrlo brzo slabi.

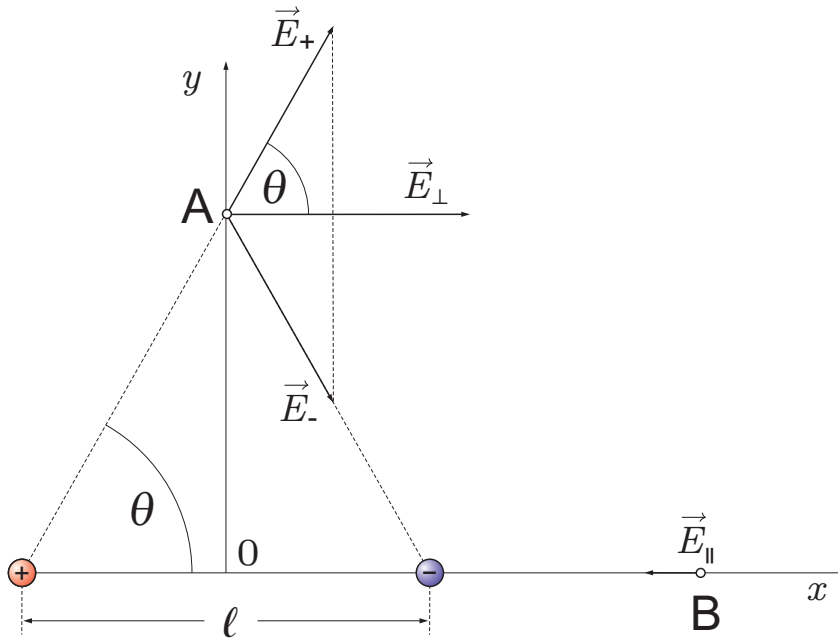
Vrlo važne konfiguracije električnog polja su one koje se dobijaju od dve tačke naelektrisanе istim količinama naelektrisanja, ali suprotnog znaka. Ovakava konfiguracija naziva se električni dipol, a odgovarajuće polje- polje dipola (Slika 10).



Slika 10 Električno polje dipola

1.2.1 Električno polje dipola

Električno polje dipola se može egzaktno izračunati u celom prostoru. Ovde ćemo samo računati polje duž x i y -ose kada se dipol nalazi u $x - y$ -ravni (Slika 11).



Slika 11 Dva tačkasta naelektrisanja suprotnog znaka koja se nalaze na rastojanju ℓ na osi x .

Neka se naelektrisanja q i $-q$ nalaze na rastojanju ℓ . Prema definiciji električnog polja za tačkasto naelektrisanje, intenzitet električnog polja u tački B koji potiče od pozitivnog naelektrisanja je:

$$E_+ = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{(x + \ell/2)^2} \quad (15)$$

a od negativnog:

$$E_- = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{(x - \ell/2)^2} \quad (16)$$

Ukupan intenzitet u B je dat razlikom između E_- i E_+

$$E_{||} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{(x - \ell/2)^2} - \frac{1}{(x + \ell/2)^2} \right) \quad (17)$$

Odnosno, ako svedemo na zajednički sadržalac:

$$E_{||} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2q\ell x}{(x^2 - (\ell/2)^2)^2} \quad (18)$$

Na vrlo velikim rastojanjima $x \gg \ell$ relacija se svodi na:

$$E_{||} \cong \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{q\ell}{x^3} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{p}{x^3} \quad (19)$$

Proizvod $q\ell$ se naziva dipolni moment i obično se označava sa p . Dipolni moment je vektorska veličina koja ima pravac spajanja dva tačkasta naelektrisanja suprotnog znaka. Smer je od negativnog ka pozitivnom naelektrisanju. Vidimo da električno polje dipola opada sa trećim stepenom rastojanja u pravcu x -ose.

U tački A vidimo da se y komponente električnog polja poništavaju. Zbog toga je ukupno električno polje na y osi dato sa:

$$E_{\perp} = 2E_{+} \cos \theta \quad (20)$$

Intenzitet električnog polja pozitivnog naelektrisanja je:

$$E_{+} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{(y^2 + (\ell/2)^2)} \quad (21)$$

Sa slike se vidi da je:

$$\cos \theta = \frac{\ell/2}{\sqrt{y^2 + (\ell/2)^2}} \quad (22)$$

Ako (21) i (22) uvrstimo u (20) nalazimo:

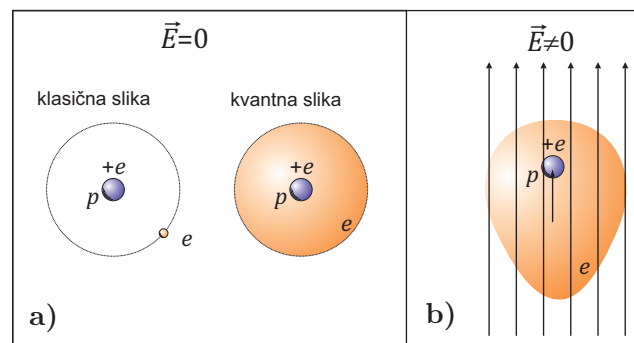
$$E_{\perp} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q\ell}{(y^2 + (\ell/2)^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (23)$$

Opet ako razmatramo velika rastojanja od dipola $y \gg \ell$, nalazimo:

$$E_{\perp} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q\ell}{y^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{y^3} \quad (24)$$

I ovde vidimo da električno polje dipola u pravcu y -ose opada sa trećim stepenom rastojanja. Konfiguracija od dva suprotno naelektrisana tačkasta naelektrisanja koja se nalaze na fiksnom rastojanju ili konfiguracija koja se može svesti na ovu sliku je česta pojava kod molekula.

Na primer ako bi molekul vodonika (sastoji se od jednog protona i jednog elektrona) zamrznuli u jednom trenutku vremena, mogli bi smo reći da je dipolni moment molekula vodonika različit od nule. Međutim, prema kvantnoj fizici, ne može se utvrditi tačna pozicija elektrona koji se nalazi oko jezgra. Elektronu se pripisuje oblak naelektrisanja koji je simetrično raspoređen oko jezgra (Slika 12.a). Shodno tome, proton kao da se nalazi u naelektrisanj sferi, pa nema električnog dipola. Međutim ako se atom vodonika unese u električno polje, doći će do redistribucije elektronskog oblaka, odnosno pojaviće se oblast gde se elektron češće nalazi. U tom smislu dolazi i do narušavanja simetrije, odnosno pojave električnog dipola atoma vodonika. Pojava dipolnog momenta koji je izazvan spoljašnjim poljem naziva se indukovani dipol (Slika 12.b.).

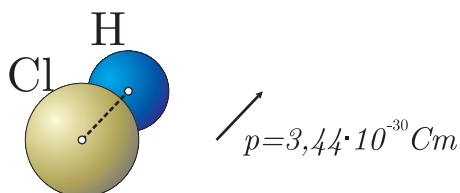


Slika 12 a) Simetrična distribucija elektrona oko jezgra atoma vodonika- nema dipolnog momenta.

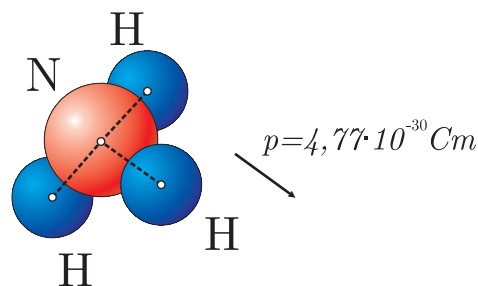
b) U prisustvu električnog polja dolazi do redistribucije elektronskog oblaka, odnosno pojave indukovnog dipola.

