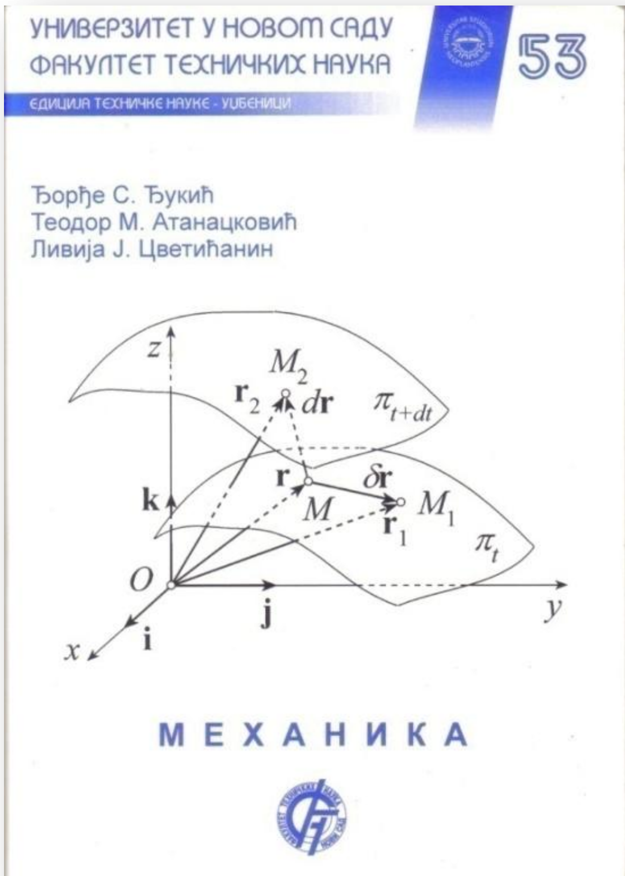
# Dinamika – vežbe 1

Kinematika i dinamika

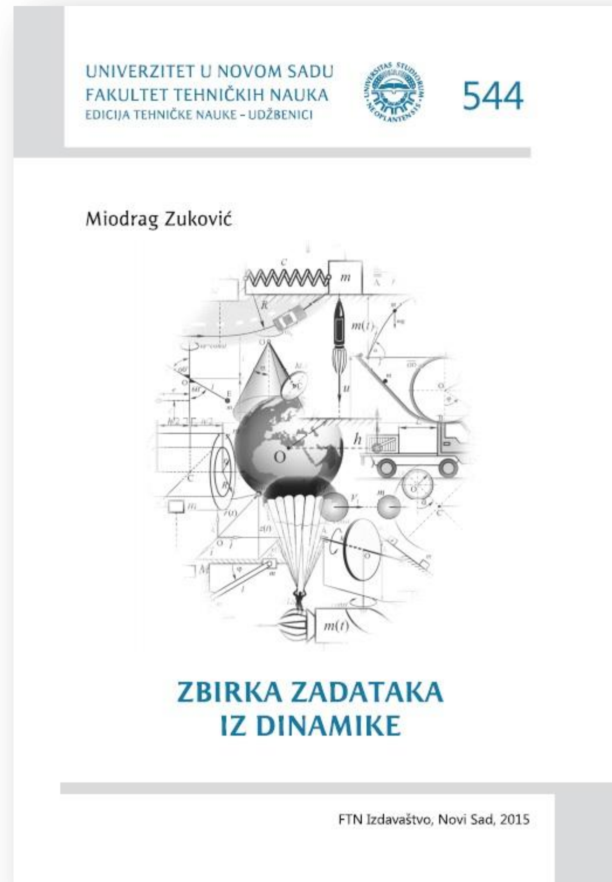
Miodrag Zuković

Novi Sad, 2021.

# Literatura



УНИВЕРЗИТЕТ У НОВОМ САДУ
ФАКУЛТЕТ ТЕХНИЧКИХ НАУКА
ЕДИЦИЈА ТЕХНИЧКЕ НАУКЕ - УЏБЕНИЦИ
53
Ђорђе С. Ђукић
Теодор М. Атанацковић
Ливија Ј. Цветићанин
МЕХАНИКА

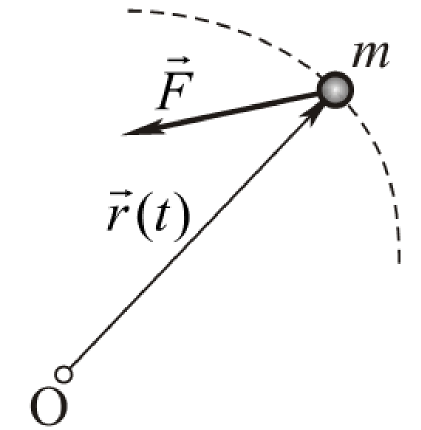
UNIVERZITET U NOVOM SADU
FAKULTET TEHNIČKIH NAUKA
EDICIJA TEHNIČKE NAUKE - UDŽBENICI
544
Miodrag Zuković
ZBIRKA ZADATAKA IZ DINAMIKE
FTN Izdavaštvo, Novi Sad, 2015

# Zadatak 1

Zadat je zakon kretanja materijalne tačke:

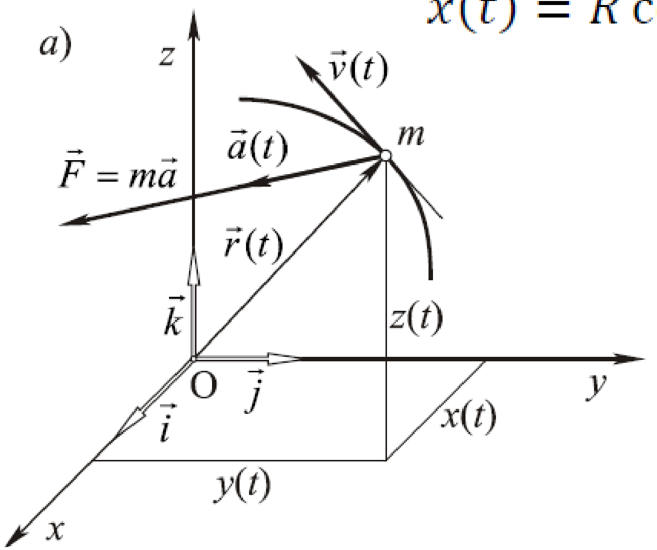
$$\vec{r}(t) = R\cos(pt)\,\vec{i} + R\sin(pt)\,\vec{j} + (qt)\vec{k}$$

Odrediti silu koja izaziva ovo kretanje. Masa tačke je $m$.



$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{\imath} + y(t)\vec{\jmath} + z(t)\vec{k} = (R\cos(pt))\vec{\imath} + (R\sin(pt))\vec{\jmath} + (qt)\vec{k}$$

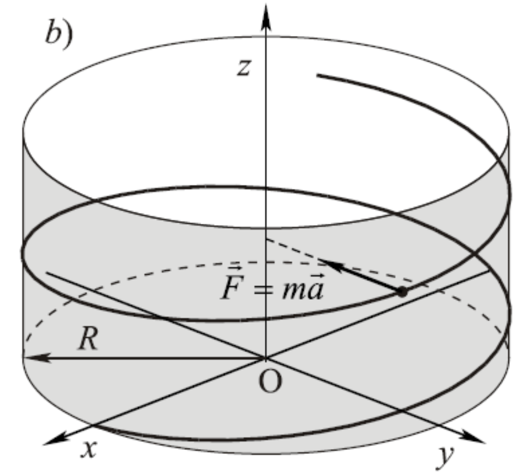
$$x(t) = R\cos(pt)\,, y(t) = R\sin(pt) \text{ i } \mathrm{z}(\mathrm{t}) = qt$$




Drugi Njutnov zakon

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

$$\boxed{\vec{F} = m\ddot{\vec{r}}}$$




$$\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = \dot{x}(t)\vec{\imath} + \dot{y}(t)\vec{\jmath} + \dot{z}(t)\vec{k} = (-Rp\sin(pt))\vec{\imath} + (Rp\cos(pt))\vec{\jmath} + (q)\vec{k}$$

$$\vec{a}(t) = \ddot{\vec{r}}(t) = \ddot{x}(t)\vec{\imath} + \ddot{y}(t)\vec{\jmath} + \ddot{z}(t)\vec{k} = (-Rp^2\cos(pt))\vec{\imath} + (-Rp^2\sin(pt))\vec{\jmath} + (0)\vec{k}$$

$$\boxed{\vec{F}(t) = (-mRp^2\cos(pt))\vec{\imath} + (-mRp^2\sin(pt))\vec{\jmath}}$$

$$F_x = -mRp^2\cos(pt)\,, F_y = (-mRp^2\sin(pt)), F_z = 0 \qquad F(t) = \left|\vec{F}(t)\right| = mRp^2$$

# Zadatak 2

Materijalna tačka, mase $m = 1\text{kg}$, kreće se pravolinijski (duž ose $x$) pod dejstvom sile $\vec{F}(t) = 10(1-t)\vec{\imath}[\text{N}]$, gde je vreme $t$ izraženo u sekundama. Odrediti kretanje tačke ako se zna da je ono započeto iz položaja $x(0) = 0$ početnom brzinom $\dot{x}(0) = v_0 = 20\text{m/s}$. Odrediti trenutak $t_1$ u kome tačka menja smer kretanja i put koji je tačka prešla do tog trenutka.

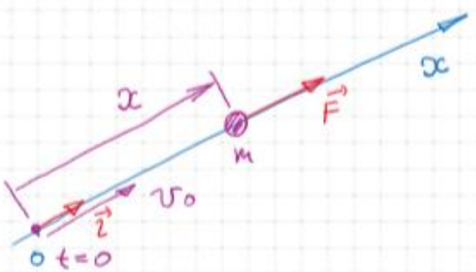
Materijalna tačka, mase $m = 1\text{kg}$, kreće se pravolinijski (duž ose $x$) pod dejstvom sile $\vec{F}(t) = 10(1-t)\vec{i}$[N], gde je vreme $t$ izraženo u sekundama. Odrediti kretanje tačke ako se zna da je ono započeto iz položaja $x(0) = 0$ početnom brzinom $\dot{x}(0) = v_0 = 20\text{m/s}$. Odrediti trenutak $t_1$ u kome tačka menja smer kretanja i put koji je tačka prešla do tog trenutka.

