

(из садржаја)

“Учбеник садржи све области које су обухваћене планом и програмом предмета Механика који се предаје студентима електротехнике на Факултету техничких наука у Новом Саду. Учбеник могу користити и студенти грађевине, саобраћаја, графичког инжењерства, индустријских система и инжењерства заштите животне средине овог и сличних факултета.”

(из рецензије)

“Књига је писана јасно. Појмови механике и отпорности материјала су дати на једноставан и разумљив начин. Књига даје детаљна објашњења низа механичких величина. Велики број оригиналних илустративних примера, као и редослед увођења појмова указује на велику ангажованост аутора. Сама техничка обрада и компјутерско цртање свих слика с циљем добијања што бољих векторских слика то још више потврђује.”

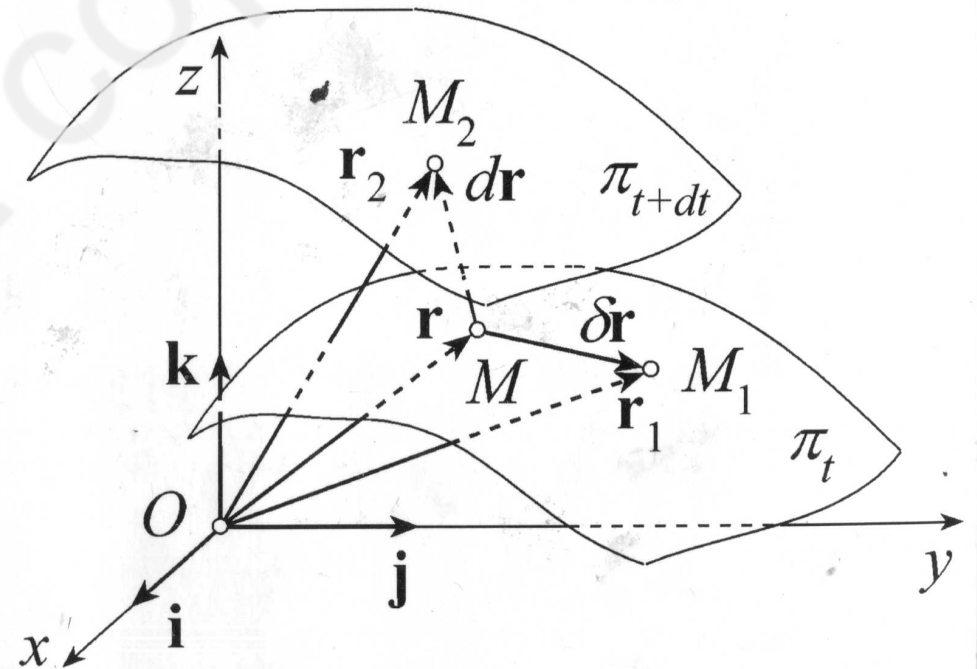
(о ауторима)

“Ђорђе С. Ђукић је дугогодишњи редовни професор механике на Факултету техничких наука у Новом Саду. Област научног рада је аналитичка механика и варијациони принципи механике. Дописни је члан Српске академије наука и уметности.”

“Теодор М. Атанацковић је дугогодишњи редовни професор отпорности материјала и теорије еластичности Факултета техничких наука у Новом Саду. Област научног рада је теорија бифуркација, теорија еластичности и варијациони принципи механике. Дописни је члан Српске академије наука и уметности.”

“Ливија Ј. Цветићанин је редовни професор механике и теорије машина Факултета техничких наука у Новом Саду. Бави се нелинеарним осцилацијама и теоријом хаоса.”

Ђорђе С. Ђукић
Теодор М. Атанацковић
Ливија Ј. Цветићанин



МЕХАНИКА



Uvod

Tela u prirodi deluju jedno na drugo na više različitih načina. Sa jednog tela na drugo može da se prenosi toplota, naelektrisanje, vlaga, itd. Ono dejstvo koje ima za posledicu kretanje posmatranih tela u odnosu na telo koje predstavlja posmatrača, ili pak promenu njihovog oblika kao i uticaj kojim se jedno telo suprotstavlja kretanju drugog tela naziva se mehaničko dejstvo. Istraživanja koja se bave proučavanjem međusobnog mehaničkog dejstva i mehaničkog kretanja tela naziva se mehanika.

Klasična mehanika proučava pojave u kojima su brzine kretanja male u odnosu na brzinu svetlosti, koja približno iznosi 3×10^8 [km/s]. Pojave u kojima brzine kretanja nisu zanemarljive u odnosu na brzinu svetlosti objašnjava relativistička mehanika. Atomska fizika i kvantna mehanika proučavaju pojave koje su vezane za mikrostrukturu materije i ne mogu se makroskopski primetiti i opisati.

Od svih mnogobrojnih uspešnih primena zakona klasične mehanike, najlepša je njena primena u astronomiji. Zakonima klasične mehanike se neprekidno služimo kako u svakodnevnom životu, tako i u tehničkim naukama.

Početkom dvadesetog veka principi klasične mehanike su bili izloženi kritizmu, koji je doveo do pojave relativističke i kvantne mehanike. Relativistička mehanika nije dokazala da je klasična mehanika pogrešna, već je ukazala na granice njene primenljivosti. Ona je pokazala da klasična mehanika valjano opisuje događaje u prirodnom svetlu ako su brzine kretanja tela male u poređenju sa brzinom svetlosti, a da njeni zakoni ne važe ako su te brzine bliske brzini svetlosti.

Može se uočiti da klasična ili Njutnova¹ mehanika još uvek predstavlja jedno od centralnih mesta u studiranju tehničkih nauka i fizike. Za to postoje dobri razlozi.

1. To je jedna od najtačnijih fizičkih teorija koja je ikad razvijena. Tri stotine godina od objavljivanja njutnovih *Philosophiae naturalis principia*

¹ I. Newton, 1642 – 1727.

mathematica, začuđujuća je činjenica da nijedna od njegovih ideja nije potisnuta od ideja teorije relativnosti i kvantne mehanike. Šta više, još uvek je potrebna velika istančanost i naučnička genijalnost da se uoči neka greška u njegovim zakonima kretanja.

Prvi planetoid, ili malu planetu, Ceres otkrio je G. Pjaci² u Palermu 1. januara 1801. godine. Pjaci je posmatrao kretanja Ceresa nekoliko nedelja, a zatim se razboleo i izgubio njegovu putanju. Više naučnika je računalo njegovu putanju na temelju ograničenog broja položaja koje je opazio Pjaci, no jedino je putanja koju je izračunao Gaus³ bila dovoljno tačna da bi se moglo pretpostaviti gde će se Ceres pojaviti sledeće godine. 1. januara 1802. godine Olbers je ponovo otkrio planetoid Ceres na ugaonoj udaljenosti od samo 30 minuta od predviđenog položaja. Kako su se opažanja gomilala, tako su Gaus i ostali mogli sve tačnije računati putanju, pa se 1830. godine izmereni položaj planetoida razlikovao samo za 8 sekundi od predviđene putanje. Kasniji proračuni, koji su imali znatno potpuniji mehanički model kretanja Ceresa, dali su predviđene putanje koje su se razlikovale od izmerenih samo za 30 sekundi u 30 godina. Očigledno da ovi rezultati potvrđuju tačnost modela kretanja u prirodi koji nudi klasična mehanika.

2. Kvantna mehanika i teorija relativnosti proširile su poglede teorijske fizike, ali koncept klasične mehanike još uvek ima nezamenljivu ulogu. Klasična mehanika daje osnovne okvire za posmatranja kretanja u prirodi kao i bit ključnih ideja i metoda za njihovo rešavanje. Ona daje osnovna predznanja neophodna za detaljnije proučavanje mnogih oblasti fizike i tehnike.
3. Klasična mehanika razvija geometrijsku intuiciju i daje neprocenjivo iskustvo u rešavanju i modeliranju problema. Njeni problemi obiluju lakim štapovima, diskovima, oprugama, glatkim površinama itd. Ipak, i pored ovih, krajnje praktičnih objekata proučavanja, osnovna svrha mehanike je obrazovna. Snaga mehanike je u širini zadataka koje rešava i u raznolikosti njenih ideja.
4. Problemi klasične mehanike i, posebno, vekovna proučavanja kretanja planeta, podstakla su razvoj mnogih oblasti matematike. Nije nikakva slučajnost da se čuvena imena mehanike Njutn, Ojler⁴, Lagranž⁵...

²G. Piazzi.

³J.C.F. Gauss, 1777 – 1855.

⁴L. Euler, 1707 – 1783.

takođe pojavljuju ponovo i ponovo u mnogim oblastima čiste matematike. Naime, potrebno je proučavati mehaniku da bi se razumeli koreni matematike.

5. Uticaj klasične mehanike na modernu matematiku je velik. Na primer, proučavanja u mehanici su dovela do razvoja simplektičke geometrije, koja je dobila veliku primenu u analizi parcijalnih diferencijalnih jednačina.

Ova knjiga obrađuje osnovne pojmove mehanike i sledeće četiri oblasti klasične mehanike: statiku krutog tela, statiku elastičnog tela, kinematiku i dinamiku.

Statika predstavlja najstariju oblast mehanike. U trećem veku pre naše ere počela se razvijati Euklidova⁶ geometrija i uporedo sa njom i Arhimedova⁷ statika. Statika se bavi uslovima ravnoteže materijalnih tela i načinom svođenja sila i spregova na jednostavniji oblik.

U statici elastičnih tela proučavaju se deformacije tela i unutrašnje sile između pojedinih delova tela koje su posledica spoljašnjih dejstava.

U kinematici se razmatra geometrija kretanja tela, koje ne poseduje masu, nezavisno od interakcije između tela.

Najzad, dinamika proučava kretanje tela, koja poseduju masu, nastala međusobnim dejstvom tela, odnosno delovanjem sila i spregova na telo.

Ova knjiga predstavlja dopunjeno i prerađeno izdanje udžbenika "Mehanička" od autora Đ. Đukića i T. Atanackovića (vidi [16])⁸, koji je štampan 1993. godine od izdavača "Štamparija FTN".

Pri izlaganju materijala autori su se trudili da naglase fizički smisao posmatranih zakona i teorema i da prikažu njihovu primenu na rešavanje zadataka mehanike.

Knjiga sadrži 78 detaljno rešenih zadataka, od kojih je većina sa pismenih ispita na Fakultetu tehničkih nauka u Novom Sadu. Ovo omogućuje čitaocu da, sem za učenje teorije, knjigu koristi i za dobijanje prvog iskustva u rešavanju zadataka.

Knjiga je prvenstveno namenjena studentima drugog semestra elektrotehnike kao i studentima građevine, saobraćaja, grafičkog inženjerstva, zaštite životne sredine i industrijskih sistema na Fakultetu tehničkih nauka u Novom Sadu. Može se koristiti pod vođstvom nastavnika ili za samostalno učenje.

⁶Eυκλειδοσ oko 330 – 275 p.n.e.

⁷Αρχιμηδης 287 – 212.

⁸Brojevi u uglastim zagradama označavaju brojeve citirane literature koja je navedena

Za vreme dugogodišnjeg zajedničkog rada na Katedri za mehaniku Fakulteta tehničkih nauka u Novom Sadu, a naročito za vreme pisanja ove knjige, autori su dobili dragocene ideje i savete u vezi izloženog materijala od Prof. Božidara Vujanovića. Na tome se Prof. B. Vujanoviću najtoplije zahvaljujemo.

Autori unapred zahvaljuju svima koji će svojim savetima i primedbama doprineti da se nedostaci knjige, kojih nesumljivo ima, otklone.

U Novom Sadu, januara 2003. godine

Đorđe Slavka Đukić
Teodor Mirka Atanačković
Livija Jenea Cvetičanin

Glava 1

Osnovni pojmovi mehanike

Najveći broj fizičkih veličina u mehanici su vektorske prirode. Teoriju vektora detaljno proučava matematika, gde se utvrđuje da vektori mogu biti različiti po svojim svojstvima, tj. pripadati različitim vrstama. Ipak, najčešće se u teoriji vektora obrađuju samo svojstva slobodnih vektora. To su vektori koji se mogu proizvoljno pomerati u prostoru ostajući paralelni svom osnovnom položaju. U mehanici ima vektora koji imaju neke svoje posebnosti. Svojstvima vektora, koji su fizičke veličine u mehanici, treba obratiti veliku pažnju.

U ovom tekstu vektor se obeležava naglašenim (bold) slovom **a**, a njegov intenzitet istim zakošenim običnim (italic-normal) slovom *a*. Ugao između dva vektora **a** i **b** obeležava se $\angle(\mathbf{a}, \mathbf{b})$. Ako se pravci vektora **a** i **b** poklapaju, onda je $\angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$ ili $\angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \pi$, a vektori su tada kolinearni.

Ako su **a** i **b** dva vektora onda se njihov skalarni proizvod označava **a** • **b**. Skalarni proizvod dva vektora je skalar, odnosno $c = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = ab \cos \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b})$.

Vektorski proizvod dva vektora **a** i **b**, koji se označava **a** × **b**, je treći vektor **c** = **a** × **b**. Njegov intenzitet je $c = ab \sin \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b})$. Taj vektor ima pravac normale na ravan vektora **a** i **b**. On je tim pravcem usmeren u stranu sa koje se obrtanje prvog vektora **a** do poklapanja sa drugim vektorom **b**, za oštar ugao $\angle(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, vidi u suprotnom smeru od kretanja kazaljke na satu.

1.1 Mehaničko kretanje i mirovanje

Pod mehaničkim kretanjem podrazumeva se pomeranje tela relativno jedno u odnosu na drugo. Mehaničko kretanje je najjednostavnije kretanje koje postoji u materijalnom svetu.

U cilju proučavanja kretanja tela mora se znati promena položaja tela u

prostoru tokom vremena. Svakako, ovo je nemoguće ako u prostoru nema drugih tela, u odnosu na koje se određuje položaj pokretnog tela. Ako bi prostor bio "prazan", odnosno ako u njemu ne bi bilo drugih tela osim posmatranog, bilo bi nemoguće odrediti položaj posmatranog tela. U takvom "praznom" prostoru nema razlike između kretanja i mirovanja.

Za proučavanje kretanja, tela u prirodi potrebno je imati u razmatranju bar dva tela. Pod kretanjem se podrazumeva promena položaja jednog tela u odnosu na drugo sa proticanjem vremena. Telo sa koga bi posmatrač mogao proučavati kretanje drugog tela naziva se referentno telo. Ako se kretanje jednog tela posmatra u odnosu na nepokretno telo, odnosno referentno telo je nepokretno, onda je to apsolutno kretanje. Ako je referentno telo pokretno, onda je kretanje u odnosu na njega relativno kretanje. Apsolutno kretanje tela posmatrač vidi ako miruje zajedno sa nepokretnim referentnim telom, a relativno ako je posmatrač nepokretan u odnosu na pokretno referentno telo.

Njutn je postulirao postojanje apsolutno nepokretnih tela u prostoru, koja su po njemu jedino nepokretne zvezde, i time ukazao da se samo u odnosu na apsolutno nepokretno telo može odrediti apsolutno kretanje ili mirovanje drugog tela. Umesto tela, u odnosu na koje se posmatra apsolutno kretanje ili mirovanje posmatranog tela, usvaja se apsolutno nepokretan koordinatni sistem.

Ako se telo, u odnosu na koje se posmatra kretanje ili mirovanje drugog tela, kreće onda se radi o relativnom kretanju ili mirovanju posmatranog tela. Umesto tela, u odnosu na koje se posmatra relativno kretanje ili mirovanje, usvaja se pokretan koordinatni sistem.

Znači, svako kretanje ili mirovanje nekog tela posmatra se u odnosu na neki koordinatni sistem. Ako je koordinatni sistem nepokretan onda je kretanje i mirovanje u odnosu na njega apsolutno. U slučaju da je koordinatni sistem pokretan onda je kretanje i mirovanje relativno.

1.2 Prostor i vreme

Mehaničko kretanje je izazvano različitim promenama u materijalnom svetu. Svi uočeni oblici mehaničkog kretanja se odvijaju u prostoru tokom vremena. Kao i kretanje, i prostor i vreme su oblici postojanja materijalnog sveta.

Sva kretanja u mehanici se posmatraju u trodimenzionalnom Euklidovom prostoru, čija su osnovna svojstva homogenost, izotropnost i neprekidnost. Sva svojstva prostora u mehanici su potpuno određena sistemom aksioma i teorema Euklidove geometrije. Za merenje rastojanja u prostoru uvodi se

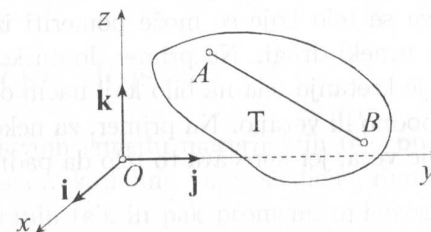
jedinica dužine jedan metar¹ [m].

U mehanici vreme se smatra apsolutnim ili univerzalnim i formalno nezavisnim od kretanja materijalnih tela i njihovog položaja u prostoru. Apsolutno vreme teče na isti način u svim delovima prostora. Jedinica za merenje vremena je jedna sekunda².

U mehanici, vreme je realna pozitivna veličina, koja raste neprekidno i ima ulogu nezavisno promenljive u svim problemima mehanike. Bilo koji trenutak vremena obeležava se sa t . Trenutak u kome je kretanje počelo naziva se početni trenutak vremena i obeležava se sa t_0 . Svaki određeni trenutak vremena tokom kretanja obeležava se sa donjim indeksom različitim od 0, na primer $t_1 = 1[s]$.

1.3 Objekti proučavanja u mehanici

Mehaničke pojave u trodimenzionalnom Euklidovom prostoru često se posmatraju u odnosu na Dekartov³ pravougli koordinatni sistem desne orijentacije $Oxyz$ (Slika 1.1). Jedinični vektori pravaca x , y i z osa su $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ i $\mathbf{k}$ i pošto su i oni desne orijentacije zadovoljavaju uslov $\mathbf{k} = \mathbf{i} \times \mathbf{j}$. U tom prostoru posmatra se kretanje ili mirovanje sledećih objekata:



Slika 1.1:

1. Materijalne tačke:

Za neka kretanja može se telo konačnih dimenzija zameniti modelom materijalne tačke. Ova idealizacija je moguća ako se obrtni deo ukupnog

¹Metar je 1.650.763,73 talasnih dužina narandžaste svetlosti kriptona 86 u vakumu, koja se emituje pri prelasku elektrona sa nivoa $2p_{10}$ na nivo $5d_5$.

²Do 1967. godine za definiciju sekunde koristili su se astronomski standardi a od 1967. godine važi sledeća definicija: Jedna sekunda je trajanje 9.192.631.770 perioda zračenja koje odgovara prelazu između dva hiperfina nivoa osnovnog stanja atoma cezijuma 133.

³R. Descartes, 1596 – 1650.

kretanja tela ne razmatra. Na primer, ako se prilikom kretanja Zemlje oko Sunca proučava samo putanja središta Zemlje, onda se čak i telo tako velikih dimenzija može smatrati tačkom. Ako se proučava obrtni deo nekog kretanja, onda se taj objekat mora posmatrati kao telo, bez obzira na dimenzije objekta. Na primer, prilikom proučavanja obrtnog efekta, vrlo malih naelektrisanih čestica u magnetnom polju, ove se čestice moraju posmatrati kao tela konačnih dimenzija.

2. Čvrstog tela:

Tela su manje ili više deformabilna. Ona tela, koja se mogu deformisati, menjajući svoj oblik i zapreminu, zovu se čvrsta tela.

3. Krutog tela:

Ako se u telu zamisle bilo koje dve tačke A i B , i ako se rastojanje između tih tačaka ne menja, onda se takva tela zovu kruta tela. Znači, za kruto telo je $AB = \text{const.}$, a za čvrsto $AB \neq \text{const.}$ Tečna i gasovita tela, koja takođe ispunjavaju uslov $AB \neq \text{const.}$ se ne posmatraju u ovoj knjizi.

Prema mogućnosti kretanja tela u prostoru ona su slobodna ili neslobodna. Slobodno telo naziva se telo koje se može pomeriti iz jednog proizvoljnog položaja u prostoru u neki drugi. Na primer, lopta koja leti prema košu je slobodno telo. Ako je kretanje tela na bilo koji način ograničeno u prostoru, ono se naziva neslobodno ili vezano. Na primer, za neko telo koje se kreće ili miruje na stolu sto je veza, jer sprečava to telo da padne na Zemlju.

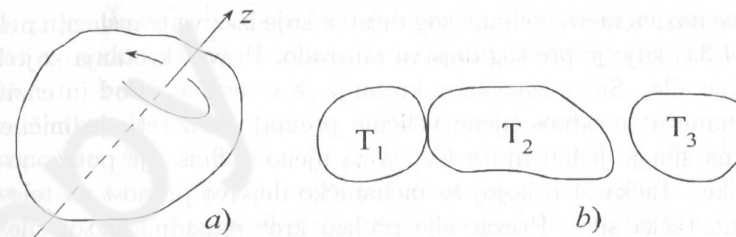
1.4 Osnovna kretanja

Sva kretanja tela u prirodi su kombinacija dva osnovna kretanja tela. To su translatorno kretanje tela i obrtanje tela oko ose, koja može biti pokretna ili nepokretna u prostoru.

Najjednostavnije kretanje krutog tela T u trodimenzionalnom prostoru sa koordinatnim osama $Oxyz$, (Slika 1.1), je ono pri kome bilo koja zamišljena duž AB u tom telu ostaje stalno tokom kretanja paralelna svom početnom pravcu. Takvo kretanje tela se naziva translatorno kretanje. Ono može biti pravolinijsko i krivolinijsko.

Drugo osnovno kretanje u prirodi je obrtanje krutog tela oko neke ose u prostoru, na primer ose z (Slika 1.2a). Pri obrtanju oko nepokretne ose z svaka tačka tela, koja nije na osi obrtanja, kreće se po kružnici, dok tačke na

osi obrtanja ostaju nepokretne. Obrtanje, posmatrano iz pozitivnog smera ose z , čiji je smer obrtanja suprotan smeru obrtanja kazaljke na satu, je pozitivno obrtanje. Smer obrtanja oko neke ose označava se znacima $\curvearrowright$ i $\curvearrowleft$. Pri proučavanju obrtanja tela oko ose mora se smatrati da je telo konačnih dimenzija, jer je obrtanje tačke oko ose koja prolazi kroz nju besmislen pojam.



Slika 1.2:

Uslovi čije ispunjenje pri mehaničkom dejstvu dovodi do translatornog kretanja ili obrtanja tela oko nepokretne ose u prostoru utvrđuju se u dinamici. Naglašava se, da su takva kretanja vrlo česta u prirodi.

1.5 Mehaničko dejstvo ②

Pod mehaničkim dejstvom između materijalnih tela podrazumeva se takav oblik uzajamnog dejstva, koji ima za posledicu promenu načina kretanja ili mirovanja posmatranih tela ili pak promenu njihovog oblika. Mehaničko dejstvo može se ostvariti direktnim kontaktom dva tela T_1 i T_2 (Slika 1.2b) ili bez tog direktnog kontakta, dejstva između tela T_2 i T_3 ili između T_1 i T_3 . Na primer, prilikom sudara dva tela mehaničko dejstvo je ostvareno kontaktom, dok se naelektrisana čestica kreće u magnetnom polju bez kontakta sa izvorom magnetnog polja. Zemlja se kreće oko Sunca pod mehaničkim dejstvom gravitacione sile ali bez ikakvog kontakta sa Suncem.