Permanentne ili stalne dipolne momente imaju neki molekuli koji su prikazani na Slici 13. Molekul vode ima veliki dipolni moment, a to je jedan od uzroka što je voda idelana sredina za odvijanje mnogih hemijskih procesa relevantnih za život.

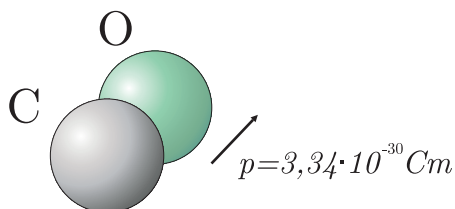
Hlorovodonik



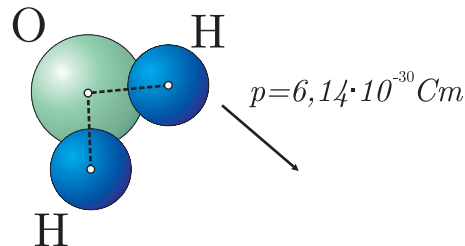
Amonijak



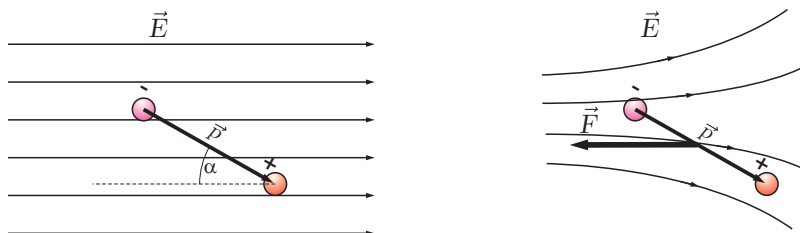
Ugljen-monoksid



Voda

**Slika 13** Neki molekuli sa stalnim dipolnim momentom.

Električni dipol u homogenom električnom polju teži da se orijentiše u pravcu polja. U nehomogenom polju, on se i pomera u pravcu najbrže promene polja (Slika 14).

**Slika 14** Električni dipol u homogenom i nehomogenom električnom polju.

1.3 Električni potencijal

Električno polje je vektorska veličina koja se može izračunati iz raspodele naelektrisanja. Električno polje je poznato ako poznamo sve tri komponente u funkciji tri koordinate:

$$E_x = E_x(x, y, z) \quad E_y = E_y(x, y, z) \quad E_z = E_z(x, y, z) \quad (25)$$

Međutim, može se uvesti skalarna veličina koja se naziva električni potencijal, a takođe nosi kompletnu informaciju o konfiguraciji električnog polja.

$$\varphi = \varphi(x, y, z) \quad (26)$$

Jedinica za potencijal je V (Volt).

Potencijal koji stvara tačkasto naelektrisanje u vakuumu može se izračunati pomoću formule:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} \quad (27)$$

Potencijal je brojno jednak radu potrebnom da se jedinično naelektrisanje prenese iz beskonačnosti na rastojanje r od tačkastog naelektrisanja q .

Potencijal je aditivna veličina:

$$\varphi = \sum_{i=1}^n \varphi_i \quad (28)$$

Dakle ako u nekoj tački prostora želimo da izračunamo električni potencijal, treba sabrati sve potencijale od prisutnih naelektrisanja.

Napon predstavlja razliku potencijala između dve tačke:

$$U = \varphi_1 - \varphi_2 \quad (29)$$

a jedinica je takođe Volt. Rad pri premeštanju naelektrisanja između tačaka gde vlada potencijalna razlika U jednak je:

$$A = qU \quad (30)$$

Jedinica za električni rad je ista kao i u mehanici (Džul). Međutim u razmatranju mikroskopskih pojava koristi se jedinica eV (elektronvolt). Rad od jednog elektron volta izvrši električno polje pri premeštanju elementarnog naelektrisanja između tačaka gde vlada potencijalna razlika od jedan volt. Iz ove definicije sledi veza: $1eV = 1,6 \cdot 10^{-19}J$.

Pretpostavimo da imamo dva tačkasta naelektrisanja q_1 i q_2 na rastojanju r . S obzirom na definiciju potencijala (27), energija elektrostatičke interakcije ova dva naelektrisanja jednaka je

$$E_p = \varphi_2 q_2 \quad (31)$$

gde je φ_2 potencijal koji stvara naelektrisanje q_1 u tački gde se nalazi q_2 . Međutim energija interakcije može se napisati i kao:

$$E_p = \varphi_1 q_1 \quad (32)$$

gde je φ_1 potencijal koji stvara naelektrisanje q_2 u tački gde se nalazi naelektrisanje q_1 . Zbog jednakosti (31) i (32), električna energija interakcije je:

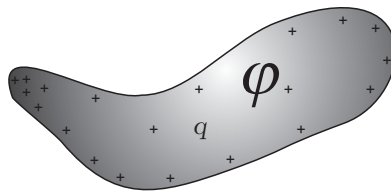
$$E_p = \frac{1}{2} (\varphi_1 q_1 + \varphi_2 q_2) \quad (33)$$

Relacija (33) može se uopštiti na sistem od n tačkastih naelektrisanja:

$$E_p = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \varphi_i q_i \quad (34)$$

koja kaže da se ukupna energija interakcije n tačkastih naelektrisanja računa kao polovina zbira proizvoda ukupnog potencijala i naelektrisanja u svih n tačaka.

Vrlo važan pojam u elektrostatiki je kapacitet. U tom smislu razmatramo provodno telo proizvoljnog oblika koje je naelektrisano količinom naelektrisanja q (Slika 15).



Slika 15 Provodno telo naelektrisano količinom naelektrisanja q do potencijala φ .

Naelektrisanje na ovom provodniku će se tako rasporediti da je potencijal na površini ovog tela svuda isti i znosi φ . U suprotnom, ukoliko bi postojala razlika potencijala na površini provodnog tela javio bi se tok električne struje, a u elektrostatiki sva naelektrisanja miruju. Može se uspostaviti relacije između količine naelektrisanja provodnog tela i potencijala ovog provodnog tela:

$$q = C\varphi \quad (35)$$

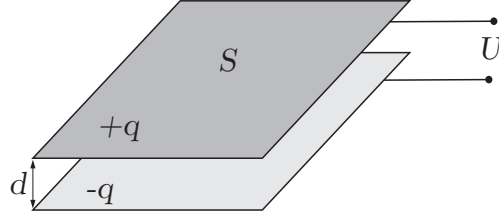
Količina naelektrisanja nekog provodnog tela srazmerna je potencijalu na kom se nalazi to telo. Konstanta proporcionalnosti C naziva se kapacitet, a jedinica je Farad (F).

1.4 Kondenzatori

Sistem od dva međusobno izolovana provodnika naelektrisan istom količinom naelektrisanja q ali suprotnog znaka naziva se kondenzator. Za kondenzator važi veza:

$$q = CU \quad (36)$$

gde je C kapacitet kondenzatora, a U razlika potencijala između ova dva provodnika. Jedinica za kapacitet je Farad [F]. Kondenzatori imaju veliku primenu u elektrotehnici, tj. neizostavni su deo praktično svih električnih kola. Najjednostavniji kondenzator je izrađen u vidu dve međusobno izolovane planparalelne provodne ravni. Ovaj kondenzator naziva se pločasti kondenzator (slika 16).