$F_x = 10(1-t)$

$F_x(0) = 10, \quad F_x(1) = 0, \quad F_x(2) = -10$

$x(t) = ?$

$t_1 = ? \rightarrow$ МЕЊА СМЕР КРЕТ.




II Њ. 3.

$m\vec{a} = \vec{F}$

$\vec{r} = x\vec{i}, \quad \vec{v} = \dot{x}\vec{i}, \quad \vec{a} = \ddot{x}\vec{i}$

$m\ddot{x}\vec{i} = 10(1-t)\vec{i} \quad / \cdot \vec{i}$

1

$\cancel{m}\ddot{x} = 10(1-t)$

$$* \quad \left\{ \ddot{x} = 10(1-t) \right| \qquad \text{пу} \quad t=0, \quad x(0)=0, \quad \dot{x}(0)=v_0=20$$

$$* \rightarrow \frac{d\dot{x}}{dt} = 10 - 10t \quad /\cdot dt \rightarrow \int d\dot{x} = 10\int dt - 10\int t\,dt \rightarrow$$

$$(a) \quad \boxed{\dot{x} = 10\cdot t - \overset{5}{\cancel{10}}\cdot\frac{t^2}{\cancel{2}} + c_1} \rightarrow \frac{dx}{dt} = 10t - 5t^2 + c_1 \quad /\cdot dt$$

$$\int dx = 10\int t\,dt - 5\int t^2 dt + c_1\int dt \rightarrow$$

$$(b) \quad \boxed{x = 10\frac{t^2}{2} - 5\frac{t^3}{3} + c_1 t + c_2}$$

пу

$$(a) \quad \dot{x}(0) = 10\cancel{\cdot 0} - 5\cancel{\cdot 0^2} + c_1 = 20$$

$$(b) \quad x(0) = c_2 = 0$$

$$c_1 = 20, \quad c_2 = 0$$

$$(A) \quad \dot{x} = 10t - 5t^2 + 20 \qquad (B) \quad x = 5t^2 - \frac{5}{3}t^3 + 20t$$

$t_1 = ?$ → МЕНА СМЕР КРЕТ. → $\dot{x}(t_1) = 0$

$(A) \rightarrow \dot{x}(t_1) = \boxed{-5t_1^2 + 10t_1 + 20 = 0} \quad /:(-5)$

$$t_1^2 - 2t_1 - 4 = 0 \rightarrow (t_1)_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4\cdot 1\cdot(-4)}}{2}$$

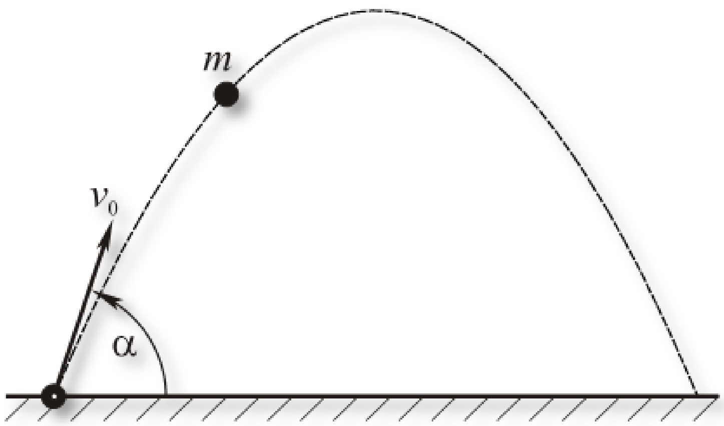
$$= \frac{2 \pm \sqrt{20}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{5}}{2}$$

$$\boxed{t_1 = 1 + \sqrt{5}}$$

$$\cancel{t_1 = 1 - \sqrt{5}} < 0$$

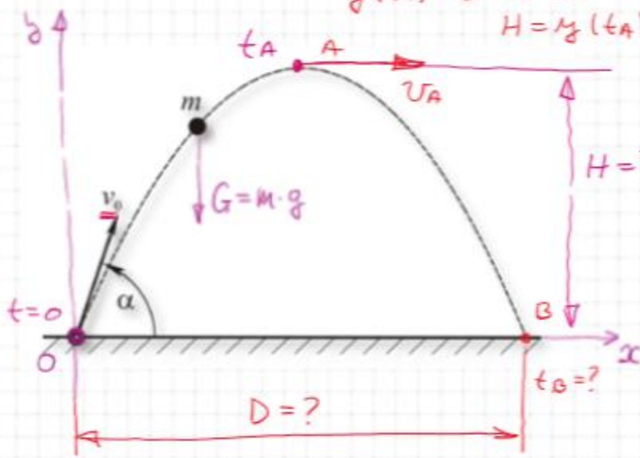
# Zadatak 3

Materijalna tačka mase $m$ započinje kretanje u vertikalnoj ravni, u homogenom polju sile zemljine teže, početnom brzinom intenziteta $v_0$ , pod uglom $\alpha$ u odnosu na horizontalu. Odrediti i analizirati kretanje tačke. Otpor sredine zanemariti. (Kosi hitac bez otpora.)



$\dot{y}(t_A) = 0 \rightarrow t_A =$

$H = y(t_A) =$




II Nz. 3.