Pretpostavimo da telo T_1 ili T_3 mehaničkim dejstvom izaziva kretanje tela T_2 , koje se do tog trenutka nalazilo u miru. Nastalo kretanje tela T_2 može biti vrlo raznoliko. U posebnim uslovima nastalo kretanje je translatorno ili obrtanje oko neke nepokretne ose. Na primer, posle udarca hokejaškim štapom po paku ovaj se često kreće translatorno po ledu bez ikakvog obrtanja. Nasuprot tome, pokretom prstiju može se dovesti u obrtanje dečija čigra na horizontalnoj ravni oko vertikalne nepomične ose.

Glava 4

Kinematika

Kinematika se naziva deo mehanike u kome se proučava kretanje tela, samo sa geometrijskog stanovišta, ne uzimajući u obzir materijalnost tela i međusobno dejstvo između tela koje izaziva kretanje. Kinematika razmatra kretanje tela kao neprekidan proces promene položaja u prostoru tokom vremena, ostavljajući po strani vezu tog kretanja sa materijalnom strukturom tela i silama i spregovima koji na telo deluju. Prema tome, pokretno telo se u kinematici razmatra kao geometrijski objekat.

Kinematika je u celosti zasnovana na aksiomama i pravilima geometrije, ali za razliku od nje, sem prostora u kome se kreće telo, ona razmatra i vreme, tokom kog se kretanje odvija.

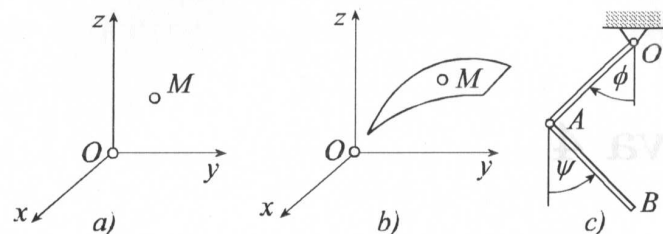
Kinematika ima veoma važan značaj za izučavanje dinamike, ali i za proučavanje geometrijskih svojstava kretanja raznih vrsta mehanizama i mašina.

4.1 Broj stepeni slobode kretanja

Broj međusobno nezavisnih kretanja tačke, tela ili sistema tela i tačaka naziva se broj stepeni slobode kretanja datog sistema. Ovaj broj je istovremeno i broj nezavisnih parametara koji u svakom trenutku vremena tokom kretanja jednoznačno određuju položaj datog sistema u prostoru. Ti parametri mogu biti Dekartove koordinate, krivolinijske koordinate, uglovi, itd.

Položaj slobodne tačke M u trodimenzionalnom Euklidovom prostoru (Slika 4.1a) određen je sa tri nezavisne koordinate x , y i z tačke M Dekartovog koordinatnog sistema $Oxyz$, pa slobodna tačka pri kretanju u prostoru ima tri stepena slobode kretanja.

Ako je tačka M , sa koordinatama x , y i z , primorana da se kreće po



Slika 4.1:

nekoj površini $f(x, y, z) = 0$ u trodimenzionalnom prostoru (Slika 4.1b), tada se iz ove jednačine, bilo koja koordinata može izraziti preko dve preostale i nezavisne. Zato, kretanje tačke po nekoj površini ima dva stepena slobode kretanja.

Kao sledeći primer, posmatrajmo dva štapa zadatih dužina OA i AB , koji su zglobno vezani u tačkama O i A i koji mogu da se kreću samo u vertikalnoj ravni (Slika 4.1c). Položaj štapova u vertikalnoj ravni je potpuno određen sa dva nezavisna parametra, koji su dva ugla ϕ i ψ , pa ovaj sistem ima dva stepena slobode kretanja.

4.2 Kinematika tačke

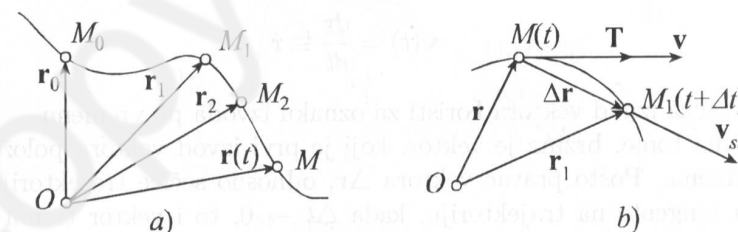
4.2.1 Vektor položaja tačke i putanja tačke

Posmatra se kretanje jedne tačke u trodimenzionalnom prostoru. Ovo kretanje ima tri stepena slobode i položaj tačke je određen u svakom trenutku vremena ako se znaju tri parametra u funkciji od vremena. Ta tri parametra, koji definišu kretanje tačke u prostoru, mogu se izabrati na različite načine, ili drugim rečima za opisivanje kretanja mogu se upotrebiti razni koordinatni sistemi. Posebnost ovih koordinatnih sistema dolazi do izražaja pri izračunavanju osnovnih karakteristika kretanja u konkretnim problemima.

Položaj tačke M u bilo kom trenutku vremena je određen ako je zadat vektor $\mathbf{r}$, koji spaja neku nepokretnu tačku O sa pokretnom tačkom M , u funkciji od vremena t (Slika 4.2a). Vektor $\mathbf{r}$ zove se vektor položaja tačke M a zavisnost $\mathbf{r}(t)$ zakon kretanja tačke. U raznim trenucima vremena vektor položaja tačke $\mathbf{r}(t)$ zauzima u prostoru različite položaje, $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(t_0)$, $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}(t_1)$, $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}(t_2)$, ..., u odnosu na tačku O . Geometrijsko mesto tačaka vrhova tih vektora položaja predstavlja trajektoriju ili putanju tačke.

4.2.2 Vektor brzine tačke

Neka se pokretna tačka nalazila u položaju M (Slika 4.2b) na trajektoriji u trenutku t , koji je određen vektorom položaja $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, a u trenutku $t + \Delta t$ u položaju M_1 , koji je određen vektorom položaja $\mathbf{r}_1(t + \Delta t)$, gde je Δt konačan priraštaj vremena. Vektor $\Delta \mathbf{r}$ određuje priraštaj vektora položaja i zove se vektor konačnog pomeranja tačke. Sa slike 4.2b je $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r} + \Delta \mathbf{r}$, odnosno $\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}$.



Slika 4.2:

Vektor srednje brzine tačke za vremenski interval Δt je definisan promenom vektora položaja po jedinici vremena u intervalu Δt , odnosno

$$\mathbf{v}_{sr} = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}. \quad (4.1)$$

Ovaj vektor ima pravac vektora $\Delta \mathbf{r}$ a smer kretanja tačke. Intenzitet srednje brzine tačke je

$$v_{sr} = \frac{|\Delta \mathbf{r}|}{\Delta t}, \quad (4.2)$$

a njena dimenzija je [dužina]/[vreme], a njena jedinica¹ [m/s].

Ako je vremenski interval Δt konačan, tada u opštem slučaju srednja brzina tačke vrlo loše karakteriše promenu vektora položaja u nekom trenutku unutar vremenskog intervala Δt . Ova karakteristika kretanja je sve tačnija, što je vremenski interval Δt kraći.

¹ Vrlo često se intenzitet brzine kretanja daje u broju kilometara koje bi tačka prešla za jedan čas, na primer tako se uvek meri brzina kretanja automobila. Ako je takva brzina v_z [kilometar/čas], onda je odgovarajuća brzina u metrima po sekundi $v_s [m/s] = v_z/3.6$, jer jedan kilometar ima hiljadu metara a jedan čas 3600 sekundi.

Trenutna brzina tačke M , koja odgovara trenutku t , predstavlja graničnu vrednost srednje brzine kada priraštaj vremena Δt teži ka nuli

$$\mathbf{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \mathbf{v}_{sr} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}.$$

Poznato je da granična vrednost količnika $\Delta \mathbf{r}/\Delta t$, kada $\Delta t \rightarrow 0$, predstavlja definiciju izvoda vektorske funkcije $\mathbf{r}(t)$ po nezavisno promenljivoj t . Znači, trenutna brzina tačke M ima oblik

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \equiv \dot{\mathbf{r}}, \quad (4.3)$$

gde se tačka iznad vektora koristi za oznaku izvoda po vremenu.

Prema tome, brzina je vektor, koji je prvi izvod vektora položaja tačke po vremenu. Pošto pravac vektora $\Delta \mathbf{r}$, odnosno sečice trajektorije, teži ka pravcu tangente na trajektoriju, kada $\Delta t \rightarrow 0$, to i vektor trenutne brzine tačke pada u pravac jediničnog vektora tangente $\mathbf{T}$ na putanju u tački M (Slika 4.2b). Smer vektora brzine određuje smer kretanja tačke na putanji u tom trenutku vremena.

Izraz (4.3) pokazuje i da su vektor brzine $\mathbf{v}$ i vektor elementarnog pome-
ranja $d\mathbf{r}$ istog pravca, odnosno kolinearni. Ova važna činjenica se često koristi u našim daljim proučavanjima.

4.2.3 Vektor ubrzanja tačke

Tokom kretanja tačke u svakom njenom položaju na trajektoriji, koji odgovara određenom trenutku vremena, tačka ima različite vektore brzine (Slika 4.3). Neka se u nekom trenutku vremena t pokretna tačka nalazi u položaju M i neka u tom položaju ima brzinu $\mathbf{v}$, koja pada u pravac jediničnog vektora tangente $\mathbf{T}$. Po isteku vremenskog intervala Δt , a u trenutku $t + \Delta t$, tačka se nalazi u položaju M_1 imajući pri tom brzinu $\mathbf{v}_1$, koja pada u pravac jediničnog vektora tangente $\mathbf{T}_1$. Znači, brzina pokretne tačke se za to vreme promenila za $\Delta \mathbf{v} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}$. Odavde je $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v} + \Delta \mathbf{v}$, a ovaj vektorskoj jednačini odgovara paralelogram vektora u tački M . Očigledno je da je vektor $\Delta \mathbf{v}$ uvek usmeren u konkavnu (izdubljenu) stranu putanje tačke.

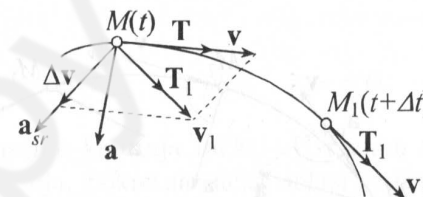
Vektor srednjeg ubrzanja pokretne tačke u vremenskom intervalu Δt definiše se količnikom priraštaja vektora brzine $\Delta \mathbf{v}$ i vremenskog intervala Δt , odnosno

$$\mathbf{a}_{sr} = \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t}. \quad (4.4)$$

Vektor $\mathbf{a}_{sr}$ ima isti pravac kao i vektor $\Delta \mathbf{v}$ i zbog toga je usmeren u konkavnu (izdubljenu) stranu putanje. Intenzitet srednjeg ubrzanja tačke ima vrednost

$$a_{sr} = \frac{|\Delta \mathbf{v}|}{\Delta t}, \quad (4.5)$$

dok njegova dimenzija iznosi $a_{sr}[\text{brzina}]/[\text{vreme}]$, a jedinica je $[m/s^2]$.



Slika 4.3:

Trenutno ubrzanje pokretne tačke u trenutku vremena t definiše se graničnom vrednošću srednjeg ubrzanja $\mathbf{a}_{sr}$ kada vremenski priraštaj Δt teži ka nuli

$$\mathbf{a}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \mathbf{a}_{sr} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t}. \quad (4.6)$$

Imajući u vidu definiciju izvoda vektora i izraz (4.3), trenutno ubrzanje tačke postaje

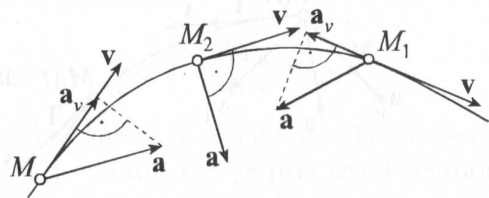
$$\mathbf{a}(t) = \frac{d\mathbf{v}}{dt} \equiv \dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{r}}. \quad (4.7)$$

Prema tome, vektor ubrzanja tačke u datom trenutku vremena jednak je prvom izvodu vektora brzine ili drugom izvodu vektora položaja tačke po vremenu.

Za određivanje položaja vektora trenutnog ubrzanja u odnosu na putanju posmatra se njegova definicija, ali na malo drugačiji način. Trenutno ubrzanje je granična vrednost srednjeg ubrzanja (4.6). Sa slike 4.3 se vidi da srednje ubrzanje leži u ravni vektora brzina $\mathbf{v}$ i $\mathbf{v}_1$, koje pripadaju susednim tačkama M i M_1 na trajektoriji, odnosno u ravni tangenti $\mathbf{T}$ i $\mathbf{T}_1$ na putanju u tim tačkama. Kako priraštaj vremena Δt teži ka nuli, odnosno kako tačka M_1 teži ka tački M , tako se i ova ravan tangenčnih vektora menja i teži svom graničnom položaju u prostoru. Taj granični položaj ravni tangenti $\mathbf{T}$ i $\mathbf{T}_1$ u dvema beskonačno bliskim tačkama na krivoj liniji, odnosno na putanji, formira oskulatornu ravan krive linije u tački M . Od svih ravni koje prolaze

kroz tačku M oskulatorna ravan ima sa krivom dodir najvišeg reda. To znači da se najbolje od svih ravni priljubljuje uz krivu. U svakoj tački krive imamo drugu oskulatornu, odnosno dodirnu, ravan. Kod ravninskih krivih oskulatorna ravan se poklapa sa ravni same krive.

Na osnovu izložene definicije oskulatorne ravni krive linije, jasno je da se vektor trenutnog ubrzanja $\mathbf{a}$ nalazi u oskulatornoj ravni i da je usmeren u konkavnu, odnosno izdubljenu, stranu putanje (Slika 4.3).



Slika 4.4:

U svakoj tački putanje pokretna tačka (Slika 4.4) ima jedinstvene vektore brzine i ubrzanja. Ako je ugao između tih vektora oštar, položaj M , tada je projekcija ubrzanja na pravac brzine $a_v > 0$ i u smeru brzine, pa u tom trenutku brzina raste i za kretanje se kaže da je ubrzano. Ako je ugao između ovih vektora tup, položaj M_1 , onda je projekcija ubrzanja na pravac brzine $a_v < 0$ i u suprotnom smeru od smera brzine, pa brzina u tom trenutku opada i kretanje je usporeno. Ako je ugao između ovih vektora prav, položaj M_2 , onda je u tom trenutku vremena projekcija ubrzanja na pravac brzine $a_v = 0$ pa brzina niti raste niti opada, pa mora biti ekstremalna, minimalna ili maksimalna.

Od jednog do drugog trenutka vremena, kretanje može biti ubrzano, usporeno ili ni ubrzano ni usporeno.

Brzina i ubrzanje tačke, kao i trajektorija po kojoj se ona kreće određuju način na koji se tačka kreće. Sve pomenute tri karakteristike kretanja tačke, vektori položaja, brzine i ubrzanja, određuju se u nekom od koordinatnih sistema, u onom koordinatnom sistemu koji je za posmatrani problem najprikladniji. Ovde se obrađuju ove veličine u tri koordinatna sistema:

1. Dekartovom pravouglom,
2. polarnom,
3. prirodnom.

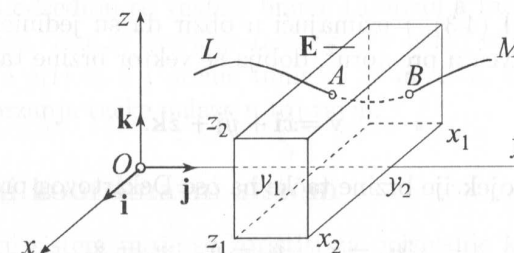
4.2.4 Dekartov koordinatni sistem

4.2.4.1 Trajektorija tačke

Neka se tačka M kreće u prostoru u odnosu na apsolutno nepokretan Dekartov pravougli koordinatni sistem $Oxyz$ (Slika 4.5), čiji su jedinični vektori pravaca $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ i $\mathbf{k}$. Ovo kretanje tačke ima tri stepena slobode kretanja. Prema tome, to kretanje je potpuno određeno ako se znaju tri koordinate tačke M kao zadate funkcije vremena

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t),$$

koje su konačne jednačine kretanja tačke. U raznim trenucima vremena, počev od početka kretanja, pokretna tačka nalazi se u nekoj tački prostora $Oxyz$. Spajanjem svih tih tačaka u kojima se nalazila pokretna tačka dobija se kriva linija u prostoru. Ta kriva linija je geometrijsko mesto tačaka niz uzastopnih položaja pokretne tačke u prostoru i naziva se trajektorija ili putanja tačke. Zavisnosti $x(t)$, $y(t)$ i $z(t)$ su parametarske jednačine trajektorije i određuju položaj tačke na trajektoriji u datom trenutku vremena. Najčešće, u kinematici, traži se eksplicitni oblik jednačine trajektorije tačke. On se nalazi u dva koraka:



Slika 4.5:

1. Prvo, iz zavisnosti $x(t)$, $y(t)$ i $z(t)$ određuju se granice kretanja, koje odgovaraju pozitivnim vrednostima vremena t kao nezavisno promenljive. Time se dobija oblast E definisana sa

$$\begin{aligned} x_1 &\leq x(t) \leq x_2, \\ y_1 &\leq y(t) \leq y_2, \\ z_1 &\leq z(t) \leq z_2, \text{ za } t \geq t_0, \end{aligned}$$

gde je t_0 vreme početka kretanja, a x_1, x_2, y_1, y_2, z_1 i z_2 su poznate veličine. U opštem slučaju, oblast **E** je prikazana paralelopipedom na slici 4.5 i ona može biti konačna ili beskonačna.

2. Eliminacijom vremena iz jednačina $x(t)$, $y(t)$ i $z(t)$ dobija se neparametarski oblik jednačine krive linije u prostoru kao presek dve površine $f_1(x, y, z) = 0$ i $f_2(x, y, z) = 0$. Ova kriva linija LM (Slika 4.5) naziva se linija putanje tačke. Njen lučni deo $\widehat{AB}$, koji pripada oblasti **E**, je trajektorija ili putanja tačke. Znači, trajektorija tačke je deo ili cela linija putanje.

Smer kretanja tačke na trajektoriji je smer porasta parametra trajektorije, a to znači vremena t .

4.2.4.2 Brzina i ubrzanje tačke

Znajući zakone kretanja $x(t)$, $y(t)$ i $z(t)$ tačke, vektor položaja tačke postaje

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}, \quad (4.8)$$

gde su $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ i $\mathbf{k}$ jedinični vektori Dekartovih koordinatnih osa x , y i z .

Prema izrazu (4.3), i uzimajući u obzir da su jedinični vektori $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ i $\mathbf{k}$ konstantnog pravca u prostoru², dobija se vektor brzine tačke

$$\mathbf{v} = \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} + \dot{z}\mathbf{k}. \quad (4.9)$$

Vidi se da su projekcije brzine tačke na ose Dekartovog pravouglog sistema

$$v_x = \dot{x}, \quad v_y = \dot{y}, \quad v_z = \dot{z}, \quad (4.10)$$

odnosno one su jednake prvim izvodima po vremenu odgovarajućih koordinata tačke. Znajući projekcije brzine, može se lako odrediti intenzitet vektora brzine

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}, \quad (4.11)$$

kao i njen pravac u prostoru prema sledećim izrazima

$$\cos \alpha_v = \frac{v_x}{v}, \quad \cos \beta_v = \frac{v_y}{v}, \quad \cos \gamma_v = \frac{v_z}{v}, \quad (4.12)$$

²Zbog konstantnosti intenziteta i pravca ovih vektora je $\dot{\mathbf{i}} = \dot{\mathbf{j}} = \dot{\mathbf{k}} = 0$.

gde je

$$\cos^2 \alpha_v + \cos^2 \beta_v + \cos^2 \gamma_v = 1,$$

i gde su α_v , β_v i γ_v uglovi koje vektor brzine $\mathbf{v}$ zaklapa sa koordinatnim osama. Kako je vektor ubrzanja $\mathbf{a}$ prvi izvod vektora brzine po vremenu to iz (4.9) diferenciranjem dobija se vektor ubrzanja tačke u Dekartovim koordinatama

$$\mathbf{a} = \ddot{x}\mathbf{i} + \ddot{y}\mathbf{j} + \ddot{z}\mathbf{k}. \quad (4.13)$$

Znači, projekcije ubrzanja tačke na ove ose su

$$a_x = \ddot{x}, \quad a_y = \ddot{y}, \quad a_z = \ddot{z}, \quad (4.14)$$

i predstavljaju druge izvode po vremenu odgovarajućih koordinata tačke. Intenzitet ubrzanja je određen izrazom

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}, \quad (4.15)$$

a uglovi α_a , β_a i γ_a vektora ubrzanja $\mathbf{a}$ sa koordinatnim osama dobijaju se iz

$$\cos \alpha_a = \frac{a_x}{a}, \quad \cos \beta_a = \frac{a_y}{a}, \quad \cos \gamma_a = \frac{a_z}{a}. \quad (4.16)$$

Ovim izrazima određuju se vektori brzine i ubrzanja tačke u prostoru u svakoj tački putanje. Ako se kretanje tačke vrši u nekoj ravni, na primer u ravni Oxy , tada je $z(t) \equiv 0$ i prema tome $v_z \equiv a_z \equiv 0$, odnosno tada se vektori brzine i ubrzanja tačke nalaze u toj ravni.

4.2.5 Polarni koordinatni sistem

Polarni koordinatni sistem može se koristiti za opisivanje kretanja tačke u nekoj ravni, odnosno kada tačka ima samo dva stepena slobode kretanja. U ravni kretanja (Slika 4.6) položaj tačke određen je sa dva parametra:

1. rastojanjem r pokretne tačke M od neke nepokretne tačke O u ravni kretanja, takozvanog pola,
2. uglom ϕ između pravca OM i nekog stalnog pravca u ravni, na primer u odnosu na horizontalan pravac.

Zadato kretanje u polarnim koordinatama znači poznavanje zavisnosti ovih parametara od vremena, odnosno zakona kretanja tačke.

$$r = r(t), \quad \phi = \phi(t).$$

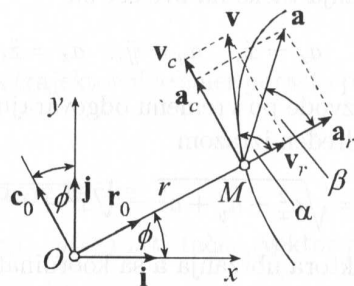
4.2.5.1 Trajektorija tačke

Jednačina trajektorije tačke određuje se eliminacijom vremena t iz zavisnosti $r(t)$ i $\phi(t)$, naravno vodeći računa da ove koordinate mogu biti ograničene nejednačinama

$$r_1 \leq r(t) \leq r_2,$$

$$\phi_1 \leq \phi(t) \leq \phi_2,$$

što ponovo dovodi do razlike između linije putanje i trajektorije tačke.