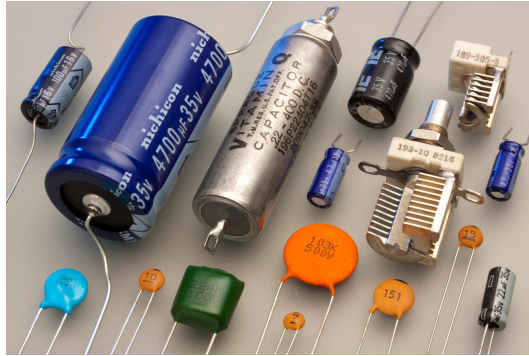


Slika 16 Pločasti kondenzator priključen na napon U .

Pomoću tzv. Gausove teoreme može se pokazati da je kapacitet pločastog kondenzatora:

$$C = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{S}{d} \quad (37)$$

gde je ε_r relativna permitivnost date sredine (u ovom slučaju to se odnosi na materijal između ploča), S površina ploče i d normalno rastojanje između njih. Kako je kapacitet srazmeran površini ploča, kondenzatori sa većim kapacitetom imaju i veće dimenzije. Zbog toga oni zauzimaju najviše prostora u odnosu na druge komponente u električnim kolima. Kondenzatori vremenom mogu izgubiti karakteristike i čest su uzrok kvara električnih kola. Pored kapaciteta svaki kondenzator okarakterisan je i maksimalnim naponom na koji može biti priključen (slika 17).

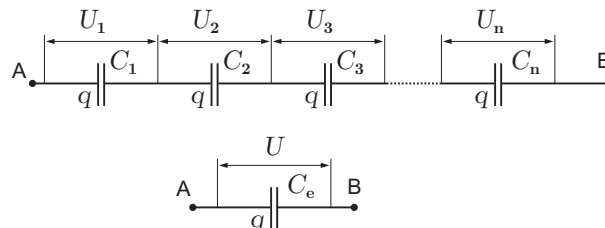


Slika 17 Kondenzatori u raznim varijantama.

Mogu se vezati redno i paralelno. U tom smislu može se definisati ekvivalentni kapacitet redne i ekvivalentni kapacitet paralelne veze.

1.4.1 Redna veza kondenzatora

Razmotrimo redno vezane kondenzatore kao što je prikazano na Slici 18.



Slika 18 Redno vezani kondenzatori i njihov ekvivalentni kapacitet.

Šematska oznaka kondenzatora su dve paralelne linije, koje predstavljaju ploče naelektrisanе istim količinama naelektrisanja, ali suprotnog znaka. Celokupan niz od n kondenzatora može se zameniti jednim kondenzatorom koji ima tzv. ekvivalentni kapacitet. Ukupan napon između tačaka A i B je:

$$U = U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_n \quad (38)$$

a s obzirom na relaciju (36), sledi:

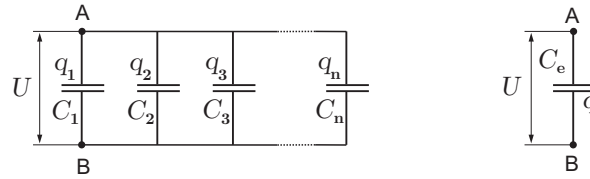
$$\frac{q}{C_e} = \frac{q}{C_1} + \frac{q}{C_2} + \frac{q}{C_3} + \dots + \frac{q}{C_n} \quad (39)$$

odnosno ekvivalentni kapacitet redno vezanih kondenzatora je dat obrascem:

$$\frac{1}{C_e} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \dots + \frac{1}{C_n} \quad (40)$$

1.4.2 Paralelna veza kondenzatora

Razmotrimo paralelno vezane kondenzatore priključene na napon U kao što je prikazano na Slici 19.



Slika 19 Paralelno vezani kondenzatori i njihov ekvivalentni kapacitet.

Ukupno naelektrisanje u tački A je:

$$q = q_1 + q_2 + q_3 + \dots + q_n \quad (41)$$

odnosno prema (36), sledi:

$$C_e U = C_1 U + C_2 U + C_3 U + \dots + C_n U \quad (42)$$

Nakon skraćivanja napona, nalazimo izraz za izračunavanje ekvivalentnog kapaciteta paralelno vezanih kondenzatora:

$$C_e = C_1 + C_2 + C_3 + \dots + C_n \quad (43)$$

1.4.3 Energija kondenzatora

Razmotrimo kondenzator koji ima kapacitet C . Potencijal ploče naelektrisanе pozitivnom količinom naelektrisanja q_+ je φ_+ , a potencijal negativne ploče q_- je φ_- . Prema (34) ukupna energija interakcije naelektrisanih ploča je:

$$E_p = \frac{1}{2} (\varphi_+ q_+ + \varphi_- q_-) \quad (44)$$

S obzirom da je kod kondenzatora $q_+ = -q_-$, sledi:

$$E_p = \frac{1}{2} (\varphi_+ q_+ - \varphi_- q_+) = \frac{1}{2} q_+ (\varphi_+ - \varphi_-) \quad (45)$$

Razlika potencijala je napon između ploča kondenzatora $\varphi_+ - \varphi_- = U$, pa sledi izraz za energiju kondenzatora:

$$E_p = \frac{1}{2} q U \quad (46)$$

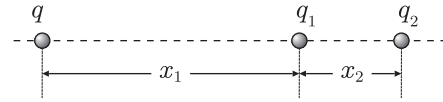
odnoosno s obzirom na (36):

$$E_p = \frac{1}{2} C U^2 \quad (47)$$

ZADACI ZA SAMOSTALNI RAD

1. ZADATAK

Tačkasto naelektrisanje q postavljeno je u blizini dva fiksirana naelektrisanja q_1 i q_2 , kao što je prikazano na slici. Date su brojne vrednosti količina naelektrisanja $q_1 = e$, $q_2 = -2e$, gde je e elementarno naelektrisanje i rastojanja $x_1 = 5nm$ i $x_2 = 2nm$. U kom smeru će se pomeriti naelektrisanje q ?

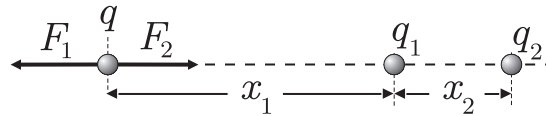


REŠENJE

Između q i q_1 deluje odbojna sila jer su količine naelektrisanja istog znaka. Intenzitet je

$$F_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_1}{x_1^2}, \quad (1)$$

a smer je naznačen na slici.



Između q i q_2 deluje privlačna sila (raznoimena naelektrisanja) čiji je intenzitet

$$F_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_2}{(x_1 + x_2)^2}. \quad (2)$$

Odnos intenziteta ovih sila je

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_1}{x_1^2}}{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_2}{(x_1+x_2)^2}} = \frac{q_1(x_1+x_2)^2}{q_2x_1^2} = \frac{e(x_1+x_2)^2}{2ex_1^2} = \frac{7^2}{2 \cdot 5^2} = \frac{49}{50}. \quad (3)$$

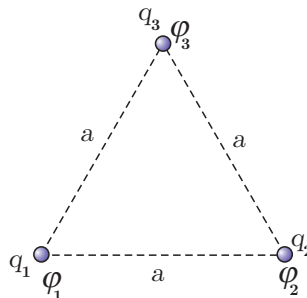
Dakle saznajemo da je $F_2 > F_1$ pa zaključujemo da će se naelektrisanje q pomeriti udesno. Pri izračunavanju intenziteta sile ne uvodimo predznak naelektrisanja, on nam samo služi da odredimo smer sile.

2. ZADATAK

Odrediti energiju interakcije tačkastih naelektrisanja $q_1 = e$, $q_2 = -5e$ i $q_3 = 8e$, koja se nalaze u temenima jednakokraničnog trougla stranice $a = 10nm$. e je elementarno naelektrisanje i iznosi $e = 1,6 \cdot 10^{-19}C$; $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}F/m$

REŠENJE

Na slici je ilustrovana situacija opisana u zadataku.