$m\vec{a} = \vec{F}$

$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$

$\vec{v} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j}$

$$\underline{m(\ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j}) = -mg\vec{j}} \;\Big|\; /\cdot\vec{i} \;/\cdot\vec{j}$$

ΔJK

$$\underline{\begin{aligned} &(1) \quad m\ddot{x} = 0 \\ &(2) \quad m\ddot{y} = -mg \end{aligned}}$$

$\underline{\text{ПУ}}$

$t = 0$

$x(0) = 0$

$y(0) = 0$

$\dot{x}(0) = v_0 \cos\alpha$

$\dot{y}(0) = v_0 \sin\alpha$

$$(1) \quad \ddot{x} = 0 \rightarrow \boxed{\dot{x} = c_1 = const} \; (a) \rightarrow \frac{dx}{dt} = c_1 \rightarrow \int dx = c_1 \int dt$$

$$\underline{(b) \quad x = c_1 t + c_2}$$

$$(2) \quad \underline{\ddot{y} = -g} \rightarrow \frac{d\dot{y}}{dt} = -g \rightarrow \int d\dot{y} = -g \int dt \rightarrow \underline{(c) \quad \dot{y} = -gt + c_3} \rightarrow$$

$$\underline{\frac{dy}{dt} = -gt + c_3} \rightarrow \int dy = -g \int t\,dt + c_3 \int dt \rightarrow (d) \quad \underline{y = -g\frac{t^2}{2} + c_3 t + c_4}$$

ПУ

$t=0$

(a) $\dot{x}(0) = \boxed{C_1 = v_0 \cos\alpha}$

(b) $x(0) = \boxed{C_2 = 0}$

(c) $\dot{y}(0) = \boxed{C_3 = v_0 \sin\alpha}$

(d) $y(0) = \boxed{C_4 = 0}$

$$\boxed{\begin{array}{ll} (A) & \dot{x}(t) = v_0 \cos\alpha = const \\ (B) & x(t) = (v_0 \cos\alpha)\cdot t \\ (C) & \dot{y}(t) = -gt + v_0 \sin\alpha \\ (D) & y(t) = -g\frac{t^2}{2} + (v_0 \sin\alpha)\cdot t \end{array}}$$

$$\left.\begin{array}{l} x(t) \\ y(t) \end{array}\right\} \xrightarrow[t]{\text{елим.}} y(x)$$

$$(B) \rightarrow t = \frac{x}{v_0 \cos\alpha} \rightarrow (D) \rightarrow$$

$$y = -\frac{g}{2}\,\frac{x^2}{v_0^2\cos^2\alpha} + (\cancel{v_0}\sin\alpha)\cdot\frac{x}{\cancel{v_0}\cos\alpha}$$

$$\boxed{y = -\frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}x^2 + (\mathrm{tg}\,\alpha)\,x}$$

ПАРАБОЛА

$t_B = ? \rightarrow \underline{\underline{y(t_B) = 0}}$

$$(D) \quad \boxed{y(t_B) = -g\frac{t_B^2}{2} + v_0 \sin\alpha \cdot t_B = 0}$$

$$t_B \cdot \Big(\underbrace{-\frac{g}{2} t_B + v_0 \sin\alpha}_{=0}\Big) = 0$$

$t_B = 0$ , $\rightarrow \underline{t_B = \dfrac{2 v_0 \sin\alpha}{g}}$

$$D = x(t_B) = v_0 \cos\alpha \cdot t_B$$

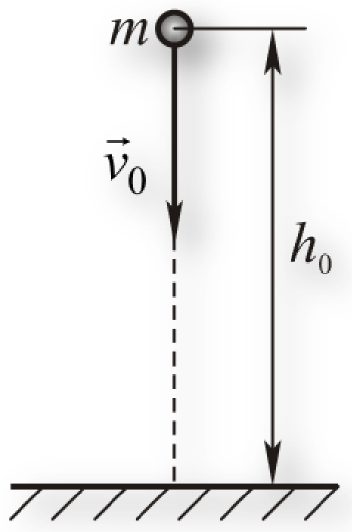
$$= v_0 \cos\alpha \cdot \frac{2 v_0 \sin\alpha}{g} \rightarrow \underline{D = \frac{v_0^2}{g}\sin(2\alpha)}$$

$\alpha_m = ? \rightarrow D_{max} = ?$

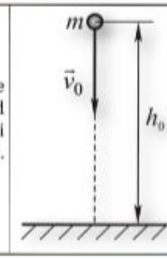
$\alpha_m = \dfrac{\pi}{4} \rightarrow D_{max} = \dfrac{v_0^2}{g}$

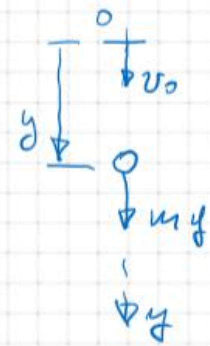
# Zadatak 4

Materijalna tačka, mase $m$, započinje kretanje naniže početnom brzinom $v_0$, sa visine $h_0$. Pored sile težine na tačku deluje i sila otpora vazduha čiji je intenzitet proporcionalan brzini tačke, $R = mkv$. Odrediti zakon promene brzine tačke.



Materijalna tačka, mase $m$, započinje kretanje naniže početnom brzinom $v_0$, sa visine $h_0$. Pored sile težine na tačku deluje i sila otpora vazduha čiji je intenzitet proporcionalan brzini tačke, $R = mkv$. Odrediti zakon promene brzine tačke.

