

5. Predavanje

October 25, 2016

1 Električne struje

Za razliku od struja koje su vidljive: morske struje, rečne struje, strujanje vazduha itd., električne struje nisu direktno vidljive, već se celokupno znanje o njima zasniva na proučavanju efekata koje one izazivaju. U nalaženju zakona koji odgovaraju pojavama vezanim za protok električne struje učestvovao je relativno mali broj naučnika koji su osmišljavali, realizovali i objavljivali rezultate svojih eksperimenata. Pomenućemo neke: Alessandro Volta (1745-1827), André-Marie Amperé (1775-1836), Georg Simon Ohm (1789-1854) i Michael Faraday (1791-1867). Danas je celokupno znanje o pojavama vezanim za električnu struju objedinjeno. Savremeno shvatanje pojava vezanim za električne struje podrazumeva elementarna znanja iz oblasti strukture materije. Sa ovog stanovišta sve pojmove i pojave vezane za električne struje možemo lakše usvojiti i razumeti.

1.1 Pojam električne struje

Električna struja predstavlja usmereno kretanje naelektrisanih čestica. Ove naelektrisane čestice mogu biti slobodni elektroni u metalima, slobodni elektroni u vakuumu (termo ili foto elektroni) joni u elektrolitima (npr. rastvor kuhinjske soli u vodi) itd. Da bi u nekom medijumu nastala električna struja neophodno je da se uspostavi električno polje. Pod dejstvom električnog polja, pozitivno naelektrisane čestice počinju da se kreću u smeru polja, a negativne u suprotnom. Za tehnički smer struje smatra se usmereno kretanje pozitivnih čestica. U tom smislu smer mehaničkog kretanja pozitivnih čestica ima isti smer kao i električna struja. Međutim u metalima su elektroni nosioci slobodnih naelektrisanja, pa je smer struje suprotan od njihovog stvarnog kretanja. Važi princip da je električna struja negativno naelektrisanih čestica ekvivalentna električnoj struji pozitivno naelektrisanih čestica ali u suprotnom smeru. Kada se definiše pojam jačine struje misli se na kretanje pozitivno naelektrisanih čestica. Jačina struje je količina naelektrisanja koja protokne kroz poprečni presek provodnika u jedinici vremena:

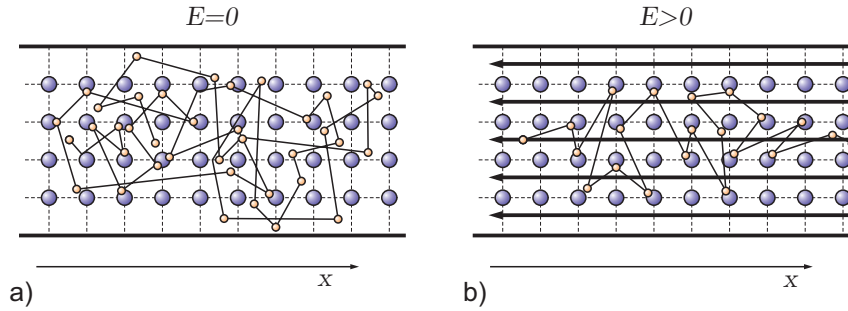
$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t} \quad (1)$$

Jedinica jačine električne struje je amper [A]. U opštem slučaju električna struja se može menjati u vremenu pa se zbog toga definiše trenutna jačina električne struje ($\Delta t \rightarrow 0$):

$$I = \frac{dq}{dt} \quad (2)$$

Veliki broj elektrona u metalima nije vezano za atome kristalne rešetke već se slobodno kreće unutar zapremine metala. Kretanje ovih elektrona je haotično, pa se skup slobodnih elektrona u metalu može smatrati idealnim gasom koji zauzima zapreminu metala i nalazi se na odgovarajućoj temperaturi. Dakle slobodni elektroni su u neprestanom haotičnom kretanju pri čemu doživljavaju međusobne sudare i sudare sa kristalnom rešetkom. U odsustvu električnog polja svi pravci kretanja su ravnopravni (Slika 1.a). Ukoliko se unutar metala uspostavi električno polje, na haotičnu komponentu kretanja superponira se usmerena komponenta, odnosno elektroni dobijaju preferentni pravac i smer kretanja. Dakle u prisustvu električnog polja kretanja elektrona je i dalje haotično, ali sa malom komponentom usmerenog kretanja (Slika 1.b). Prema Slici 1.b, elektron napreduje u smeru x -ose. U dovoljno dugom vremenskom intervalu Δt (vreme mnogo veće od srednjeg vremena između dva uzastopna sudara elektrona sa kristalnom rešetkom) može se definisati pređeni put elektrona duž x -ose. Ovako određena

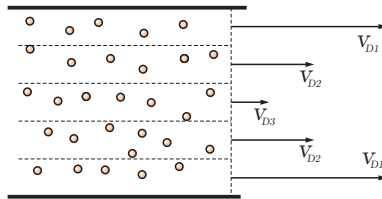
brzina je tzv. brzina drifta v_D . Brzina drifta je mnogo manja od termalne brzine elektrona u kristalnoj rešeci.



