



# Kinematika

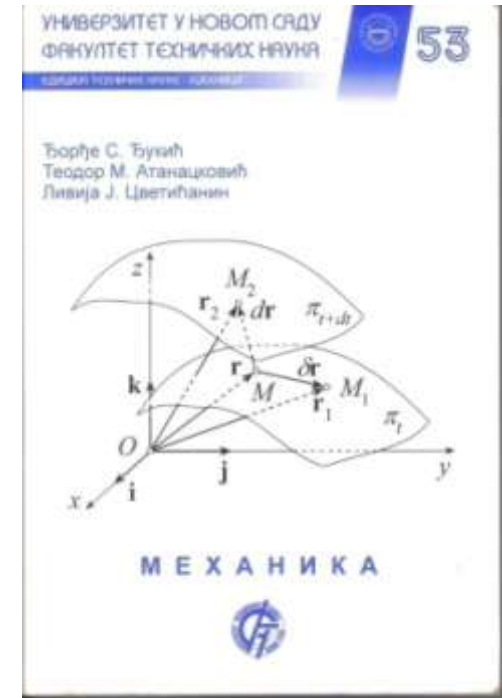
## Kinematika tačke

Mehanika

Miodrag Zuković

# Literatura

- Đorđe S. Đukić, Teodor M. Atanacković, Livija J. Cvetićanin: **Mehanika**, Fakultet tehničkih nauka u Novom Sadu, Novi Sad, 2003.



# Šte ćemo naučiti?

- Broj stepeni slobode kretanja,
- Vektor položaja tačke i putanja tačke,
- Vektor brzine tačke,
- Vektor ubrzanja tačke,
- Dekartove koordinate,
- Polarne koordinate,
- Prirodne koordinate.

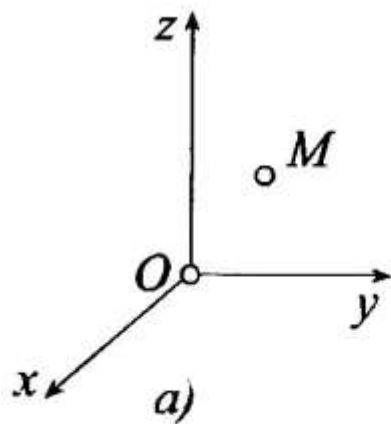
# Kinematika

**Kinematika** je deo mehanike u kome se proučava kretanje tela ne uzimajući u obzir materijalnost tela i međusobno dejstvo između tela koje izaziva kretanje.

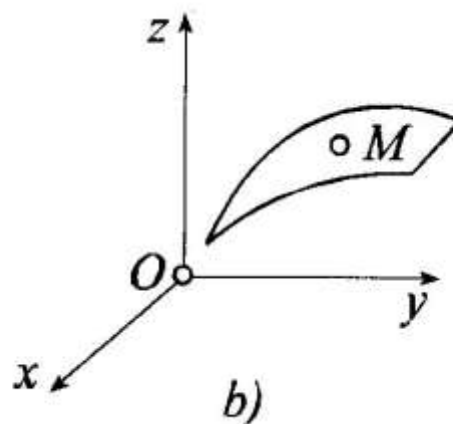


# Kinematika

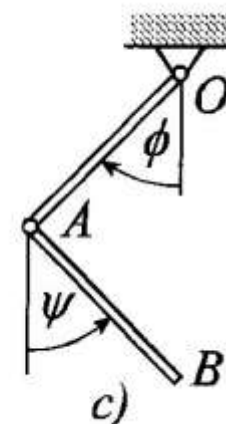
- Broj stepeni slobode kretanja



3 st.sl.



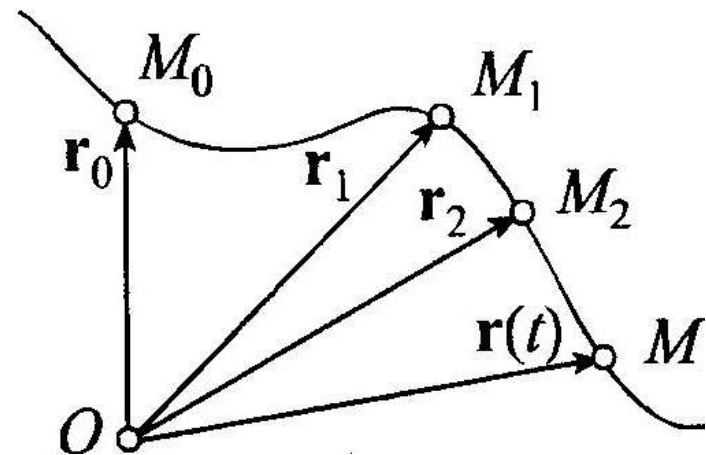
2 st.sl.