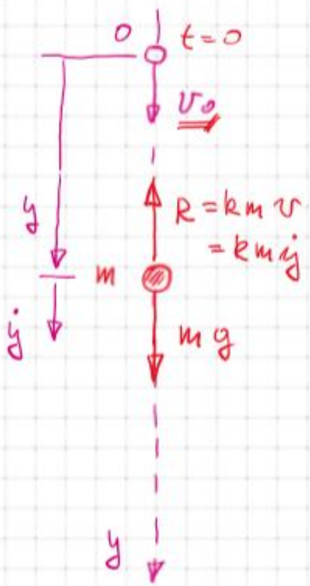



$$\cancel{m}\ddot{y} = \cancel{m} g > 0$$

$$\dot{y} = v_0 + gt$$

II Nb. 3.




$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{R}$$

$$m\ddot{y}\vec{j} = mg\vec{j} - km\dot{y}\vec{j} \quad / \cdot \vec{j}$$

$$\cancel{m}\ddot{y} = \cancel{m}g - k\cancel{m}\dot{y}$$

$$\ddot{y} = g - k\dot{y}$$

$$\frac{d\dot{y}}{dt} = g - k\dot{y} \quad / \cdot \frac{dt}{g - k\dot{y}}$$

$$\int_{\dot y(0)=v_0}^{\dot y} \frac{d\dot y}{g-k\dot y} = \int_0^t dt$$

$$\int \frac{dz}{a+bz} = \frac{1}{b}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{b}\ln u$$

$$= \frac{1}{b}\ln(a+bz)$$

$$-\frac{1}{k}\ln(g-k\dot y)\Big|_{v_0}^{\dot y} = t\,\Big|_0^t$$

$$a+bz=u \quad / \, d$$

$$b\,dz = du$$

$$dz = \frac{du}{b}$$

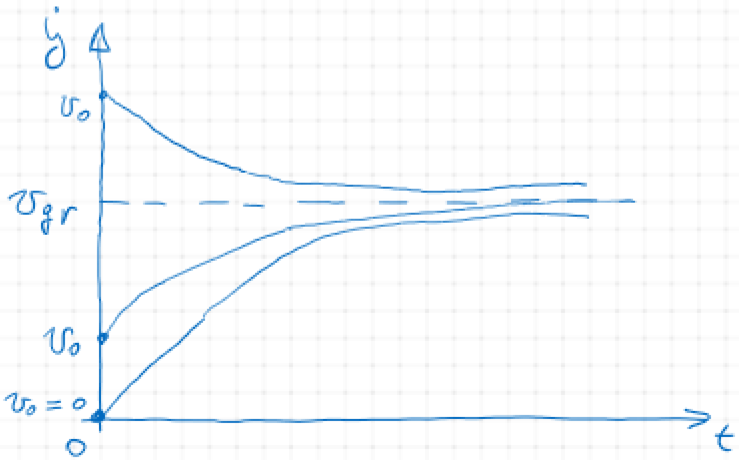
$$-\frac{1}{k}\left(\ln(g-k\dot y)-\ln(g-kv_0)\right) = t-0$$

$$\ln\frac{g-k\dot y}{g-kv_0} = -kt$$

$$\frac{g-k\dot y}{g-kv_0} = e^{-kt} \longrightarrow g-k\dot y = (g-kv_0)\,e^{-kt}$$

$$\underline{\dot y = \frac{g}{k} - \frac{g-kv_0}{k}\,e^{-kt}}$$

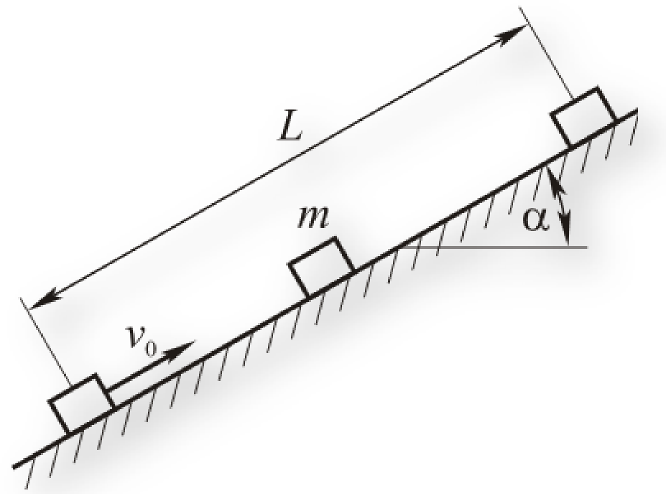
$$\dot{y} = \frac{g}{k} - \frac{g - k v_0}{k} e^{-kt}$$



