

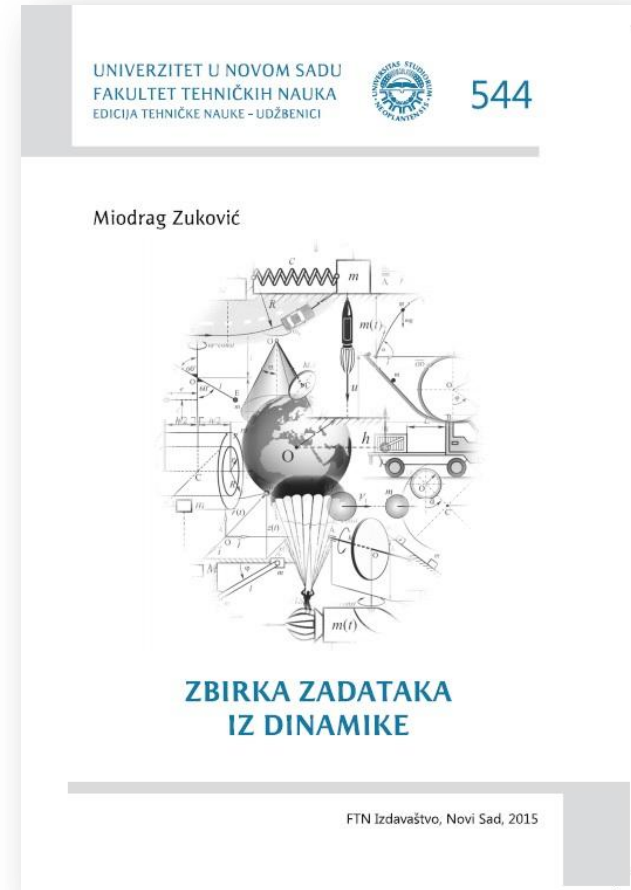
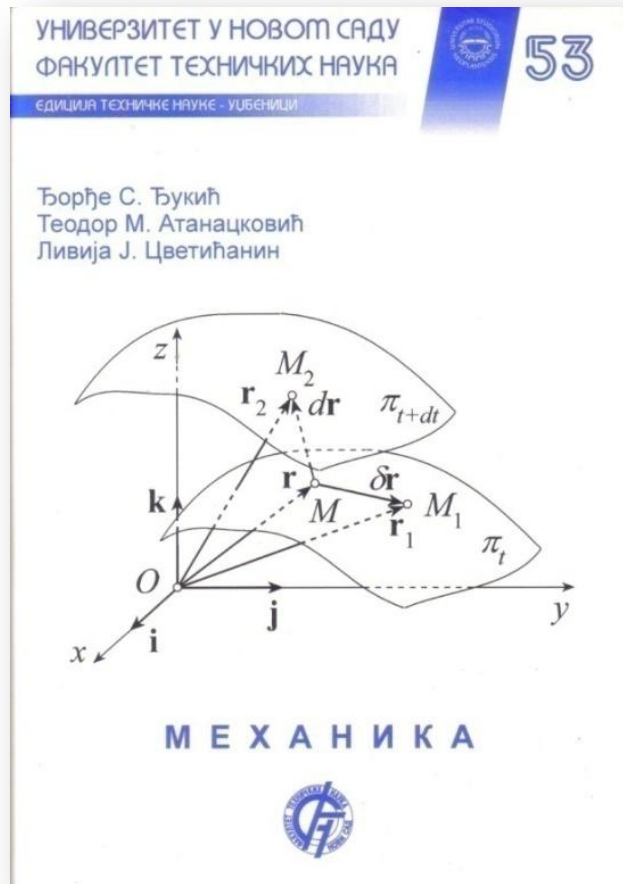
Dinamika – vežbe 2

Kinematika i dinamika

Miodrag Zuković

Novi Sad, 2021.

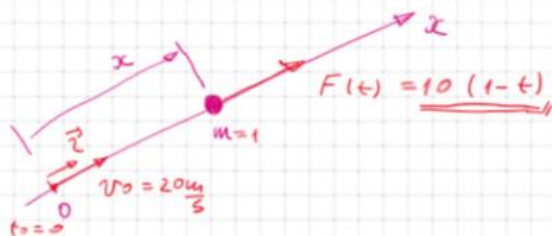
Literatura



Zadatak 1

Materijalna tačka, mase $m = 1[\text{kg}]$, kreće se pravolinijski pod dejstvom sile $F(t) = 10(1 - t)[\text{N}]$. Odrediti trenutak t_1 u kome tačka menja smer kretanja ako je $v_0 = 20[\text{m/s}]$.
(Vidi Zadatak 1.5)

Materijalna tačka, mase $m = 1[\text{kg}]$, kreće se pravolinijski pod dejstvom sile $F(t) = 10(1 - t)[\text{N}]$. Odrediti trenutak t_1 u kome tačka menja smer kretanja ako je $v_0 = 20[\text{m/s}]$. (Vidi Zadatak 3.4) VC 6 c 1



$t_1 = ?$ МЕБА СЕР КР.

$$\vec{v}_1 = 0$$

$$d\vec{I} = \vec{F} dt$$

$$\vec{I}_{0,1} = \int_{t_0}^{t_1} d\vec{I} = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F} dt$$

$$\vec{K}_1 - \vec{K}_0 = \vec{I}_{0,1}$$

$$m \vec{v}_1 - m \vec{v}_0 = \int_{t_0=0}^{t_1=?} 10(1-t) \vec{e} dt$$

$$-1(20\vec{e}) = \left(10t - 10\frac{t^2}{2} \right) \Big|_0^{t_1} \vec{e} \quad / \cdot \vec{e}$$