2 st.sl

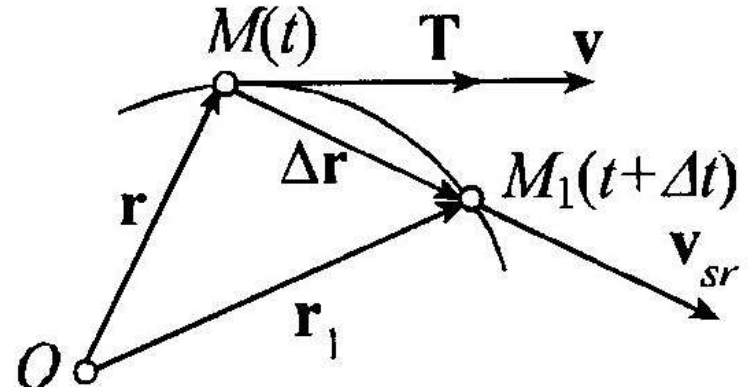
# Kinematika - kinematika tačke

- Vektor položaja tačke i putanja tačke
  - Vektor  $\mathbf{r}$  zove se **vektor položaja** tačke  $M$  a zavisnost  $\mathbf{r}(t)$  zakon kretanja tačke.
  - Geometrijsko mesto tačaka vrhova vektora položaja predstavlja **trajektoriju** ili **putanju** tačke.
  - Pravolinijsko i krivolinijsko kretanje



# Kinematika - kinematika tačke

- Vektor brzine tačke



- Srednja brzina

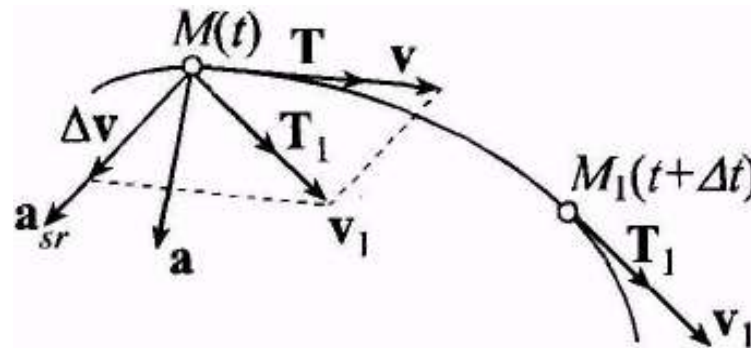
$$\vec{v}_{sr} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}; \quad v_{sr} = |\vec{v}_{sr}| = \frac{|\Delta \vec{r}|}{\Delta t}$$

- (Trenutna) brzina tačke

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \vec{v}_{sr} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}; \quad \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}$$

# Kinematika - kinematika tačke

- Vektor ubrzanja tačke



- Srednje ubrzanje

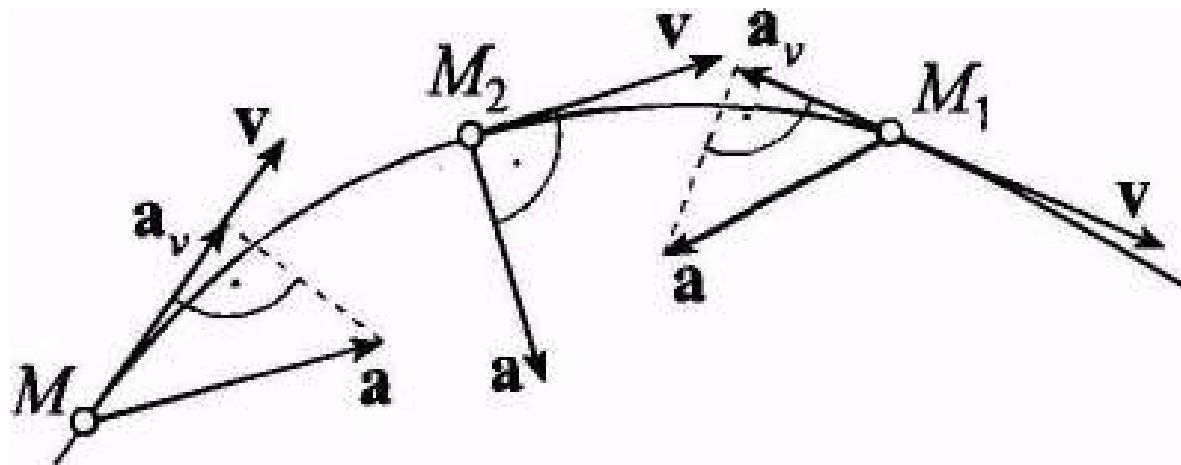
$$\vec{a}_{sr} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}; \quad a_{sr} = |\vec{a}_{sr}| = \frac{|\Delta \vec{v}|}{\Delta t}$$