Slika 1 Kretanje elektrona u kristalnoj rešeci metala a) bez električnog polja b) sa električnim poljem.

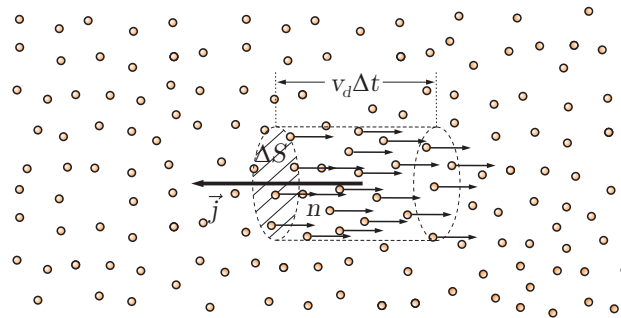
1.2 Gustina struje

Jačina struje nosi informaciju o ukupnoj količini naelektrisanja koja protokne kroz ceo poprečni presek provodnika. Međutim u opštem slučaju može se zamisliti da brzina drifta naelektrisanih čestica nije ista na celom poprečnom preseku (Slika 2). Jedna grupa elektrona kreće se brzinom v_{D1} , druga brzinom v_{D2} itd. Ova konstatacija ne menja definiciju jačine struje, ali nameće potrebu da se pri razmatranju kretanja naelektrisanih čestica uvede veličina koja bliže određuje tok naelektrisanja. Ova veličina naziva se gustina struje.



Slika 2 Usmereno kretanje naelektrisanih čestica različitim brzinama drifta.

U cilju definisanja gustine struje razmotrićemo jedan mali zamišljeni cilindar unutar provodnika u kome se nalazi n slobodnih elektrona u jedinici zapremine (Slika 3).



Slika 3 Uz definiciju gustine struje.

Neka se svi elektroni kreću brzinom drifta v_D u pravcu normalnom na bazu cilindra čija je površina ΔS . Pređeni put elektrona u toku vremenskog intervala Δt određuje visinu cilindra. S obzirom da svaki nosilac naelektrisanja je naelektrisan elementarnim naelektrisanjem, kroz bazu cilindra u vremenskom intervalu Δt prođe

$$\Delta q = env_d \Delta t \Delta S \quad (3)$$

Sledi da je jačina struje kroz bazu malog cilindra:

$$\Delta I = \frac{\Delta q}{\Delta t} = env_d \Delta S \quad (4)$$

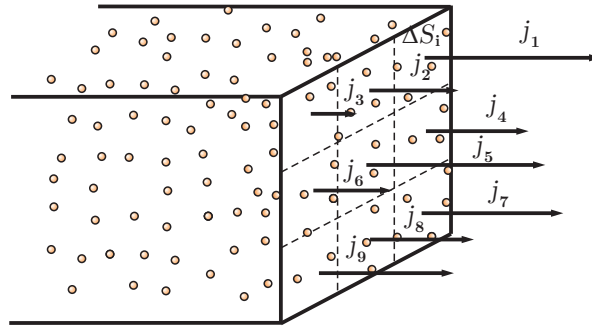
Proizvod env_d naziva se gustina struje. Gustina struje je vektorska veličina sa smerom brzine drifta kod pozitivnih nosilaca naelektrisanja:

$$\vec{j} = ne\vec{v}_d \quad (5)$$

Vidimo da je gustina struje mikroskopska veličina koja karakteriše protok naelektrisanih čestica u vrlo malom elementu zapremine. Ukupna jačina struje kroz poprečni presek provodnika nalazi se sumiranjem svih proizvoda odgovarajućih gustina struje i elementarnih površina dok se ne obuhvati cela površina poprečnog preseka:

$$I = \sum_{i=1}^n j_i \Delta S_i \quad (6)$$

Na Slici 4 je prikazan radi jednostavnosti pravougaoni provodnik čija je površina poprečnog preseka izdeljena na nekoliko elementarnih površina kojima odgovaraju različite gustine struje.



Slika 4 Provodnik u obliku paralelepipeda sa izdeljenim poprečnim presekom i odgovarajućim gustinama struje.

1.3 Omov zakon

Razmotrimo kretanje jednog slobodnog elektrona unutar kristalne rešetke metala. U odsustvu električnog polja, kretanje elektrona je haotično i može se okarakterisati sa nekoliko kinematičkih veličina. Srednji slobodni put λ koji predstavlja srednje rastojanje koje elektron prelazi između dva uzastopna sudara. Nakon sudara elektron nasumično menja pravac svog kretanja. Srednja brzina haotičnog (termalnog) kretanja v_T predstavlja prosečnu brzinu elektrona tokom haotičnog kretanja. Srednje vreme između dva uzastopna sudara τ , predstavlja vreme potrebno da elektron pređe srednji slobodni put krećući se srednjom brzinom. Prema Slici 1, jasno je da elektron prilikom haotičnog kretanja prelazi različita rastojanja između dva uzastopna sudara, čime je opravdano uvesti srednje vrednosti puta, brzine i vremena. Ukoliko se sistem drži u ravnoteži (ne menja se temperatura) gornje navedene srednje vrednosti su konstantne i u potpunosti karakterišu haotično kretanje elektrona.