$$-20 = 10t_1 - 5t_1^2$$

$$5t_1^2 - 10t_1 - 20 = 0 \quad / : 5$$

$$t_1^2 - 2t_1 - 4 = 0$$

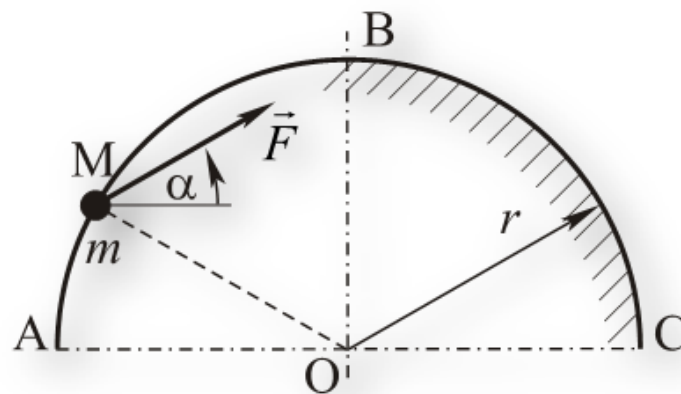
$$(t_1)_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 16}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{5}}{2}$$

$$t_1 = 1 + \sqrt{5} \quad \checkmark$$

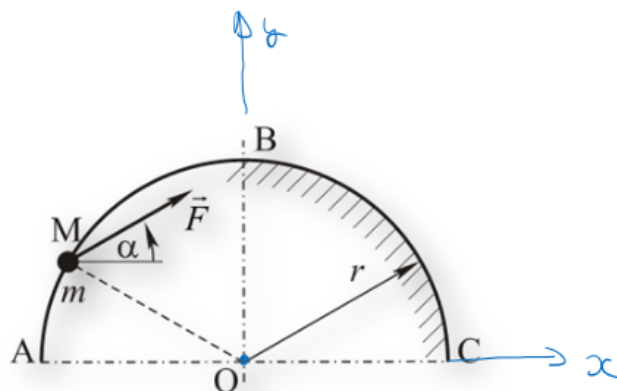
$$t_1 = 1 - \sqrt{5} < 0$$

Zadatak 2

Materijalna tačka mase m se kreće po kružnoj žici radijusa r . Na nju deluje konstantna sila $\vec{F}$, intenziteta $F = \text{const}$, čija napadna linija gradi ugao $\alpha = \text{const}$ sa horizontalom. Odrediti rad koji ova sila izvrši na pomeranju tačke iz položaja A u položaj B, odnosno iz položaja A u položaj C.



$$A_{AB}^{\vec{F}} = ? ; A_{AC}^{\vec{F}} = ?$$



ΕΛ. ΡΑΔ

$$dA^{\vec{F}} = \vec{F} \cdot d\vec{r} ; A_{AB}^{\vec{F}} = \int_A^B dA^{\vec{F}} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

ΔΕΚ. ΚΟΟ. C4C.

$$\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j}$$

$$d\vec{r} = \vec{v} dt = (\dot{x} \vec{i} + \dot{y} \vec{j}) \cdot dt = \left(\frac{dx}{dt} \vec{i} + \frac{dy}{dt} \vec{j} \right) \cdot dt$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$dA^{\vec{F}} = (F_x \vec{i} + F_y \vec{j}) \cdot (dx \vec{i} + dy \vec{j})$$

$$= F_x dx + F_y dy$$

$$\begin{aligned} F_x &= F \cos \alpha \\ F_y &= F \sin \alpha \end{aligned}$$

$$\} \rightarrow dA^{\vec{F}} = F \cos \alpha dx + F \sin \alpha dy$$

$$A_{AB}^{\vec{F}} = \int_A^B dA^{\vec{F}} = F \cos \alpha \int_{x_A=-r}^{x_B=0} dx + F \sin \alpha \int_{y_A=0}^{y_B=r} dy$$

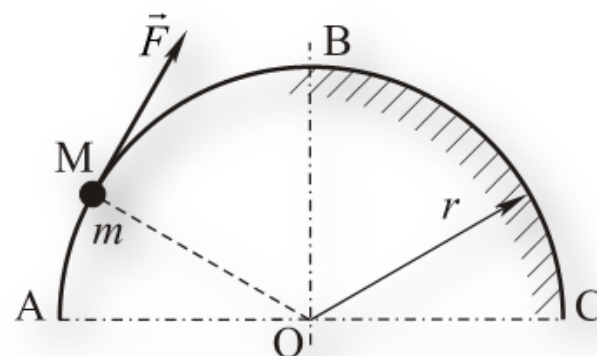
$$A_{AB}^{\vec{F}} = F \cos \alpha x \Big|_{-r}^0 + F \sin \alpha y \Big|_0^r$$

$$= F \cos \alpha (0 - (-r)) + F \sin \alpha (r - 0)$$

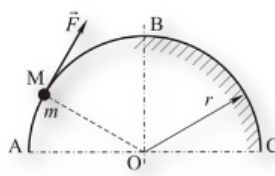
$$= F \cos \alpha \cdot r + F \sin \alpha \cdot r$$

Zadatak 3

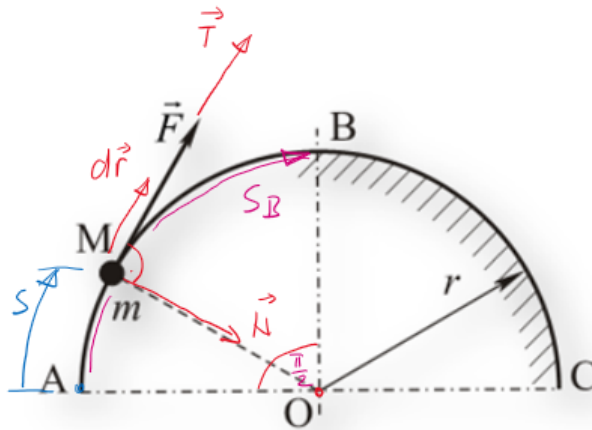
Materijalna tačka mase m se kreće po glatkoj kružnoj žici radijusa r . Na nju deluje sila $\vec{F}$, konstantnog intenziteta $F = \text{const}$, čija napadna linija stalno pada u pravac tangente na žicu. Odrediti rad koji ova sila izvrši na pomeranju tačke iz položaja A u položaj B, odnosno iz položaja A u položaj C.



Materijalna tačka mase m se kreće po glatkoj kružnoj žici radijusa r . Na nju deluje sila $\vec{F}$, konstantnog intenziteta $F = \text{const}$, čija napadna linija stalno pada u pravac tangente na žicu. Odrediti rad koji ova sila izvrši na pomeranju tačke iz položaja A u položaj B, odnosno iz položaja A u položaj C.