Slika 4.6:

4.2.5.2 Brzina i ubrzanje tačke

U polarnom koordinatnom sistemu osnovni jedinični vektori su: jedinični vektor radialnog pravca $\mathbf{r}_0$ usmeren od pola O ka tački M i jedinični vektor kružnog ili cirkularnog pravca $\mathbf{c}_0$ koji je normalan na pravac OM u smeru porasta ugla ϕ (Slika 4.6). Pri kretanju tačke M po putanji ovi jedinični vektori menjaju svoje pravce zbog njihovog obrtanja oko pola O . Za izračunavanje prvih izvoda ovih vektora po vremenu, oni se iskazuju preko njihovih komponenti u pravcu Dekartovih osa x i y (Slika 4.6)

$$\mathbf{r}_0 = \cos \phi \mathbf{i} + \sin \phi \mathbf{j}, \quad \mathbf{c}_0 = -\sin \phi \mathbf{i} + \cos \phi \mathbf{j}.$$

Pošto je ϕ funkcija vremena t to su ovi jedinični vektori posredne funkcije vremena preko ugla ϕ . Primenjujući pravilo posrednog diferenciranja³ i poredeći dobijene izraze sa izrazima za ove jedinične vektore, dobija se

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}}_0 &= \dot{\phi}(-\sin \phi \mathbf{i} + \cos \phi \mathbf{j}) = \dot{\phi} \mathbf{c}_0, \\ \dot{\mathbf{c}}_0 &= \dot{\phi}(-\cos \phi \mathbf{i} - \sin \phi \mathbf{j}) = -\dot{\phi} \mathbf{r}_0, \end{aligned} \quad (4.17)$$

³po kome je $\frac{d(\cdot)}{dt} = \frac{d(\cdot)}{d\phi} \frac{d\phi}{dt}$.

jer su, kao što je već uočeno, izvodi Dekartovih jediničnih vektora jednaki nuli.

Vektor položaja tačke M može se izraziti kao proizvod jediničnog vektora njegovog pravca $\mathbf{r}_0$ i njegovog intenziteta r

$$\mathbf{r} = r \mathbf{r}_0. \quad (4.18)$$

Sada je vektor brzine, kao prvi izvod vektora položaja po vremenu, određen relacijom

$$\mathbf{v} = \dot{r} \mathbf{r}_0 + r \dot{\mathbf{r}}_0,$$

što zbog izraza (4.17) dovodi do

$$\mathbf{v} = \dot{r} \mathbf{r}_0 + r \dot{\phi} \mathbf{c}_0. \quad (4.19)$$

Vidi se da vektor brzine u polarnim koordinatama ima dve međusobno normalne projekcije (Slika 4.6)

$$\mathbf{v}_r = \dot{r} \mathbf{r}_0, \quad \mathbf{v}_c = r \dot{\phi} \mathbf{c}_0. \quad (4.20)$$

Prva komponenta $\mathbf{v}_r$ brzine je usmerena u radialnom pravcu i naziva se radialna brzina, dok je druga komponenta $\mathbf{v}_c$ usmerena u pravcu jediničnog vektora $\mathbf{c}_0$ i naziva se cirkularna brzina tačke. Projekcije brzine na radialni i cirkularni pravac iznose

$$v_r = \dot{r}, \quad v_c = r \dot{\phi}, \quad (4.21)$$

dok je intenzitet brzine tačke određen sa

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_c^2} = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2}. \quad (4.22)$$

Ugao α između vektora brzine tačke i radialnog pravca određen je relacijom

$$\tan \alpha = \frac{v_c}{v_r} = \frac{r \dot{\phi}}{\dot{r}}. \quad (4.23)$$

Pošto je ubrzanje tačke izvod brzine po vremenu, iz izraza za brzinu tačke (4.19) dobija se

$$\mathbf{a} = \ddot{r} \mathbf{r}_0 + \dot{r} \dot{\mathbf{r}}_0 + \dot{r} \dot{\phi} \mathbf{c}_0 + r \ddot{\phi} \mathbf{c}_0 + r \dot{\phi} \dot{\mathbf{c}}_0.$$

Koristeći relacije (4.17) ovaj vektor ubrzanja postaje

$$\mathbf{a} = (\ddot{r} - r\dot{\phi}^2)\mathbf{r}_0 + (r\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi})\mathbf{c}_0, \quad (4.24)$$

i sastoji se iz dve međusobno normalne komponente. Komponenta ubrzanja tačke

$$\mathbf{a}_r = (\ddot{r} - r\dot{\phi}^2)\mathbf{r}_0, \quad (4.25)$$

usmerena je duž radijalnog pravca i naziva se radijalno ubrzanje tačke. Druga komponenta

$$\mathbf{a}_c = (r\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi})\mathbf{c}_0, \quad (4.26)$$

je usmerena u pravcu jediničnog vektora $\mathbf{c}_0$, i naziva se cirkularno ubrzanje tačke.

Projekcije radijalnog i cirkularnog ubrzanja na radijalan i cirkularan pravac iznose

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\phi}^2, \quad a_c = r\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi}. \quad (4.27)$$

Znajući ove projekcije ubrzanja, lako se nalazi i intenzitet vektora ubrzanja tačke

$$a = \sqrt{a_r^2 + a_c^2} = \sqrt{(\ddot{r} - r\dot{\phi}^2)^2 + (r\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi})^2}, \quad (4.28)$$

kao i ugao β između tog vektora i radijalnog pravca

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{a_c}{a_r}. \quad (4.29)$$

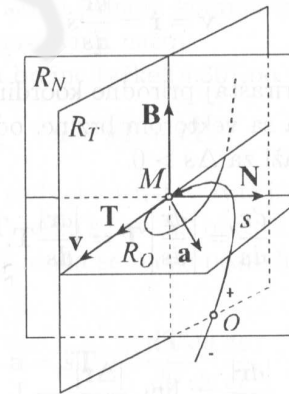
4.2.6 Prirodan koordinatni sistem

Posmatrajmo zadatu trajektoriju tačke M (Slika 4.7) za vreme kretanja. Položaj tačke M na trajektoriji može se odrediti ako se zna rastojanje tačke M , mereno duž trajektorije, počev od neke nepokretne tačke O . Lučna udaljenost s tačke M od tačke O je krivolinijska koordinata i naziva se prirodna koordinata. Znati kretanje u prirodnim koordinatama znači poznavati:

1. Zakon $s(t)$ promene prirodne koordinate sa vremenom;
2. Trajektoriju tačke, duž koje se meri $s(t)$.

Na slici 4.7 sa $+$ je obeležen smer pozitivnih vrednosti $s(t)$ a sa $-$ negativnih. Pošto je zbog poznavanja trajektorije položaj tačke na njoj određen samo sa jednim parametrom, krivolinijskom koordinatom $s(t)$, ovo kretanje ima jedan stepen slobode kretanja.

Opisivanje kretanja u prirodnom koordinatnom sistemu je najlakše, najjednostavnije i najočiglednije. Prirodni koordinatni sistem, sem za izračunavanje brzine i ubrzanja tačke, uvek se koristi, ako je kretanje zadato u nekom drugom koordinatnom sistemu, a traži se poluprečnik krivine putanje ili pređeni put tačke.



Slika 4.7:

Naglasimo da prirodna koordinata s nije pređeni put tačke u datom trenutku vremena, već samo njeno lučno rastojanje od tačke O . Samo u slučaju monotonosti funkcije $s(t)$ ona je istovremeno i pređeni put tačke do tog trenutka vremena.

Osnovni jedinični vektori prirodnog koordinatnog sistema su jedinični vektor tangente $\mathbf{T}$, glavne normale $\mathbf{N}$ i binormale $\mathbf{B}$, koji se formiraju u svakoj tački M na trajektoriji. Jedinični vektor tangente $\mathbf{T}$ (Slika 4.7) je u pravcu tangente na putanju u tački M i uvek orijentisan u smeru u kome raste prirodna koordinata s . Od svih normala na tangentu za glavnu normalu $\mathbf{N}$ bira se normala koja leži u oskulatornoj ravni R_O trajektorije i koja je usmerena ka centru krivine trajektorije. Treći jedinični vektor $\mathbf{B}$, vektor binormale, je normala na oskulaturnu ravan u tački M . Smer binormale je određen vektorskim proizvodom $\mathbf{B} = \mathbf{T} \times \mathbf{N}$. Ravan R_N koju čine vektori $\mathbf{N}$ i $\mathbf{B}$, zove se normalna ravan, a ravan R_T koju čine vektori $\mathbf{T}$ i $\mathbf{B}$ tangenta ili rektifikaciona ravan krive linije u tački M . Zna se da se vektori brzine i

ubrzanja tačke nalaze u oskulatornoj ravni R_O putanje, a to znači da se sve kinematičke karakteristike kretanja nalaze u ovoj ravni. Pri kretanju tačke, ose ovog koordinatnog sistema u svakom njenom položaju imaju druge pravce u prostoru.

4.2.6.1 Brzina i ubrzanje tačke

Pošto je brzina tačke prvi izvod vektora položaja tačke M po vremenu može se napisati

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \dot{s}.$$

Ovde je ds elementarni priraštaj prirodne koordinate s , $\dot{s}$ je skalar, a vektor $d\mathbf{r}$ je istog pravca i smera sa vektorom brzine, odnosno u pravcu jediničnog vektora tangente $\mathbf{T}$, pa važi za $\Delta s > 0$

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \left| \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right| \mathbf{T} = \frac{|d\mathbf{r}|}{ds} \mathbf{T}.$$

Kako je

$$\left| \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right| = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{|\Delta \mathbf{r}|}{\Delta s} \rightarrow 1,$$

jer u graničnom procesu dužina Δs luka MM_1 teži ka dužini sečice $MM_1 = |\Delta \mathbf{r}|$ (Slika 4.8), to se dobija

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \mathbf{T},$$

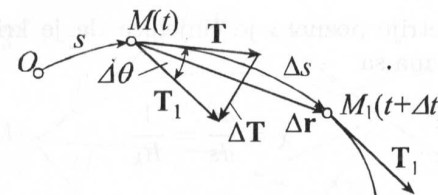
i vektor brzine tačke

$$\mathbf{v} = \dot{s} \mathbf{T}. \quad (4.30)$$

Znači, projekcija vektora brzine na pravac tangente i njen intenzitet, odnosno kvadrat intenziteta, iznose

$$v_T = \dot{s}, \quad v = |\dot{s}|, \quad v^2 = \dot{s}^2. \quad (4.31)$$

Ako je $v_T = \dot{s} > 0$, tačka se kreće u stranu porasta krivolinijske koordinate s , dok se za $v_T = \dot{s} < 0$ ona kreće u stranu njenog smanjivanja. Kao što se vidi iz izraza za vektor brzine tačke, on se u prirodnom koordinatnom sistemu



Slika 4.8:

jediničnih vektora iskazuje samo jednom komponentom u pravcu jediničnog vektora $\mathbf{T}$, znači na najjednostavniji način.

Diferenciranjem vektora brzine tačke (4.30) po vremenu, dobija se

$$\mathbf{a} = \dot{s} \mathbf{T} + \dot{s} \dot{\mathbf{T}}.$$

Prva komponenta ubrzanja pada u poznat pravac jediničnog vektora tangente a druga u pravac vektora $\dot{\mathbf{T}}$. Ako se sa $\Delta \theta$ obeleži ugao između tangenti na putanju u tačkama M i M_1 , onda se može posredno diferencirati na sledeći način

$$\mathbf{a} = \dot{s} \mathbf{T} + \dot{s} \frac{d\mathbf{T}}{d\theta} \frac{d\theta}{ds} \frac{ds}{dt}. \quad (4.32)$$

Posmatrajmo sledeći skalarni proizvod $\mathbf{T} \cdot \mathbf{T} = 1$, odnosno kvadrat intenziteta vektora $\mathbf{T}$, koji je jednak jedinici. Diferenciranjem ovog izraza po θ dobija se da je $\mathbf{T} \cdot d\mathbf{T}/d\theta = 0$, što znači da su vektori $\mathbf{T}$ i $d\mathbf{T}/d\theta$ međusobno normalni. Pošto se vektor $\Delta \mathbf{T}$ (Slika 4.8) nalazi u ravni vektora $\mathbf{T}$ i $\mathbf{T}_1$, to se i vektor $d\mathbf{T}$ mora nalaziti u toj ravni kada $\Delta t \rightarrow 0$, odnosno u oskulatornoj ravni. Normala na jedinični vektor $\mathbf{T}$ u oskulatornoj ravni je jedinični vektor glavne normale $\mathbf{N}$, pa mora biti

$$\frac{d\mathbf{T}}{d\theta} = \left| \frac{d\mathbf{T}}{d\theta} \right| \mathbf{N}.$$

Dalje je, po definiciji i prema slici 4.8

$$\left| \frac{d\mathbf{T}}{d\theta} \right| = \lim_{\Delta \theta \rightarrow 0} \frac{|\Delta \mathbf{T}|}{\Delta \theta} = \lim_{\Delta \theta \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{\Delta \theta}{2}}{\Delta \theta} = 1,$$

odnosno

$$\frac{d\mathbf{T}}{d\theta} = \mathbf{N}.$$

Iz analitičke geometrije poznata je činjenica da je krivina χ krive linije u svakoj tački definisana sa

$$\chi = \frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{R_k},$$

gde je R_k poluprečnik krivine putanje u datoj tački M . Poluprečnik krivine⁴ određuje položaj centra krivine krive linije koji se nalazi u oskulatornoj ravni u pravcu i smeru jediničnog vektora glavne normale $\mathbf{N}$, a na rastojanju R_k od tačke M .

Koristeći ove rezultate, dobija se iz (4.32)

$$\mathbf{a} = \ddot{s}\mathbf{T} + \frac{\dot{s}^2}{R_k}\mathbf{N}. \quad (4.33)$$

Prema tome, vektor ubrzanja tačke ima dve komponente u prirodnom koordinatnom sistemu. Jedna komponenta

$$\mathbf{a}_T = \ddot{s}\mathbf{T}, \quad (4.34)$$

je usmerena duž tangente $\mathbf{T}$ na putanju, i naziva se tangencijalno ubrzanje tačke. Druga komponenta, koja se zbog (4.31) može pisati i kao

$$\mathbf{a}_N = \frac{v^2}{R_k}\mathbf{N}, \quad (4.35)$$

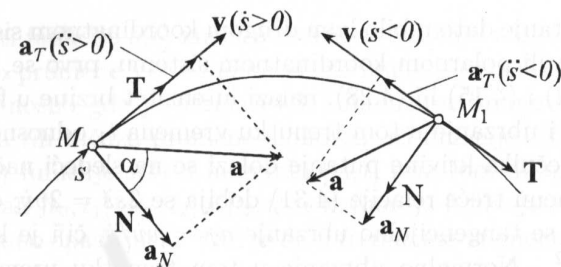
naziva se normalno ubrzanje tačke i pada u pravac glavne normale putanje. Projekcije vektora ubrzanja na pravce tangente i glavne normale iznose

$$a_T = \ddot{s}, \quad a_N = \frac{v^2}{R_k}. \quad (4.36)$$

Tangencijalno ubrzanje tačke karakteriše promenu projekcije brzine na pravac tangente a normalno ubrzanje je rezultat promene pravca vektora brzine na putanji. Normalno ubrzanje uvek ima smer ka centru krivine putanje (Slika 4.9) dok tangencijalno ubrzanje može biti u smeru jediničnog vektora $\mathbf{T}$, odnosno u smeru porasta krivolinijske koordinate s , ako je $\dot{s} > 0$, ili u suprotnom smeru, ako je $\dot{s} < 0$.

Ako je u nekom trenutku $\dot{s}$ i $\ddot{s}$ istog znaka kretanje je ubrzano. Ako je $\dot{s} > 0$ i $\ddot{s} > 0$ kretanje je ubrzano u smeru povećanja koordinate s , a ako je

⁴Ako se iz centra krivine krive linije opiše krug poluprečnika R_k onda taj krug u tački M najbolje prijanja uz krivu liniju, odnosno "između krive linije i tog kruga je ostvaren dodir najvišeg reda", po rezultatima analitičke geometrije.



Slika 4.9:

$\dot{s} < 0$ i $\ddot{s} < 0$ kretanje je takođe ubrzano ali u smeru smanjenja koordinate s (Slika 4.9). Ako su te veličine suprotnog znaka kretanje je usporeno. Ako je $\dot{s} > 0$ i $\ddot{s} < 0$ kretanje je usporeno u smeru povećanja koordinate s , a ako je $\dot{s} < 0$ i $\ddot{s} > 0$ kretanje je takođe usporeno ali u smeru smanjenja koordinate s . Ako je u nekom trenutku kretanja tangencijalno ubrzanje jednako nuli, odnosno $\ddot{s} = 0$, onda u tom trenutku projekcija brzine na pravac tangente $\dot{s}$ ima ekstremalnu vrednost, minimalnu ili maksimalnu.

Normalno ubrzanje može biti nula u trenucima kretanja kada je brzina jednaka nuli ili kada putanja ima prevojnu tačku, odnosno kada je R_k beskonačno. Zbog ortogonalnosti komponenti ubrzanja, intenzitet vektora ubrzanja iznosi

$$a = \sqrt{a_T^2 + a_N^2} = \sqrt{\ddot{s}^2 + \left(\frac{\dot{s}^2}{R_k}\right)^2}, \quad (4.37)$$

a ugao α između vektora ubrzanja i glavne normale određen je relacijom

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a_T}{a_N} = \frac{\ddot{s}}{\dot{s}^2} R_k. \quad (4.38)$$

Komponente ubrzanja tačke, tangencijalno i normalno nazivaju se prirodne komponente ubrzanja pokretne tačke.

Na slici 4.9 je prikazan raspored brzine i ubrzanja tačke u oskulatornoj ravni trajektorije, gde se ti vektori nalaze.

4.2.6.2 Poluprečnik krivine putanje i pređeni put tačke

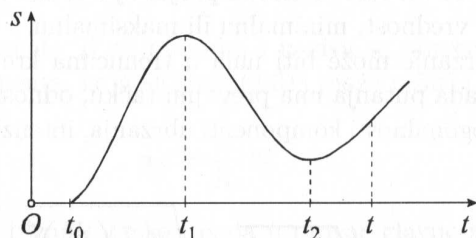
Poluprečnik krivine putanje tačke u nekom trenutku vremena t_1 i pređeni put do tog trenutka izračunavaju se u prirodnom koordinatnom sistemu.

Ako je kretanje dato u bilo kom drugom koordinatnom sistemu, na primer u Dekartovom ili polarnom koordinatnom sistemu, prvo se, koristeći relacije (4.11) ili (4.22) i (4.15) ili (4.28), nalazi intenzitet brzine u funkciji vremena, odnosno $v(t)$, i ubrzanje u tom trenutku vremena t_1 odnosno $a(t_1)$.

Do poluprečnika krivine putanje dolazi se na sledeći način⁵: diferenciranjem po vremenu treće relacije (4.31) dobija se $2\dot{s}\ddot{s} = 2v\dot{v}$; odavde, koristeći (4.36), nalazi se tangencijalno ubrzanje $a_T = v\dot{v}/\dot{s}$, čiji je kvadrat $a_T^2 = \dot{v}^2$, zbog $v^2 = \dot{s}^2$. Normalno ubrzanje u tom trenutku vremena t_1 nalazi se iz (4.37), odnosno $a_N(t_1) = \sqrt{a^2(t_1) - \dot{v}^2(t_1)}$. Konačno iz (4.36) dobija se poluprečnik krivine putanje

$$R_k(t_1) = \frac{v^2(t_1)}{\sqrt{a^2(t_1) - \dot{v}^2(t_1)}}. \quad (4.39)$$

Za određivanje pređenog puta tačke, za vreme njenog kretanja od početnog trenutka vremena t_0 do proizvoljnog t , iz druge jednačine (4.31) nalazi se $ds = \pm v(t)dt$ i ova relacija se integriše od t_0 do t uz pretpostavku da je



Slika 4.10:

prirodna koordinata s jednaka nuli za t_0 , odnosno s merimo od početka kretanja,

$$s(t) = \pm \int_{t_0}^t v(t)dt. \quad (4.40)$$

Apsolutna vrednost krivolinijske koordinate s u datom trenutku vremena t jednaka je pređenom putu do istog trenutka samo ako funkcija $s(t)$ stalno monotonno raste ili monotonno opada od početka kretanja. Svaka promena

⁵U analitičkoj geometriji takođe se proučava određivanje poluprečnika krivine krive linije.

vrste monotonosti funkcije $s(t)$ znači ponovno prelaženje već ranije pređenog dela putanje. Do promene vrste monotonosti funkcije $s(t)$ dolazi u tačkama gde je $\dot{s} = 0$, odnosno gde je prema (4.31) intenzitet brzine v jednak nuli. Zbog određivanja tih tačaka promene monotonosti funkcije $s(t)$ crta se dijagram (Slika 4.10) funkcije $s(t)$ u intervalu $[t_0, t]$ i na tom dijagramu uoče se vremenski intervali $[t_0, t_1]$, $[t_1, t_2]$ i $[t_2, t]$ u kojima je funkcija $s(t)$ monotonno rastuća ili monotonno opadajuća. Vidi se da u trenucima vremena t_1 i t_2 , koji se nalaze između početnog trenutka vremena t_0 i datog trenutka t , funkcija $s(t)$ ima ekstremalne vrednosti. U svakom intervalu vremena u kom je funkcija $s(t)$ iste monotonosti pređeni put je apsolutna vrednost integrala (4.40) u tom intervalu. Zato je ukupan pređeni put od trenutka t_0 do trenutka t

$$P_{t_0 t} = |s(t_1)| + |s(t_2) - s(t_1)| + |s(t) - s(t_2)|. \quad (4.41)$$

Zbog obrazloženog načina izračunavanja pređenog puta tačke, znak $\pm$ u izrazu (4.40) gubi u tom postupku svaki značaj. Prema tome, u izrazu (4.40), a pri izračunavanju pređenog puta, može se uvek usvajati znak $+$.

4.2.7 Primeri

Primer 34 Materijalna tačka M kreće se u ravni Oxy po zakonima

$$x = 2 \cos 2t \text{ [m]}, \quad y = 2 \sin t \text{ [m]}.$$

Naći:

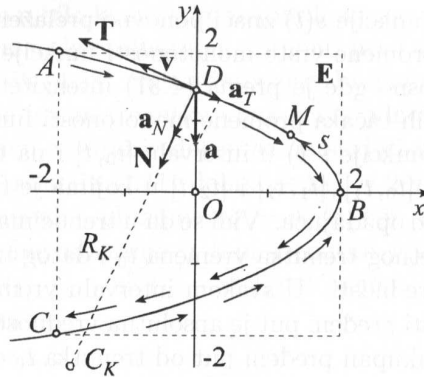
1. trajektoriju tačke,
2. brzinu i ubrzanje tačke u trenutku $t_1 = \pi/4$ [s],
3. poluprečnik krivine putanje za trenutak t_1 .