Radi jednostavnosti smatraćemo da su nosioci električne struje u provodniku čestice identične elektronima ali sa pozitivnim naelektrisanjem. Neka je sada duž celog provodnika uspostavljeno homogeno električno polje E . Smatramo da prisustvo električnog polja ne menja srednje vrednosti slobodnog puta, vremena i brzine. Odmah nakon sudara sa jonom kristalne rešetke, naelektrisana čestica biva ubrzana dejstvom električnog polja u smeru električnog polja. Kažemo da naelektrisana čestica dobija dodatnu komponentu brzine u smeru polja. Prema II Njutnovom zakonu važi:

$$ma = eE \quad (7)$$

Maksimalna brzina koju dostiže čestica usled ovog ubrzanja je:

$$v_0 = a\tau = \frac{eE}{m}\tau \quad (8)$$

gde je τ prosečno vreme između dva uzastopna sudara. Brzina koju postiže čestica pod dejstvom električnog polja je još uvek mala u odnosu na srednju brzinu haotičnog kretanja. Srednja brzina usled konstantnog ubrzanja upravo je jednaka polovini maksimalne, a to je brzina drifta:

$$v_d = \frac{1}{2} \frac{eE\tau}{m} \quad (9)$$

Srednje vreme između dva uzastopna sudara određeno je srednjom vrednošću brzine haotičnog kretanja v_T i srednjim slobodnim putem λ koji čestica može da pređe između dva uzastopna sudara:

$$\tau = \frac{\lambda}{v_T} \quad (10)$$

Sledi:

$$v_d = \frac{e\lambda E}{2mv_T} \quad (11)$$

Ako (11) uvrstimo u (5) izostavljajući vektorske oznake, nalazimo:

$$j = \frac{ne^2\lambda}{2mv_T} E \quad (12)$$

Odnosno saznajemo da je gustina struje srazmerna jačini električnog polja. Konstanta srazmernosti naziva se specifična provodnost (oznaka- σ) i očigledno je karakteristika materijala na određenoj temperaturi. Odnosno, relacija (12) se može zapisati u kraćem obliku:

$$j = \sigma E \quad (13)$$

Dobijena relacija predstavlja Omov zakon u diferencijalnom ili lokalnom obliku. On nam govori da je gustina struje srazmerna jačini električnog polja, a konstanta srazmernosti je karakteristika materijala na odgovarajućoj temperaturi. Ako je električno polje homogeno duž celog provodnika, važi veza:

$$E = \frac{U}{\ell} \quad (14)$$

gde je U razlika potencijala na dužini ℓ . Uvrštavanjem (14) u (13) nalazimo:

$$j = \frac{\sigma U}{\ell} \quad (15)$$

Ako je provodnik homogen $\sigma = const.$, možemo izračunati jačinu struje kroz ceo poprečni presek provodnika ako (15) uvrstimo u (6). Nakon sumiranja nalazimo:

$$I = \frac{\sigma S}{\ell} U \quad (16)$$

Recipročna vrednost specifične provodnosti naziva se specifična otpornost materijala:

$$\rho = \frac{1}{\sigma} \quad (17)$$

Sada se relacija (16) može sada napisati u vidu:

$$I = \frac{U}{\rho \frac{\ell}{S}} \quad (18)$$

Izraz u imeniocu je karakteristika konkretnog homogenog provodnika dužine ℓ , površine poprečnog preseka S koji je sačinjen od materijala specifične električne otpornosti ρ . Ova veličina je vezana dakle samo za oblik provodnika i njegovu provodnu karakteristiku, a naziva se električna otpornost:

$$R = \rho \frac{\ell}{S} \quad (19)$$

Konačno dolazimo do poznatog izraza za Omov zakon:

$$I = \frac{U}{R} \quad (20)$$

Dakle saznajemo da je jačina struje koja protiče kroz poprečni presek provodnika srazmerna naponu na njegovim krajevima, a obrnuto srazmerna električnoj otpornosti tog provodnika. Izraz (20) predstavlja

Omov zakon u integralnom obliku. Zakonitost je utvrdio 1827. godine Georg Om eksperimentalnim putem. Sa druge strane vidimo da ovaj zakon možemo danas izvesti poznavajući strukturu materije i uvodeći jednostavne pretpostavke o kretanju slobodnih nosioca naelektrisanja. Omov zakon sledi iz činjenice da se slobodni elektroni u metalu mogu smatrati idealnim gasom odakle proizilazi da je brzina haotičnog kretanja veoma velika kao i broj uzastopnih sudara. Takođe prisustvo električnog polja ne utiče na haotično kretanje elektrona. U tom slučaju pod dejstvom električnog polja elektron se kreće prividno konstantnom brzinom drifta u smeru suprotnom od električnog polja. Slično kao što se kišna kap pod stalnim dejstvom gravitacionog polja ipak kreće konstantnom brzinom usled trenja sa vazduhom.