Potencijal u tački 1 je:

$$\varphi_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 a} (q_2 + q_3) \quad (1)$$

u tački 2:

$$\varphi_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 a} (q_1 + q_3) \quad (2)$$

i u tački 3:

$$\varphi_3 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 a} (q_1 + q_2) \quad (3)$$

S obzirom na (34) sledi:

$$E_p = \frac{1}{2} (\varphi_1 q_1 + \varphi_2 q_2 + \varphi_3 q_3) \quad (4)$$

Ako uvrstimo izraze (1), (2) i (3) u (4), nakon sređivanja nalazimo:

$$E_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 a} (q_1 q_2 + q_1 q_3 + q_2 q_3) \quad (5)$$

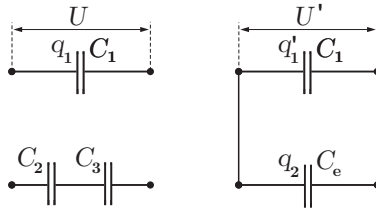
Brojna vrednost je: $E_p = -8,52 \cdot 10^{-19} J$. U jedinicama eV $E_p = -5,32 eV$. Pri računanju potencijalne energije moramo uvesti i predznak naelektrisanja!

3. ZADATAK

Kondenzator kapaciteta $C_1 = 2\mu F$, naelektrisan do napona $U = 60V$, priključili smo paralelno na krajeve redno vezanih kondenzatora $C_2 = 3\mu F$ i $C_3 = 5\mu F$ koji nisu bili. Kolika će pri tome proteći količina naelektrisanja kroz spoj? Kolika je promena ukupne energije kondenzatora?

REŠENJE

Situacija pre spajanja i nakon spajanja prikazana je na Slici.



Ekvivalentni kapacitet redne veze kondenzatora C_2 i C_3 je prema (40):

$$\frac{1}{C_e} = \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \quad (1)$$

odnosno:

$$C_e = \frac{C_2 C_3}{C_2 + C_3} = 1,875\mu F \quad (2)$$

Naelektrisanje kondenzatora C_1 pre spajanja je prema (36):

$$q_1 = C_1 U = 120\mu C \quad (3)$$

Izvesna količina naelektrisanje nakon spajanja kondenzatora pređe sa C_1 na ekvivalentni kondenzator C_e , pa se za novu raspodelu naelektrisanja može napisati:

$$q_1 = q_1' + q_2 \quad (4)$$

pri čemu je:

$$q_1' = C_1 U' \quad (5)$$

i

$$q_2 = C_e U' \quad (6)$$

Kombinacijom (4), (5) i (6) nalazimo napon na C_1 i C_e nakon preraspodele naelektrisanja:

$$U' = \frac{C_1}{C_1 + C_e} U = 31V \quad (7)$$

Na osnovu (5) i rešenja (7) sledi naelektrisanje na kondenzatoru C_1 nakon spajanja:

$$q_1' = C_1 U' = 62\mu C \quad (8)$$

Naelektrisanje koje protekne kroz spoj je:

$$\Delta q = q_1 - q_1' = 58\mu C \quad (9)$$

Energija kondenzatora pre spajanja je prema (47)

$$E_{p1} = \frac{1}{2}C_1U^2 = 3,6mJ \quad (10)$$

A nakon spajanja:

$$E_{p2} = \frac{1}{2}C_1U'^2 + \frac{1}{2}C_eU'^2 = 1,86mJ \quad (11)$$

Promena energije je:

$$\Delta E = E_{p1} - E_{p2} = 1,74mJ \quad (12)$$

Pri spajanju kondenzatora izvestan deo energije se transformisao u toplotu!

2 Električne struje

Za razliku od struja koje su vidljive: morske struje, rečne struje, strujanje vazduha itd., električne struje nisu direktno vidljive, već se celokupno znanje o njima zasniva na proučavanju efekata koje one izazivaju. U nalaženju zakona koji odgovaraju pojavama vezanim za protok električne struje učestvovao je relativno mali broj naučnika koji su osmišljavali, realizovali i objavljivali rezultate svojih eksperimenata. Pomenućemo neke: Alessandro Volta (1745-1827), André-Marie Ampère (1775-1836), Georg Simon Ohm (1789-1854) i Michael Faraday (1791-1867). Danas je celokupno znanje o pojavama vezanim za električnu struju objedinjeno. Savremeno shvatanje pojava vezanim za električne struje podrazumeva elementarna znanja iz oblasti strukture materije. Sa ovog stanovišta sve pojmove i pojave vezane za električne struje možemo lakše usvojiti i razumeti.

2.1 Pojam električne struje

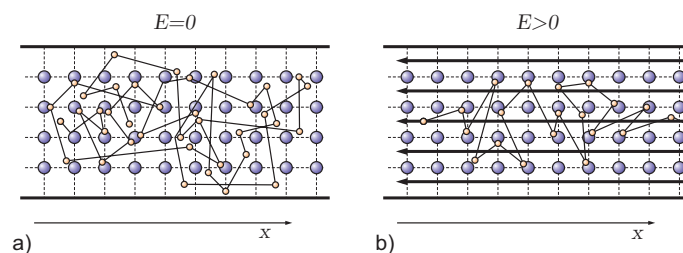
Električna struja predstavlja usmereno kretanje naelektrisanih čestica. Ove naelektrisane čestice mogu biti slobodni elektroni u metalima, slobodni elektroni u vakuumu (termo ili foto elektroni) joni u elektrolitima (npr. rastvor kuhinjske soli u vodi) itd. Da bi u nekom medijumu nastala električna struja neophodno je da se uspostavi električno polje. Pod dejstvom električnog polja, pozitivno naelektrisane čestice počinju da se kreću u smeru polja, a negativne u suprotnom. Za tehnički smer struje smatra se usmereno kretanje pozitivnih čestica. U tom smislu smer mehaničkog kretanja pozitivnih čestica ima isti smer kao i električna struja. Međutim u metalima su elektroni nosioci slobodnih naelektrisanja, pa je smer struje suprotan od njihovog stvarnog kretanja. Važi princip da je električna struja negativno naelektrisanih čestica ekvivalentna električnoj struji pozitivno naelektrisanih čestica ali u suprotnom smeru. Kada se definiše pojam jačine struje misli se na kretanje pozitivno naelektrisanih čestica. Jačina struje je količina naelektrisanja koja protekne kroz poprečni presek provodnika u jedinici vremena:

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t} \quad (1)$$

Jedinica jačine električne struje je amper [A]. U opštem slučaju električna struja se može menjati u vremenu pa se zbog toga definiše trenutna jačina električne struje ($\Delta t \rightarrow 0$):

$$I = \frac{dq}{dt} \quad (2)$$

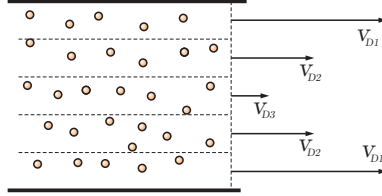
Veliki broj elektrona u metalima nije vezano za atome kristalne rešetke već se slobodno kreće unutar zapremine metala. Kretanje ovih elektrona je haotično, pa se skup slobodnih elektrona u metalu može smatrati idealnim gasom koji zauzima zapreminu metala i nalazi se na odgovarajućoj temperaturi. Dakle slobodni elektroni su u neprestanom haotičnom kretanju pri čemu doživljavaju međusobne sudare i sudare sa kristalnom rešetkom. U odsustvu električnog polja svi pravci kretanja su ravnopravni (Slika 1.a). Ukoliko se unutar metala uspostavi električno polje, na haotičnu komponentu kretanja superponira se usmerena komponenta, odnosno elektroni dobijaju preferentni pravac i smer kretanja. Dakle u prisustvu električnog polja kretanja elektrona je i dalje haotično, ali sa malom komponentom usmerenog kretanja (Slika 1.b). Prema Slici 1.b, elektron napreduje u smeru x -ose. U dovoljno dugom vremenskom intervalu Δt (vreme mnogo veće od srednjeg vremena između dva uzastopna sudara elektrona sa kristalnom rešetkom) može se definisati pređeni put elektrona duž x -ose. Ovako određena brzina je tzv. brzina drifta v_D . Brzina drifta je mnogo manja od termalne brzine elektrona u kristalnoj rešeci.