- (Trenutno) ubrzanje tačke

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \vec{a}_{sr} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t};$$
$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}}$$

# Kinematika - kinematika tačke

- Ubrzano i usporeno kretanje



$$\vec{a} \cdot \vec{v} = av \cos \angle(\vec{a}, \vec{v}) > 0$$

$$\cos \angle(\vec{a}, \vec{v}) > 0$$

$$0 \leq \angle(\vec{a}, \vec{v}) < \pi/2$$

ubrzano kretanje ( $v \uparrow$ )

$$\vec{a} \cdot \vec{v} = av \cos \angle(\vec{a}, \vec{v}) < 0$$

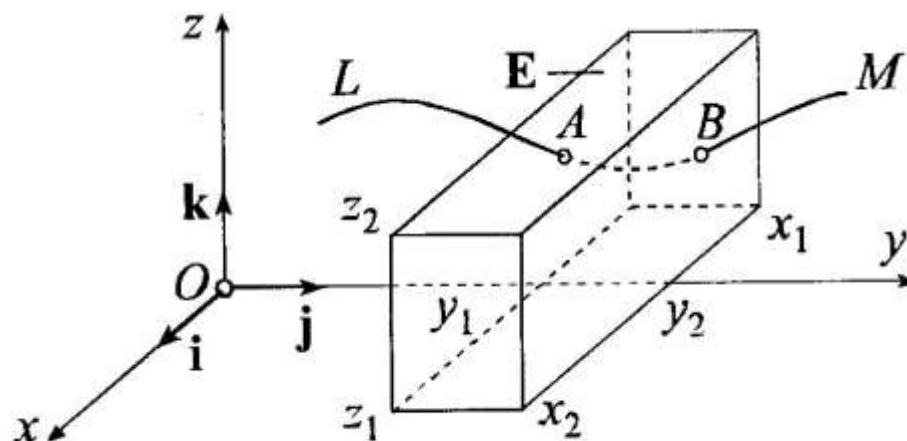
$$\cos \angle(\vec{a}, \vec{v}) < 0$$

$$\pi/2 < \angle(\vec{a}, \vec{v}) \leq \pi$$

usporeno kretanje ( $v \downarrow$ )

# Kinematika - kinematika tačke

- Dekartov koordinatni sistem



- **Trajektorija tačke** - zavisnosti  $x(t)$ ,  $y(t)$  i  $z(t)$  su parametarske jednačine trajektorije (konačne jednačine kretanja tačke) i određuju položaj tačke na trajektoriji u datom trenutku vremena.

# Kinematika - kinematika tačke

- Vektor položaja  $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$

- Brzina

$$\vec{v}(t) = \dot{x}(t)\vec{i} + \dot{y}(t)\vec{j} + \dot{z}(t)\vec{k}$$

$$v(t) = |\vec{v}(t)| = \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2}$$

$$\cos \alpha_{\vec{v}} = \frac{\dot{x}}{v}, \cos \beta_{\vec{v}} = \frac{\dot{y}}{v}, \cos \gamma_{\vec{v}} = \frac{\dot{z}}{v}$$

- Ubrzanje

$$\vec{a}(t) = \ddot{x}(t)\vec{i} + \ddot{y}(t)\vec{j} + \ddot{z}(t)\vec{k}$$

$$a(t) = |\vec{a}(t)| = \sqrt{\ddot{x}(t)^2 + \ddot{y}(t)^2 + \ddot{z}(t)^2}$$

$$\cos \alpha_{\vec{a}} = \frac{\ddot{x}}{a}, \cos \beta_{\vec{a}} = \frac{\ddot{y}}{a}, \cos \gamma_{\vec{a}} = \frac{\ddot{z}}{a}$$