S obzirom na učinjene pretpostavke pri izvođenju Omovog zakona, mogli bi predpostaviti da on nebi važio za vrlo jaka električna polja, kada elektron dobija brzinu koja je reda veličine srednje haotične. Takođe veoma jako električno polje može stvarati nove slobodne nosioce naelektrisanja, tj. vršiti jonizaciju. U tim uslovima takođe ne važi Omov zakon (na primer električne struje koje su rezultat pražnjenja u atmosferi ne mogu se opisati Omovim zakonom). Ukoliko je električno polje vrlo kratkog trajanja ili se jako brzo menja (visokofrekventne struje), Omov zakon nije primenljiv. U vakumskoj cevi srednji slobodni put može biti reda veličine razmaka između elektroda, pa ni tu Omov zakon nije primenljiv. Takođe u savremenoj tehnologiji mikroprocesora, gde provodnici imaju poprečni presek reda veličine desetine atoma i do izražaja dolaze kvantni efekti, Omov zakon ne može služiti za proračune. Odstupanja od oko 1% predviđaju se tek pri strujama od oko $10^9 A$ u provodniku poprečnog preseka $1cm^2$ što daleko prevazilazi uobičajnu primenu provodnika u standardnim električnim kolima.

ZADATAK

Odrediti brzinu drifta elektrona v_D u bakarnom provodniku površine poprečnog preseka $S = 2mm^2$ kroz koji teče električna struja jačine $I = 2A$. Poznata je gustina bakra $\rho = 8,9g/cm^3$ i molarna masa $M = 63,6g/mol$. Smatrati da na svaki atom bakra dolazi po jedan slobodan elektron. Date su konstante: Avogadrov broj: $N_A = 6 \cdot 10^{23}mol^{-1}$ i elementarno naelektrisanje $e = 1,6 \cdot 10^{-19}C$.

REŠENJE

Prema formulama (5) i (6) :

$$v_D = \frac{I}{neS} \quad (1)$$

Broj nosioca naelektrisanja po jedinici zapremine određujemo pomoću poznate gustine bakra, molarne mase i avogadrovog broja:

$$n = \frac{\rho N_A}{M} \quad (2)$$

Ako (2) uvrstimo u (1), nalazimo:

$$v_D = \frac{IM}{\rho N_A S e} \quad (3)$$

Uvrštavanjem brojnih vrednosti nalazimo:

$$v_D = \frac{2A \cdot 63,6 \cdot 10^{-3}kg/mol}{8900kg/m^3 \cdot 6 \cdot 10^{23}mol^{-1} \cdot 2 \cdot 10^{-6}m^2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}C} = 7,4 \cdot 10^{-5}m/s = 0,074mm/s, \quad (4)$$

što je vrlo mala brzina.

Iz kinetičke teorije gasova sledi da je srednja brzina haotičnog kretanja elektrona unutar kristalne rešetke na temperaturi $T = 300K$:

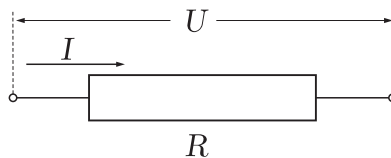
$$v_T = \sqrt{\frac{3k_B T}{m_e}} = 1,2 \cdot 10^5 m/s \quad (5)$$

što je mnogo veće od brzine drifta kako je i pretpostavljeno pri izvođenju Omovog zakona.

1.4 Rad i snaga električne struje

Poznata je činjenica da se pri proticanju električne struje provodnici zagrevaju. Koristan aspekt ove činjenice je svakako upotreba električne struje za zagrevanje gde je to potrebno, zatim osvetljenje, itd. Ali sa druge strane, ova činjenica zadaje probleme inženjerima pri projektovanju mikro električnih kola jer ovde svaki vid pretvaranja električne energije u toplotu predstavlja opasnost za preterano zagrevanje. Kod savremenih računara upravo veći deo zapremine zauzima sistem za hlađenje. Superkompjuter "Titan" koji se nalazi u Sjedinjenim Američkim Državama sastoji se od nešto više od 299000 procesora za čije hlađenje je obezbeđen sistem koji ima snagu 23MW. Takođe, nepravilno projektovane ili neispravne instalacije mogu zbog preteranog oslobađanja toplote uzrokovati topljenje izolacionih materijala, a zatim i burni proces oksidacije.