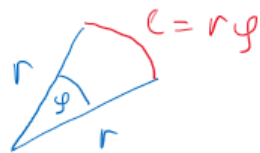


$$A_{AB}^{\vec{F}} = ?$$



$$F_T = F$$

$$dA^{\vec{F}} = F ds$$



$$dA^{\vec{F}} = \vec{F} \cdot d\vec{r}, \quad A_{AB}^{\vec{F}} = \int_A^B dA^{\vec{F}}$$

Prup. 1000.

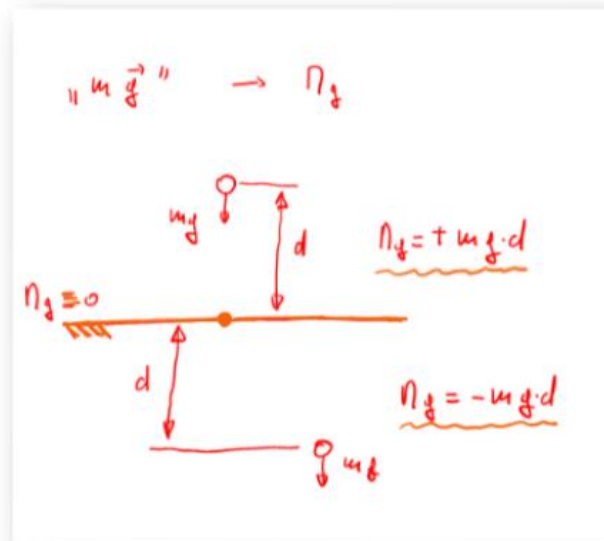
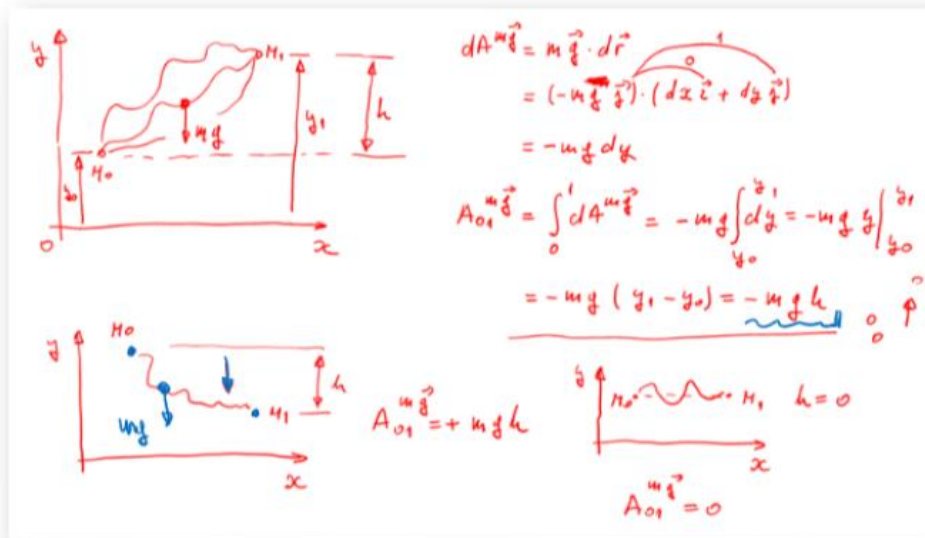
$$\vec{F} = F_T \vec{T} + F_N \vec{N}$$

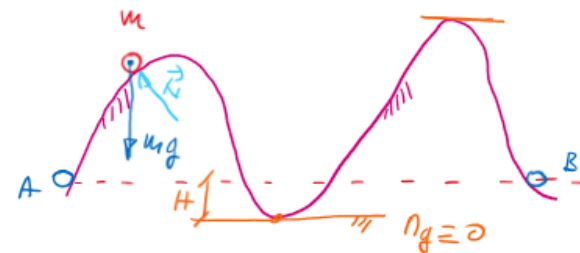
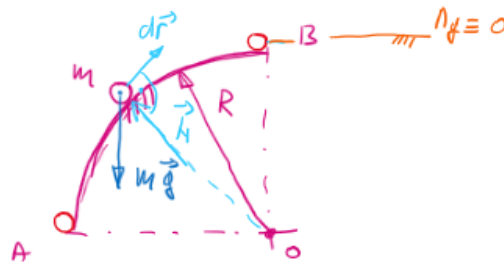
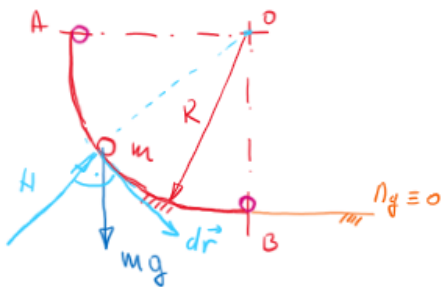
$$d\vec{r} = \vec{v} dt = (\dot{s} \vec{T}) dt = \left(\frac{ds}{dt} \vec{T} \right) dt = ds \vec{T}$$

$$dA^{\vec{F}} = \vec{F} \cdot d\vec{r} = (F_T \vec{T} + F_N \vec{N}) \cdot (ds \vec{T})$$

$$dA^{\vec{F}} = F_T ds$$

$$A_{AB}^{\vec{F}} = \int_A^B dA^{\vec{F}} = F \int_{s_A=0}^{s_B=r\frac{\pi}{2}} ds = F \cdot s \Big|_0^{\frac{r\pi}{2}} = F \cdot \left(\frac{r\pi}{2} - 0 \right) = F r \frac{\pi}{2}$$





$$A_{AB}^{u_g} = +u_g R$$

$$A_{AB}^{\vec{H}} = \int_A^B \vec{H} \cdot d\vec{r} = \int_A^B H \cdot dr \cos 90^\circ = 0$$

$$n_{gB} = 0, \quad n_{gA} = u_g R$$

$$A_{AB}^{u_g} = n_{gA} - n_{gB} = u_g R - 0 = \underline{u_g R}$$

$$A_{AB}^{u_g} = -u_g R$$

$$A_{AB}^{\vec{H}} = 0$$

$$n_{gB} = 0$$

$$n_{gA} = -u_g R$$

$$\begin{aligned} A_{AB}^{u_g} &= n_{gA} - n_{gB} = \\ &= -u_g R + 0 \\ &= \underline{-u_g R} \end{aligned}$$