Iz zakona kretanja vidi se da se kretanje odvija u oblasti E , koja je definisana sa $-2 \leq x(t) \leq 2$ i $-2 \leq y(t) \leq 2$ (Slika 4.11). Iz prve jednačine kretanja sledi

$$x = 2(\cos^2 t - \sin^2 t) = 2(1 - 2\sin^2 t),$$

što kombinovano sa drugom jednačinom kretanja dovodi do jednačine linije putanje

$$x = 2 - y^2.$$



Slika 4.11:

To je jednačina parabole (Slika 4.11) koja je otvorena u negativnu stranu x ose. Njen deo ABC, koji se nalazi u oblasti **E**, je trajektorija tačke. Analizira se i način kretanja tačke po toj putanji. Tačka M kreće iz tačke B , jer je u početnom trenutku vremena

$$t_0 = 0, \quad x(0) = 2, \quad y(0) = 0.$$

Posle tog trenutka x opada, a y raste i tačka se kreće ka tački A . U tački A pokretna tačka M nađe se kada je $y = 2$, odnosno u trenucima vremena t_A koji su rešenje jednačine $\sin t_A = 1$. Rešenja ove jednačine su trenuci $t_A = (\pi/2) + 2k\pi$ [s], gde je $k = 0, 1, 2, \dots$ Pošto se u istim geometrijskim tačkama putanje pokretna tačka nađe posle svakog proteklog vremena od 2π , krećući se u istom smeru po putanji, ovo kretanje tačke je periodično sa periodom od 2π sekundi, odnosno kretanje se ponavlja posle protoka svakih 2π sekundi.

Diferenciranjem po vremenu zakona kretanja dobijaju se projekcije (4.10) i intenzitet brzine (4.11) pokretne tačke u proizvoljnom trenutku

$$\begin{aligned} v_x &= \dot{x} = -4 \sin 2t, & v_y &= \dot{y} = 2 \cos t, \\ v &= \sqrt{16 \sin^2 2t + 4 \cos^2 t}, \end{aligned} \quad (A)$$

a iz ovih izraza za $t_1 = \pi/4$ [s] sledi

$$v_{x1} = -4 \text{ [m/s]}, \quad v_{y1} = \sqrt{2} \text{ [m/s]}, \quad v_1 = 3\sqrt{2} \text{ [m/s]}.$$

Upotrebom izraza (4.14) i (4.15) dobijaju se projekcije i intenzitet ubrzanja tačke

$$\begin{aligned} a_x &= \ddot{x} = -8 \cos 2t, \\ a_y &= \ddot{y} = -2 \sin t, \\ a &= \sqrt{64 \cos^2 2t + 4 \sin^2 t}, \end{aligned}$$

i za trenutak t_1

$$a_{x1} = 0 \text{ [m/s}^2\text{]}, \quad a_{y1} = -\sqrt{2} \text{ [m/s}^2\text{]}, \quad a_1 = \sqrt{2} \text{ [m/s}^2\text{]}.$$

U trenutku t_1 pokretna tačka se nalazi u tački D sa koordinatama $x_1 = 0$ [m] i $y_1 = \sqrt{2}$ [m]. Pomoću izračunatih projekcija brzine i ubrzanja tačke u tom položaju na slici 4.11 su nacrtani vektori brzine i ubrzanja tačke. Izvod izraza (A) po vremenu glasi

$$\dot{v} = \frac{1}{2v} [64 \sin 2t \cos 2t - 8 \cos t \sin t],$$

a za trenutak $t_1 = \pi/4$ [s] iznosi $\dot{v}_1 = -\sqrt{2}/3 \text{ [m/s}^2\text{]}$. Pošto se zna celokupno ubrzanje tačke a_1 i $\dot{v}_1$ koristeći (4.39) nalazi se poluprečnik krivine trajektorije u tački D , odnosno $R_{k1} = 27/2$ [m].

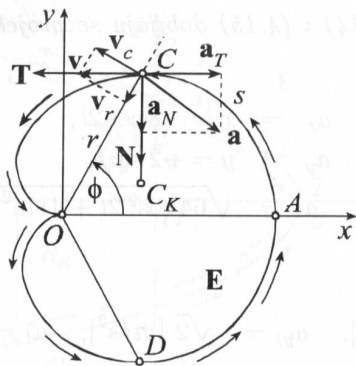
Tangencijalna i normalna komponenta ubrzanja u trenutku t_1 nacrtane su na slici 4.11. Pošto je u tom položaju projekcija ubrzanja na pravac tangente u suprotnom smeru od brzine, kretanje tačke je u tom trenutku usporeno. Na slici su ucrtani i jedinični vektori **T** i **N** ovih pravaca. Centar krivine putanje u tački D se nalazi u pravcu glavne normale, u smeru ka konkavnoj strani putanje i na rastojanju R_{k1} od tačke D .

Primer 35 Dati su zakoni ravanskog kretanja tačke u polarnim koordinatama

$$r = \alpha(1 + \cos \pi t) \text{ [m]}, \quad \phi = \pi t \text{ [rad]},$$

gde je α proizvoljna pozitivna konstanta. Odrediti:

1. Trajektoriju tačke;
2. Brzinu i ubrzanje tačke;
3. Poluprečnik krivine putanje tačke;
4. Veličine pod 2. i 3. odrediti i u trenutku vremena $t_1 = 1/3$ [s].



Slika 4.12:

Iz zakona kretanja nalazi se oblast **E** u kojoj se pokretna tačka kreće $0 \leq r(t) \leq 2\alpha$ i $0 \leq \phi(t) \leq \infty$, a eliminacijom vremena nalazi se linija putanje

$$r = \alpha(1 + \cos \phi).$$

Ova kriva linija naziva se kardioida i ona se cela nalazi u oblasti **E** (Slika 4.12). Po zakonima kretanja se zaključuje da se pokretna tačka kreće po putanji u pokazanom smeru na slici i da jedanput obiđe putanju za dve sekunde. Kao pomoć, na slici 4.12 je nacrtan i Dekartov koordinatni sistem *Oxy*. U njemu tačka *A* ima koordinate

$$\phi = 0 \text{ [rad]}, \quad r = 2\alpha \text{ [m]}.$$

Sa slike se vidi da je *y* koordinata tačke na putanji

$$y = \alpha(1 + \cos \phi) \sin \phi,$$

pa je izvod funkcije *y* po nezavisno promenljivoj ϕ

$$y' = \alpha(\cos \phi + \cos^2 \phi - \sin^2 \phi).$$

Izjednačavanjem ovog izvoda sa nulom dobija se tačka maksimuma *C* sa koordinatama

$$\phi_C = \frac{\pi}{3} \text{ [rad]} \text{ i } r_C = \frac{3\alpha}{2} \text{ [m]}.$$

Zbog simetrije krive u odnosu na osu *x*, tačka *D* minimuma ima koordinate

$$\phi_D = \frac{5\pi}{3} \text{ [rad]} \text{ i } r_D = \frac{3\alpha}{2} \text{ [m]}.$$

U trenutku t_1 pokretna tačka se nalazi u tački *C*.

Koristeći izraze (4.21) i (4.22) nalaze se projekcije i intenzitet vektora brzine u proizvoljnom trenutku vremena

$$\begin{aligned} v_r &= \dot{r} = -\alpha\pi \sin \pi t, \\ v_c &= r\dot{\phi} = \alpha(1 + \cos \pi t)\pi, \\ v &= \sqrt{v_r^2 + v_c^2} = \pi\sqrt{2\alpha r}, \end{aligned}$$

a te veličine u trenutku t_1 iznose

$$\begin{aligned} v_{r1} &= \frac{-\alpha\pi\sqrt{3}}{2} \text{ [m/s]}, \quad v_{c1} = \frac{3\alpha\pi}{2} \text{ [m/s]}, \\ v_1 &= \alpha\pi\sqrt{3} \text{ [m/s]}. \end{aligned}$$

Koristeći izraze (4.27) i (4.28) nalaze se projekcije i intenzitet vektora ubrzanja u proizvoljnom trenutku

$$\begin{aligned} a_r &= \ddot{r} - r\dot{\phi}^2 = -\alpha\pi^2(1 + 2\cos \pi t), \\ a_c &= r\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi} = -2\alpha\pi^2 \sin \pi t, \\ a &= \sqrt{a_r^2 + a_c^2} = \alpha\pi^2\sqrt{5 + 4\cos \pi t}, \end{aligned}$$

što za trenutak t_1 iznosi

$$\begin{aligned} a_{r1} &= -2\alpha\pi^2 \text{ [m/s}^2\text{]}, \quad a_{c1} = -\alpha\pi^2\sqrt{3} \text{ [m/s}^2\text{]}, \\ a_1 &= \alpha\pi^2\sqrt{7} \text{ [m/s}^2\text{]}. \end{aligned}$$

Iz izraza za intenzitet brzine dobija se

$$\dot{v} = \pi\sqrt{\frac{\alpha}{2r}}(-\alpha\pi \sin \pi t),$$

što u trenutku t_1 iznosi $\dot{v}_1 = -\alpha\pi^2/2 \text{ [m/s}^2\text{]}$. Iz izraza (4.39) izračunava se poluprečnik krivine putanje u trenutku vremena t_1 , odnosno

$$R_{k1} = \frac{2\sqrt{3}\alpha}{3} \text{ [m]}.$$

Na slici 4.12 nacrtane su komponente brzine i ubrzanja kao i položaj centra krivine putanje C_k na rastojanju $CC_k = R_{k1}$ u smeru glavne normale na putanju u tački *C*.

Primer 36 Date su jednačine ravanskog kretanja tačke

$$x = \alpha \cos^2 t \text{ [m]}, \quad y = \alpha \sin^2 t \text{ [m]},$$

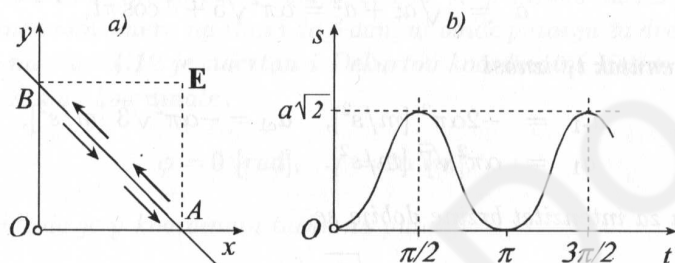
gde je α proizvoljna konstanta. Odrediti:

1. trajektoriju tačke,
2. pređeni put tačke od početka kretanja $t_0 = 0$ [s] do trenutka vremena $t_1 = \pi$ [s].

Iz zakona kretanja sledi da se tačka kreće u oblasti **E** ravni Oxy , definisanoj sa $0 \leq x(t) \leq \alpha$ i $0 \leq y(t) \leq \alpha$. Sabiranjem jednačina kretanja dobija se jednačina linije putanje

$$x + y = \alpha,$$

čiji deo AB u oblasti **E** je trajektorija tačke (Slika 4.13a). Ovo kretanje počinje iz tačke A , jer je $x(0) = \alpha$ i $y(0) = 0$. U tački A pokretna tačka se nalazi u trenucima t_A koji su rešenje jednačine $\sin^2 t_A = 0$, odnosno za $t_A = k\pi$ [s] ($k = 0, 1, \dots$), a u tački B za sva rešenja jednačine $\cos^2 t_B = 0$, odnosno za $t_B = (\pi/2) + k\pi$ [s]. Zaključuje se da pokretna tačka osciluje između tačaka A i B .



Slika 4.13:

Diferenciranjem po vremenu zakona kretanja dobijaju se projekcije brzine tačke i njen intenzitet u funkciji vremena

$$\begin{aligned} v_x &= \dot{x} = -2\alpha \cos t \sin t = -\alpha \sin 2t, \\ v_y &= \dot{y} = 2\alpha \sin t \cos t = \alpha \sin 2t, \\ v &= \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \alpha \sqrt{2} \sin 2t. \end{aligned}$$

Zamenom prethodnog izraza u (4.40), odabiranjem znaka $+$ u tom izrazu i posle integracije dobija se prirodna koordinata s

$$s(t) = \alpha\sqrt{2} \sin^2 t,$$

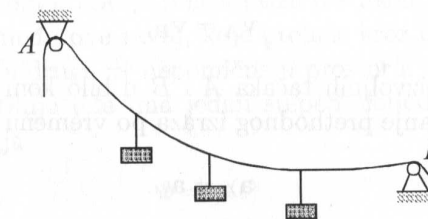
čija je zavisnost od vremena prikazana na slici 4.13b. Pređeni put tačke se traži od početka kretanja $t_0 = 0$ [s] do trenutka vremena $t_1 = \pi$ [s]. Do tog trenutka t_1 kriva $s(t)$ monotono raste za $t \in [0, \pi/2]$ i monotono opada za $t \in [\pi/2, \pi]$. Koristeći (4.41) dobija se pređeni put za to vreme

$$P_{0\pi} = |s(\pi/2)| + |s(\pi) - s(\pi/2)| = |\alpha\sqrt{2}| + |-\alpha\sqrt{2}| = 2\alpha\sqrt{2} \text{ [m]}.$$

Pošto je u ovom primeru kretanje tačke po pravoj liniji, pređeni put se može jednostavno naći i sa slike 4.13a.

4.3 Translatorno kretanje tela

Translatorno kretanje tela je najjednostavnije kretanje tela. Kretanje tela je translatorno, ako svaki zamišljeni pravac u telu za vreme kretanja ostaje sam sebi paralelan. Pri translatornom kretanju tela putanje svih tačaka tela mogu biti pravolinijske ili krivolinijske. Na primer, translatorno se kreću vagoni žičare (Slika 4.14), ako su zgloбно vezani za užu koje ih pomera od stuba B ka stubu A . Ovo je krivolinijska translacija.

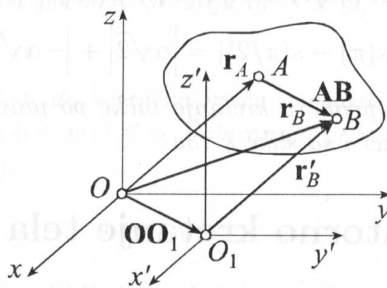


Slika 4.14:

Posmatrajmo kinematičke posledice translatornog načina kretanja u odnosu na nepokretn koordinatni sistem $Oxyz$ (Slika 4.15). U tom cilju, uočimo dve proizvoljne tačke A i B tela za vreme translatornog kretanja. Neka je $\mathbf{r}_A$ vektor položaja tačke A u odnosu na nepokretnu tačku O , a $\mathbf{r}_B$ vektor položaja tačke B u odnosu na istu tačku. Sa slike 4.15, jasno je da su vektori položaja tačaka A i B povezani relacijom

$$\mathbf{r}_B = \mathbf{r}_A + \mathbf{AB}. \quad (4.42)$$

Izaberimo drugu nepokretnu tačku O_1 čiji je položaj u odnosu na tačku O određen sa vektorom $\mathbf{OO}_1 = \mathbf{AB}$. Sa slike 4.15 sledi da je $\mathbf{r}_B = \mathbf{OO}_1 + \mathbf{r}'_B$, pa zbog (4.42) dobija se vektor položaja $\mathbf{r}'_B = \mathbf{r}_A$ tačke B u odnosu na tačku O_1 . Ovaj rezultat znači da kretanje tačke B , u odnosu na tačku O_1 ima istu putanju kao što je putanja tačke A u odnosu na tačku O . Zaključujemo da su pri translatorsnom kretanju tela, putanje svih njegovih tačaka iste po obliku. Translatorsnim pomeranjem putanje svih tačaka tela se dovode do poklapanja.



Slika 4.15:

Ako se izraz (4.42) diferencira po vremenu, primećujući da je vektor $\mathbf{AB}$ konstantan vektor u prostoru, odnosno da je $d(\mathbf{AB})/dt = 0$, dobija se

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B, \quad (4.43)$$

odnosno brzine proizvoljnih tačaka A i B u bilo kom trenutku vremena su jednake. Diferenciranje prethodnog izraza po vremenu dovodi do

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_B. \quad (4.44)$$

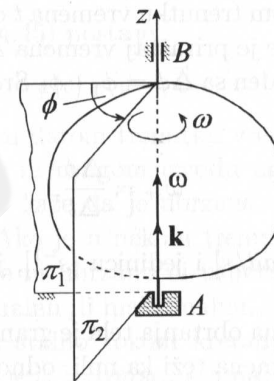
Prema tome i ubrzanja tačaka A i B u bilo kom trenutku vremena su ista. S obzirom da su tačke A i B tela proizvoljno izabrane to iz predašnjih rezultata sledi da su pri translatorsnom kretanju tela putanje, brzine i ubrzanja svih tačaka tela u bilo kom trenutku vremena iste.

Pošto su pri translatorsnom kretanju tela vektori brzine i ubrzanja tačke isti za sve tačke tela, ovi vektori su slobodni vektori pri translatorsnom kretanju pa se mogu crtati u bilo kojoj tački tela.

Zaključujemo da je translatorsno kretanje tela određeno kretanjem samo jedne njegove tačke, pa ovo kretanje ima tri stepena slobode, kao i kretanje jedne tačke u prostoru. Prema tome, za proučavanje translatorsnog kretanja tela dovoljno je znanje kretanja jedne njegove tačke.

4.4 Obrtanje tela oko nepomične ose

Posmatrajmo telo (Slika 4.16), čije su dve tačke A i B za vreme kretanja nepomične. Na primer, u tački A je potporno a u tački B cilindrično ležište. U ovom slučaju telo može da se obrće oko nepomične ose z , koja prolazi kroz



Slika 4.16:

tačke A i B . Osa z može imati proizvoljan pravac u prostoru. Radi jednostavnijeg predstavljanja svih elemenata ovog kretanja, pretpostavi se da je ona vertikalna. Pri ovom kretanju položaj tela u svakom trenutku je određen ako se zna ugao ϕ između dve ravni, koje prolaze kroz obrtnu osu, jedne π_2 čvrsto vezane za telo a druge π_1 nepomične u prostoru.

Prema tome, obrtanje tela ima jedan stepen slobode kretanja. Zadana zavisnost ugla obrtanja

$$\phi = \phi(t)$$

predstavlja zakon obrtanja tela oko ose z . Sve karakteristike obrtanja tela oko ose se izračunavaju pomoću tog zakona obrtanja.

Pri proučavanju obrtanja tela oko nepokretne ose, obrtanje može da se odvija u dva smera. Ono obrtanje koje se vidi kao obrtanje suprotno od kretanja kazaljke na satu naziva se pozitivno obrtanje. Ako se obrtanje vidi kao obrtanje u smeru kretanja kazaljke na satu ono je negativno.

Prilikom obrtanja tela oko ose AB sve tačke tela koje se nalaze na toj osi su nepomične, dok sve druge tačke imaju kružne putanje u ravnima koje su normalne na osu AB .

Prilikom obrtanja tela oko nepomične ose, sve karakteristike kretanja dele se na one koje su iste za celo telo, i one koje zavise od položaja tačke u telu.

U prvu grupu spadaju ugaona brzina i ugaono ubrzanje tela, a u drugu brzina i ubrzanje neke tačke tela.

4.4.1 Ugaona brzina i ugaono ubrzanje

Ako je položaj tela u nekom trenutku vremena t određen uglom ϕ a u trenutku $t_1 = t + \Delta t$ uglom ϕ_1 , gde je priraštaj vremena Δt konačan, tada je priraštaj ugla $\Delta\phi$ za to vreme određen sa $\Delta\phi = \phi_1 - \phi$. Srednja ugaona brzina obrtanja tela se definiše kao

$$\omega_{sr} = \frac{\Delta\phi}{\Delta t},$$

i ima dimenziju $[\omega] = [rad/s]$ i jedinicu $[s^{-1}]$, jer je radijan bezdimenzijska mera ugla.

Trenutna ugaona brzina obrtanja tela je granična vrednost srednje ugaone brzine kada priraštaj vremena teži ka nuli, odnosno

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\phi}{\Delta t},$$

što zbog definicije prvog izvoda glasi

$$\omega(t) = \dot{\phi}. \quad (4.45)$$

Smer rotacije tela oko ose z može da se označi znakom $\curvearrowright$ nacrtanim oko ose u smeru obrtanja. Najbolje je, kao celokupnu karakteristiku obrtanja tela oko ose, uvesti vektor ugaone brzine $\omega = \omega \mathbf{k}$, gde je $\mathbf{k}$ jedinični vektor u pravcu z ose. Znači, vektor ω ima intenzitet ugaone brzine i pravac ose obrtanja. Ako je $\omega > 0$ vektor je usmeren u smeru jediničnog vektora $\mathbf{k}$, a tada se to obrtanje vidi sa vrha ose z kao pozitivno (Slika 4.16). Ako je $\omega < 0$ vektor je usmeren u suprotnom smeru od smera jediničnog vektora $\mathbf{k}$, a tada se to obrtanje vidi sa vrha ose z kao negativno.

Ako je ω ugaona brzina tela u trenutku t , a u trenutku $t + \Delta t$ se promenila na ω_1 , gde je priraštaj vremena Δt konačan, tada je promena ugaone brzine $\Delta\omega$ za to vreme određena sa $\Delta\omega = \omega_1 - \omega$. Srednje ugaono ubrzanje obrtanja tela oko ose se definiše kao

$$\varepsilon_{sr} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t},$$

i ima dimenziju $[\varepsilon_{sr}] = [ugaona\ brzina/vreme]$ i jedinicu $[s^{-2}]$.

Trenutno ugaono ubrzanje obrtanja tela oko ose je definisano graničnom vrednošću srednjeg ugaonog ubrzanja kada priraštaj vremena Δt teži ka nuli, odnosno

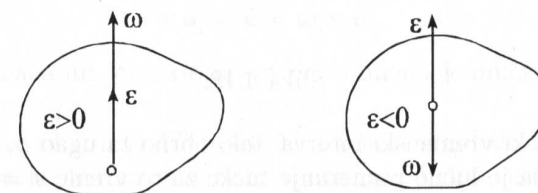
$$\varepsilon(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t},$$

što zbog definicije izvoda i (4.45) postaje

$$\varepsilon(t) = \dot{\omega} = \ddot{\phi}. \quad (4.46)$$

Znači, ugaono ubrzanje tela u datom trenutku vremena brojčano je jednako prvom izvodu ugaone brzine ili drugom izvodu ugla obrtanja po vremenu. Ako je $\varepsilon > 0$ za obrtanje se kaže da je ubrzano, ako je $\varepsilon < 0$ obrtanje je u tom trenutku usporeno. Ako je u nekom trenutku vremena $\varepsilon = 0$, onda u tom trenutku kretanje nije ni ubrzano ni usporeno, a ugaona brzina ima ekstremalnu vrednost, minimalnu ili maksimalnu.

Ako je ugaono ubrzanje stalno tokom kretanja jednako nuli, odnosno $\varepsilon = 0$, iz (4.46) nalazi se da je $\omega = const.$, što daje ugao obrtanja $\phi = \omega t$, i takvo obrtanje se naziva ravnomerno ili jednoliko⁶.



Slika 4.17:

Ugaono ubrzanje prikazuje se vektorom ugaonog ubrzanja ε . On je po intenzitetu jednak ugaonom ubrzanju (4.46) i pada u pravac ose obrtanja. Ako je $\varepsilon > 0$ on je istog smera sa ugaonom brzinom (Slika 4.17), a ako je $\varepsilon < 0$ on je u suprotnom smeru od vektora ω . Ova veza vektora ugaonog ubrzanja i vektora ugaone brzine sadržana je u relaciji da je $\varepsilon = \dot{\omega} = \dot{\omega} \mathbf{k}$.