U cilju nalaženja kolika se energija oslobađa u vidu toplote razmatramo provodnik otpornosti R na čijim krajevima vlada napon U (Slika 5).



Slika 5 Električni provodnik otpornosti R kroz koji protiče električna struja jačine I .

Pri proticanju stalne električne struje (ne menja se u vremenu), dolazi do premeštanja naelektrisanja. Kažemo da električno polje vrši rad. Prema formuli iz elektrostatike, rad koji izvrši električno polje pri premeštanju naelektrisanja Δq je:

$$\Delta A = \Delta q U \quad (21)$$

Sa druge strane, prema definiciji jačine električne struje (1), izraz (21) se može napisati u vidu:

$$\Delta A = UI \Delta t \quad (22)$$

S obzirom na definiciju snage koja predstavlja izvršeni rad u jedinici vremena, sledi da je proizvod UI snaga električne struje:

$$P = \frac{\Delta A}{\Delta t} = UI \quad (23)$$

Prema Omovom zakonu (20), izraz za snagu (23) dobija formu:

$$P = RI^2 \quad (24)$$

Izvršeni rad je mera oslobođene količine toplote u provodniku. Pri proticanju stalne električne struje I na otporniku električne otpornosti R u vremenskom intervalu Δt oslobodi se količina toplote:

$$\Delta Q = RI^2 \Delta t \quad (25)$$

što predstavlja Džulov zakon. Ovu relaciju ustanovio je James Prescott Joule eksperimentalnim putem 1840. Potapajući metalne žice različitih dužina u sud sa vodom i mereći temperaturnu promenu nakon tridesetak minuta pri proticanju određene jačine struje ustanovio je da je oslobođena toplota srazmerna električnoj otpornosti provodnika i kvadratu jačine struje. Već prema modelu elektronskog gasa možemo shvatiti uzrok ove pojave. Elektroni pod dejstvom električnog polja dobijaju energiju koju delimično predaju kristalnoj rešeci metala pri sudaru sa jonima kristalne rešetke, što se manifestuje u porastu temperature provodnika.

ZADATAK

Električni grejač otpornosti $R = 5\Omega$ priključen je na konstantni napon $U = 24V$ i potpoljen u vodu mase $m = 1,5kg$ koja se nalazila na temperaturi $t_1 = 15^\circ C$. Odrediti temperaturu vode nakon $\tau = 45min$. Specifični toplotni kapacitet vode je $c_v = 4190 \frac{J}{kg \cdot ^\circ C}$.

REŠENJE

Toplota koju oslobodi grejač u toku vremena $\Delta t = \tau$ je prema Džulovom zakonu:

$$\Delta Q = RI^2 \tau \quad (1)$$

Ako za izračunavanje jačine struje kroz grejač primenimo Omov zakon, (1) postaje:

$$\Delta Q = \frac{U^2}{R} \tau \quad (2)$$

Sa druge strane, količina toplote potrebna da promeni temperaturu vode za iznos $t_2 - t_1$, je prema kalorimetrijskoj formuli:

$$\Delta Q = mc_v(t_2 - t_1) \quad (3)$$

Izjednačavanjem (3) i (2), i rešavanjem po nepoznatoj temperaturi, nalazimo:

$$t_2 = t_1 + \frac{U^2 \tau}{Rmc_v} = 15^\circ C + \frac{(24V)^2 \cdot 45 \cdot 60s}{5\Omega \cdot 1,5kg \cdot 4190 \frac{J}{kg^\circ C}} = 64,5^\circ C \quad (4)$$

1.5 Elektromotorna sila

Videli smo da pri proticanju električne struje kroz provodnik izvestan deo energije pretvara se u toplotu. Energija usmerenog kretanja naelektrisanih čestica pretvara se u energiju oscilovanja jona kristalne rešetke metala što se manifestuje porastom temperature. Dakle, da bi se obezbedio stalan protok električne struje, energija se mora dovoditi u sistem. Uređaj u kom se neka druga energija pretvara u električnu naziva se izvor elektromotorne sile.

Elektromotorna sila (EMS) se može definisati kao ona količina pretvorene energije koja je potrebna da bi jedinica naelektrisanja prošla kroz presek uređaja. Ako je za prolazak naelektrisanja Δq potrebno pretvoriti u električnu isnos energije ΔE , onda se elektromotorna sila \mathcal{E} može napisati kao

$$\mathcal{E} = \frac{\Delta E}{\Delta q} \quad (5)$$

S obzirom da je energija ΔE jednaka radu električne struje $\Delta A = U \Delta q$, za prolazak Δq kroz izvor, elektromotorna sila je jednaka naponu na krajevima izvora.