Slika 1 Kretanje elektrona u kristalnoj rešeci metala a) bez električnog polja b) sa električnim poljem.

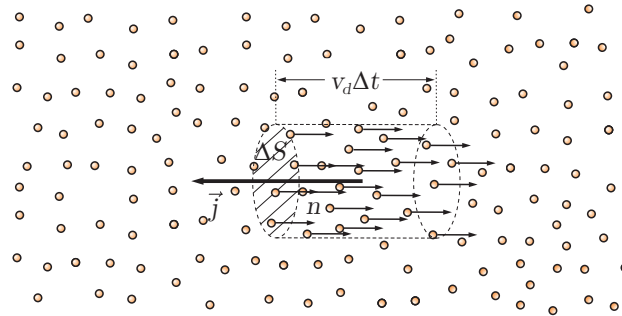
2.2 Gustina struje

Jačina struje nosi informaciju o ukupnoj količini naelektrisanja koja protekne kroz ceo poprečni presek provodnika. Međutim u opštem slučaju može se zamisliti da brzina drifta naelektrisanih čestica nije ista na celom poprečnom preseku (Slika 2). Jedna grupa elektrona kreće se brzinom v_{D1} , druga brzinom v_{D2} itd. Ova konstatacija ne menja definiciju jačine struje, ali nameće potrebu da se pri razmatranju kretanja naelektrisanih čestica uvede veličina koja bliže određuje tok naelektrisanja. Ova veličina naziva se gustina struje.



Slika 2 Usmereno kretanje naelektrisanih čestica različitim brzinama drifta.

U cilju definisanja gustine struje razmotrićemo jedan mali zamišljeni cilindar unutar provodnika u kome se nalazi n slobodnih elektrona u jedinici zapremine (Slika 3).



Slika 3 Uz definiciju gustine struje.

Neka se svi elektroni kreću brzinom drifta v_D u pravcu normalnom na bazu cilindra čija je površina ΔS . Pređeni put elektrona u toku vremenskog intervala Δt određuje visinu cilindra. S obzirom da svaki nosilac naelektrisanja je naelektrisan elementarnim naelektrisanjem, kroz bazu cilindra u vremenskom intervalu Δt prođe

$$\Delta q = env_d \Delta t \Delta S \quad (3)$$

Sledi da je jačina struje kroz bazu malog cilindra:

$$\Delta I = \frac{\Delta q}{\Delta t} = env_d \Delta S \quad (4)$$

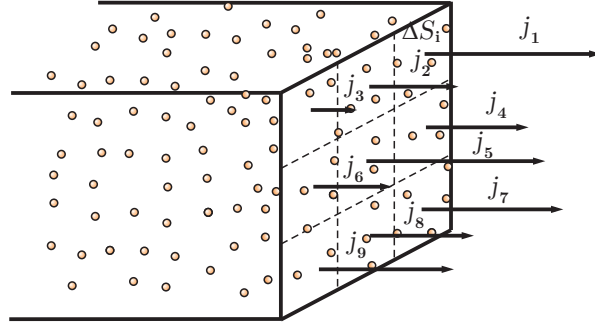
Proizvod env_d naziva se gustina struje. Gustina struje je vektorska veličina sa smerom brzine drifta kod pozitivnih nosilaca naelektrisanja:

$$\vec{j} = ne\vec{v}_d \quad (5)$$

Vidimo da je gustina struje mikroskopska veličina koja karakteriše protok naelektrisanih čestica u vrlo malom elementu zapremine. Ukupna jačina struje kroz poprečni presek provodnika nalazi se sumiranjem svih proizvoda odgovarajućih gustina struje i elementarnih površina dok se ne obuhvati cela površina poprečnog preseka:

$$I = \sum_{i=1}^n j_i \Delta S_i \quad (6)$$

Na Slici 4 je prikazan radi jednostavnosti pravougaoni provodnik čija je površina poprečnog preseka izdvojena na nekoliko elementarnih površina kojima odgovaraju različite gustine struje.



Slika 4 Provodnik u obliku paralelopipeda sa izdijeljenim poprečnim presekom i odgovarajućim gustinama struje.

2.3 Omov zakon

Razmotrimo kretanje jednog slobodnog elektrona unutar kristalne rešetke metala. U odsustvu električnog polja, kretanje elektrona je haotično i može se okarakterisati sa nekoliko kinematičkih veličina. Srednji slobodni put λ koji predstavlja srednje rastojanje koje elektron prelazi između dva uzastopna sudara. Nakon sudara elektron nasumično menja pravac svog kretanja. Srednja brzina haotičnog (termalnog) kretanja v_T predstavlja prosečnu brzinu elektrona tokom haotičnog kretanja. Srednje vreme između dva uzastopna sudara τ , predstavlja vreme potrebno da elektron pređe srednji slobodni put krećući se srednjom brzinom. Prema Slici 1, jasno je da elektron prilikom haotičnog kretanja prelazi različita rastojanja između dva uzastopna sudara, čime je opravdano uvesti srednje vrednosti puta, brzine i vremena. Ukoliko se sistem drži u ravnoteži (ne menja se temperatura) gornje navedene srednje vrednosti su konstantne i u potpunosti karakterišu haotično kretanje elektrona.

Radi jednostavnosti smatraćemo da su nosioci električne struje u provodniku čestice identične elektronima ali sa pozitivnim naelektrisanjem. Neka je sada duž celog provodnika uspostavljeno homogeno električno polje E . Smatramo da prisustvo električnog polja ne menja srednje vrednosti slobodnog puta, vremena i brzine. Odmah nakon sudara sa jonom kristalne rešetke, naelektrisana čestica biva ubrzana dejstvom električnog polja u smeru električnog polja. Kažemo da naelektrisana čestica dobija dodatnu komponentu brzine u smeru polja. Prema II Njutnovom zakonu važi:

$$ma = eE \quad (7)$$

Maksimalna brzina koju dostiže čestica usled ovog ubrzanja je:

$$v_0 = a\tau = \frac{eE}{m}\tau \quad (8)$$

gde je τ prosečno vreme između dva uzastopna sudara. Brzina koju postiže čestica pod dejstvom električnog polja je još uvek mala u odnosu na srednju brzinu haotičnog kretanja. Srednja brzina usled konstantnog ubrzanja upravo je jednaka polovini maksimalne, a to je brzina drifta:

$$v_d = \frac{1}{2} \frac{eE\tau}{m} \quad (9)$$

Srednje vreme između dva uzastopna sudara određeno je srednjom vrednošću brzine haotičnog kretanja v_T i srednjim slobodnim putem λ koji čestica može da pređe između dva uzastopna sudara:

$$\tau = \frac{\lambda}{v_T} \quad (10)$$

Sledi:

$$v_d = \frac{e\lambda E}{2mv_T} \quad (11)$$

Ako (11) uvrstimo u (5) izostavljajući vektorske oznake, nalazimo:

$$j = \frac{ne^2\lambda}{2mv_T} E \quad (12)$$

Odnosno saznajemo da je gustina struje srazmerna jaćini elektrićnog polja. Konstanta srazmernosti naziva se specifićna provodnost (oznaka- σ) i oćigledno je karakteristika materijala na odrećenoj temperaturi. Odnosno, relacija (12) se moćže zapisati u kraćem obliku:

$$j = \sigma E \quad (13)$$

Dobijena relacija predstavlja Omov zakon u diferencijalnom ili lokalnom obliku. On nam govori da je gustina struje srazmerna jaćini elektrićnog polja, a konstanta srazmernosti je karakteristika materijala na odgovarajućoj temperaturi. Ako je elektrićno polje homogeno dućž celog provodnika, vaćži veza:

$$E = \frac{U}{\ell} \quad (14)$$

gde je U razlika potencijala na dućžini ℓ . Uvrćštavanjem (14) u (13) nalazimo:

$$j = \frac{\sigma U}{\ell} \quad (15)$$

Ako je provodnik homogen $\sigma = \text{const.}$, moćžemo izraćunati jaćinu struje kroz ceo poprećni presek provodnika ako (15) uvrćtimo u (6). Nakon sumiranja nalazimo:

$$I = \frac{\sigma S}{\ell} U \quad (16)$$

Reciproćna vrednost specifićne provodnosti naziva se specifićna otpornost materijala:

$$\rho = \frac{1}{\sigma} \quad (17)$$

Sada se relacija (16) moćže sada napisati u vidu:

$$I = \frac{U}{\rho \frac{\ell}{S}} \quad (18)$$

Izraz u imeniocu je karakteristika konkrećnog homogenog provodnika dućžine ℓ , povrćšine poprećnog preseka S koji je saćinjen od materijala specifićne elektrićne otpornosti ρ . Ova velićina je vezana dakle samo za oblik provodnika i njegovu provodnu karakteristiku, a naziva se elektrićna otpornost:

$$R = \rho \frac{\ell}{S} \quad (19)$$

Konaćno dolazimo do poznatog izraza za Omov zakon:

$$I = \frac{U}{R} \quad (20)$$

Dakle saznajemo da je jaćina struje koja protiće kroz poprećni presek provodnika srazmerna naponu na njegovim krajevima, a obrnuto srazmerna elektrićnoj otpornosti tog provodnika. Izraz (20) predstavlja Omov zakon u integralnom obliku. Zakonitost je utvrdio 1827. godine Georg Om eksperimentalnim putem. Sa druge strane vidimo da ovaj zakon moćžemo danas izvesti poznavajući strukturu materije i uvodeći jednostavne pretpostavke o kretanju slobodnih nosioca naelektrisanja. Omov zakon sledi iz ćinjenice da se slobodni elektroni u metalu mogu smatrati idealnim gasom odakle proizilazi da je brzina haotićnog kretanja veoma velika kao i broj uzastopnih sudara. Takode prisustvo elektrićnog polja ne utiće na haotićno kretanje elektrona. U tom slućaju pod dejstvom elektrićnog polja elektron se kreće prividno konstantnom brzinom drifta u smeru suprotnom od elektrićnog polja. Slićno kao što se kićsa kap pod stalnim dejstvom gravitacionog polja ipak kreće konstantnom brzinom usled trenja sa vazduhom.

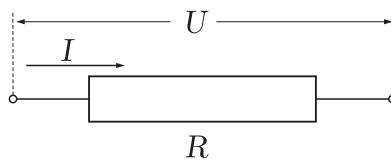
S obzirom na ućinjene pretpostavke pri izvoćdenju Omovog zakona, mogli bi predpostaviti da on nebi vaćžio za vrlo jaka elektrićna polja, kada elektron dobija brzinu koja je reda velićine srednje haotićne. Takode veoma jako elektrićno polje moćže stvarati nove slobodne nosioce naelektrisanja, tj. vrćšiti jonizaciju. U tim uslovima takode ne vaćži Omov zakon (na primer elektrićne struje koje su rezultat

pražnjenja u atmosferi ne mogu se opisati Omovim zakonom). Ukoliko je električno polje vrlo kratkog trajanja ili se jako brzo menja (visokofrekventne struje), Omov zakon nije primenljiv. U vakumskoj cevi srednji slobodni put može biti reda veličine razmaka između elektroda, pa ni tu Omov zakon nije primenljiv. Takođe u savremenoj tehnologiji mikroprocesora, gde provodnici imaju poprečni presek reda veličine desetine atoma i do izražaja dolaze kvantni efekti, Omov zakon ne može služiti za proračune.

2.4 Rad i snaga električne struje

Poznata je činjenica da se pri proticanju električne struje provodnici zagrevaju. Koristan aspekt ove činjenice je svakako upotreba električne struje za zagrevanje gde je to potrebno, zatim osvetljenje, itd. Ali sa druge strane, ova činjenica zadaje probleme inženjerima pri projektovanju mikro električnih kola jer ovde svaki vid pretvaranja električne energije u toplotu predstavlja opasnost za preterano zagrevanje. Kod savremenih računara upravo veći deo zapremine zauzima sistem za hlađenje. Superkompjuter "Titan" koji se nalazi u Sjedinjenim Američkim Državama sastoji se od nešto više od 299000 procesora za čije hlađenje je obezbeđen sistem koji ima snagu 23MW. Takođe, nepravilno projektovane ili neispravne instalacije mogu zbog preteranog oslobađanja toplote uzrokovati topljenje izolacionih materijala, a zatim i burni proces oksidacije.

U cilju nalaženja kolika se energija oslobađa u vidu toplote razmatramo provodnik otpornosti R na čijim krajevima vlada napon U (Slika 5).



Slika 5 Električni provodnik otpornosti R kroz koji protiče električna struja jačine I .

Pri proticanju stalne električne struje (ne menja se u vremenu), dolazi do premeštanja naelektrisanja. Kažemo da električno polje vrši rad. Prema formuli iz elektrostatike, rad koji izvrši električno polje pri premeštanju naelektrisanja Δq je:

$$\Delta A = \Delta q U \quad (21)$$

Sa druge strane, prema definiciji jačine električne struje (1), izraz (21) se može napisati u vidu:

$$\Delta A = UI \Delta t \quad (22)$$

S obzirom na definiciju snage koja predstavlja izvršeni rad u jedinici vremena, sledi da je proizvod UI snaga električne struje:

$$P = \frac{\Delta A}{\Delta t} = UI \quad (23)$$

Prema Omovom zakonu (20), izraz za snagu (23) dobija formu:

$$P = RI^2 \quad (24)$$

Izvršeni rad je mera oslobođene količine toplote u provodniku. Pri proticanju stalne električne struje I na otporniku električne otpornosti R u vremenskom intervalu Δt oslobodi se količina toplote:

$$\Delta Q = RI^2 \Delta t \quad (25)$$

što predstavlja Džulov zakon. Ovu relaciju ustanovio je James Prescott Joule eksperimentalnim putem 1840. Potapajući metalne žice različitih dužina u sud sa vodom i mereći temperaturnu promenu nakon tridesetak minuta pri proticanju određene jačine struje ustanovio je da je oslobođena toplota srazmerna električnoj otpornosti provodnika i kvadratu jačine struje. Već prema modelu elektronskog gasa možemo shvatiti uzrok ove pojave. Elektroni pod dejstvom električnog polja dobijaju energiju koju delimično predaju kristalnoj rešeci metala pri sudaru sa jonima kristalne rešetke, što se manifestuje u porastu temperature provodnika.