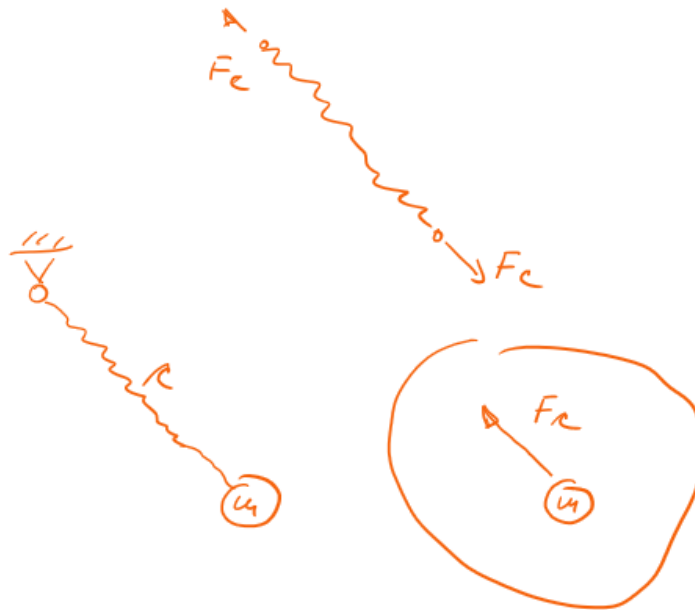
$$A_{AB}^{u_g} = 0$$

$$A_{AB}^{\vec{H}} = 0$$

$$n_{gA} = +u_g \cdot H$$

$$n_{gB} = +u_g H$$

$$\begin{aligned} A_{AB}^{u_g} &= n_{gA} - n_{gB} \\ &= u_g H - u_g H = 0 \end{aligned}$$

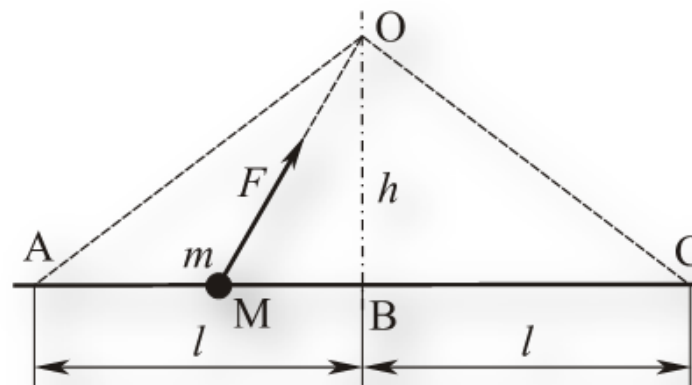


$$F_k = k \cdot \Delta l$$

$$W_k = \frac{1}{2} k (\Delta l)^2$$

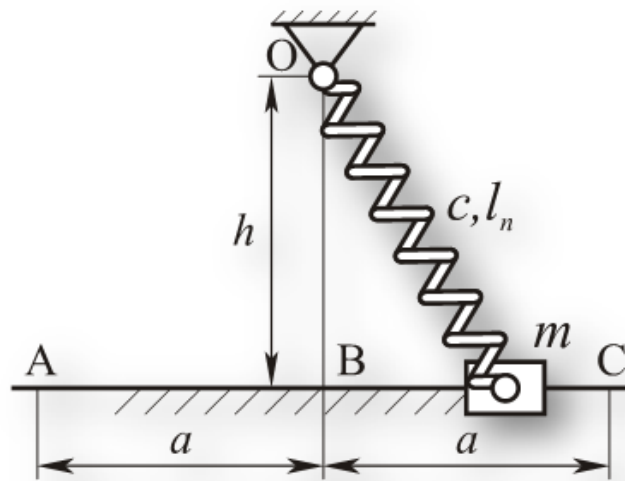
Zadatak 4

Materijalna tačka M , mase m , se kreće po pravolinijskoj žici. Na nju deluje centralna privlačna sila $\vec{F}$, konstantnog intenziteta $F = \text{const}$, sa centrom privlačenja u tački O . Odrediti rad koji ova sila izvrši na pomeranju tačke iz položaja A u položaj B , odnosno, iz položaja A u položaj C , ($\overline{AB} = \overline{BC} = l$, $\overline{OB} = h$).



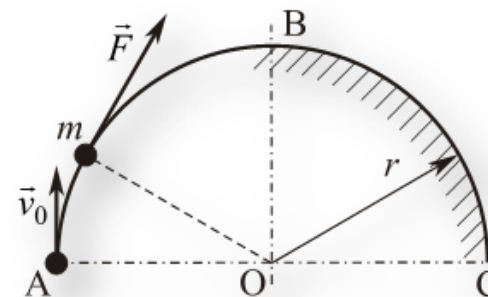
Zadatak 5

Klizač, mase m , može da se kreće po pravolinijskoj vodiči. Vezan je linearnom oprugom, krutosti c i dužine l_n u nenapregnutom stanju, za nepokretnu tačku O , $\overline{OB} = h$. Odrediti rad sile u oprugi pri pomeranju klizača iz položaja A u položaj B, odnosno, iz položaja A u položaj C ($\overline{AB} = \overline{BC} = a$). Kolike su ove veličine u slučaju $l_n = h$.