Vektori ugaone brzine ω i ugaonog ubrzanja ε mogu se slobodno pomerati duž ose obrtanja, pa su to klizeći vektori.

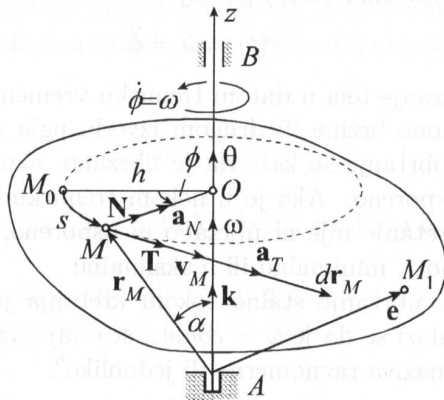
⁶Ako pri ovom obrtanju telo načini n obrtaja u minuti onda je ugao obrtanja za to vreme $\phi_n = 2\pi n$, jer se on meri od početnog položaja gde je $\phi_0 = 0$, a odgovarajuća ugaona brzina

$$\omega = \frac{n\pi}{30} [s^{-1}],$$

koja je česta karakteristika rada mnogih mašina.

4.4.2 Brzina i ubrzanje tačke tela

Uoči se neka tačka M tela (Slika 4.18) koja se nalazi na rastojanju h od ose obrtanja. Pri obrtanju tela oko ose z ova tačka se kreće po krugu poluprečnika h . Centar tog kruga se nalazi u tački O prodora ose z kroz ravan kruga, koja je normalna na osu z .



Slika 4.18:

Ako se za neki vremenski interval telo obrne za ugao ϕ , iz položaja M_0 u položaj M , onda je lučno pomeranje tačke za to vreme $s = h\phi$. Pošto je ovo zakon kretanja tačke M u prirodnom koordinatnom sistemu projekcija njene brzine na pravac jediničnog vektora tangente $\mathbf{T}$ kružne putanje (Slika 4.18) iznosi

$$v_T = \dot{s} = h\dot{\phi} = h\omega, \quad (4.47)$$

gde je ω ugaona brzina obrtanja tela. Brzine raznih tačaka tela pri obrtanju tela oko ose, koje su na istom rastojanju h od ose, imaju iste brzine.

Do vektora brzine tačke M pri obrtanju tela oko ose z može se doći i na sledeći način: Uoči se vektor $\mathbf{r}_M$ položaja tačke M u odnosu na bilo koju tačku na osi obrtanja i vektor ugaone brzine $\boldsymbol{\omega}$. Tada je brzina tačke M data sa

$$\mathbf{v}_M = \dot{\mathbf{r}}_M = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_M. \quad (4.48)$$

Intenzitet ovog vektorskog proizvoda je $\omega r_M \sin \alpha = \omega h$, gde je α (Slika 4.18) ugao između vektora $\boldsymbol{\omega}$ i $\mathbf{r}_M$. Pravac i smer tog vektora je određen pravilom

vektorskog proizvoda vektora $\boldsymbol{\omega}$ i $\mathbf{r}_M$. Sva ova svojstva vektorskog proizvoda $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_M$ opravdavaju relaciju (4.48).

Ako je $\mathbf{k}$ jedinični vektor pravca z ose, onda vektor ugaone brzine ima oblik $\boldsymbol{\omega} = \dot{\phi}\mathbf{k}$. Zamenom ovog izraza u (4.48), i množenjem dobijenog izraza sa priraštajem vremena dt , dobija se elementarno pomeranje tačke M (Slika 4.18)

$$d\mathbf{r}_M = \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{r}_M, \quad (4.49)$$

gde vektor

$$\boldsymbol{\theta} = d\phi\mathbf{k} \quad (4.50)$$

ima intenzitet jednak intenzitetu elementarnog obrtanja $d\phi$, pravac ose obrtanja i smer isti smeru obrtanja. Pošto taj vektor sadrži sve osobine elementarnog obrtanja oko ose, opravdan je njegov naziv: vektor elementarnog obrtanja oko ose.

Ako se u telu uoči jedinični vektor $\mathbf{e}$ (Slika 4.18), koji je čvrsto vezan za telo, tada brzina kraja tog vektora, odnosno tačke M_1 tela, prema (4.48) glasi

$$\mathbf{v}_{M_1} = \dot{\mathbf{e}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}. \quad (4.51)$$

Izraz (4.51) je značajan jer daje izvod po vremenu jediničnog vektora, koji menja svoj pravac u prostoru zbog obrtanja.

Koristeći izraze (4.36), (4.47) i (4.48) i uzimajući u obzir da je poluprečnik krivine putanje tačke M dužina h , dobija se tangencijalno i normalno ubrzanje tačke M pri obrtanju tela oko ose

$$a_T = \ddot{s} = h\dot{\omega}, \quad a_N = \frac{v^2}{R_k} = h\omega^2, \quad (4.52)$$

gde je ε ugaono ubrzanje tela. Ove komponente ubrzanja tačke M su prikazane na slikama 4.18 i 4.19a, gde su dati i jedinični vektori tangente $\mathbf{T}$ i glavne normale $\mathbf{N}$ putanje tačke. Tangencijalno ubrzanje je u smeru obrtanja za $\varepsilon > 0$ i u obrnutom smeru od obrtanja za $\varepsilon < 0$. Normalno ubrzanje je uvek usmereno ka osi obrtanja. Na slici 4.19a prikazana je putanja tačke M gledana iz pozitivnog smera ose z .

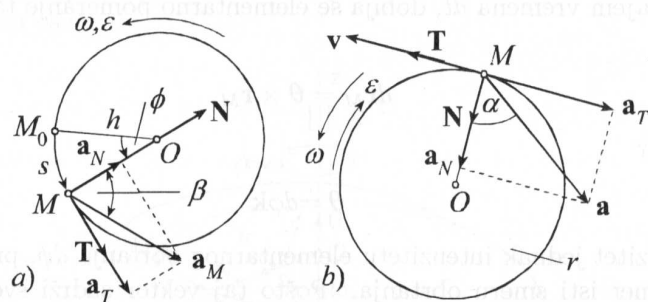
Intenzitet ubrzanja tačke M iznosi

$$a_M = h\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}, \quad (4.53)$$

a ugao β između vektora ubrzanja $\mathbf{a}_M$ i pravca OM određen je jednačinom

$$\tan \beta = \frac{a_T}{a_N} = \frac{\varepsilon}{\omega^2}. \quad (4.54)$$

Iz relacija (4.53) i (4.54), se vidi da je intenzitet ubrzanja svake tačke tela proporcionalan udaljenju tačke od ose obrtanja i da ubrzanja svih tačaka tela zaklapaju isti ugao sa pravcem normale povučene iz date tačke na osu obrtanja, jer ugao β ne zavisi od položaja tačke u telu.



Slika 4.19:

Do ubrzanja tačke M može se doći i diferenciranjem po vremenu vektora brzine tačke M , odnosno

$$\mathbf{a}_M = \dot{\mathbf{v}}_M = \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}_M + \boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}_M,$$

što zbog (4.46) i (4.48) dovodi do

$$\mathbf{a}_M = \dot{\mathbf{v}}_M = \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r}_M + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_M.$$

Lako se utvrđuje, koristeći uobičajena svojstva vektorskog proizvoda i (4.52), da su tangencijalna i normalna komponenta ubrzanja tačke M date sa

$$\mathbf{a}_T = \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r}_M, \quad \mathbf{a}_N = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_M, \quad (4.55)$$

odnosno

$$\mathbf{a}_M = \mathbf{a}_T + \mathbf{a}_N.$$

4.4.3 Primer

Primer 37 Disk poluprečnika r [m] obrće se oko nepomične ose sa konstantnim ugaonim usporenjem (Slika 4.19b). Posle N obrtaja disk se zaustavlja. Početna ugaona brzina diska iznosi ω_0 [s^{-1}]. Odrediti:

1. ugaono usporenje diska,

2. proteklo vreme od početka kretanja diska do zaustavljanja,

3. brzinu i ubrzanje tačke na periferiji diska u trenutku koji je polovina potrebnog vremena za zaustavljanje.

U trenutku t_k zaustavljanja diska, iz relacija (4.46) i (4.45), uz uslov da je $\phi_0 = 0$ dobijaju se jednačine

$$0 = \varepsilon t_k + \omega_0, \quad 2\pi N = \omega_0 t_k + \frac{\varepsilon}{2} t_k^2.$$

Rešavanjem ove dve algebarske jednačine po ε i t_k , nalaze se ugaono usporenje diska i proteklo vreme od početka kretanja do zaustavljanja

$$\varepsilon = -\frac{\omega_0^2}{4\pi N} [s^{-2}], \quad t_k = \frac{4\pi N}{\omega_0} [s].$$

Brzina, normalna i tangencijalna komponenta ubrzanja tačke M diska na rastojanju r od ose obrtanja izračunavaju se koristeći (4.47) i (4.52)

$$v = r\omega = r(\varepsilon t + \omega_0),$$

$$a_N = r\omega^2 = r(\varepsilon t + \omega_0)^2, \quad a_T = r\varepsilon = -\frac{r\omega_0^2}{4\pi N}.$$

U trenutku $t_1 = t_k/2$ [s] ove veličine imaju vrednosti

$$v_1 = \frac{r\omega_0}{2} [m/s], \quad a_{N1} = \frac{r\omega_0^2}{4} [m/s^2], \quad a_{T1} = -\frac{r\omega_0^2}{4\pi N} [m/s],$$

i nacrtane su na slici 4.19b. Intenzitet ubrzanja tačke M iznosi

$$a_1 = \sqrt{a_{N1}^2 + a_{T1}^2} = \frac{r\omega_0^2}{4\pi N} \sqrt{1 + \pi^2 N^2} [m/s^2],$$

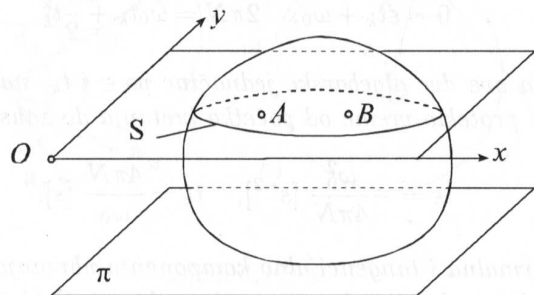
a ugao α između vektora ubrzanja i glavne normale $\mathbf{N}$ određen je relacijom

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a_{T1}}{a_{N1}} = \frac{1}{\pi N}.$$

4.5 Ravansko kretanje tela

Već je ranije rečeno da su elementi kinematičkog torzera, vektor ugaone brzine $\boldsymbol{\omega}$ i vektor translatorne brzine $\mathbf{v}_t$ pri ravanskom kretanju međusobno ortogonalni. Pri ravanskom kretanju, sve tačke tela kreću se u ravnima koje

su paralelne nekoj nepomičnoj ravni π (Slika 4.20), drugim rečima ako su brzine svih tačaka tela paralelne toj ravni π , tada se telo kreće ravanski. Pri ravanskom kretanju tela sve tačke tela, koje se nalaze na pravoj normalnoj na tu referentnu ravan, kreću se na potpuno isti način. Prema tome, za proučavanje ravanskog kretanja tela, dovoljno je proučiti kretanje jedne tanke ploče S , koja je isečena iz tela paralelno referentnoj ravni, u koordinatnom sistemu Oxy , koji se usvaja u toj ravni (Slika 4.20).



Slika 4.20:

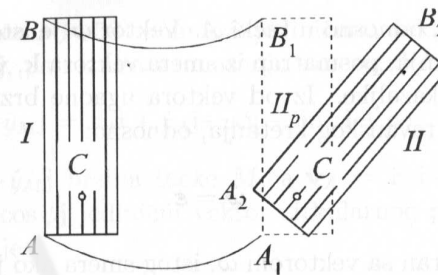
Položaj ploče S u ravni Oxy potpuno je određen položajem dve tačke A i B tog preseka. Pošto je telo kruto, rastojanje između ovih tačaka je konstantno, pa četiri koordinate ovih tačaka zadovoljavaju jednačinu

$$(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 = (AB)^2,$$

koja se u mehanici naziva jednačina veze. Iz ove relacije može se izraziti bilo koja odabrana koordinata u funkciji tri preostale koordinate, koje su zbog toga nezavisne. Prema tome položaj tela, koje vrši ravansko kretanje, određen je sa tri nezavisna parametra, pa ravansko kretanje ima tri stepena slobode kretanja.

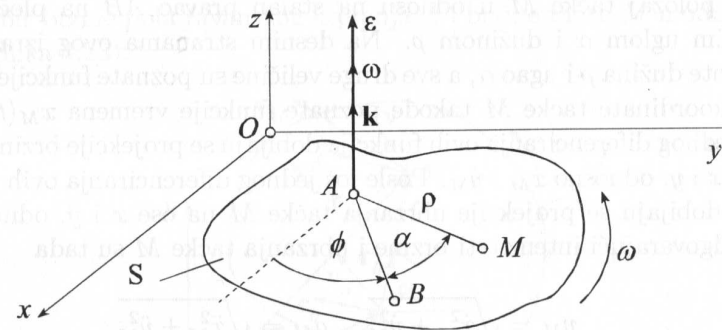
Pri ravanskom kretanju tela, ono se može premestiti iz jednog položaja I (Slika 4.21) u neki drugi položaj II složenim kretanjem od jedne translacije i obrtanja oko jedne ose. Translacijom dovodi se telo iz položaja I u položaj II_p , a zatim obrtanjem oko neke tačke C u krajnji položaj III . Pomeranje tela iz položaja I u položaj II može se ostvariti i obrnutim redom, prvo obrtanje pa zatim translacija. Zapravo, to kretanje se u prirodi ostvaruje istovremenom translacijom i obrtanjem.

Najprikladniji parametri za određivanje položaja tela pri ravanskom kretanju su Dekartove koordinate jedne tačke ploče, na primer tačke A , i ugao



Slika 4.21:

ϕ između nekog stalnog pravca AB na ploči prema nekom stalnom pravcu u ravni Oxy , recimo pravcu ose x (Slika 4.22). Proizvoljno odabrana tačka A naziva se pol ravanskog kretanja. Kretanje pola A zamenjuje translaciju tela a obrtanje tela zamenjuje obrtanje oko pola A , koje je isto što i obrtanje



Slika 4.22:

tela oko ose koja je normalna na ravan kretanja i prolazi kroz pol A . Ako je ravansko kretanje zadato, tada su poznate funkcije

$$x_A = x_A(t), \quad y_A = y_A(t), \quad \phi = \phi(t).$$

Izvod ugla $\phi(t)$ po vremenu je ugaona brzina ravanskog kretanja, odnosno

$$\omega = \dot{\phi}, \quad \omega = \omega \mathbf{k}, \quad (4.56)$$

gde je $\mathbf{k}$ jedinični vektor normalnog pravca na ravan kretanja u smeru ose z . Vektor ugaone brzine ω je normalan na ravan kretanja koju on preseca u polu

ravanskog kretanja, odnosno u tački A . Vektor ω je istog smera kao i vektor $\mathbf{k}$ ako se smer obrtanja, posmatran iz smera vektora $\mathbf{k}$, vidi u obrnutom smeru od kretanja satne kazaljke. Izvod vektora ugaone brzine ω po vremenu je ugaono ubrzanje ε ravanskog kretanja, odnosno

$$\dot{\omega} = \varepsilon.$$

Vektor ε je kolinearan sa vektorom ω , istog smera ako je $\varepsilon > 0$, ili suprotnog smera za $\varepsilon < 0$.

Znajući zakone kretanja tačke A , odnosno $x_A(t)$ i $y_A(t)$, i zakon obrtanja $\phi(t)$ oko tačke A može se odrediti položaj i svake druge tačke tela za vreme ravanskog kretanja. Na primer, za neku proizvoljnu tačku tela M je

$$\begin{aligned} x_M &= x_A + \rho \cos(\phi + \alpha), \\ y_M &= y_A + \rho \sin(\phi + \alpha), \end{aligned} \quad (4.57)$$

gde je položaj tačke M u odnosu na stalan pravac AB na ploči određen poznatim uglom α i dužinom ρ . Na desnim stranama ovog izraza su dve konstante dužina ρ i ugao α , a sve druge veličine su poznate funkcije vremena, pa su koordinate tačke M takođe poznate funkcije vremena $x_M(t)$ i $y_M(t)$. Posle jednog diferenciranja ovih funkcija dobijaju se projekcije brzine tačke M na ose x i y , odnosno $\dot{x}_M$ i $\dot{y}_M$. Posle još jednog diferenciranja ovih projekcija brzine dobijaju se projekcije ubrzanja tačke M na ose x i y , odnosno $\ddot{x}_M$ i $\ddot{y}_M$. Odgovarajući intenziteti brzine i ubrzanja tačke M su tada

$$v_M = \sqrt{\dot{x}_M^2 + \dot{y}_M^2}, \quad a_M = \sqrt{\ddot{x}_M^2 + \ddot{y}_M^2}.$$

4.5.1 Veza brzina tačaka tela

Posmatrajmo kretanje ploče S u ravni Oxy (Slika 4.23). Proizvoljna tačka A izabere se za pol ravanskog kretanja. Smer obrtanja ploče oko izabranog pola A prikazan je na slici. Kao pomoć za dalji rad, usvoji se u polu A centar polarnog koordinatnog sistema sa jediničnim vektorima $\mathbf{r}_0$ i $\mathbf{c}_0$. Položaj bilo koje tačke M tela određen je Dekartovim koordinatama (4.57), gde je ugao α jednak nuli. Diferenciranjem ovih izraza po vremenu dobijaju se projekcije brzine tačke M na ose x i y

$$\begin{aligned} \dot{x}_M &= \dot{x}_A + \rho(-\sin \phi)\dot{\phi}, \\ \dot{y}_M &= \dot{y}_A + \rho(\cos \phi)\dot{\phi}. \end{aligned} \quad (4.58)$$

Ako se prva jednačina (4.58) pomnoži jediničnim vektorom $\mathbf{i}$, a druga sa jediničnim vektorom $\mathbf{j}$, pa rezultati množenja saberu, dobija se

$$\dot{x}_M \mathbf{i} + \dot{y}_M \mathbf{j} = \dot{x}_A \mathbf{i} + \dot{y}_A \mathbf{j} + \rho \dot{\phi} (-\sin \phi \mathbf{i} + \cos \phi \mathbf{j}).$$

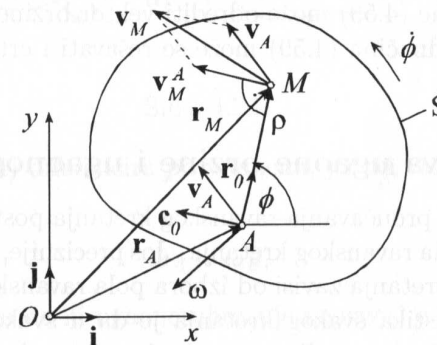
Pošto je $\mathbf{v}_M = \dot{x}_M \mathbf{i} + \dot{y}_M \mathbf{j}$ brzina tačke M , a $\mathbf{v}_A = \dot{x}_A \mathbf{i} + \dot{y}_A \mathbf{j}$ brzina tačke A , i $\mathbf{c}_0 = -\sin \phi \mathbf{i} + \cos \phi \mathbf{j}$ jedinični vektor cirkularnog pravca (Slika 4.23), prethodni izraz postaje

$$\mathbf{v}_M = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_M^A, \quad (4.59)$$

gde je

$$\mathbf{v}_M^A = \rho \dot{\phi} \mathbf{c}_0, \quad v_M^A = \rho \dot{\phi} = \rho \omega, \quad (4.60)$$

brzina tačke M u odnosu na tačku A , a $\omega = \dot{\phi}$ ugaona brzina ravanskog kretanja. Ova komponenta brzine tačke M je uvek normalna na pravac AM a u smeru obrtanja tačke M oko tačke A . Relacija (4.59) znači da je brzina tačke M zbir brzine pola ravanskog kretanja A i brzine tačke M u odnosu na tačku A (Slika 4.23).



Slika 4.23:

Ako se na slici 4.23 uoči vektor položaja $\mathbf{r}_A$ tačke A i vektor položaja $\mathbf{r}_M$ tačke M , onda je

$$\mathbf{r}_M = \mathbf{r}_A + \rho.$$

Diferenciranjem ovog izraza po vremenu dobija se

$$\mathbf{v}_M = \mathbf{v}_A + \dot{\rho},$$

pa poređenjem ovog rezultata sa (4.59)

$$\mathbf{v}_M^A = \dot{\boldsymbol{\rho}}. \quad (4.61)$$

Ako se uvede vektor ugaone brzine ravanskog kretanja $\boldsymbol{\omega}$, koji je normalan na ravan kretanja, onda je prema (4.51)

$$\mathbf{v}_M^A = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}, \quad (4.62)$$

a izraz (4.59) dobija oblik

$$\mathbf{v}_M = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}. \quad (4.63)$$

Ako su u ovoj jednačini sve veličine date u nekom trenutku vremena, tada relacija (4.59) odgovara tom trenutku vremena. Zbog toga, u svakom drugom trenutku, pa i infinitezimalno bliskom, sve promenljive veličine u ovoj relaciji $\mathbf{v}_M$, $\mathbf{v}_A$ i $\mathbf{v}_M^A$, odnosno ugaona brzina $\boldsymbol{\omega}$, mogu imati različite vrednosti.

Pošto se svi vektori u jednačini (4.59) nalaze u istoj ravni, ova vektorska jednačina je ekvivalentna sa dve skalarne jednačine (4.58). Zbog toga, u jednačini (4.59) mogu biti nepoznate samo dve skalarne veličine. Na primer, ako je poznat vektor $\mathbf{v}_A$ brzine tačke A i ugaona brzina $\boldsymbol{\omega}$ ravanskog kretanja, onda se iz jednačine (4.59) može odrediti vektor brzine bilo koje druge tačke tela. Vektorska jednačina (4.59) može se rešavati i crtanjem trougla brzina, koji njoj odgovara.

4.5.2 Svojstva ugaone brzine i ugaonog ubrzanja

Od samog početka proučavanja ravanskog kretanja postavlja se pitanje proizvoljnosti izbora pola ravanskog kretanja. Još preciznije, pitanje je da li ugaona brzina ravanskog kretanja zavisi od izbora pola ravanskog kretanja. Osnovna prirodna karakteristika svakog kretanja je da u svakom trenutku vremena bilo koja tačka tela ima jedinstvenu brzinu, bez obzira kako se ta brzina izračunava. Posmatrajmo dve tačke A i B (Slika 4.24a) tela koje vrši ravansko kretanje, gde se tačka A prvobitno bira za pol. Tada je brzina tačke B prema (4.59) i (4.62)

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega}_A \times \mathbf{AB},$$

gde je $\boldsymbol{\omega}_A$ ugaona brzina obrtanja oko tačke A . Ako se posmatra obrtanje tela oko pola B i pretpostavi da je ugaona brzina tog obrtanja $\boldsymbol{\omega}_B$, tada je brzina tačke A

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \boldsymbol{\omega}_B \times \mathbf{BA}.$$

Sabiranjem ove dve jednačine dobija se

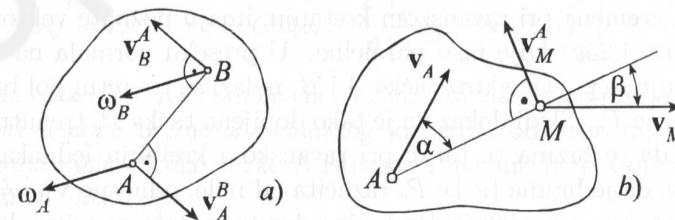
$$(\boldsymbol{\omega}_A - \boldsymbol{\omega}_B) \times \mathbf{AB} = 0.$$

Pošto je vektor $\mathbf{AB}$ proizvoljan, a vektori $\boldsymbol{\omega}_A$ i $\boldsymbol{\omega}_B$ su normalni na ravan kretanja, odnosno na vektor $\mathbf{AB}$, ova relacija je ispunjena samo ako je

$$\boldsymbol{\omega}_A = \boldsymbol{\omega}_B, \quad (4.64)$$

odnosno ugaona brzina $\boldsymbol{\omega}_B$ obrtanja oko tačke B mora biti jednaka ugaonoj brzini $\boldsymbol{\omega}_A$ obrtanja oko tačke A .