2.5 Elektromotorna sila

Videli smo da pri proticanju električne struje kroz provodnik izvestan deo energije pretvara se u toplotu. Energija usmerenog kretanja naelektrisanih čestica pretvara se u energiju oscilovanja jona kristalne rešetke metala što se manifestuje porastom temperature. Dakle, da bi se obezbedio stalan protok električne struje, energija se mora dovoditi u sistem. Uređaj u kom se neka druga energija pretvara u električnu naziva se izvor elektromotorne sile.

Elektromotorna sila (EMS) se može definisati kao ona količina pretvorene energije koja je potrebna da bi jedinica naelektrisanja prošla kroz presek uređaja. Ako je za prolazak naelektrisanja Δq potrebno pretvoriti u električnu isnos energije ΔE , onda se elektromotorna sila $\mathcal{E}$ može napisati kao

$$\mathcal{E} = \frac{\Delta E}{\Delta q} \quad (26)$$

S obzirom da je energija ΔE jednaka radu električne struje $\Delta A = U \Delta q$, za prolazak Δq kroz izvor, elektromotorna sila je jednaka naponu na krajevima izvora.

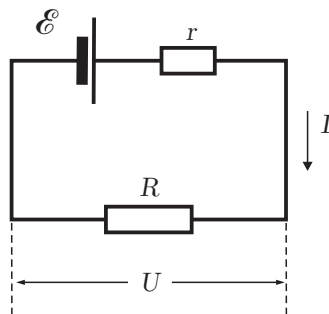
Postoje razni izvori EMS od kojih su najpoznatije obične baterije i akumulatori. U njima se skladištena hemijska energija pretvara u električnu. U proizvodnji baterija zahtev je za skladištenjem što veće energije u manjoj zapremini, veliki broj punjenja i pražnjenja, dugi rok trajanja, stabilnost na temperaturne promene itd. Praktično svi kućni aparati koji imaju elektronska kola rade na jednosmernu struju, a energija se dobija iz gradske mreže koja obezbeđuje naizmeničnu struju. Zbog toga mnogi električni aparati imaju pretvarače naizmenične u jednosmernu struju (AC/DC konvertori). Šematska oznaka izvora EMS prikazana je na Slici 6. Obično je znak $+$ izostavljen jer prema konvenciji duža elektroda je pozitivno naelektrisana.



Slika 6 Šematska oznaka izvora EMS.

2.5.1 Realni izvori EMS

Realni izvori EMS imaju unutrašnju otpornost. Zbog toga kada su priključeni u električno kolo napon na njegovim krajevima je umanjen. Realni izvor sa unutrašnjim otporom r priključen na potrošač otpornosti R može se prikazati kao na Slici 9.



Slika 9 Realni izvor EMS priključen na potrošač.

Primenom Omovog zakona, nalazimo izraz za napon na krajevima potrošača R :

$$U = \mathcal{E} - rI \quad (27)$$

Jačina struje je:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + r} \quad (28)$$

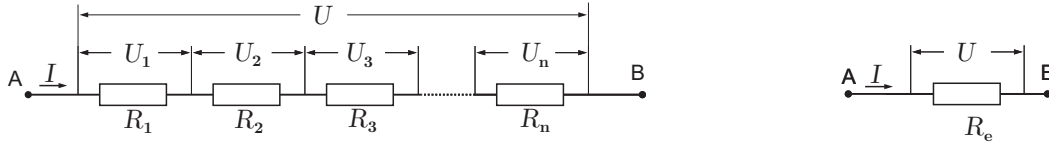
sledi da je napon na potrošaču:

$$U = \mathcal{E} \frac{R}{R + r} \quad (29)$$

U realnim električnim kolima ukupna električna otpornost potrošača treba da je veća od unutrašnje otpornosti izvora, jer u suprotnom dolazi do znatnog oslobađanja toplote unutar izvora.

2.6 Vezivanje otpornika

Razmotrimo redno vezane otpornike prikazane na Slici 10.



Slika 10 Redna veza električnih otpornosti i njihova ekvivalentna električna otpornost.

Jačina struje koja protiče kroz rednu vezu otpornika je I , a ukupan napon redno vezanih otpornika je U . Ideja je da se redna veza otpornika može zameniti jednim ekvivalentnim električnim otporom kroz koji takođe protiče struja I pri čemu je na njegovim krajevima napon U . Zbir napona redno vezanih otpornika jednak je naponu na krajevima njihove veze:

$$U = U_1 + U_2 + \dots + U_n \quad (30)$$

Prema Omovom zakonu može se napisati:

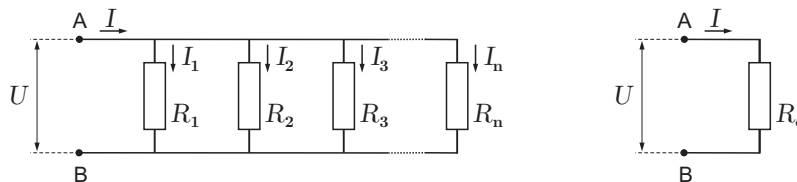
$$R_e I = R_1 I + R_2 I + \dots + R_n I \quad (31)$$

Skraćivanjem jačine struje nalazimo ekvivalentnu električnu otpornost redno vezanih otpornika:

$$R_e = R_1 + R_2 + \dots + R_n = \sum_{i=1}^n R_i \quad (32)$$

Dakle ekvivalentna električna otpornost redno vezanih otpornika jednaka je zbiru pojedinih otpornosti koji čine tu vezu.

Slično nalazimo obrazac za nalaženje ekvivalentne električne otpornosti paralelno vezanih otpornika (Slika 11).



Slika 11 Paralelna veza električnih otpornosti i njihova ekvivalentna električna otpornost.

Ukupna struja koja teče kroz paralelnu vezu otpornika je:

$$I = I_1 + I_2 + \dots + I_n \quad (33)$$

S obzirom da su naponi na svim otpornicima jednaki, primenom Omovog zakona nalazimo:

$$\frac{U}{R_e} = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} + \dots + \frac{U}{R_n} \quad (34)$$

Nakon skraćivanja napona sledi konačan izraz:

$$\frac{1}{R_e} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i} \quad (35)$$

Recipročna vrednost ekvivalentne električne otpornosti paralelne veze otpornika jednaka je zbiru recipročnih vrednosti električnih otpornosti koji čine tu vezu.

ZADACI ZA SAMOSTALNI RAD

1. ZADATAK

Odrediti brzinu drifta elektrona v_D u bakarnom provodniku površine poprečnog preseka $S = 2\text{mm}^2$ kroz koji teče električna struja jačine $I = 2\text{A}$. Poznata je gustina bakra $\rho = 8,9\text{g/cm}^3$ i molarna masa $M = 63,6\text{g/mol}$. Smatrati da na svaki atom bakra dolazi po jedan slobodan elektron. Date su konstante: Avogadrov broj: $N_A = 6 \cdot 10^{23}\text{mol}^{-1}$ i elementarno naelektrisanje $e = 1,6 \cdot 10^{-19}\text{C}$.

REŠENJE

Prema formulama (5) i (6) :

$$v_D = \frac{I}{neS} \quad (1)$$

Broj nosioca naelektrisanja po jedinici zapremine određujemo pomoću poznate gustine bakra, molarne mase i avogadrovog broja:

$$n = \frac{\rho N_A}{M} \quad (2)$$

Ako (2) uvrstimo u (1), nalazimo:

$$v_D = \frac{IM}{\rho N_A S e} \quad (3)$$

Uvrštavanjem brojnih vrednosti nalazimo:

$$v_D = \frac{2\text{A} \cdot 63,6 \cdot 10^{-3}\text{kg/mol}}{8900\text{kg/m}^3 \cdot 6 \cdot 10^{23}\text{mol}^{-1} \cdot 2 \cdot 10^{-6}\text{m}^2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}\text{C}} = 7,4 \cdot 10^{-5}\text{m/s} = 0,074\text{mm/s}, \quad (4)$$

što je vrlo mala brzina.