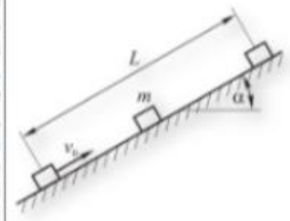

$$\lim_{t \to \infty} \dot{y} = \frac{g}{k} = v_{gr}$$

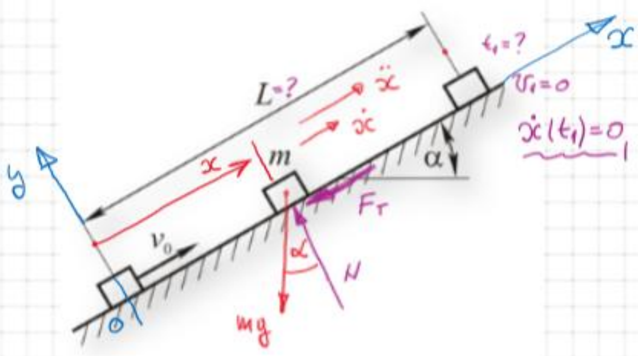
# Zadatak 5

Materijalna tačka, mase $m$, započinje kretanje uz hrapavu strmu ravan nagibnog ugla $\alpha$, u homogenom polju sile zemljine teže, početnom brzinom $v_0$. Koeficijent trenja između tačke i strme ravni je $\mu$. Odrediti kretanje tačke, trenutak $t_1$ u kom se tačka zaustavlja i put $L$ koji je tačka prešla do zaustavljanja. Rešiti zadatak za slučaj kretanja tačke po idealno glatkoj strmoj ravni.



Materijalna tačka, mase $m$, započinje kretanje uz hrapavu strmu ravan nagibnog ugla $\alpha$, u homogenom polju sile zemljine teže, početnom brzinom $v_0$. Koeficijent trenja između tačke i strme ravni je $\mu$. Odrediti kretanje tačke, trenutak $t_1$ u kom se tačka zaustavlja i put $L$ koji je tačka prešla do zaustavljanja. Rešiti zadatak za slučaj kretanja tačke po idealno glatkoj strmoj ravni.




II 16.3.

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F_T}$$

$$m(\ddot{x}\vec{i} + \underbrace{\cancel{\ddot{y}}}_{0}\vec{j}) = -mg\sin\alpha\,\vec{i} - mg\cos\alpha\,\vec{j} + N\vec{j} - F_T\vec{i} \quad /\cdot\vec{i} \;/\cdot\vec{j}$$

(1) $m\ddot{x} = -mg\sin\alpha - F_T$

(2) $m\underbrace{\cancel{\ddot{y}}}_{0} = -mg\cos\alpha + N$

$x, y, N, F_T = ?$

ДОП. ЈЕДН.

(3) $y = const \rightarrow \dot{y} = \ddot{y} = 0$

(4) $F_T = \mu N$ (КУЛОНОВ ЗАКОН)

$$(2) \rightarrow N = mg\cos\alpha = const, \quad (4) \rightarrow F_T = \mu m g \cos\alpha = const$$

$$(1) \rightarrow \cancel{m}\ddot{x} = -\cancel{m}g\sin\alpha - \mu \cancel{m} g\cos\alpha$$

$$\ddot{x} = -\overbrace{g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}^{C} = const < 0$$

$$\ddot{x} = -C \rightarrow \frac{d\dot{x}}{dt} = -C \rightarrow \int_{\dot{x}(0)=v_0}^{\dot{x}} d\dot{x} = -C\int_0^t dt \rightarrow \dot{x}\Big|_{v_0}^{\dot{x}} = -C\,t\Big|_0^t$$

$$\dot{x} - v_0 = -C(t-0) \rightarrow (a)\ \dot{x} = v_0 - Ct \rightarrow \frac{dx}{dt} = v_0 - Ct$$

$$\int_{x(0)=0}^{x} dx = v_0\int_0^t dt - C\int_0^t t\,dt \rightarrow (b)\ x = v_0 \cdot t - C\frac{t^2}{2}$$

$$t_1 = ? \rightarrow \dot{x}(t_1) = 0 \rightarrow (a)\ \dot{x}(t_1) = v_0 - C t_1 = 0 \rightarrow t_1 = \frac{v_0}{C} = \frac{v_0}{- - - -}$$

$$L = ? \rightarrow L = x(t_1) \overset{b}{=} v_0 t_1 - C\frac{t_1^2}{2} = v_0 \cdot \frac{v_0}{C} - \frac{\cancel{C}}{2}\frac{v_0^2}{C^{\cancel{2}}}$$

$$L = \frac{v_0^2}{2C} = \frac{v_0^2}{2g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}$$

Drugi Njutnov zakon, $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{T}$, gde je $\vec{F} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{T}$ rezultanta svih aktivnih sila i reakcija veza, u uvedenom koordinatnom sistemu glasi

$$m\ddot{x}\vec{i} = (-mg\sin\alpha\,\vec{i} - mg\cos\alpha\,\vec{j}) + (N\vec{j}) + (-T\vec{i})$$

Projektovanjem vektorske jednačine dobijaju se skalarne jednačine

$$m\ddot{x} = -mg\sin\alpha - T,\ 0 = -mg\cos\alpha + N$$

Uz ove jednačine potrebna je i dopunska jednačina, a to je Kulonov zakon trenja. Tačka proklizava i intenzitet sile trenja jednak je graničnoj vrednosti