Zaključujemo da je ugaona brzina ravanskog kretanja tela nezavisna od izbora pola ravanskog kretanja. Zbog toga se ne mora naglašavati tačka koja je izabrana za pol u oznaci za ugaonu brzinu $\boldsymbol{\omega}$.



Slika 4.24:

Ako se izraz (4.64) diferencira po vremenu, jer on važi za sve vreme kretanja, dobija se

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_A = \dot{\boldsymbol{\omega}}_B,$$

odnosno zaključujemo da ni ugaono ubrzanje ne zavisi od izbora pola.

4.5.3 Projekcija brzina dve tačke tela na spojnu pravu

Posmatrajmo bilo koje dve tačke A i M tela (Slika 4.24b) čije su brzine pri ravanskom kretanju $\mathbf{v}_A$ i $\mathbf{v}_M$ i koje zaklapaju uglove α i β sa pravcem AM . Veza (4.59) njihovih brzina pri ravanskom kretanju projektuje se na pravac AM . Pošto je vektor $\mathbf{v}_M^A$ normalan na pravac AM , dobija se

$$v_M \cos \beta = v_A \cos \alpha, \quad (4.65)$$

odakle sledi pravilo: Projekcije brzina dve tačke tela, pri ravanskom kretanju, na pravu, koja spaja te tačke, su jednake.

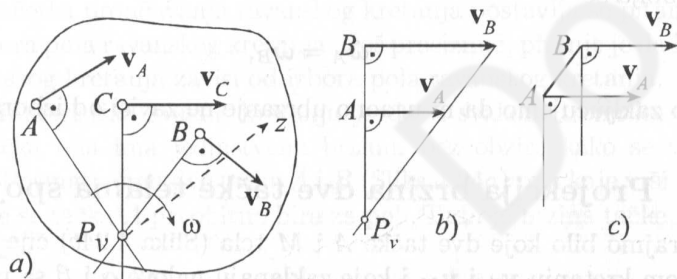
4.5.4 Trenutni pol brzine

U svakom trenutku vremena, pri ravanskom kretanju tela, svaka njegova tačka ima brzinu, koja je sa brzinom neke druge tačke tela povezana relacijom (4.59). Postavlja se pitanje da li u ravni kretanja postoji tačka, koja pripada telu ili se nalazi van njega, čija je brzina u datom trenutku vremena jednaka nuli. Ako takva tačka postoji, ona se naziva pol brzine ravanskog kretanja. Ovaj naziv "pol brzine" treba razlikovati od naziva "pol ravanskog kretanja".

Položaj trenutnog pola brzine ravanskog kretanja određuje se u zavisnosti od poznatih podataka o ravanskom kretanju.

4.5.4.1 Poznate su brzine dve tačke tela

Vektori brzina nisu paralelni. Neka dve tačke A i B tela, u nekom trenutku vremena pri ravanskom kretanju, imaju poznate vektore brzina $\mathbf{v}_A$ i $\mathbf{v}_B$ (Slika 4.25a) koje nisu paralelne. U preseku normala na vektore ovih brzina, koje se povlače kroz tačke A i B , nalazi se trenutni pol brzine, koji se obeležava sa P_v . Sledi dokaz da je tako dobijena tačka P_v trenutni pol brzine, odnosno da je brzina te tačke pri ravanskom kretanju jednaka nuli. Pretpostavi se da je brzina tačke P_v različita od nule, odnosno $\mathbf{v}_{P_v} \neq 0$. Tada, na osnovu teoreme o projekcijama brzina dve tačke tela na pravu koja ih spaja, vektor $\mathbf{v}_{P_v}$ treba istovremeno da bude normalan na duži AP_v i BP_v , jer je $\mathbf{v}_A$ normalno na duž AP_v a $\mathbf{v}_B$ na duž BP_v . Pošto je ovo nemoguće, jer se pravci AP_v i BP_v seku pod nekim uglom, brzina tačke P_v mora biti jednaka nuli, odnosno tačka P_v je trenutni pol brzine.



Slika 4.25:

Smisao trenutnog pola brzine, ili kratko pola brzine, je sledeći: u datom trenutku vremena, brzine svih tačaka tela pri ravanskom kretanju su raspoređene tako kao da se telo obrće oko pola brzine P_v , ili oko ose z , koja je

normalna na ravan kretanja, i koja prodire kroz tu ravan u polu brzine P_v . U svakom trenutku vremena, za vreme kretanja, pol brzine ravanskog kretanja može biti neka druga geometrijska tačka u ravni kretanja. Pol brzine može pripadati telu, ali se može nalaziti i izvan tela.

Smatrajući da je brzina tačke A poznata i pošto je brzina pola brzine jednaka nuli, a prema (4.59), dobija se relacija

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_{P_v} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{AP}_v, \quad v_A = AP_v \omega, \quad (4.66)$$

odnosno ugaona brzina obrtanja tela oko pola brzine

$$\omega = \frac{v_A}{AP_v}.$$

Iz ovog razmatranja sledi da je brzina proizvoljne tačke C tela data sa

$$\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_{P_v} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{CP}_v, \quad v_C = CP_v \omega = \frac{CP_v}{AP_v} v_A, \quad \mathbf{v}_C \perp \mathbf{CP}_v.$$

Vektor brzine tačke C je nacrtan na slici 4.25a. Šta više, zbog ranije dokazane jedinstvenosti ugaone brzine ω ravanskog kretanja, odnosno da je ugaona brzina obrtanja tačke B oko tačke A ista kao i ugaona brzina obrtanja tela oko pola brzine, važi da je i

$$v_B^A = AB \omega = \frac{AB}{AP_v} v_A,$$

Vektori brzina tačaka su paralelni. Ako su brzine dve tačke A i B , pri ravanskom kretanju tela, paralelne tada se pol brzine ne može odrediti opisanim postupkom nego:

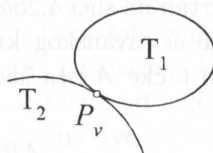
1. Ako se normale na brzine dve tačke poklapaju (Slika 4.25b), to znači da su brzine tih tačaka A i B normalne na duž AB , tada povlačeći pravu kroz vrhove brzina tačaka A i B do preseka sa pravcem AB , nalazi se tačka P_v . Ona je pol brzine, jer je očigledno zadovoljena relacija (4.66) za izračunavanje brzina pojedinih tačaka tela u odnosu na pol brzine. U datom trenutku vremena, brzine svih tačaka tela pri ravanskom kretanju su raspoređene tako kao da se telo obrće oko te tačke.
2. Ako su normale na brzine dve tačke tela paralelne, odnosno ako su brzine dve tačke tela A i B paralelne ali nisu normalne na duž AB (Slika 4.25c), tada je pol brzine u beskonačnosti. Tada, brzine tačaka A i B moraju biti jednake (Slika 4.25c). U datom trenutku vremena, brzine svih tačaka tela pri ravanskom kretanju su raspoređene tako kao da se telo kreće u tom trenutku translatorno.

4.5.4.2 Poznata je brzina jedne tačke tela i ugaona brzina obrtanja

Ako je pri ravanskom kretanju poznat vektor brzine $\mathbf{v}_A$ tačke A i intenzitet i smer ugaone brzine ω onda se prethodne relacije, počev od (4.66), koriste za nalaženje pola brzine. Naime, pol brzine se nalazi na normalni na vektor brzine $\mathbf{v}_A$ na rastojanju $AP_v = v_A/\omega$ i u smeru koji se dobija okretanjem vektora brzine $\mathbf{v}_A$ u smeru ugaone brzine ω (Slika 4.25a).

4.5.4.3 Kotrljanje bez klizanja

U specijalnom slučaju, kada se kretanje u ravni ostvaruje kotrljanjem bez klizanja jednog tela T_1 po drugom telu T_2 , tada tačke u kontaktu na ovim telima imaju istu brzinu. Ako je telo T_2 nepokretno onda je tačka dodira P_v trenutni pol brzine za telo T_1 (Slika 4.26). Ako je i telo T_2 pokretno, onda je tačka dodira pol brzine relativnog kretanja tela T_1 , odnosno brzina relativnog kretanja tela T_1 u odnosu na telo T_2 jednaka je nuli.



Slika 4.26:

Poznavanje položaja trenutnog pola brzine je važan podatak pri rešavanju mnogih zadataka ravanskog kretanja.

4.5.5 Veza ubrzanja tačaka tela

4.5.5.1 Prvi način

Diferenciranjem izraza (4.58) po vremenu dobija se

$$\begin{aligned}\ddot{x}_M &= \ddot{x}_A + \rho[(-\cos\phi)\dot{\phi}^2 + (-\sin\phi)\ddot{\phi}], \\ \ddot{y}_M &= \ddot{y}_A + \rho[(-\sin\phi)\dot{\phi}^2 + (\cos\phi)\ddot{\phi}].\end{aligned}\quad (4.67)$$

Ako se prva jednačina (4.67) pomnoži sa jediničnim vektorom $\mathbf{i}$, a druga sa jediničnim vektorom $\mathbf{j}$, i ti rezultati saberu dobija se

$$\begin{aligned}\ddot{x}_M\mathbf{i} + \ddot{y}_M\mathbf{j} &= \ddot{x}_A\mathbf{i} + \ddot{y}_A\mathbf{j} + \\ &\quad \rho[\dot{\phi}^2(-\cos\phi\mathbf{i} - \sin\phi\mathbf{j}) + \ddot{\phi}(-\sin\phi\mathbf{i} + \cos\phi\mathbf{j})].\end{aligned}$$

Pošto je $\mathbf{a}_M = \ddot{x}_M\mathbf{i} + \ddot{y}_M\mathbf{j}$ ubrzanje tačke M , a $\mathbf{a}_A = \ddot{x}_A\mathbf{i} + \ddot{y}_A\mathbf{j}$ ubrzanje tačke A i jedinični vektori

$$\mathbf{r}_0 = \cos\phi\mathbf{i} + \sin\phi\mathbf{j}, \quad \mathbf{c}_0 = -\sin\phi\mathbf{i} + \cos\phi\mathbf{j},$$

polarnog koordinatnog sistema u tački A (Slika 4.27a), prethodni izraz postaje

$$\mathbf{a}_M = \mathbf{a}_A + \rho\ddot{\phi}\mathbf{c}_0 - \rho\dot{\phi}^2\mathbf{r}_0. \quad (4.68)$$

Komponenta $\rho\ddot{\phi}\mathbf{c}_0$ ubrzanja tačke M zove se tangencijalno ubrzanje tačke M u odnosu na tačku A i označava se na sledeći način

$$\mathbf{a}_{MT}^A = \rho\epsilon\mathbf{c}_0, \quad a_{MT}^A = \rho\epsilon. \quad (4.69)$$

Ova komponenta ubrzanja tačke M pada u pravac normalan na duž AM u smeru obrtanja, za $\epsilon > 0$, ili u suprotnom smeru od obrtanja, za $\epsilon < 0$, gde je prema (4.46) $\epsilon = \ddot{\phi}$ ugaono ubrzanje ravanskog kretanja (Slika 4.27a). Komponenta $-\rho\dot{\phi}^2\mathbf{r}_0$ ubrzanja tačke M zove se normalno ubrzanje tačke M u odnosu na tačku A i označava kao

$$\mathbf{a}_{MN}^A = -\rho\omega^2\mathbf{r}_0, \quad a_{MN}^A = \rho\omega^2, \quad (4.70)$$

gde je prema (4.45) $\omega = \dot{\phi}$ ugaona brzina ravanskog kretanja. Vektor $\mathbf{a}_{MN}^A$ pada u pravac AM i uvek je usmeren ka tački A (Slika 4.27a).

Zbog uvedenih oznaka, veza ubrzanja (4.68) dve tačke tela pri ravanskom kretanju, postaje

$$\mathbf{a}_M = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{MT}^A + \mathbf{a}_{MN}^A. \quad (4.71)$$

4.5.5.2 Drugi način

Ako se veza brzina dve tačke (4.63) tela pri ravanskom kretanju diferencira po vremenu t dobija se

$$\mathbf{a}_M = \mathbf{a}_A + (\dot{\omega} \times \boldsymbol{\rho}) + (\omega \times \dot{\boldsymbol{\rho}}).$$

Izvod vektora ugaone brzine ω po vremenu je vektor ugaonog ubrzanja ϵ . Izvod vektora $\boldsymbol{\rho}$ po vremenu je prema (4.61) brzina tačke M u odnosu na tačku A , pa prethodni izraz postaje

$$\mathbf{a}_M = \mathbf{a}_A + (\epsilon \times \boldsymbol{\rho}) + (\omega \times \mathbf{v}_M^A). \quad (4.72)$$

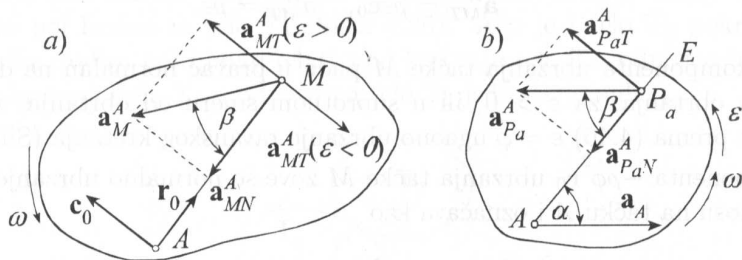
Prvi vektorski proizvod u (4.72) ima isti intenzitet pravac i smer kao tangencijalno ubrzanje tačke M u odnosu na tačku A pa je

$$\mathbf{a}_{MT}^A = \varepsilon \times \boldsymbol{\rho}, \quad (4.73)$$

dok je drugi vektor istih karakteristika sa normalnim ubrzanjem tačke M u odnosu na tačku A , odnosno

$$\mathbf{a}_{MN}^A = \omega \times \mathbf{v}_M^A, \quad (4.74)$$

i izraz (4.72) ponovo dovodi do veze ubrzanja (4.71) dve tačke tela pri ravanskom kretanju.



Slika 4.27:

Vektori $\mathbf{a}_{MT}^A$ i $\mathbf{a}_{MN}^A$, tangencijalnog i normalnog ubrzanja tačke M u odnosu na tačku A , mogu se sabrati u tački M (Slika 4.27a)

$$\mathbf{a}_M^A = \mathbf{a}_{MT}^A + \mathbf{a}_{MN}^A, \quad (4.75)$$

i zvati ubrzanje tačke M u odnosu na tačku A . Tada, izraz (4.71) postaje

$$\mathbf{a}_M = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_M^A. \quad (4.76)$$

Koristeći prethodne izraze i sliku 4.27a, nalazi se intenzitet ubrzanja tačke M u odnosu na tačku A

$$a_M^A = \rho \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}, \quad (4.77)$$

kao i ugao β između ovog vektora i pravca AM

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{a_{MT}^A}{a_{MN}^A} = \frac{\varepsilon}{\omega^2}. \quad (4.78)$$

U zavisnosti od načina kretanja tačaka A i M , kao i u zavisnosti od koordinatnog sistema u kojem se ta kretanja posmatraju, ubrzanja ovih tačaka mogu imati više komponenti. Na primer, ako se tačke A i M kreću krivolinijski i ako se njihova kretanja posmatraju u prirodnom koordinatnom sistemu, tada oba ubrzanja $\mathbf{a}_M$ i $\mathbf{a}_A$ imaju normalnu i tangencijalnu komponentu, odnosno (4.71) postaje

$$\mathbf{a}_{MT} + \mathbf{a}_{MN} = \mathbf{a}_{AT} + \mathbf{a}_{AN} + \mathbf{a}_{MT}^A + \mathbf{a}_{MN}^A. \quad (4.79)$$

Vektorska jednačina (4.71) ili (4.79) u ravni kretanja je ekvivalentna sa dve skalarne jednačine (4.67) i zato u njoj mogu biti nepoznate samo dve skalarne veličine. Na primer, ako su poznati vektor ubrzanja $\mathbf{a}_A$ tačke A , ugaona brzina ω i ugaono ubrzanje ε ravanskog kretanja, onda se iz tih skalarnih jednačina određuju projekcije normalnog a_{MN} i tangencijalnog a_{MT} ubrzanja tačke M , odnosno vektor ubrzanja $\mathbf{a}_M$ tačke M .

4.5.6 Trenutni pol ubrzanja

Pri ravanskom kretanju tela u svakom trenutku vremena postoji tačka P_a u ravni kretanja čije je ubrzanje jednako nuli. Ta tačka se zove trenutni pol ubrzanja.

Ako je poznat vektor ubrzanja $\mathbf{a}_A$ neke tačke A tela, kao i ugaona brzina ω i ugaono ubrzanje ε ravanskog kretanja, tada se pol ubrzanja određuje na sledeći način:

1. Odredi se ugao α prema relaciji $\operatorname{tg} \alpha = |\varepsilon|/\omega^2$. Iz tačke A pod uglom α prema vektoru $\mathbf{a}_A$, a u smeru ugaonog ubrzanja ε ravanskog kretanja, povuče se pravac AE (Slika 4.27b).
2. Izračuna se dužina

$$AP_a = \frac{a_A}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}},$$

i nanese od tačke A na pravac AE čime se definiše položaj tačke P_a . Tako dobijena tačka P_a je pol ubrzanja.

Dokaz da je tačka P_a pol ubrzanja: Prema izrazima (4.76)-(4.78), ubrzanje tačke P_a iznosi

$$\mathbf{a}_{P_a} = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{P_a}^A.$$

Zbog načina izračunavanja dužine AP_a , intenzitet ubrzanja tačke P_a u odnosu na tačku A ima vrednost

$$a_{P_a}^A = AP_a \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} = a_A. \quad (4.80)$$

Ugao β između ovog vektora ubrzanja i pravca AP_a određen je relacijom

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{a_{P_aT}^A}{a_{P_aN}^A} = \frac{\varepsilon}{\omega^2}.$$

Vidi se da je ugao β jednak uglu α . Na osnovu svih navedenih svojstava zaključujemo da je vektor ubrzanja tačke P_a u odnosu na tačku A

$$\mathbf{a}_{P_a}^A = -\mathbf{a}_A$$

i ubrzanje tačke $\mathbf{a}_{P_a} = 0$, što je i trebalo dokazati.

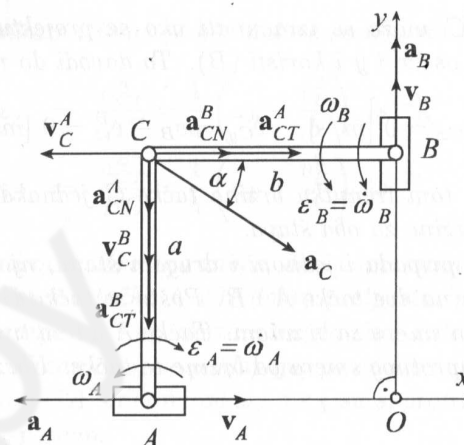
Tokom ravanskog kretanja položaj trenutnog pola ubrzanja se stalno menja. On se može nalaziti na površini ploče koja predstavlja ravansko kretanje tela, ali i van te površine. Pol ubrzanja i pol brzine su u svakom trenutku ravnanskog kretanja dve različite geometrijske tačke. Ovo znači da pol brzine može imati ubrzanje različito od nule, a pol ubrzanja može imati brzinu različitu od nule.

4.5.7 Primeri

Primer 38 Klizači A i B kreću se po žici koja je u tački O savijena pod pravim uglom (Slika 4.28). Klizači su zgloбно vezani za štapove AC i BC , koji su međusobno zgloбно vezani u tački C . Dužine štapova su $AC = a$ [m] i $BC = b$ [m]. U nekom trenutku vremena, kada štapovi obrazuju sa pravicima žice pravougaonik, tačka B se kreće naviše sa brzinom v_B [m/s] i ubrzanjem a_B [m/s²], a tačka A udesno sa brzinom v_A [m/s] i usporenjem a_A [m/s²]. Smatrajući veličine a , b , v_A , a_A , v_B i a_B zadatim u tom trenutku vremena odrediti:

1. brzinu i ubrzanje zgloba C ,
2. ugaonu brzinu i ugaono ubrzanje štapova.

Pri kretanju klizača A i B po žici štapovi AC i BC kreću se ravanski. Kod ovakvih problema, prvo se nalaze brzine svih tačaka i ugaone brzine svih elemenata, a potom ubrzanja. Tačke A i B se kreću pravolinijski, pa njihove brzine i ubrzanja moraju biti u pravcu žice. Tačka C pripada i jednom i



Slika 4.28:

drugom štapu, pa se prema (4.59), brzina tačke C može računati na dva načina, u odnosu na tačku A i tačku B

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_C &= \mathbf{v}_B + \mathbf{v}_C^B, & v_C^B &= CB\omega_B, \\ \mathbf{v}_C &= \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_C^A, & v_C^A &= CA\omega_A, \end{aligned} \quad (A)$$

pa mora biti

$$\mathbf{v}_B + \mathbf{v}_C^B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_C^A, \quad \mathbf{v}_C^B \perp CB, \quad \mathbf{v}_C^A \perp CA,$$

gde su ω_A i ω_B ugaone brzine ravnanskih kretanja ovih štapova. Smerovi ovih brzina se pretpostave kao što je to na slici pokazano, dok su njihovi intenziteti nepoznati. Za nalaženje ova dva intenziteta usvoji se u tački O koordinatni sistem Oxy . Projektovanjem prethodne vektorske jednačine na ose x i y dobijaju se dve algebarske jednačine

$$v_A - v_C^A = 0, \quad v_B - v_C^B = 0, \quad (B)$$

čijim se rešavanjem i korišćenjem izraza (A) nalaze ugaone brzine štapova

$$\omega_A = \frac{v_A}{a} [s^{-1}], \quad \omega_B = \frac{v_B}{b} [s^{-1}]. \quad (C)$$

Dobijene pozitivne vrednosti za ove ugaone brzine znače da su dobro pretpostavljeni smerovi obrtanja ovih štapova, pa su ti smerovi obrtanja označeni i na slici.

Brzina tačke C može se izračunati ako se projektuje, na primer, prva jednačinu (A) na ose x i y i koristi (B). To dovodi do rezultata

$$v_{Cx} = 0 \text{ [m/s]}, \quad v_{Cy} = v_B - v_C^B = 0 \text{ [m/s]},$$

što znači da je u tom trenutku brzina tačke C jednaka nuli, pa je tačka C istovremeno pol brzine za oba štapa.