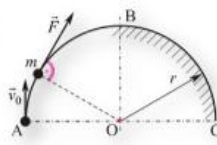


Zadatak 6

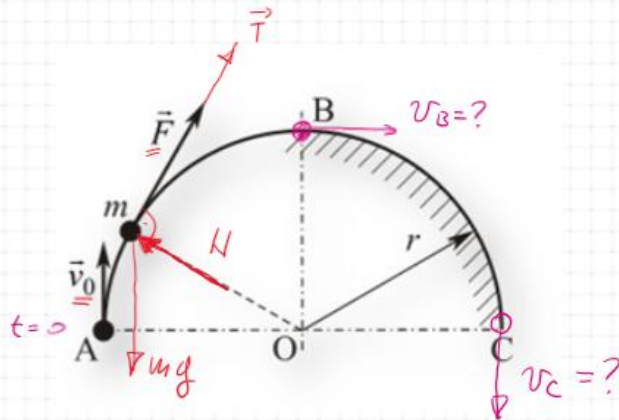
Materijalna tačka mase m se kreće po glatkoj kružnoj žici radijusa r . Žica se nalazi u vertikalnoj ravni, a tačka se kreće u homogenom polju sile zemljine teže. Na nju deluje i sila $\vec{F}$, konstantnog intenziteta, $F = \text{const}$, čija napadna linija stalno pada u pravac tangente na žicu. Odrediti brzinu tačke u položajima B i C, ako je tačka kretanje započela iz položaja A početnom brzinom v_0 usmerenom naviše.



Materijalna tačka mase m se kreće po glatkoj kružnoj žici radijusa r . Žica se nalazi u vertikalnoj ravni, a tačka se kreće u homogenom polju sile zemljine teže. Na nju deluje i sila $\vec{F}$, konstantnog intenziteta, $F = \text{const}$, čija napadna linija stalno pada u pravac tangente na žicu. Odrediti brzinu tačke u položajima B i C, ako je tačka kretanje započela iz položaja A početnom brzinom v_0 usmerenom naviše.



$$v_B = ?, v_C = ?$$



$$E_{KB} - E_{KA} = \cancel{A_{AB}^H} + A_{AB}^{\vec{F}} + A_{AB}^{u_g}$$

$$\frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = F \cdot r \frac{\pi}{2} - m g \cdot R \quad | \cdot \frac{2}{m}$$

$$v_B^2 = v_0^2 + \frac{2}{m} F r \frac{\pi}{2} - \frac{2}{m} m g R$$

$$v_B = \sqrt{\dots}$$

$$E_{KC} - E_{KA} = \cancel{A_{AC}^H} + A_{AC}^{\vec{F}} + \cancel{A_{AC}^{u_g}}$$

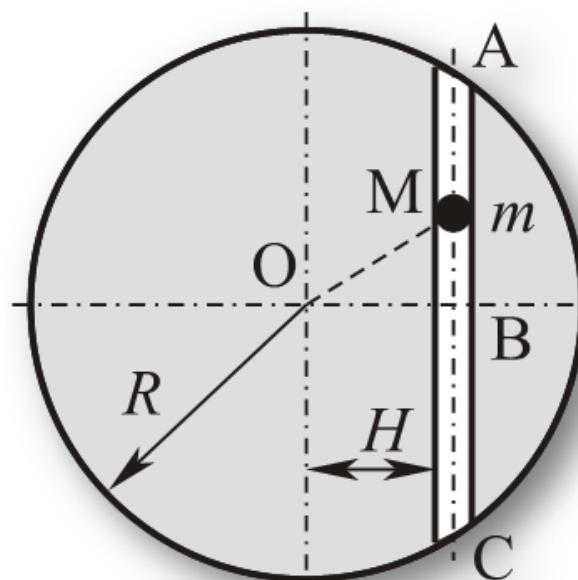
$$\frac{1}{2} m v_C^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = F \cdot r \pi$$

$$v_C^2 = \dots$$

$$v_C = \sqrt{\dots}$$

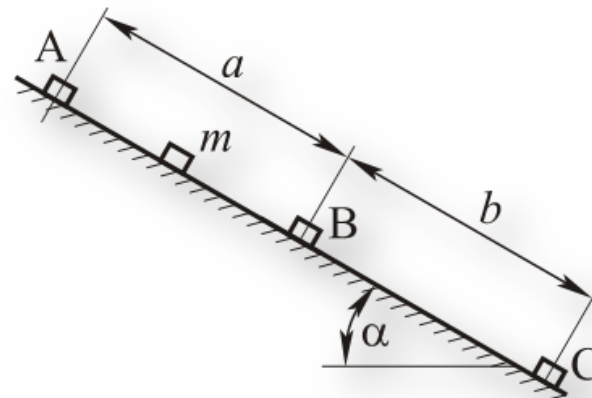
Zadatak 7

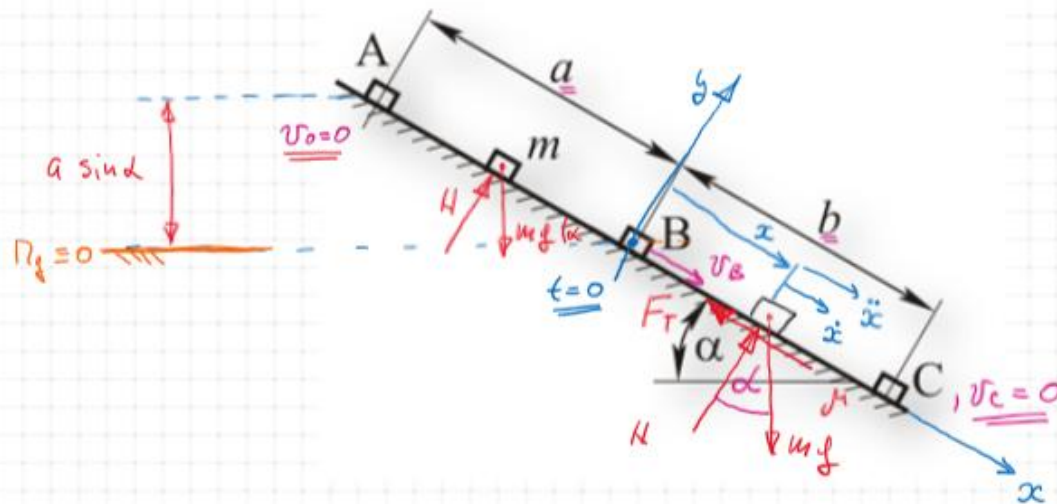
U glatkom vertikalnom žlebu, urezanom u nepokretni kružni cilindar, radijusa R , kreće se materijalna tačka M , mase m . Najkraće rastojanje žleba od ose cilindra iznosi H . Tačka se kreće u homogenom polju sile zemljine teže. Na nju deluje i centralna privlačna sila, sa centrom privlačenja u tački O , koja se nalazi na osi cilindra u ravni žleba, čiji je intenzitet obrnuto proporcionalan rastojanju tačke od centra dejstva sile, $F = \frac{k}{OM}$, $k = \text{const} > 0$. Ako je tačka kretanje započela iz položaja A , bez početne brzine, odrediti brzinu tačke i reakciju žleba u položaju B .