# Kinematika - kinematika tačke

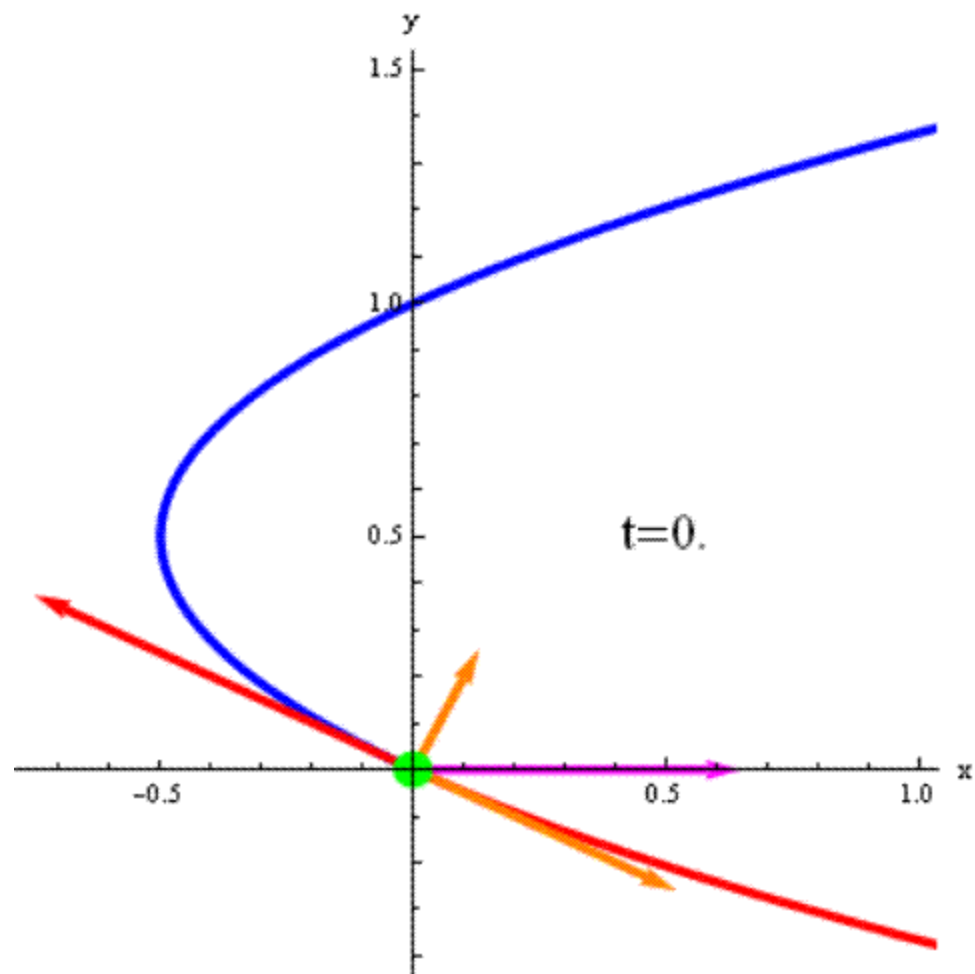
- Primer 1

Kretanje tačke je opisano parametarskim jednačinama

$$x(t) = \frac{t^2}{2} - t \quad y(t) = \frac{t}{2}$$

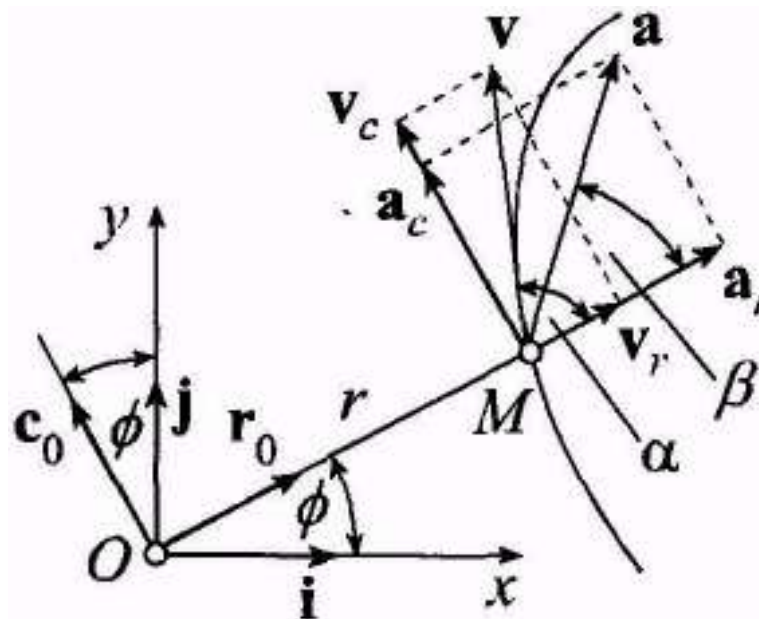
- a) Odrediti trajektoriju tačke,
- b) odrediti trenutak  $t^* > 0$  u kome će se tačka naći na osi y,
- c) odrediti brzinu i ubrzanje tačke u proizvoljnom trenutku vremena  $t$ ,
- d) odrediti brzinu i ubrzanje tačke, i njihove intenzitete, u trenutku  $t^*$ .