Postoje razni izvori EMS od kojih su najpoznatije obične baterije i akumulatori. U njima se skladištena hemijska energija pretvara u električnu. U proizvodnji baterija zahtev je za skladištenjem što veće energije u manjoj zapremini, veliki broj punjenja i pražnjenja, dugi rok trajanja, stabilnost na temperaturne promene itd. Praktično svi kućni aparati koji imaju elektronska kola rade na jednosmernu struju, a energija se dobija iz gradske mreže koja obezbeđuje naizmeničnu struju. Zbog toga mnogi električni aparati imaju pretvarače naizmenične u jednosmernu struju (AC/DC konvertori). Šematska oznaka izvora EMS prikazana je na Slici 6. Obično je znak + izostavljen jer prema konvenciji duža elektroda je pozitivno naelektrisana.



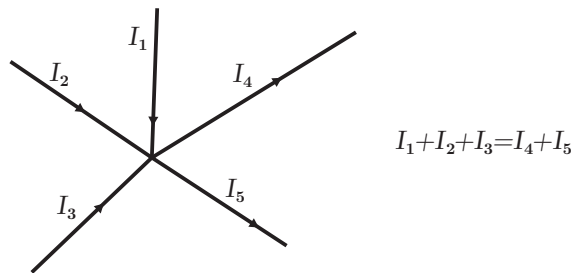
Slika 6 Šematska oznaka izvora EMS.

1.6 Kirhofova pravila

Gustav Robert Kirchoff (1824-1887.) je prvi put definisao pravila (1845.) za rešavanje složenih električnih kola. Iz zakona održanja količine naelektrisanja i činjenice da se električne struje ponašaju kao nestišljiv fluid sledi I Kirhofov zakon:

Algebarski zbir svih jačina struja koje definišu čvor jednak je nuli.

$$\sum_{i=1}^n I_n = 0 \quad (6)$$



Slika 7 Primer za I Kirhofovo pravilo.

Ovde se koristi konvencija da se sa znakom plus uzimaju struje koje utiču u čvor, a sa znakom minus struje koje ističu iz čvora. Ekvivalentna formulacija ovog pravila glasi: zbir svih struja koje utiču u čvor, jednak je zbiru svih struja koje iz njega ističu. Dakle u čvoru naelektrisanje ne može da nestane, niti može da se nagomilava. Ilustracija ovog pravila prikazana je na Slici 7.

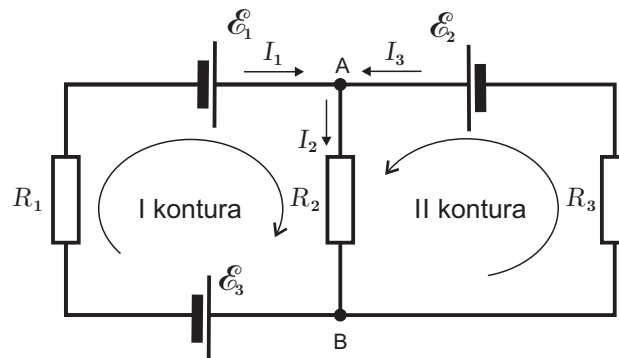
Drugo Kirhofovo pravilo definiše način za uspostavljanje veze između napona na pojedinim elementima i elektromotornih sila u zatvorenoj konturi složenog električnog kola. Ono glasi:

Zbir napona na pojedinim elementima u zatvorenoj konturi složenog kola jednak je algebarskom zbiru elektromotornih sila koje ulaze u sastav te konture.

$$\sum_{i=1}^n R_i I_i = \sum_{j=1}^m \mathcal{E}_j \quad (7)$$

Uz ovo pravilo treba definisati konvenciju o predznacima napona i elektromotornih sila. Prvo se izabere proizvoljan smer obilaznja konture. Zatim se proizvoljno naznače smerovi električnih struja. Struje čiji se pretpostavljeni smer poklapa sa smerom obilaska konture, uzimaju se sa pozitivnim predznakom. Odnosno, proizvod el. otpora i struje pozitivan. U suprotnom uzima se znak minus. Takođe, ukoliko se pri naznačenom obilasku konture pri prolazu kroz izvor EMS nailazi prvo na negativni pol, a onda na pozitivni, znak EMS je plus. U suprotnom uzima se znak minus.

Prvo i drugo Kirhovo pravilo najbolje se može razumeti pri rešavanju jednog jednostavnog električnog kola koje je prikazano na Slici 8. Recimo da su poznati otpori R_1 , R_2 i R_3 i vrednosti napona na izvorima EMS \mathcal{E}_1 , \mathcal{E}_2 i \mathcal{E}_3 . Zadatak je da se odrede jačine i smerovi struja naznačenih u kolu.



Slika 8 Primer električnog kola na kome se demonstrira primena Kirhofovih pravila.

Primenom prvog Kirhofovog pravila za čvor A nalazimo:

$$I_1 + I_3 = I_2 \quad (8)$$

Čvor B se ne razmatra jer dobijamo iste jednačine kao i za A.