Zadatak 8

Materijalna tačka mase m se nalazi na strmoj ravni nagibnog ugla α . Kretanje započinje iz položaja A iz stanja mirovanja. Na prvom delu puta, od položaja A do položaja B, dužine a , strma ravan je glatka. Na drugom delu puta, od položaja B do položaja C, dužine b , strma ravan je hrapava. Koeficijent trenja između tačke i strme ravni je $\mu = 2 \tan \alpha$. Ako se tačka ponovo zaustavlja u položaju C odrediti koliki je odnos $\frac{a}{b}$.





"B-C"

$$E_{kc} + \Pi_c \neq E_{kB} + \Pi_B$$

"A-B"

$$E_{kB} - E_{kA} = A_{AB} + A_{AB}$$

$$\frac{1}{2} m v_B^2 - 0 = m g \cdot a \sin \alpha$$

$$v_B^2 = 2 g a \sin \alpha$$

$$E_k + \Pi = \text{const}$$

$$E_{kB} + \Pi_B = E_{kA} + \Pi_A$$

$$\frac{1}{2} m v_B^2 = + m g \cdot a \sin \alpha$$

$$\boxed{v_B^2 = 2 g a \sin \alpha}^*$$

$$B-C''$$

$$E_{Kc} + \Pi_c \neq E_{Kb} + \Pi_b$$

$$\text{II Ib.3. } m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_T \quad | \cdot \vec{z} \quad | \cdot \vec{g}$$

$$(1) \quad m\ddot{x} = mg \sin \alpha - F_T$$

$$(2) \quad 0 = N - mg \cos \alpha$$

$$(3) \quad F_T = \mu N$$

$$(2) \rightarrow N = mg \cos \alpha = \text{const}$$

$$(3) \rightarrow F_T = \mu mg \cos \alpha = \text{const}$$

$$\mu = 2 \tan \alpha = 2 \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$(1) \rightarrow \cancel{m} \ddot{x} = \cancel{m} g \sin \alpha - \mu \cancel{m} g \cos \alpha$$

$$\ddot{x} = g \sin \alpha - 2 \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot g \cos \alpha$$

$$\boxed{\ddot{x} = -g \sin \alpha = \text{const} < 0}$$

$$\boxed{\ddot{x} = -g \sin \alpha = \text{const} < 0}$$

$$\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{dx}{dt} \frac{d\dot{x}}{dx} = \dot{x} \frac{d\dot{x}}{dx}$$

$$\dot{x} \frac{d\dot{x}}{dx} = -g \sin \alpha \rightarrow \int_{\dot{x}_B = v_B}^{\dot{x}_C = 0} \dot{x} d\dot{x} = -g \sin \alpha \int_{x_B = 0}^{x_C = b} dx$$

$$\left. \frac{\dot{x}^2}{2} \right|_{v_B}^0 = -g \sin \alpha \left. x \right|_0^b \rightarrow \left| 0 - \frac{v_B^2}{2} = -g \sin \alpha (b - 0) \right|$$

$$\boxed{v_B^2 = 2 g \sin \alpha \cdot b}^{**}$$

$$\boxed{v_B^2 = 2 g a \sin \alpha}^*$$

*
**

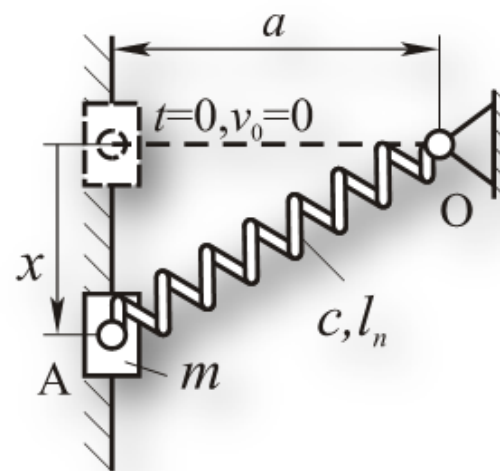
$$2 g a \sin \alpha = 2 g \sin \alpha \cdot b$$

$$a = b$$

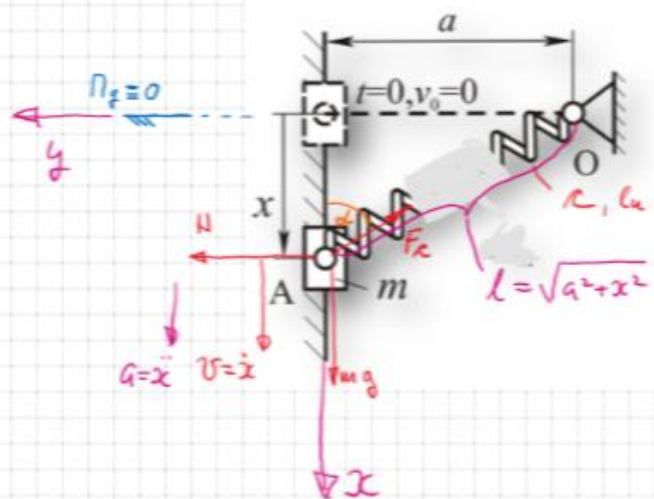
$$\boxed{\frac{a}{b} = 1}$$

Zadatak 9

Klizač A, mase m , nalazi se na glatkoj vertikalnoj vođici. Vezan je oprugom, krutosti c i dužine l_n u nenapregnutom stanju, za nepokretnu tačku O. Kretanje započinje, bez početne brzine, iz položaja u kome je opruga horizontalna. Odrediti brzinu klizača i reakciju vođice u funkciji položaja klizača, koordinate x . Klizač se kreće u homogenom polju sile zemljine teže.