# Kinematika - kinematika tačky



# Kinematika - kinematika tačke

- Polarni koordinatni sistem



- **Trajektorija tačke** - zavisnosti  $r(t)$  i  $\varphi(t)$  su parametarske jednačine trajektorije (konačne jednačine kretanja tačke) i određuju položaj tačke na trajektoriji u datom trenutku vremena.

# Kinematika - kinematika tačke

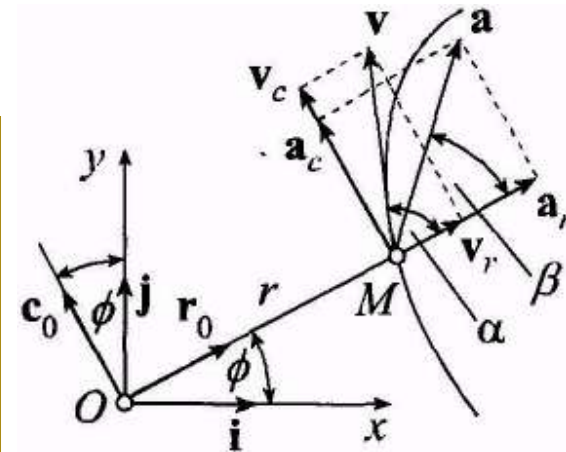
- Vektor položaja  $\vec{r}(t) = r(t)\vec{r}_0(t)$

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{r}\vec{r}_0 + r\dot{\vec{r}}_0$$

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{r}_0 + r\dot{\phi}\vec{c}_0 = v_r\vec{r}_0 + v_c\vec{c}_0$$

- Brzina

$$v = |\vec{v}| = \sqrt{v_r^2 + v_c^2}, \tan \alpha = \frac{v_c}{v_r}$$



$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{r}\vec{r}_0 + \dot{r}\dot{\vec{r}}_0 + \dot{r}\dot{\phi}\vec{c}_0 + r\ddot{\phi}\vec{c}_0 + r\dot{\phi}\dot{\vec{c}}_0$$

- Ubrzanje  $\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\phi}^2)\vec{r}_0 + (r\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi})\vec{c}_0 = a_r\vec{r}_0 + a_c\vec{c}_0$

$$a = |\vec{a}| = \sqrt{a_r^2 + a_c^2}, \tan \beta = \frac{a_c}{a_r}$$

$$\vec{r}_0 = \vec{r}_0(t) \neq \overrightarrow{const}, |\vec{r}_0| = 1, \dot{\vec{r}}_0 = \dot{\phi}\vec{c}_0$$

$$\vec{c}_0 = \vec{c}_0(t) \neq \overrightarrow{const}, |\vec{c}_0| = 1, \dot{\vec{c}}_0 = -\dot{\phi}\vec{r}_0$$