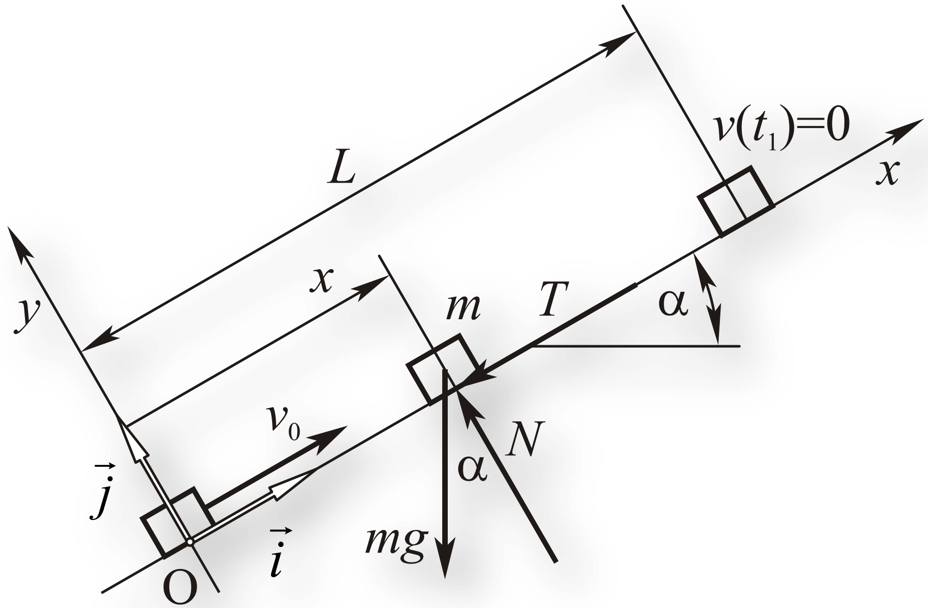
$$T = \mu N$$

Rešavanjem poslednje tri jednačine dobija se

$N = mg\cos\alpha = const$

$T = \mu mg\cos\alpha = const$

$\ddot{x} = -g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)$



Poslednja jednačina je jednačina iz koje se određuje kretanje. Ona pokazuje da je kretanje jednoliko usporeno. Prvom integracijom

$$\int_{v_0}^{\dot{x}} d\dot{x} = -g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)\int_0^t dt$$

dobija se zakon promene brzine tačke

$$\dot{x} = v_0 - g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)t$$

Integracijom poslednje jednačine

$$\int_0^x dx = \int_0^t (v_0 - g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)t)dt$$

dolazi se do zakona kretanja tačke

$$x = v_0 t - g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)\frac{t^2}{2}$$

Trenutak zaustavljanja $t_1$ određuje se iz uslova

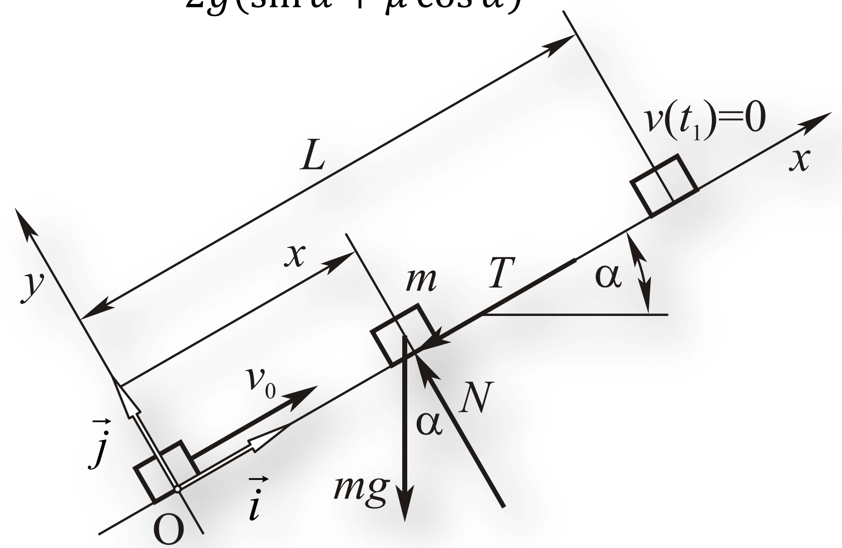
$$\dot{x}(t_1) = \underbrace{v_0 - g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)t_1}\ = 0$$

i on je

$$t_1 = \frac{v_0}{g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}$$

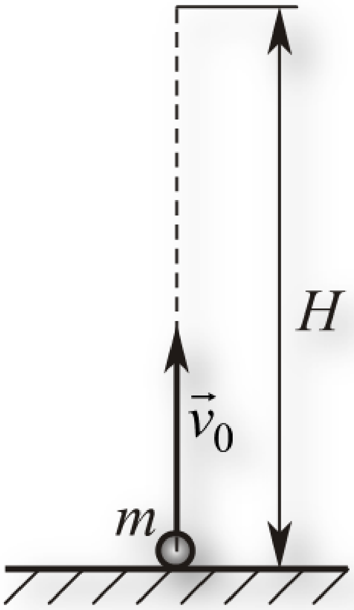
Put $L$, koji je tačka prešla do zaustavljanja, jednak je

$$L = x(t_1) = v_0 t_1 - g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)\frac{{t_1}^2}{2}$$
$$= \frac{{v_0}^2}{2g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}$$