Konstrukcija putanja za obilasku kontura su takve da se njima obuhvate svi elementi u kolu, pri čemu u jednoj putanji ne možemo dva puta proći kroz istu granu. Očigledno imamo dve konture. Iz prve nalazimo:

$$R_1 I_1 + R_2 I_2 = \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_3 \quad (9)$$

Pozitivni znakovi ispred proizvoda električnog otpora i struja su zato što se smer obilaska poklapa sa pretpostavljenim smerovima električnih struja. Za znakove elektromotornih sila takođe koristimo

uvedenu konvenciju. Pri nailasku na \mathcal{E}_1 prvo nailazimo na negativni pol, pa je znak plus. Za \mathcal{E}_3 nailazimo prvo na pozitivni pol, pa je znak minus. Slično, nalazimo jednačinu iz druge konture:

$$R_2 I_2 + R_3 I_3 = \mathcal{E}_2 \quad (10)$$

Sistem jednačina (8), (9) i (10) se može rešiti po nepoznatim jačinama struja. Na primer, ako I_2 iz (8) uvrstimo u (9) i (10), nalazimo:

$$(R_1 + R_2)I_1 + R_2 I_3 = \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_3 \quad (11)$$

i

$$R_2 I_1 + (R_2 + R_3)I_3 = \mathcal{E}_2 \quad (12)$$

Iz (11) sledi I_3 :

$$I_3 = \frac{\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_3 - (R_1 + R_2)I_1}{R_2} \quad (13)$$

Ako sada izraz za I_3 zamenimo u (12), nalazimo:

$$R_2 I_1 + \frac{R_2 + R_3}{R_2}(\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_3) - \frac{(R_2 + R_3)(R_1 + R_2)}{R_2} I_1 = \mathcal{E}_2 \quad (14)$$

Rešavanjem (14) po jačini struje I_1 nalazimo:

$$I_1 = \frac{(R_2 + R_3)(\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_3) - R_2 \mathcal{E}_2}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3} \quad (15)$$

Ako iz (13) eliminišemo I_1 pomoću (15), dobijamo:

$$I_3 = \frac{R_2(\mathcal{E}_3 - \mathcal{E}_1) + (R_1 + R_2)\mathcal{E}_2}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3} \quad (16)$$

Prema (8), zbir (15) i (16) daje struju I_2 :

$$I_2 = \frac{R_1 \mathcal{E}_2 + R_3(\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_3)}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3} \quad (17)$$

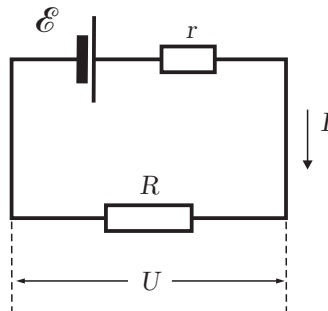
Pronađimo rešenja dobijenih struja za konkretne brojne vrednosti: $R_1 = 10\Omega$, $R_2 = 5\Omega$ i $R_3 = 20\Omega$; $\mathcal{E}_1 = 3V$, $\mathcal{E}_2 = 5V$ i $\mathcal{E}_3 = 12V$. Ako date brojeve uvrstimo u (15), (16) i (17), nalazimo:

$$I_1 = -0,714A \quad I_2 = -0,371A \quad I_3 = 0,343A \quad (18)$$

S obzirom da su za I_1 i I_2 dobijene negativne vrednosti, smerovi ovih struja su suprotni od naznačenih na Slici 8.

1.6.1 Realni izvori EMS

Realni izvori EMS imaju unutrašnju otpornost. Zbog toga kada su priključeni u električno kolo napon na njegovim krajevima je umanjen. Realni izvor sa unutrašnjim otporom r priključen na potrošač otpornosti R može se prikazati kao na Slici 9.



Slika 9 Realni izvor EMS priključen na potrošač.

Primenom Omovog zakona i II Kirhofovog pravila, nalazimo izraz za napon na krajevima potrošača R :

$$U = \mathcal{E} - rI \quad (19)$$

Jačina struje je:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + r} \quad (20)$$

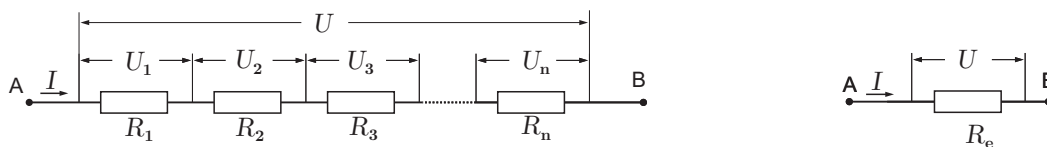
sledi da je napon na potrošaču:

$$U = \mathcal{E} \frac{R}{R + r} \quad (21)$$

U realnim električnim kolima ukupna električna otpornost potrošača treba da je veća od unutrašnje otpornosti izvora, jer u suprotnom dolazi do znatnog oslobađanja toplote unutar izvora.

1.7 Vezivanje otpornika

Razmotrimo redno vezane otpornike prikazane na Slici 10.