# Kinematika - kinematika tačke

- Primer 2

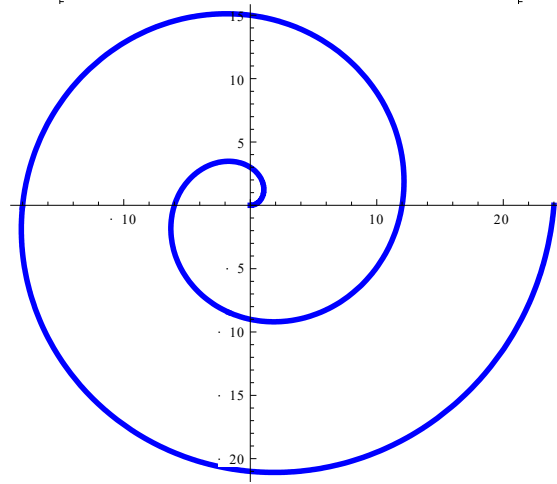
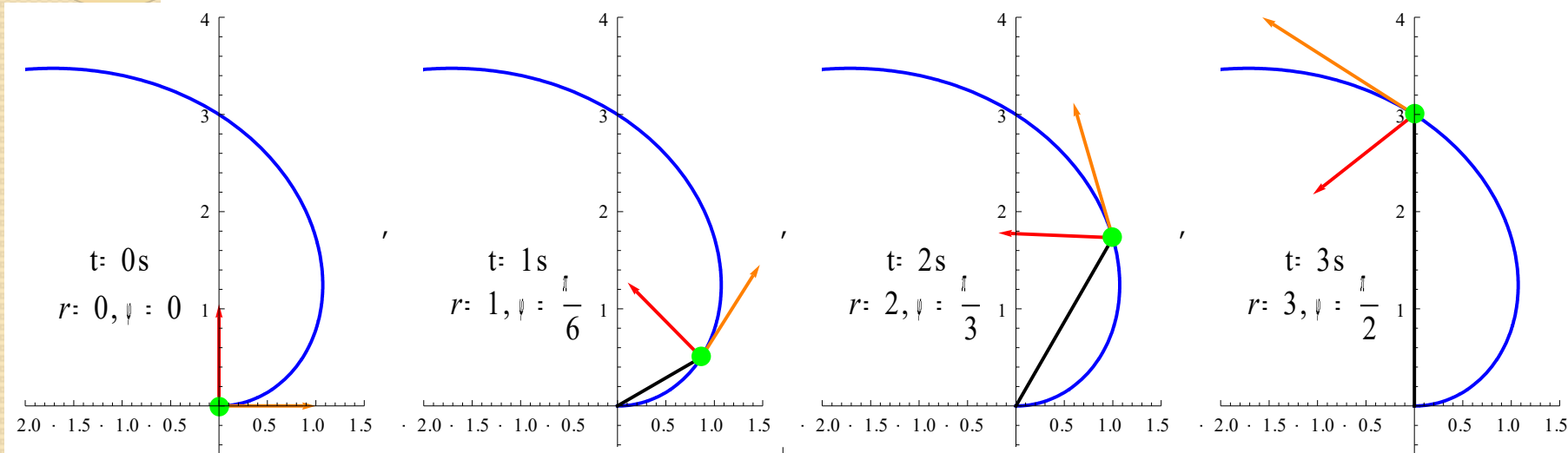
Kretanje tačke je opisano parametarskim jednačinama

$$r(t) = t, \varphi(t) = \frac{\pi}{6}t$$

- a) Odrediti trajektoriju tačke,
- b) odrediti brzinu i ubrzanje tačke u proizvoljnom trenutku vremena  $t$ ,
- c) odrediti položaj, brzinu i ubrzanje tačke u trenutku  $t^*=3s$ .

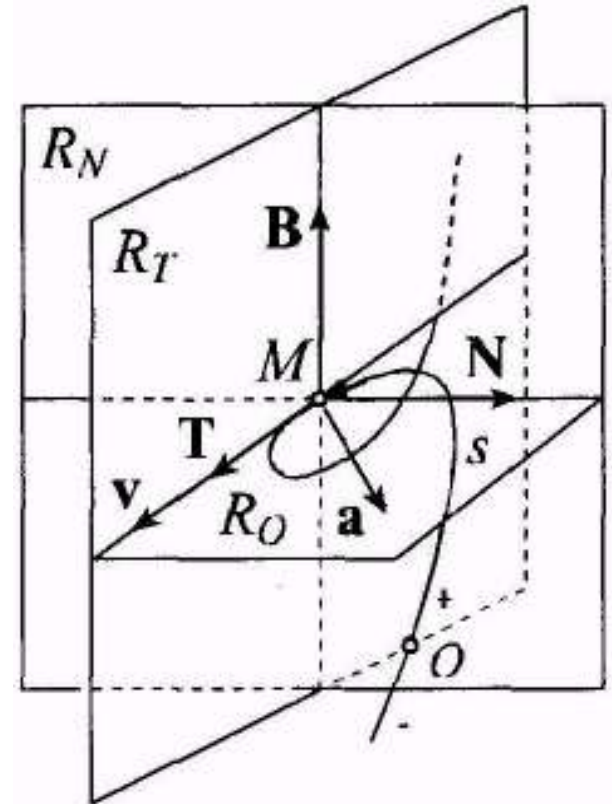
# Kinematika - kinematika tačke

- Primer 2  $r(t) = t, \varphi(t) = \frac{\pi}{6}t$



# Kinematika - kinematika tačke

- Prirodni koordinatni sistem
  - Znati kretanje u prirodnim koordinatama znači poznavati:
    - Zakon  $s(t)$  promene prirodne koordinate sa vremenom;
    - Trajektoriju tačke, duž koje se meri  $s(t)$ .