$$v(x) = ? , N(x) = ?$$



- POT. UMLJE

$$E_k + \Pi = \text{const}$$

$$E_k + \Pi = E_{k0} + \Pi_0 \quad (*)$$

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2$$

$$\Pi = \Pi_g + \Pi_c = -m g x + \frac{1}{2} c (\overbrace{\sqrt{a^2 + x^2} - l_n}^{\Delta l})^2$$

$$\Pi_0 = \Pi_{g0} + \Pi_{c0} = 0 + \frac{1}{2} c (\underbrace{a - l_n}_{(\Delta l)_0})^2$$

$$F_c = c \cdot \Delta l \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta l = l - l_n \\ \Pi_c = \frac{1}{2} c (\Delta l)^2 \end{array} \right.$$

$$* \quad \frac{1}{2} m v^2 - m g x + \frac{1}{2} c (\sqrt{a^2 + x^2} - l_n)^2 = \frac{1}{2} c (a - l_n)^2 \quad / \cdot \frac{2}{m}$$

$$v_{(x)} = \sqrt{2 g x - \frac{c}{m} (\sqrt{a^2 + x^2} - l_n)^2 + \frac{c}{m} (a - l_n)^2}$$

$$H(x) = ?$$

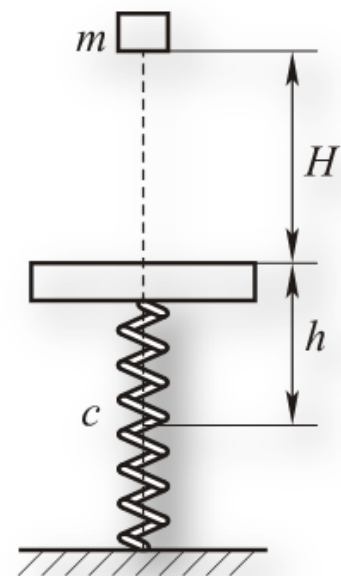
II H. 3. $\underbrace{m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_c}_{\text{dot }} \cdot \vec{g}$

$$0 = N - F_c \sin \alpha \quad \rightarrow \quad N = F_c \cdot \sin \alpha = (\kappa \Delta l) \cdot \sin \alpha$$

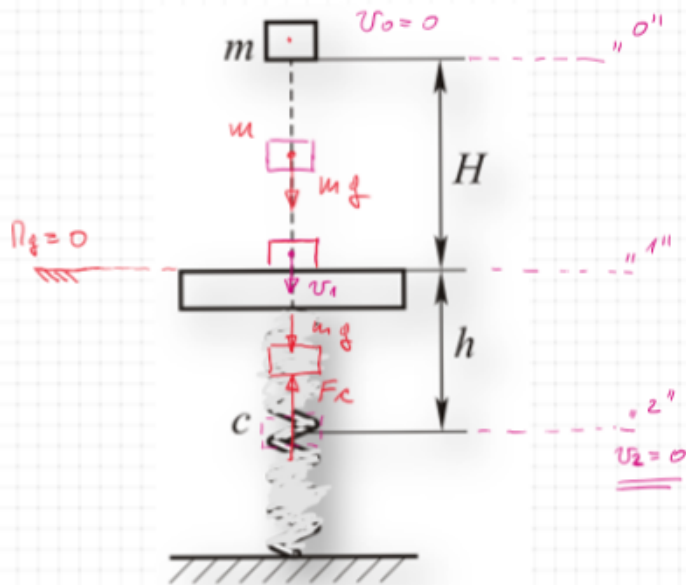
$$\left. N = \kappa \cdot (\sqrt{a^2 + x^2} - l_n) \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2 + x^2}} \right\}_{(x)}$$

Zadatak 10

Teret mase m pada bez početne brzine, sa visine H , na ploču zanemarive mase, koja je postavljena na linearnu oprugu krutosti c . Usled pada tereta na ploču opruga se (maksimalno) sabije za dužinu h . Odrediti krutost opruge c .



$\kappa = ?$



$$E_{k1} + \cancel{\Pi_1} = \cancel{E_{k0}} + \Pi_0$$

$$\frac{1}{2} m v_1^2 = m g \cdot H \rightarrow v_1 = \sqrt{2 g H}$$

"1 - 2"

$$\cancel{E_{k2}} + \Pi_2 = E_{k1} + \Pi_1$$

$$E_{k1} = \frac{1}{2} m v_1^2 = m g H$$

$$\Pi_1 = \Pi_{g1} + \Pi_{\kappa1} = 0 + \frac{1}{2} \kappa (\underbrace{0}_{(\Delta c)_1})^2 = 0$$

$$\Pi_2 = \Pi_{g2} + \Pi_{\kappa2} = -m g h + \frac{1}{2} \kappa (\underbrace{-h}_{(\Delta c)_2})^2$$

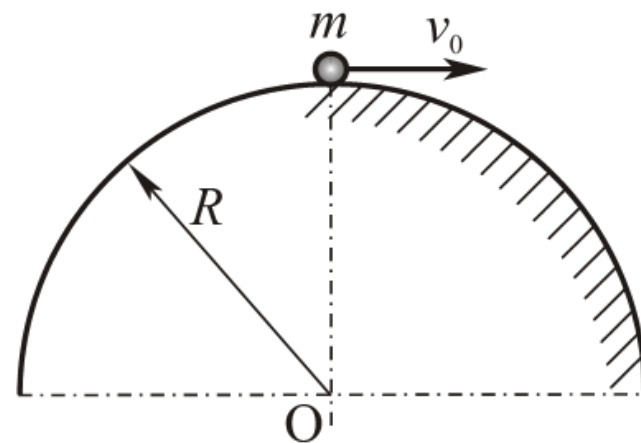
$$-m g h + \frac{1}{2} \kappa h^2 = \frac{1}{2} m v_1^2 \quad | \cdot \frac{2}{h^2}$$