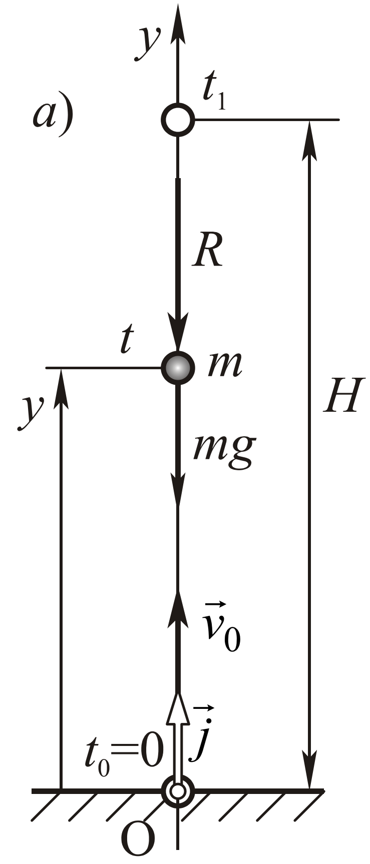
# Zadatak 6

Materijalna tačka, mase $m$, započinje kretanje sa površine zemlje vertikalno naviše početnom brzinom $v_0$. Pored sile težine na nju deluje i sila otpora vazduha čiji je intenzitet proporcionalan kvadratu brzine tačke $R = kmv^2$. Odrediti visinu $H$ do koje će se tačka popeti.



Sila otpora je kvadratna funkcija brzine $|\vec{R}| = kmv^2 = km|\vec{v}|^2$. Vektor sile otpora u ovom slučaju je $\vec{R} = -|\vec{R}|\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = -km|\vec{v}|^2\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = -km|\vec{v}|\vec{v}$. Ako se osa $y$ uvede vertikalno naviše, vektor brzine tačke može da se zapiše kao $\vec{v} = \dot{y}\vec{j}$, pa je sila otpora $\vec{R} = -km|\dot{y}|\dot{y}\vec{j}$. Za kretanje tačke naviše važi $\dot{y} > 0$, pa je $|\dot{y}|\dot{y} = \dot{y}^2$ i

$$\vec{R} = -km\dot{y}^2\vec{j}$$




Drugi Njutnov zakon, $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{R}$, u izabranom koordinatnom sistemu glasi

$$m\ddot{y}\vec{j} = -mg\vec{j} - km\dot{y}^2\vec{j}$$

i iz njega sledi diferencijalna jednačina kretanja

$$\ddot{y} = -(g + k\dot{y}^2)$$

Početni uslovi za dato kretanje su:

$$y(0) = 0, \qquad \dot{y}(0) = v_0$$

Posle izvršene reparametrizacije, $\ddot{y} = \frac{d\dot{y}}{dt} = \frac{dy}{dt}\frac{d\dot{y}}{dy} = \dot{y}\frac{d\dot{y}}{dy}$, sledi

$$\dot{y}\frac{d\dot{y}}{dy} = -(g + k\dot{y}^2)$$

Nakon razdvajanja promenjivih i integracije

$$-\int_{\dot{y}(0)=v_0}^{\dot{y}} \frac{\dot{y}d\dot{y}}{g + k\dot{y}^2} = \int_{y(0)=0}^{y} dy \rightarrow -\frac{1}{2k}\ln(g + k\dot{y}^2)\Big|_{v_0}^{\dot{y}} = y\Big|_0^y$$

dobija se

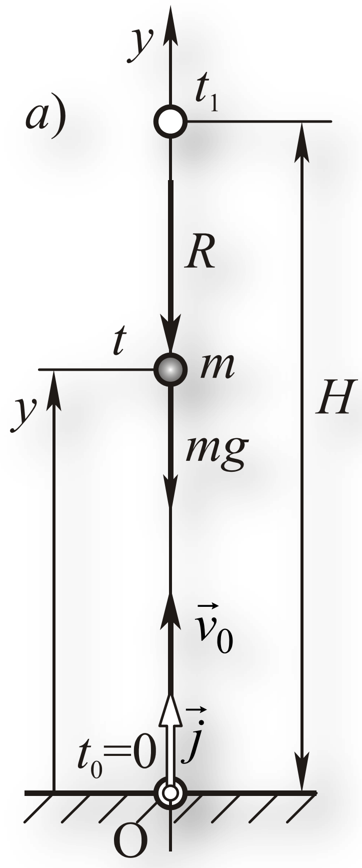
$$-\frac{1}{2k}\ln\left(\frac{g + k\dot{y}^2}{g + k{v_0}^2}\right) = y$$

Iz ove jednačine može se izraziti promena brzine u funkciji položaja tačke

$$\dot{y}(y) = \sqrt{\left(\frac{g}{k} + {v_0}^2\right)e^{-2ky} - \frac{g}{k}}$$

Ako se sa $t_1$ označi trenutak u kome je tačka dostigla najviši položaj, onda važi: $y(t_1) = H$ i $\dot{y}(t_1) = 0$. Zamenom ovih vrednosti za $y$ i $\dot{y}$ u pretposlednju jednačinu dobija se

$$-\frac{1}{2k}\ln\left(\frac{g}{g + k{v_0}^2}\right) = H \rightarrow H = \frac{1}{2k}\ln\left(1 + \frac{k{v_0}^2}{g}\right)$$



# Dinamika – vežbe 1

Kinematika i dinamika

Miodrag Zuković

Novi Sad, 2021.