Kako tačka C pripada i jednom i drugom štapu, njeno ubrzanje može se računati u odnosu na dve tačke A i B . Pošto se tačka B kreće ubrzano njeno ubrzanje je u istom smeru sa brzinom. Tačka A u tom trenutku ima usporenje, pa je vektor $\mathbf{a}_A$ suprotnog smera od brzine te tačke. Ubrzanje tačke C računa se prema (4.71)

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_C &= \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{CT}^A + \mathbf{a}_{CN}^A, \\ \mathbf{a}_C &= \mathbf{a}_B + \mathbf{a}_{CT}^B + \mathbf{a}_{CN}^B, \end{aligned} \quad (D)$$

pa zbog jedinstvenosti ubrzanja tačke C sledi

$$\mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{CT}^A + \mathbf{a}_{CN}^A = \mathbf{a}_B + \mathbf{a}_{CT}^B + \mathbf{a}_{CN}^B, \quad (E)$$

gde normalne komponente ubrzanja, prema (4.70), glase

$$a_{CN}^A = AC\omega_A^2, \quad a_{CN}^B = BC\omega_B^2. \quad (F)$$

Vektori ovih normalnih ubrzanja su u pravcu štapova i usmereni ka tačkama A i B , dok su tangencijalna ubrzanja tačke C u odnosu na tačke A i B , čiji su intenziteti u jednačini (E) nepoznati, normalna na štapove a u pretpostavljenim smerovima. Svi ovi vektori su ucrtani na slici. Projektovanjem vektorske jednačine (E) na pravce osa x i y dobijaju se dve algebarske jednačine

$$\begin{aligned} a_{CN}^B &= -a_A + a_{CT}^A, \\ a_B - a_{CT}^B &= -a_{CN}^B, \end{aligned}$$

čija rešenja, zbog (F) i (C), glase

$$\begin{aligned} a_{CT}^A &= a_A + \frac{v_B^2}{b} \text{ [m/s}^2\text{]}, \\ a_{CT}^B &= a_B + \frac{v_A^2}{a} \text{ [m/s}^2\text{]}. \end{aligned} \quad (G)$$

Koristeći ove rezultate i izraz (4.69) nalaze se ugaona ubrzanja štapova

$$\begin{aligned} \varepsilon_A &= \frac{a_{CT}^A}{AC} = \frac{1}{a} \left(a_A + \frac{v_B^2}{b} \right) \text{ [s}^{-2}\text{]}, \\ \varepsilon_B &= \frac{a_{CT}^B}{BC} = \frac{1}{b} \left(a_B + \frac{v_B^2}{a} \right) \text{ [s}^{-2}\text{]}. \end{aligned}$$

Pozitivne vrednosti ovih ubrzanja znače, da su smerovi tangencijalnih ubrzanja tačke C u odnosu na tačke A i B dobro pretpostavljeni. Odgovarajući smerovi ugaonih ubrzanja ε_A i ε_B ucrtani su na slici 4.28. Smerovi ugaone brzine ω_B i ugaonog ubrzanja ε_B se poklapaju, pa se štap CB u tom trenutku obrće ubrzano. Za štap CA smerovi od ω_A i ε_A su suprotni, pa se taj štap u tom trenutku obrće usporeno.

Ubrzanje tačke C može se izračunati na više načina. Na primer, projektovanjem druge vektorske jednačine (D) na ose x i y dobija se

$$\begin{aligned} a_{Cx} &= a_{CN}^B = \frac{v_B^2}{b} \text{ [m/s}^2\text{]}, \\ a_{Cy} &= a_B - a_{CT}^B = -\frac{v_A^2}{a} \text{ [m/s}^2\text{]}. \end{aligned}$$

Iz ovih jednačina nalazi se intenzitet ubrzanja tačke C i ugao α između vektora ubrzanja tačke C i pravca štap CB

$$a_C = \sqrt{\frac{v_B^4}{b^2} + \frac{v_A^4}{a^2}} \text{ [m/s}^2\text{]}, \quad \text{tg } \alpha = \frac{bv_A^2}{av_B^2}.$$

Primer 39 Data su tri štapa, čije su dužine

$$OA = r \text{ [m]}, \quad AB = 2r \text{ [m]} \text{ i } BC = 2r \text{ [m]}.$$

Oni su zglobovno vezani međusobno na krajevima A i B i u tačkama O i C za nepokretne oslonce. Svi štapovi kreću se u jednoj ravni. U trenutku kretanja, kada je štap OA vertikalno, a štap CB horizontalno, ugaona brzina i ugaono ubrzanje štap OA iznose

$$\omega_0 \text{ [s}^{-1}\text{]}, \quad \varepsilon_0 = \omega_0^2 \sqrt{3} \text{ [s}^{-2}\text{]},$$

a njihovi smerovi su dati na slici 4.29. Smatrajući r , ω_0 i ε_0 poznatim, odrediti:

1. brzinu i ubrzanje tačke B ,

2. ugaone brzine i ugaona ubrzanja štapova AB i BC.

Sa slike je $\cos \alpha = OA/AB = 1/2$, odnosno ugao α je

$$\alpha = \pi/3 \text{ [rad]}.$$

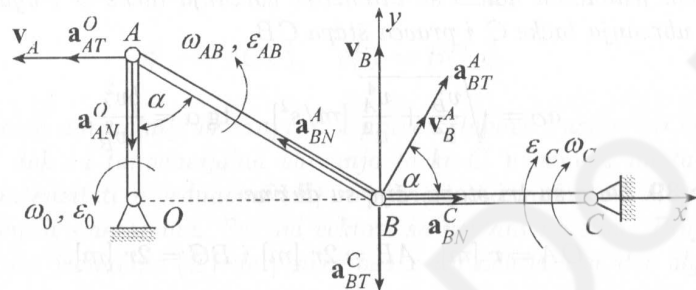
U ovom problemu, štapovi OA i BC se obrću oko tačaka O i C, dok štap AB vrši ravansko kretanje. Kao i kod prethodnog zadatka, prvo se određuju sve brzine i ugaone brzine, a posle toga ubrzanja. Polazi se od onog elementa čije je kretanje poznato, a to je štap OA. Intenzitet brzine tačke A je

$$v_A = OA\omega_0, \quad (A)$$

dok je vektor te brzine normalan na štap OA, a u smeru obrtanja tog štapa. Za brzine krajeva štapa AB, koji vrši ravansko kretanje, važi veza (4.59)

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_B^A. \quad (B)$$

Pošto tačka B pripada i štapu BC, koji se obrće oko tačke C, njena brzina mora biti normalna na taj štap. Pretpostavimo da je ona usmerena naviše. S druge strane, brzina tačke B u odnosu na tačku A mora biti normalna na



Slika 4.29:

štap AB. I njen smer je pretpostavljen na slici. U jednačini (B) su nepoznata samo dva intenziteta brzina v_B i v_B^A . Projektovanjem te vektorske jednačine na ose x i y (Slika 4.29) dobijaju se dve algebarske jednačine

$$\begin{aligned} 0 &= -v_A + v_B^A \cos \frac{\pi}{3}, \\ v_B &= v_B^A \sin \frac{\pi}{3}, \end{aligned} \quad (C)$$

čija su rešenja

$$v_B^A = 2r\omega_0 \text{ [m/s]}, \quad v_B = r\omega_0\sqrt{3} \text{ [m/s]}. \quad (D)$$

Iz poznatih relacija $v_B = BC\omega_C$ i $v_B^A = AB\omega_{AB}$, nalaze se i ugaone brzine

$$\omega_{AB} = \omega_0 \text{ [s}^{-1}\text{]}, \quad \omega_C = \omega_0 \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ [s}^{-1}\text{]}. \quad (E)$$

Pošto su dobijeni intenziteti pretpostavljenih brzina pozitivni, njihovi smerovi su dobro odabrani, pa su na slici ucrtani i smerovi obrtanja ovih štapova.

Pošto se normale na brzine tačaka A i B seku u tački O, tu se nalazi trenutni pol brzine štapa AB.

Pošto je kretanje štapa OA zadato, to je ubrzanje tačke A, zbog kružnog kretanja te tačke, određeno komponentama

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_A &= \mathbf{a}_{AT}^O + \mathbf{a}_{AN}^O, \\ \mathbf{a}_{AT}^O &= r\varepsilon_0 = r\omega_0^2\sqrt{3} \text{ [m/s}^2\text{]}, \quad \mathbf{a}_{AN}^O = r\omega_0^2 \text{ [m/s}^2\text{]}, \end{aligned} \quad (F)$$

koje su prikazane na slici. Tačka B pripada štapu AB, a i štapu BC. Štap BC se obrće oko tačke C, a štap AB vrši ravansko kretanje. Zbog toga se, ubrzanje tačke B može odrediti na dva načina

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_B &= \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{BN}^A + \mathbf{a}_{BT}^A, \\ \mathbf{a}_B &= \mathbf{a}_{BN}^C + \mathbf{a}_{BT}^C, \end{aligned} \quad (G)$$

gde se sva normalna ubrzanja mogu izračunati, jer su sve brzine već određene, odnosno

$$\begin{aligned} a_{BN}^A &= AB\omega_{AB}^2 = 2r\omega_0^2 \text{ [m/s}^2\text{]}, \\ a_{BN}^C &= BC\omega_C^2 = \frac{3}{2}r\omega_0^2 \text{ [m/s}^2\text{]}. \end{aligned} \quad (H)$$

Ova normalna ubrzanja su usmerena od tačke B ka tački A, odnosno od tačke B ka tački C. Tangencijalna ubrzanja su pretpostavljena na slici. Koristeći (F) i (G), dobija se vektorska jednačina

$$\mathbf{a}_{BN}^C + \mathbf{a}_{BT}^C = \mathbf{a}_{AT}^O + \mathbf{a}_{AN}^O + \mathbf{a}_{BN}^A + \mathbf{a}_{BT}^A.$$

Projektovanjem ove jednačine na ose x i y dobijaju se sledeće dve algebarske jednačine

$$\begin{aligned} a_{BN}^C &= -a_{AT}^O - a_{BN}^A \sin \frac{\pi}{3} + a_{BT}^A \cos \frac{\pi}{3}, \\ -a_{BT}^C &= -a_{AN}^O + a_{BN}^A \cos \frac{\pi}{3} + a_{BT}^A \sin \frac{\pi}{3}, \end{aligned}$$

čija rešenja po nepoznatim veličinama, korišćenjem (F) i (H), glase

$$a_{BT}^A = r\omega_0^2 (3 + 4\sqrt{3}) [m/s^2],$$

$$a_{BT}^C = -3r\omega_0^2 \left(2 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) [m/s^2].$$

Iz poznatih relacija $a_{BT}^A = AB\varepsilon_{AB}$ i $a_{BT}^C = BC\varepsilon_C$ nalaze se i ugaona ubrzanja štapova

$$\varepsilon_{AB} = \frac{\omega_0^2}{2} (3 + 4\sqrt{3}) [s^{-2}],$$

$$\varepsilon_C = -\omega_0^2 \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{4}\right) [s^{-2}].$$

Intenzitet ubrzanja tačke B iznosi

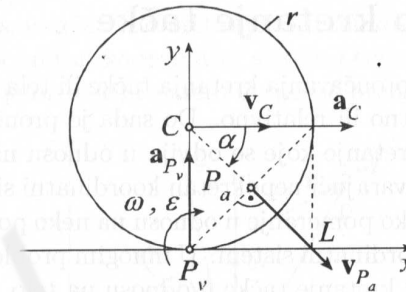
$$a_B = \sqrt{(a_{BN}^C)^2 + (a_{BT}^C)^2} = 3r\omega_0^2 \sqrt{5 + 2\sqrt{3}} [m/s^2].$$

Dobijena pozitivna vrednost za ε_{AB} znači da je dobro pretpostavljen smer tangencijalnog ubrzanja a_{BT}^A , pa je na slici 4.29 ucrtan odgovarajući smer za ε_{AB} . Negativna vrednost za ε_C znači da je a_{BT}^C u suprotnom smeru od pretpostavljenog. Ova činjenica je uzeta u obzir kod ucrtavanja ε_C na slici. Po smerovima ugaonih brzina i ugaonih ubrzanja štapova, zaključuje se da se u datom položaju oni ubrzano obrću.

Primer 40 Kružni disk poluprečnika r [m] kotrlja se bez klizanja po horizontalnoj nepokretnoj ravni (Slika 4.30). Brzina i ubrzanje središta diska C , tokom celog kretanja iznose v_C [m/s] i $a_C = v_C^2/r$ [m/s²]. Odrediti:

1. pol brzine i pol ubrzanja,
2. ubrzanje pola brzine,
3. brzinu pola ubrzanja.

Pošto se disk kotrlja bez klizanja, tačka P_v dodira diska sa površinom je trenutni pol brzine, pa je brzina tačke C , zbog obrtanja oko pola brzine ugaonom brzinom ω , $v_C = r\omega$, odnosno ugaona brzina ravanskog kretanja



Slika 4.30:

diska je $\omega = v_C/r$ [s⁻¹]. Diferenciranjem ovog izraza po vremenu dobija se ugaono ubrzanje ravanskog kretanja diska

$$\varepsilon = \dot{\omega} = \frac{\dot{v}_C}{r} = \frac{a_C}{r} [s^{-2}],$$

odnosno prema uslovima zadatka $\varepsilon = v_C^2/r^2$ [s⁻²]. Pošto je ε pozitivno ono je istog smera sa ugaonom brzinom ω .

Prema postupku nalaženja pola ubrzanja računa se ugao α preko $\tan \alpha = \varepsilon/\omega^2$, i dobija $\tan \alpha = 1$, odnosno $\alpha = \pi/4$ [rad]. Od vektora ubrzanja tačke C u smeru ugaonog ubrzanja ε nanosi se ugao α i dobija pravac CL . Izračunava se rastojanje duž pravca CL do pola ubrzanja CP_a prema

$$CP_a = \frac{a_C}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}} = r \frac{\sqrt{2}}{2} [m],$$

čime je pol ubrzanja ravanskog kretanja diska potpuno određen. Zbog toga što je ugao $\alpha = \pi/4$ [rad] i dužina $CP_a = r\sqrt{2}/2$ [m] pol ubrzanja se nalazi i centru kvadrata stranice r . Sa slike rastojanje pola ubrzanja P_a od pola brzine P_v iznosi $r\sqrt{2}/2$ [m], pa je intenzitet brzine pola ubrzanja

$$v_{P_a} = v_C \frac{\sqrt{2}}{2} [m/s].$$

Vektor ove brzine je nacrtan na slici.

Ubrzanje pola brzine P_v računa se prema relaciji (4.80)

$$a_{P_v} = P_v P_a \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} = \frac{v_C^2}{r} [m/s^2].$$

Ovo ubrzanje kao vektor u tački P_v pada u pravac koji je pod uglom α prema pravcu $P_v P_a$, u suprotnom smeru od smera ugaonog ubrzanja ε , gledano u tački P_v , pa pada u pravac ka tački C (Slika 4.30).

4.6 Složeno kretanje tačke

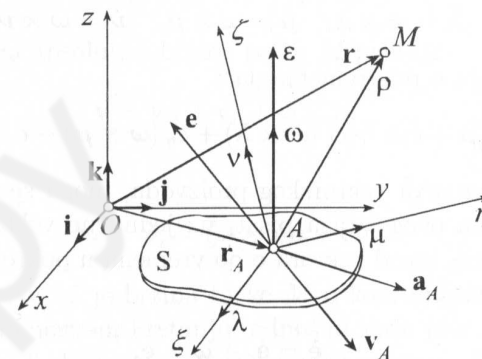
Na samom početku proučavanja kretanja tačke ili tela spominje se mogućnost da ono bude apsolutno ili relativno. Do sada je proučavano samo apsolutno kretanje, odnosno kretanje koje se odvija u odnosu na neko nepokretno telo ili u odnosu na odgovarajući nepokretn koordinatni sistem u prostoru. Relativno kretanje je svako pomeranje u odnosu na neko pokretno telo ili u odnosu na neki pokretn koordinatni sistem. U mnogim problemima javlja se istovremeno kretanje tela i kretanje tačke u odnosu na telo. U takvim problemima kretanje tačke posmatra se istovremeno u odnosu na dva koordinatna sistema. Jedan je nepokretn a drugi pokretn i čvrsto vezan za pokretno telo. Takvo kretanje tačke naziva se složeno kretanje tačke.

Posmatrajmo sledeći primer. Po palubi broda, koji plovi po reci, kreće se čovek, a iznad broda leti helikopter. Kretanje čoveka i helikoptera, ako se posmatra sa broda, sastoji se od dva kretanja, od kretanja broda i od kretanja čoveka i helikoptera u odnosu na brod. Kretanje čoveka i helikoptera u odnosu na zemlju, ako se ona smatra nepokretnom, je apsolutno kretanje. Putanje čoveka i helikoptera u odnosu na zemlju su apsolutne putanje i njih vidi čovek koji stoji nepokretn na zemlji. Kretanje čoveka i helikoptera u odnosu na brod je relativno kretanje. Putanje čoveka i helikoptera u odnosu na brod su relativne putanje i njih vidi čovek koji stoji nepokretn na brodu. U opisanom problemu, postoji i kretanje samog broda. Apsolutno kretanje broda u odnosu na zemlju naziva se prenosno kretanje. Drugim rečima, kretanje čoveka i helikoptera u odnosu na zemlju može da se rastavi na dva kretanja:

1. kretanje broda, odnosno prenosno kretanje,
2. kretanje u odnosu na brod, odnosno relativno kretanje.

Neka je $Oxyz$ (Slika 4.31) nepokretn koordinatni sistem, sa jediničnim vektorima koordinatnih osa $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ i $\mathbf{k}$. Po ravni Oxy ravanski se kreće ploča S . Neka je tačka A pol ravanskog kretanja. Ravansko kretanje ploče S je poznato, odnosno znaju se brzina $\mathbf{v}_A$ i ubrzanje $\mathbf{a}_A$ pola A i ugaona brzina ω i ugaono ubrzanje ϵ ravanskog kretanja. Vektori $\mathbf{v}_A$ i $\mathbf{a}_A$ nalaze se u ravni kretanja, dok su vektori ω i ϵ normalni na ravan kretanja. Za ploču S čvrsto se veže pravougli koordinatni sistem $A\xi\eta\zeta$, sa jediničnim vektorima koordinatnih osa λ , μ i ν , gde je koordinatni početak u polu ravanskog kretanja ploče A . Posmatrajmo kretanje tačke M u odnosu na nepokretn koordinatni sistem $Oxyz$ (Slika 4.31) i u odnosu na pokretn koordinatni sistem $A\xi\eta\zeta$. Kretanje tačke M u odnosu na nepokretn koordinatni sistem $Oxyz$ je apsolutno kretanje. Kretanje tačke M u odnosu na ploču, ili u odnosu na pokretn

koordinatni sistem $A\xi\eta\zeta$ je relativno kretanje. Kretanje koordinatnog sistema $A\xi\eta\zeta$ u odnosu na nepokretn koordinatni sistem $Oxyz$, ili kretanje ploče u odnosu na nepokretn koordinatni sistem $Oxyz$, je prenosno kretanje.



Slika 4.31:

Ovde su usvojeni Dekartovi koordinatni sistemi za nepokretn i pokretn koordinatni sistem, ali prenosno kretanje koordinatnog početka A pokretnog koordinatnog sistema i relativno kretanje tačke može se posmatrati i u bilo kom drugom koordinatnom sistemu.

Sem poznatog prenosnog kretanja, pošto je to ravansko kretanje ploče S , znaju se i elementi relativnog i kretanja tačke M u odnosu na ploču. Pri proučavanju složenog kretanja tačke, znajući sve ove karakteristike prenosnog kretanja i način relativnog kretanja tačke, određuju se apsolutna brzina i apsolutno ubrzanje tačke M .

Pri analizi složenog kretanja tačke M koriste se sledeće definicije:

1. brzina i ubrzanje tačke M samo usled njenog relativnog kretanja u odnosu na koordinatni sistem $A\xi\eta\zeta$, znači pri zaustavljanju prenosnog kretanja, nazivaju se relativna brzina i relativno ubrzanje tačke M .
2. brzina i ubrzanje tačke M u odnosu na nepokretn koordinatni sistem $Oxyz$ samo usled prenosnog kretanja, znači pri zaustavljanju relativnog kretanja, nazivaju se prenosna brzina i prenosno ubrzanje tačke M .

Neka je $\mathbf{e}$ neki vektor u pokretnom koordinatnom sistemu $A\xi\eta\zeta$, čije su projekcije na ose tog koordinatnog sistema funkcije vremena, odnosno

$$\mathbf{e} = e_\xi(t)\lambda + e_\eta(t)\mu + e_\zeta(t)\nu. \quad (4.81)$$

Imajući u vidu da ovaj koordinatni sistem vrši ravansko kretanje, njegovi jedinični vektori su promenljivi zbog obrtnog dela ravanskog kretanja, pa su njihovi izvodi po vremenu brzine tačaka na krajevima tih vektora (4.51)

$$\dot{\lambda} = \omega \times \lambda, \quad \dot{\mu} = \omega \times \mu, \quad \dot{\nu} = \omega \times \nu.$$

Zato, izvod vektora $\mathbf{e}$ po vremenu glasi

$$\dot{\mathbf{e}} = \dot{e}_\xi \lambda + \dot{e}_\eta \mu + \dot{e}_\zeta \nu + e_\xi (\omega \times \lambda) + e_\eta (\omega \times \mu) + e_\zeta (\omega \times \nu).$$

Zbog poznatog svojstva vektorskog proizvoda, mogu se skalari e_ξ , e_η i e_ζ u poslednja tri člana ovog izraza pisati uz jedinične vektore, pa oni postaju $\omega \times \mathbf{e}$. Prema tome, izvod vektora $\mathbf{e}$ po vremenu u pokretnom koordinatnom sistemu $A\xi\eta\zeta$ glasi

$$\dot{\mathbf{e}} = \dot{\mathbf{e}}_r + \omega \times \mathbf{e}, \quad (4.82)$$

gde je

$$\dot{\mathbf{e}}_r = \dot{e}_\xi \lambda + \dot{e}_\eta \mu + \dot{e}_\zeta \nu, \quad (4.83)$$

izvod vektora $\mathbf{e}$ po vremenu u "pokretnom" koordinatnom sistemu $A\xi\eta\zeta$, kada se ose ovog sistema ne bi obrtale. Deo $\dot{\mathbf{e}}_r$ u izrazu (4.82) zove se relativni izvod vektora $\mathbf{e}$ po vremenu.

4.6.1 Apsolutna brzina tačke

Neka je položaj tačke M u pokretnom koordinatnom sistemu $A\xi\eta\zeta$ određen vektorom položaja

$$\rho = \xi(t)\lambda + \eta(t)\mu + \zeta(t)\nu, \quad (4.84)$$

gde su $\xi(t)$, $\eta(t)$ i $\zeta(t)$ projekcije tog vektora na koordinatne ose i istovremeno poznati zakoni relativnog kretanja tačke.