# Kinematika - kinematika tačke

- Brzina

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{ds}{dt} \frac{d\vec{r}}{ds}$$

$$\vec{v} = \dot{s} \vec{T} = v_T \vec{T}$$

$$v = |\vec{v}| = |\dot{s}|, \quad v^2 = \dot{s}^2$$

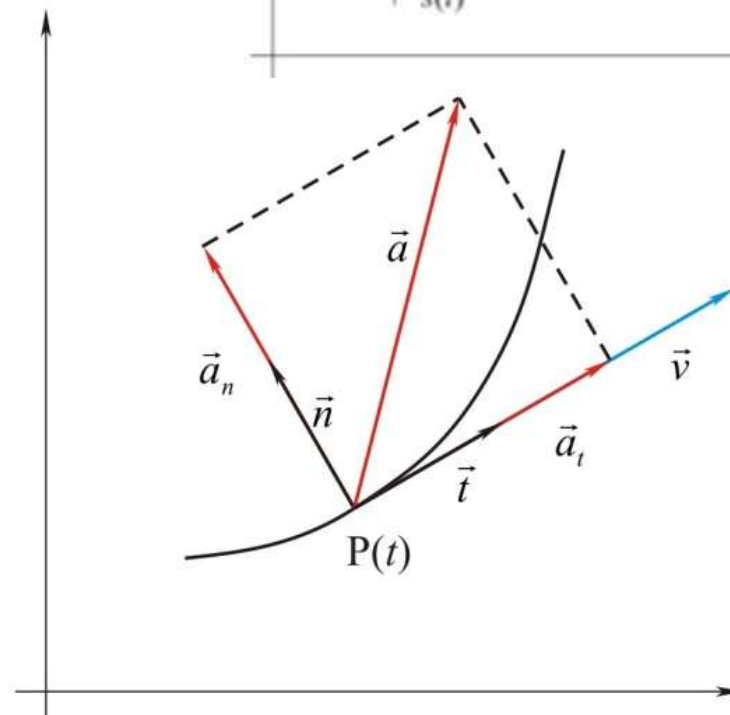
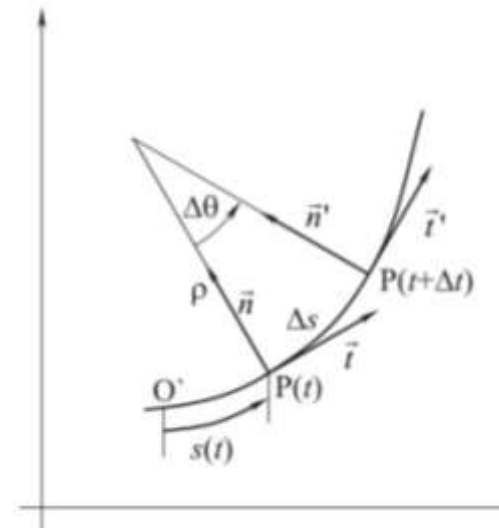
- Ubrzanje

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{s} \vec{T} + \dot{s} \dot{\vec{T}}$$

$$\vec{a} = \ddot{s} \vec{T} + \frac{\dot{s}^2}{R_k} \vec{N}$$

$$\vec{a} = a_T \vec{T} + a_N \vec{N}$$

$$a = \sqrt{a_T^2 + a_N^2}$$



# Kinematika - kinematika tačke

- Određivanje poluprečnika krivine trajektorije
  - poznato:  $v(t)$ ,  $a(t)$
  - odrediti:  $a_T(t)$ ,  $a_N(t)$ ,  $R_K(t)$

$$v^2 = \dot{s}^2 \rightarrow \frac{dv^2}{dt} = \frac{d\dot{s}^2}{dt} \rightarrow 2v\dot{v} = 2\dot{s}\ddot{s}$$

$$\ddot{s} = a_T = \frac{v\dot{v}}{\dot{s}} \rightarrow a_T^2 = \frac{v^2\dot{v}^2}{\dot{s}^2} = \dot{v}^2$$

$$a_N = \sqrt{a^2 - a_T^2}$$

$$R_K = \frac{v^2}{a_N}$$

# Kinematika - kinematika tačke

- Određivanje pređenog puta
  - poznato:  $v(t)$
  - odrediti:  $P[t_0, t]$

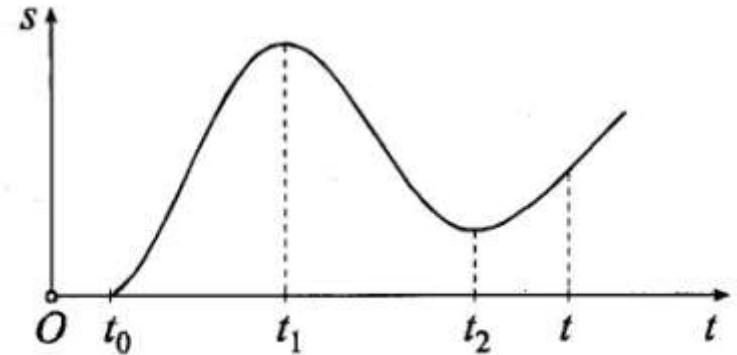
$$\dot{s}^2 = v^2 \rightarrow \dot{s}(t) = \pm v(t)$$