Slika 10 Redna veza električnih otpornosti i njihova ekvivalentna električna otpornost.

Jačina struje koja protiče kroz rednu vezu otpornika je I , a ukupan napon redno vezanih otpornika je U . Ideja je da se redna veza otpornika može zameniti jednim ekvivalentnim električnim otporom kroz koji takođe protiče struja I pri čemu je na njegovim krajevima napon U . Zbir napona redno vezanih otpornika jednak je naponu na krajevima njihove veze:

$$U = U_1 + U_2 + \dots + U_n \quad (22)$$

Prema Omovom zakonu može se napisati:

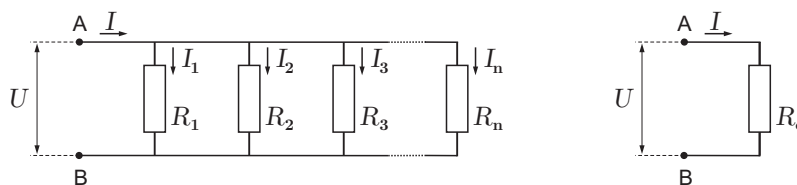
$$R_e I = R_1 I + R_2 I + \dots + R_n I \quad (23)$$

Skraćivanjem jačine struje nalazimo ekvivalentnu električnu otpornost redno vezanih otpornika:

$$R_e = R_1 + R_2 + \dots + R_n = \sum_{i=1}^n R_i \quad (24)$$

Dakle ekvivalentna električna otpornost redno vezanih otpornika jednaka je zbiru pojedinih otpornosti koji čine tu vezu.

Slično nalazimo obrazac za nalaženje ekvivalentne električne otpornosti paralelno vezanih otpornika (Slika 11).



Slika 11 Paralelna veza električnih otpornosti i njihova ekvivalentna električna otpornost.

Ukupna struja koja teče kroz paralelnu vezu otpornika je:

$$I = I_1 + I_2 + \dots + I_n \quad (25)$$

S obzirom da su naponi na svim otpornicima jednaki, primenom Omovog zakona nalazimo:

$$\frac{U}{R_e} = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} + \dots + \frac{U}{R_n} \quad (26)$$

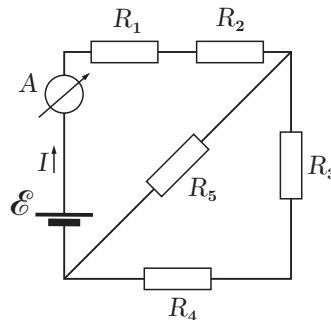
Nakon skraćivanja napona sledi konačan izraz:

$$\frac{1}{R_e} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i} \quad (27)$$

Recipročna vrednost ekvivalentne električne otpornosti paralelne veze otpornika jednaka je zbiru recipročnih vrednosti električnih otpornosti koji čine tu vezu.

ZADATAK

Izračunati ekvivalentnu električnu otpornost otpornika priključenih na izvor $\mathcal{E} = 15V$, a potom i jačinu struje koju pokazuje ampermetar. Date su brojne vrednosti električnih otpora: $R_1 = 1\Omega$, $R_2 = 3\Omega$, $R_3 = 5\Omega$, $R_4 = 50\Omega$ i $R_5 = 30\Omega$.



REŠENJE

Ekvivalentna električna otpornost redne veze otpornika R_1 i R_2 je:

$$R_{e1} = R_1 + R_2 = 4\Omega \quad (1)$$

Ekvivalentna električna otpornost redne veze otpornika R_3 i R_4 je:

$$R_{e2} = R_3 + R_4 = 55\Omega \quad (2)$$

Ovaj ekvivalentni električni otpor R_{e2} vezan je paralelno sa R_5 , odakle sledi:

$$\frac{1}{R_{e3}} = \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_{e2}} \quad (3)$$

odnosno:

$$R_{e3} = \frac{R_5 R_{e2}}{R_5 + R_{e2}} = 19,4\Omega \quad (4)$$

Konačno, ekvivalentni otpor R_{e3} vezan je redno sa ekvivalentnim otporom R_{e1} :

$$R_e = R_{e1} + R_{e3} = 23,4\Omega \quad (5)$$

Jačina struje koja teče kroz ampermetar je;

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R_e} = 0,64A \quad (6)$$

Zadaci za samostalni rad: 6.1; 6.2; 6.3; 6.4; 6.5; 6.6; 6.7; 6.8; 6.9; 6.10; 6.11; 6.12; 6.13; 6.14; 6.15; 6.17; 6.18; 6.19

Literatura: Zbirka zadataka iz fizike - mašinski odsek, Ljuba Budinski-Petković, Ana Kozmidis-Petrović, Milica Vučinić Vasić, Ivana Lončarević, Aleksandra Mihailović, Dušan Ilić, Robert Lakatoš.

FTN Izdavaštvo, Novi Sad.