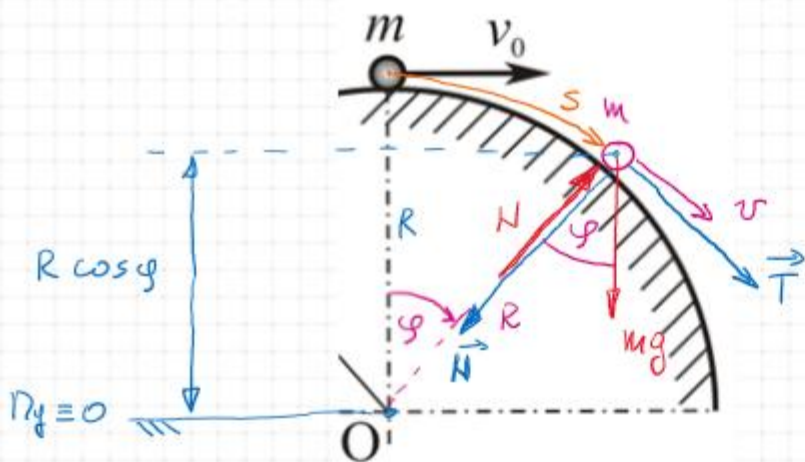
$$\kappa = \frac{1}{h^2} m v_1^2 \cdot \frac{2}{h^2} + m g \kappa \cdot \frac{2}{h^2}$$

$$\boxed{\kappa = \frac{m}{h^2} (2 g H) + 2 \frac{m g}{h}}$$

Zadatak 11

Kuglica, mase m , nalazi se na vrhu glatke nepokretne polulopte, poluprečnika R . U početnom trenutku saopštena joj je brzina intenziteta v_0 u horizontalnom pravcu. Odrediti položaj u kom će se kuglica odvojiti od podloge. Koliku početnu brzinu treba saopštiti kuglici da bi se odvojila u početnom trenutku? Da li kuglica može stići do podnožja polulopte bez odvajanja od nje?





$$\varphi_{0y6} = ? \rightarrow N(\varphi_{0y6}) = 0$$

$$N(\varphi) = ?$$

$$\text{II Hb.3. } * \left[m \vec{a} = m \vec{g} + \vec{N} \right]$$

$$TP = \mathcal{K}\{0, R\varphi\}$$

$$s = R\varphi \rightarrow \dot{s} = R\dot{\varphi} \rightarrow \ddot{s} = R\ddot{\varphi}$$

$$v = \dot{s} = R\dot{\varphi}$$

$$\vec{a} = \ddot{s} \vec{T} + \frac{\dot{s}^2}{R} \vec{N}$$

$$\vec{a} = \underbrace{R\ddot{\varphi}}_{a_T} \vec{T} + \underbrace{R\dot{\varphi}^2}_{\frac{v^2}{R}} \vec{N}$$

$$* |\cdot \vec{T}| \cdot |\vec{N}|$$

$$(1) \cancel{m} \cdot R \ddot{\varphi} = \cancel{m} g \sin \varphi$$

$$(2) m \cdot \frac{v^2}{R} = m g \cos \varphi - N$$

$$(2) \rightarrow \left[N_{(\varphi)} = m g \cos \varphi - m \frac{v^2}{R} = \dots \right] **$$

$$\boxed{v(\varphi) = ? \quad (v(\varphi) = R \dot{\varphi}(\varphi) = ?)}$$

$$\underline{I} \quad (1) \quad \dot{\varphi} \frac{d\dot{\varphi}}{d\varphi} = \frac{g}{R} \sin \varphi \quad \int \rightarrow \dot{\varphi}(\varphi) \rightarrow v(\varphi) = \dots$$

$$\underline{II} \quad E_k + \Pi = E_{k0} + \Pi_0$$

$$\frac{1}{2} m v^2 + m g R \cos \varphi = \frac{1}{2} m v_0^2 + m g R \quad | : 2$$

$$\boxed{v^2 = v_0^2 + 2 g R - 2 g R \cos \varphi} \quad ***$$

$$*** \} \rightarrow H(\varphi) = m g \cos \varphi - \frac{m}{R} (v_0^2 + 2 g R - 2 g R \cos \varphi)$$

$$\boxed{H(\varphi) = 3 m g \cos \varphi - 2 m g - \frac{m v_0^2}{R}} \quad \star$$

$$\varphi_{0f} = ? \rightarrow H(\varphi_{0f}) = 0$$

$$\star \rightarrow H(\varphi_{0f}) = \left| 3 m g \cos \varphi_{0f} - 2 m g - \frac{m v_0^2}{R} = 0 \right|$$

$$\boxed{\cos \varphi_{0f} = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \frac{v_0^2}{g R}}$$

$$\varphi_{0f} = \arccos(\quad)$$

$$v_0 = ? \rightarrow \varphi_{0f} = 0 \rightarrow \cos \varphi_{0f} = \cos 0 = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \frac{v_0^2}{g R}$$

$$\boxed{v_0 = \sqrt{g R}} \quad (\geq)$$

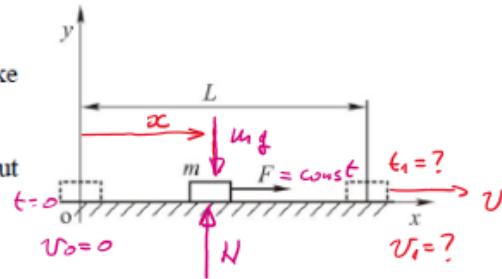
1. Materijalna tačka mase m započinje kretanje po glatkoj horizontalnoj ravni, u homogenom polju sile zemljine teže, iz stanja mirovanja. Na nju djeluje i horizontalna sila F , konstantnog intenziteta. Odrediti:

a) diferencijalne jednačine kretanja materijalne tačke,

b) parametarsku jednačinu kretanja tačke ($x(t)$),

c) trenutak t_1 do kog je tačka prešla put dužine L ,

d) brzinu tačke u trenutku t_1 .



II 1b.3. $m \vec{a} = \vec{F} + m \vec{g} + \vec{N} \quad | \cdot \vec{z} \quad | \cdot \vec{g}$

$$(1) \quad m \cdot \ddot{x} = F \quad \longrightarrow \quad \frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{F}{m} \rightarrow \int d\dot{x} = \frac{F}{m} \int dt \rightarrow$$

$$(2) \quad 0 = N - mg$$

$$\dot{x} = \int \rightarrow x$$

$$t_1 = ? \rightarrow \underline{x(t_1) = L} \rightarrow t_1$$

$$v_1 = \dot{x}(t_1) = \dots$$

Dinamika – vežbe 2

Kinematika i dinamika

Miodrag Zuković

Novi Sad, 2021.