Vektor položaja $\mathbf{r}$ određuje položaj tačke M u odnosu na koordinatni početak nepokretnog koordinatnog sistema $Oxyz$. Ako je $\mathbf{r}_A$ vektor položaja tačke A u odnosu na koordinatni početak nepokretnog koordinatnog sistema $Oxyz$, onda je prema slici 4.31

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_A + \rho. \quad (4.85)$$

Izvod po vremenu ovog izraza daje apsolutnu brzinu tačke M

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_A + \dot{\rho},$$

gde je $\mathbf{v}_A$ apsolutna brzina tačke A . Izvod vektora ρ po vremenu izračunava se prema (4.82) i (4.83)

$$\dot{\rho} = \dot{\rho}_r + \omega \times \rho, \quad (4.86)$$

pa prethodni izraz za apsolutnu brzinu tačke M postaje

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_r + \omega \times \rho, \quad (4.87)$$

gde je

$$\mathbf{v}_r = \dot{\rho}_r = \dot{\xi}\lambda + \dot{\eta}\mu + \dot{\zeta}\nu. \quad (4.88)$$

Relativna brzina tačke M je brzina tačke M u koordinatnom sistemu $A\xi\eta\zeta$ pri zaustavljenom prenosnom kretanju, odnosno kada je $\mathbf{v}_A = 0$ i $\omega = 0$, pa se iz izraza (4.86) vidi da je to upravo komponenta $\mathbf{v}_r$. Pošto je prenosna brzina tačke M njena brzina pri zaustavljenom relativnom kretanju, odnosno kada je $\mathbf{v}_r = 0$, iz izraza (4.87) sledi prenosna brzina tačke M

$$\mathbf{v}_p = \mathbf{v}_A + \omega \times \rho. \quad (4.89)$$

Prva komponenta $\mathbf{v}_A$ prenosne brzine tačke M je brzina usled kretanja pola ravanskog prenosnog kretanja ploče. Komponenta $\omega \times \rho$ prenosne brzine tačke M je posledica obrtanja pri ravanskom kretanju oko ose normalne na ravan kretanja. Konačno, izraz (4.87) postaje

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_p + \mathbf{v}_r, \quad (4.90)$$

i znači da je apsolutna brzina tačke M vektorski zbir prenosne $\mathbf{v}_p$ i relativne $\mathbf{v}_r$ brzine tačke.

Relativna brzina je oblika (4.88) samo u slučaju da se relativno kretanje tačke M posmatra u Dekartovom koordinatnom sistemu $A\xi\eta\zeta$. U slučaju da se za posmatranje relativnog kretanja upotrebe polarni ili prirodni koordinatni sistem relativna brzina ima komponente koje odgovaraju tim koordinatnim sistemima.

4.6.2 Apsolutno ubrzanje tačke

Izvod po vremenu apsolutne brzine tačke M , koja je data izrazom (4.87), daje vektor apsolutnog ubrzanja tačke M

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_A + \dot{\mathbf{v}}_r + \dot{\omega} \times \rho + \omega \times \dot{\rho}, \quad (4.91)$$

gde je $\mathbf{a}_A$ apsolutno ubrzanje tačke A . Izvod ugaone brzine ω ravanskog kretanja koordinatnog sistema $A\xi\eta\varsigma$ oko tačke A je ugaono ubrzanje ε tog kretanja

$$\varepsilon = \dot{\omega}.$$

Izvod vektora ρ po vremenu je dat sa (4.86). Izvod vektora $\mathbf{v}_r$ po vremenu, u pokretnom koordinatnom sistemu, dobija se koristeći (4.82) i (4.83)

$$\dot{\mathbf{v}}_r = (\mathbf{v}_r)_r + \omega \times \mathbf{v}_r,$$

gde je

$$(\mathbf{v}_r)_r = \ddot{\xi}\lambda + \ddot{\eta}\mu + \ddot{\varsigma}\nu. \quad (4.92)$$

Zamenom ovih relacija u (4.91) dobija se

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_A + (\mathbf{v}_r)_r + \varepsilon \times \rho + 2(\omega \times \mathbf{v}_r) + \omega \times (\omega \times \rho). \quad (4.93)$$

Po definiciji, relativno ubrzanje tačke M je njeno ubrzanje pri zaustavljenom prenosnom kretanju koordinatnog sistema $A\xi\eta\varsigma$, pa se za $\mathbf{a}_A$, ω i ε jednako nuli, iz (4.93) dobija

$$\mathbf{a}_r = (\mathbf{v}_r)_r = \ddot{\xi}\lambda + \ddot{\eta}\mu + \ddot{\varsigma}\nu. \quad (4.94)$$

Ako se zaustavi relativno kretanje, a to znači da su relativna brzina $\mathbf{v}_r$ i relativno ubrzanje $\mathbf{a}_r$ jednaki nuli, iz (4.94) dobija se prenosno ubrzanje

$$\mathbf{a}_p = \mathbf{a}_A + \varepsilon \times \rho + \omega \times (\omega \times \rho). \quad (4.95)$$

Prema (4.48) i (4.55), ovde je $\mathbf{a}_A$ ubrzanje usled kretanja pola ravanskog prenosnog kretanja, $\varepsilon \times \rho$ i $\omega \times (\omega \times \rho)$ su obrtna i normalna komponenta ubrzanja usled obrtnog dela prenosnog kretanja koordinatnog sistema $A\xi\eta\varsigma$.

Poređenjem relativnog (4.94) i prenosnog ubrzanja (4.95) sa apsolutnim ubrzanjem tačke M (4.93), vidi se da u apsolutnom ubrzanju postoji i deo koji ne pripada ovim ubrzanjima. To je član

$$\mathbf{a}_c = 2(\omega \times \mathbf{v}_r), \quad (4.96)$$

i naziva se Koriolisovo⁷ ubrzanje tačke.

⁷G. G. Coriolis, 1792 – 1843.

Na osnovu (4.93)-(4.96) sledi da je apsolutno ubrzanje tačke M određeno relacijom

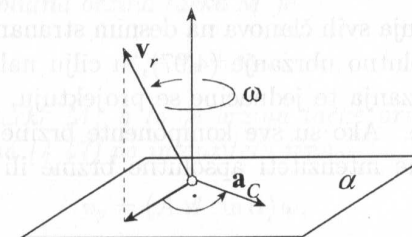
$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_p + \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_c. \quad (4.97)$$

Prema tome, apsolutno ubrzanje tačke M jednako je vektorskom zbiru prenosnog $\mathbf{a}_p$, relativnog $\mathbf{a}_r$ i Koriolisovog ubrzanja $\mathbf{a}_c$ tačke M . Iz ovog izraza jasno se vidi da, za razliku od brzina, veličine koje su definisane kao relativno i prenosno ubrzanje, ne daju u svom zbiru apsolutno ubrzanje tačke. Do ovoga dolazi zbog toga što, po definiciji, relativno ubrzanje predstavlja promenu relativne brzine samo usled relativnog kretanja i prenosno ubrzanje promenu prenosne brzine samo usled prenosnog kretanja. Koriolisovo ubrzanje je rezultat uticaja relativnog kretanja na promenu prenosne brzine i uticaja prenosnog kretanja na promenu relativne brzine, odnosno interakcije ovih kretanja.

Intenzitet Koriolisovog ubrzanja iznosi

$$a_c = 2\omega v_r \sin \angle(\omega, \mathbf{v}_r), \quad (4.98)$$

dok mu je pravac normalan na ravan vektora ω i $\mathbf{v}_r$, a smer u skladu sa pravilom vektorskog proizvoda. Vektor Koriolisovog ubrzanja često se nalazi i primenom pravila Žukovskog⁸. Pravilo Žukovskog kaže da se na vektor ω postavi normalna ravan α (Slika 4.32); na tu ravan se projektuje vektor $\mathbf{v}_r$; ova projekcija se zaokrene za $\pi/2$ u smeru obrtanja ugaone brzine ω . Tako dobijen vektor je u pravcu i smeru Koriolisovog ubrzanja.



Slika 4.32:

Koriolisovo ubrzanje je jednako nuli stalno tokom kretanja ako je:

⁸N. E. Žukovski, 1847-1921.

1. prenosno kretanje translatorno, odnosno ono je bez obrtanja $\omega = 0$;
2. putanja relativnog kretanja pravolinijska i paralelna sa vektorom ugaone brzine ω ravanskog kretanja.

Korolisovo ubrzanje je jednako nuli u nekom trenutku vremena ako je u tom trenutku ispunjen jedan od sledećih uslova:

1. ugaona brzina prenosnog kretanja tela je nula, $\omega = 0$;
2. vektor ω je paralelan sa vektorom $\mathbf{v}_r$;
3. relativna brzina kretanja tačke M je nula, $\mathbf{v}_r = 0$.

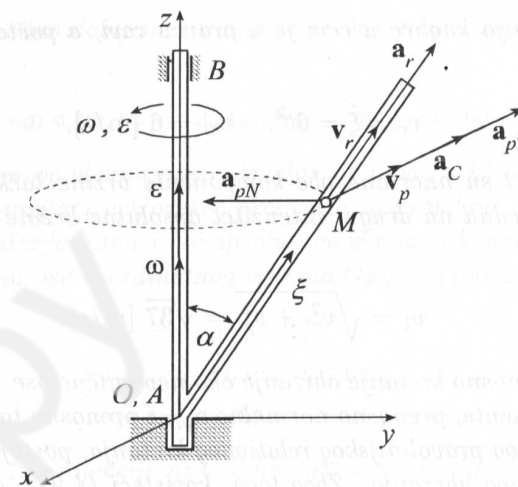
U primeni izraza (4.97) za izračunavanje apsolutnog ubrzanja tačke M treba se imati u vidu, da pored prenosnog ubrzanja koje može imati tri ranije spomenute komponente i relativno ubrzanje može imati više komponenti. U zavisnosti od koordinatnog sistema koji se koristi za proučavanje relativnog kretanja taj broj komponenti relativnog ubrzanja iznosi:

1. u Dekartovom koordinatnom sistemu, tri komponente prema (4.94);
2. u polarnom koordinatnom sistemu, dve komponente, i to, relativno radijalno ubrzanje $\mathbf{a}_{rr}$ i relativno cirkularno ubrzanje $\mathbf{a}_{rc}$;
3. u prirodnom koordinatnom sistemu, dve komponente, relativno normalno ubrzanje $\mathbf{a}_{rN}$ i relativno tangencijalno ubrzanje $\mathbf{a}_{rT}$.

Posle izračunavanja svih članova na desnim stranama izraza za apsolutnu brzinu (4.90) i apsolutno ubrzanje (4.97), u cilju nalaženja intenziteta apsolutne brzine i ubrzanja te jednačine se projektuju, prema potrebi na dve ili tri Dekartove ose. Ako su sve komponente brzine ili ubrzanja tačke M međusobno normalne intenziteti apsolutne brzine ili ubrzanja se direktno izračunavaju.

4.6.3 Primeri

Primer 41 U cevi, koja je pod uglom $\alpha = \pi/6$ [rad] prema vertikali, kreće se kuglica M po zakonu $AM = 2t^3$ [m] (Slika 4.33). Cev se obrće oko vertikalne ose z po zakonu $\phi = t^2/2$ [rad]. U trenutku $t_1 = 1$ [s] odrediti apsolutnu brzinu i ubrzanje kuglice M .



Slika 4.33:

U ovom problemu prenosno kretanje je obrtanje cevi oko vertikalne nepomične ose z . Relativno kretanje tačke M je pravolinijsko kretanje kuglice u cevi i zato je za posmatranje relativnog kretanja dovoljna samo jedna pokretna osa ξ u pravcu cevi. Usvoji se nepokretn koordinatni sistem $Oxyz$. Neka se u posmatranom trenutku vremena t_1 cev nalazi u ravni Oyz . Ugaona brzina i ugaono ubrzanje prenosnog kretanja iznose

$$\omega = \dot{\phi} = t, \quad \varepsilon = \ddot{\phi} = 1. \quad (A)$$

Prema (4.90), apsolutna brzina tačke M je

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_p + \mathbf{v}_r.$$

Prenosna brzina tačke M , a to je brzina tačke pri zaustavljenom relativnom kretanju, prema (4.47) po intenzitetu iznosi

$$v_p = (AM \sin \alpha) \omega,$$

jer je prenosno kretanje obrtanje cevi oko vertikalne nepokretne ose. Pošto je $\omega = \dot{\phi} = t$, ova brzina u trenutku t_1 ima vrednost

$$v_{p1} = 1 \text{ [m/s]},$$

i pada u pravac tangente na kružnu putanju zamišljenog obrtanja tačke M oko ose z , odnosno u negativan smer x ose. Relativna brzina pravolinijskog

relativnog kretanja kuglice u cevi je u pravcu cevi, a pošto je $\xi = AM$, ona iznosi

$$v_r = \dot{\xi} = 6t^2, \quad v_{r1} = 6 \text{ [m/s]}.$$

Na slici 4.33 su nacrtane obe komponente brzine tačke M , pa pošto su one normalne jedna na drugu, intenzitet apsolutne brzine kuglice u trenutku t_1 ima vrednost

$$v_1 = \sqrt{v_{r1}^2 + v_{p1}^2} = \sqrt{37} \text{ [m/s]}.$$

Pošto je prenosno kretanje obrtanje oko nepomične ose, prenosno ubrzanje ima dve komponente, prenosno normalno $\mathbf{a}_{pN}$ i prenosno tangencijalno ubrzanje $\mathbf{a}_{pT}$, dok, zbog pravolinijskog relativnog kretanja, postoji samo jedna komponenta relativnog ubrzanja. Zbog toga, koristeći (4.97), apsolutno ubrzanje kuglice M određuje se prema vektorskoj jednačini

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_{pT} + \mathbf{a}_{pN} + \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_c. \quad (B)$$

Pri izračunavanju relativnog ubrzanja prenosno kretanje se "zaustavlja". Prema tome relativno ubrzanje je

$$a_r = \ddot{\xi} = 12t,$$

a u trenutku t_1 iznosi

$$a_{r1} = 12 \text{ [m/s}^2\text{]}.$$

Vektor relativnog ubrzanja je u pravcu cevi, a pošto je a_{r1} pozitivno on je u istom smeru sa relativnom brzinom.

Pri izračunavanju prenosnog ubrzanja "zaustavlja" se relativno kretanje. Zbog načina prenosnog kretanja, obrtanja oko nepokretne ose, prenosno ubrzanje ima normalnu i tangencijalnu komponentu

$$a_{pN} = (AM \sin \alpha) \omega^2, \quad a_{pT} = (AM \sin \alpha) \varepsilon,$$

koje zbog (A) u trenutku t_1 imaju vrednosti

$$a_{pN1} = 1 \text{ [m/s}^2\text{]}, \quad a_{pT1} = 1 \text{ [m/s}^2\text{]}.$$

Vektor prenosnog normalnog ubrzanja je usmeren normalano na osu prenosnog obrtanja z , dok je vektor prenosnog tangencijalnog ubrzanja, pošto je njegov intenzitet pozitivan, u pravcu i smeru prenosne brzine.

Koristeći prethodno dobijene rezultate i (4.98), nalazi se Koriolisovo ubrzanje

$$a_c = 2\omega v_r \sin \alpha \quad (\omega, \mathbf{v}_r) = 2\omega v_r \sin \alpha, \quad a_{c1} = 6 \text{ [m/s}^2\text{]}.$$

Vektor Koriolisovog ubrzanja je normalan na ravan vektora ω i $\mathbf{v}_r$. Njegov smer je određen pravilom vektorskog proizvoda ili pravilom Žukovskog (Slika 4.33). U cilju nalaženja intenziteta apsolutnog ubrzanja kuglice M , projektuje se jednačina (B) na ose koordinatnog sistema $Oxyz$. Time se dobija

$$\begin{aligned} a_x &= -a_{pT} - a_c, \\ a_y &= -a_{pN} + a_r \sin \alpha, \\ a_z &= a_r \cos \alpha. \end{aligned}$$

Za trenutak t_1 te projekcije apsolutnog ubrzanja kuglice M imaju sledeće vrednosti

$$a_{x1} = -7 \text{ [m/s}^2\text{]}, \quad a_{y1} = 5 \text{ [m/s}^2\text{]}, \quad a_{z1} = 6\sqrt{3} \text{ [m/s}^2\text{]}.$$

Pošto su ove projekcije uvek u pravcu osa koje su normalne jedna na drugu, intenzitet apsolutnog ubrzanja kuglice ima vrednost

$$a_1 = \sqrt{a_{x1}^2 + a_{y1}^2 + a_{z1}^2} = \sqrt{182} \text{ [m/s}^2\text{]}.$$

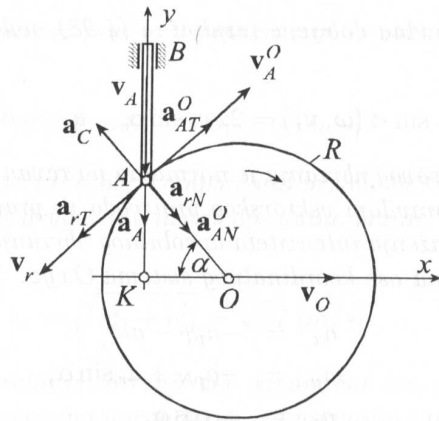
Primer 42 Kružna ploča poluprečnika R kreće se pravolinijski po zakonu $x = R\sqrt{2}t^2/2$ [m] (Slika 4.34), gde je Kxy pravougli koordinatni sistem čiji se centar K nalazi u početnom položaju centra ploče, odnosno tačke O , i istovremeno obrće u pokazanom smeru po zakonu $\varphi = t^2/2$ [rad]. Kraj štapa A se kliza po ivici ploče a vođice ga primoravaju da se kreće u vertikalnom pravcu. U trenutku $t_1 = 1$ [s] odrediti brzinu i ubrzanje štapa AB .

U ovom zadatku posmatra se kretanje dva tela. Štap se kreće translatorsno pa se njegovo kretanje posmatra sa kretanjem samo tačke A . Ploča se ravanski kreće u vertikalnoj ravni i vrši prenosno kretanje. Kretanje tačke A štapa u odnosu na ivicu ploče je relativno kretanje, a njena relativna putanja je krug. Apsolutno kretanje tačke A je njeno kretanje u odnosu na nepokretne vođice, a to je pravolinijsko kretanje u vertikalnom pravcu.

U trenutku $t_1 = 1$ [s] položaj tačke A u odnosu na ploču je određen rastojanjem $x_1 = R\sqrt{2}/2$ [m] i uglom $\alpha_1 = \pi/4$ [rad] u odnosu na horizontalan pravac (Slika 4.34) jer je $\cos \alpha_1 = x_1/R = \sqrt{2}/2$.

Apsolutna brzina tačke A je prema (4.90)

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_O + \mathbf{v}_A^O + \mathbf{v}_r, \quad (A)$$



Slika 4.34:

jer je prenosna brzina tačke A štapa brzina tačke ploče koja je u kontaktu sa štapom usled ravanskog kretanja ploče, a ona iznosi

$$\mathbf{v}_p = \mathbf{v}_O + \mathbf{v}_A^O, \quad (B)$$

gde je

$$v_O = \dot{x} = R\sqrt{2}t, \quad v_{O1} = R\sqrt{2} \text{ [m/s]} \quad (C)$$

brzina pravolinijskog kretanja ploče koja pada u pravac ose x i u njenom pozitivnom smeru, a

$$v_A^O = R\omega, \quad \omega = \dot{\varphi} = t, \quad (D)$$

je brzina tačke A u odnosu na tačku O i ima vrednost $v_{A1}^O = R \text{ [m/s]}$ u trenutku t_1 . Vektor $\mathbf{v}_{A1}^O$ je normalan na pravac OA, odnosno pada u pravac tangente na kružnu ploču, i ima smer obrtanja ploče. Relativna brzina tačke A je brzina klizanja te tačke po ploči i pada u pravac tangente na nju. Apsolutna brzina tačke je u vertikalnom pravcu. Ova dva vektora su nacrtana na slici u pretpostavljenim smerovima. Projektovanjem jednačine (A) na ose koordinatnog sistema Kxz dobijaju se algebarske jednačine

$$\begin{aligned} 0 &= v_O + v_A^O \sin \alpha - v_r \sin \alpha, \\ -v_A &= v_A^O \cos \alpha - v_r \cos \alpha, \end{aligned}$$

čija rešenja po v_r i v_A u trenutku t_1 iznose

$$v_{r1} = 3R \text{ [m/s]}, \quad v_{A1} = R\sqrt{2} \text{ [m/s]}.$$

Apsolutno ubrzanje tačke A (4.97) ima oblik

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_O + \mathbf{a}_{AN}^O + \mathbf{a}_{AT}^O + \mathbf{a}_{rN} + \mathbf{a}_{rT} + \mathbf{a}_C, \quad (E)$$

gde je ubrzanje tačke O

$$a_O = \ddot{x} = R\sqrt{2}, \quad a_{O1} = R\sqrt{2} \text{ [m/s}^2\text{]},$$

normalna komponenta ubrzanja tačke A u odnosu na tačku O

$$a_{AN}^O = R\omega^2 = Rt^2, \quad a_{AN1}^O = R \text{ [m/s}^2\text{]},$$

tangencijalna komponenta ubrzanja tačke A u odnosu na tačku O

$$a_{AT}^O = R\varepsilon, \quad \varepsilon = \ddot{\varphi} = 1 \text{ [s}^{-2}\text{]}, \quad a_{AT1}^O = R \text{ [m/s}^2\text{]},$$

normalna komponenta relativnog ubrzanja tačke A u trenutku t_1

$$a_{rN1} = \frac{v_{r1}^2}{R} = 9R \text{ [m/s}^2\text{]}.$$

Korolisovo ubrzanje ima intenzitet u trenutku t_1

$$a_{C1} = 2\omega_1 v_{r1} \sin \frac{\pi}{2} = 6R \text{ [m/s}^2\text{]},$$

jer je između vektora $\boldsymbol{\omega}$, koji ima pravac normalan na ravan diska i u smeru u skladu sa obrtanjem, i $\mathbf{v}_r$ ugao $\pi/2 \text{ [rad]}$. Po pravilu Žukovskog, određen je pravac i smer Korolisovog ubrzanja i prikazan na slici. U jednačini (E) za vektore $\mathbf{a}_A$ i $\mathbf{a}_{rT}$ znamo da su, prvi u pravcu štapa, a drugi u pravcu tangente na ploču, a smerovi su pretpostavljeni i nacrtani na slici. U cilju nalaženja algebarskih vrednosti ubrzanja a_A i a_{rT} projektuje se jednačina (E) na ose koordinatnog sistema Kxy

$$\begin{aligned} 0 &= a_O + a_{AN}^O \cos \alpha + a_{AT}^O \sin \alpha + a_{rN} \cos \alpha - a_{rT} \sin \alpha \\ &\quad - a_C \cos \alpha, \\ -a_A &= -a_{AN}^O \sin \alpha + a_{AT}^O \cos \alpha - a_{rN} \sin \alpha - \\ &\quad a_{rT} \cos \alpha + a_C \sin \alpha. \end{aligned}$$

Rešenje ovih jednačina u trenutku t_1 iznosi

$$a_{rT1} = 7R \text{ [m/s}^2\text{]}, \quad a_{A1} = 5R\sqrt{2} \text{ [m/s}^2\text{]}.$$

Pošto su brzina i ubrzanje tačke A istog smera štap se u trenutku t_1 kreće ubrzano. I relativno kretanje štapa u odnosu na ploču je ubrzano jer su smerovi vektora v_{r1} i a_{rT1} isti.