$$s(t) = \pm \int_{t_0}^t v(t) dt$$

$$P[t_0, t] = P[t_0, t_1] + P[t_1, t_2] + P[t_2, t]$$

$$= |s(t_1) - s(t_0)| + |s(t_2) - s(t_1)| + |s(t) - s(t_2)|$$

$$\dot{s}(t_1) = \dot{s}(t_2) = 0$$



# Kinematika - kinematika tačke

- Primer 1-nastavak

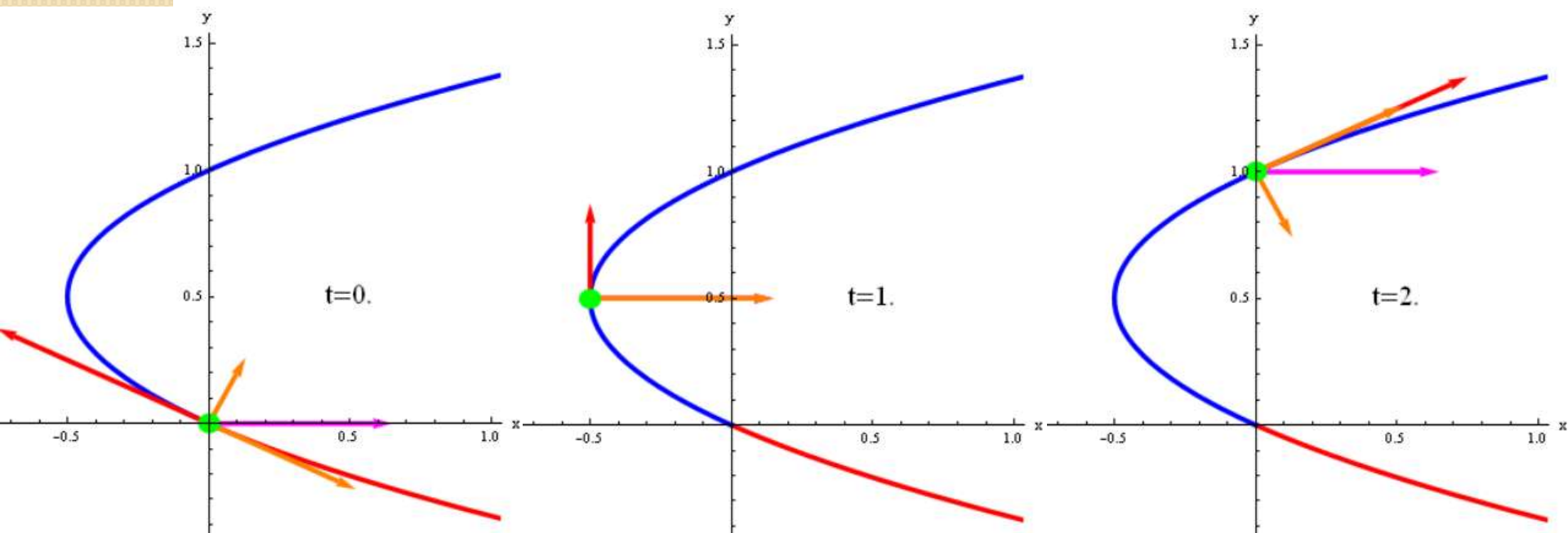
Kretanje tačke je opisano parametarskim jednačinama

$$x(t) = \frac{t^2}{2} - t \quad y(t) = \frac{t}{2}$$

Odrediti prirodne komponente ubrzanja i poluprečnik krivine trjektorije u trenutku vremena  $t^*$  (i trenucima  $t=0$  i  $t=1$ ).

# Kinematika - kinematika tačke

- Primer 1-nastavak



# Šte smo naučili?

- Broj stepeni slobode kretanja,
- Vektor položaja tačke i putanja tačke,
- Vektor brzine tačke,
- Vektor ubrzanja tačke,
- Dekartove koordinate,
- Polarne koordinate,
- Prirodne koordinate.