Iz kinetičke teorije gasova sledi da je srednja brzina haotičnog kretanja elektrona unutar kristalne rešetke na temperaturi $T = 300\text{K}$:

$$v_T = \sqrt{\frac{3k_B T}{m_e}} = 1,2 \cdot 10^5\text{m/s} \quad (5)$$

što je mnogo veće od brzine drifta kako je i pretpostavljeno pri izvođenju Omovog zakona.

2. ZADATAK

Električni grejač otpornosti $R = 5\Omega$ priključen je na konstantni napon $U = 24\text{V}$ i potpoljen u vodu mase $m = 1,5\text{kg}$ koja se nalazila na temperaturi $t_1 = 15^\circ\text{C}$. Odrediti temperaturu vode nakon $\tau = 45\text{min}$. Specifični toplotni kapacitet vode je $c_v = 4190 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot ^\circ\text{C}}$.

REŠENJE

Toplota koju oslobodi grejač u toku vremena τ je prema Džulovom zakonu:

$$\Delta Q = RI^2\tau \quad (1)$$

Ako za izračunavanje jačine struje kroz grejač primenimo Omov zakon, (1) postaje:

$$\Delta Q = \frac{U^2}{R}\tau \quad (2)$$

Sa druge strane, količina toplote potrebna da promeni temperaturu vode za iznos $t_2 - t_1$, je prema kalorimetrijskoj formuli:

$$\Delta Q = mc_v(t_2 - t_1) \quad (3)$$

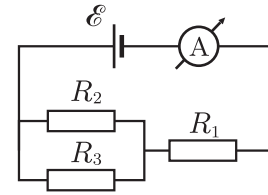
Izjednačavanjem (3) i (2), i rešavanjem po nepoznatoj temperaturi, nalazimo:

$$t_2 = t_1 + \frac{U^2\tau}{Rmc_v} = 15^\circ\text{C} + \frac{(24\text{V})^2 \cdot 45 \cdot 60\text{s}}{5\Omega \cdot 1,5\text{kg} \cdot 4190 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot ^\circ\text{C}}} = 64,5^\circ\text{C} \quad (4)$$

3. ZADATAK

Električno kolo sastoji se iz grejača električnih otpornosti $R_1 = 2\Omega$, $R_2 = 5\Omega$ i $R_3 = 10\Omega$ koji su povezani na izvor elektromotorne sile $\mathcal{E} = 15V$ kao što je prikazano na slici.

- a) Odrediti jačinu struje koja protiče kroz ampermetar.
- b) Ako se svi grejači potope u vodu mase $m = 2kg$ koja se nalazi na temperaturi $t_1 = 23^\circ C$, odrediti vreme za koje će voda proključati. Specifični toplotni kapacitet vode je $c = 4190 \frac{J}{kg \cdot ^\circ C}$.



REŠENJE

a) Ekvivalentna električna otpornost paralelne veze otpornika R_2 i R_3 izračunava se pomoću izraza

$$\frac{1}{R_{e1}} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} = \frac{1}{5\Omega} + \frac{1}{10\Omega} = \frac{3}{10\Omega} \quad (1)$$

odakle sledi

$$R_{e1} = \frac{10}{3}\Omega = 3,33\Omega. \quad (2)$$

Ekvivalentna otpornost celog kola je

$$R_e = R_{e1} + R_1 = 5,33\Omega. \quad (3)$$

Jačina struje koja teče kroz ampermetar je

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R_e} = \frac{15V}{5,33\Omega} = 2,81A. \quad (4)$$

b) Količina toplote koja je potrebna da poveća temperaturu vode sa t_1 na t_2 , gde je $t_2 = 100^\circ C$ (voda ključa), je

$$\Delta Q = mc(t_2 - t_1). \quad (5)$$

Ukupna Džulova toplota koju oslobađaju svi otpornici u toku vremenskog intervala τ je

$$\Delta Q = UI\tau = R_e I^2 \tau. \quad (6)$$

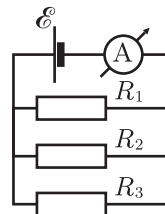
Na osnovu (5) i (6) sledi

$$\tau = \frac{mc(t_2 - t_1)}{R_e I^2} = \frac{2kg \cdot 4190J/(kg^\circ C) \cdot (100^\circ C - 23^\circ C)}{(5,33\Omega)^2 \cdot 2,81A} = 8080s = 2,24h = 2h14min24s \quad (7)$$

4. Zadatak

Električno kolo sastoji se iz paralelno vezanih grejača električnih otpornosti $R_1 = 2\Omega$, $R_2 = 4\Omega$ i $R_3 = 8\Omega$ koji su povezani na izvor elektromotorne sile $\mathcal{E} = 12V$ kao što je prikazano na slici.

- a) Odrediti jačinu struje koja protiče kroz ampermetar.
- b) Ako se grejač električne otpornosti R_3 potopi u vodu mase $m = 1kg$ koja se nalazi na temperaturi $t_1 = 18^\circ C$, odrediti za koje vreme će temperatura vode porasti na $t_2 = 60^\circ$. Specifični toplotni kapacitet vode je $c = 4190 \frac{J}{kg \cdot ^\circ C}$.



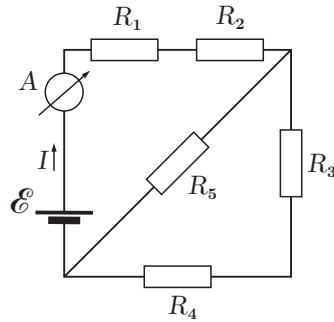
REŠENJE

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R_e} = \mathcal{E} \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) = 10,5A$$

$$\tau = \frac{R_3 mc(t_2 - t_1)}{\mathcal{E}^2} = 9780s = 2h43min12s.$$

5. ZADATAK

Izračunati ekvivalentnu električnu otpornost otpornika priključenih na izvor $\mathcal{E} = 15V$, a potom i jačinu struje koju pokazuje ampermetar. Date su brojne vrednosti električnih otpora: $R_1 = 1\Omega$, $R_2 = 3\Omega$, $R_3 = 5\Omega$, $R_4 = 50\Omega$ i $R_5 = 30\Omega$.



REŠENJE

Ekvivalentna električna otpornost redne veze otpornika R_1 i R_2 je:

$$R_{e1} = R_1 + R_2 = 4\Omega \quad (1)$$

Ekvivalentna električna otpornost redne veze otpornika R_3 i R_4 je:

$$R_{e2} = R_3 + R_4 = 55\Omega \quad (2)$$

Ovaj ekvivalentni električni otpor R_{e2} vezan je paralelno sa R_5 , odakle sledi:

$$\frac{1}{R_{e3}} = \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_{e2}} \quad (3)$$

odnosno:

$$R_{e3} = \frac{R_5 R_{e2}}{R_5 + R_{e2}} = 19,4\Omega \quad (4)$$

Konačno, ekvivalentni otpor R_{e3} vezan je redno sa ekvivalentnim otporom R_{e1} :

$$R_e = R_{e1} + R_{e3} = 23,4\Omega \quad (5)$$

Jačina struje koja teče kroz ampermetar je;

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R_e} = 0,64A \quad (6)$$

Za sva pitanja obratite se predmetnom nastavniku: Tomas Nemeš