

Dinamika

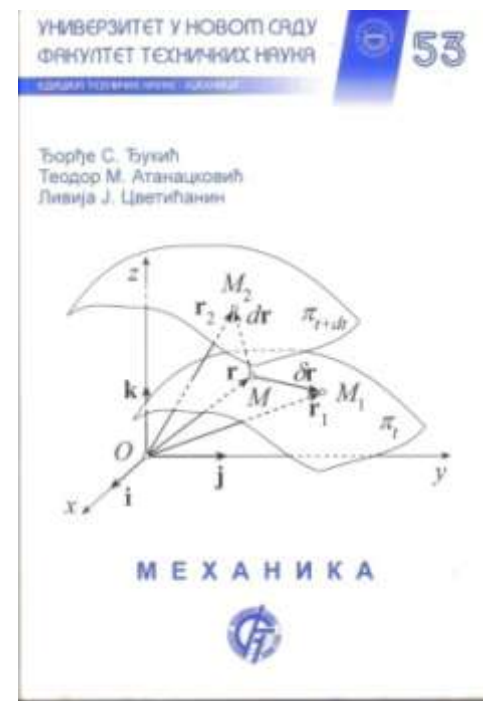
Dinamika materijalne tačke

Diferencijalne jednačine kretanja

Mehanika
Miodrag Zuković

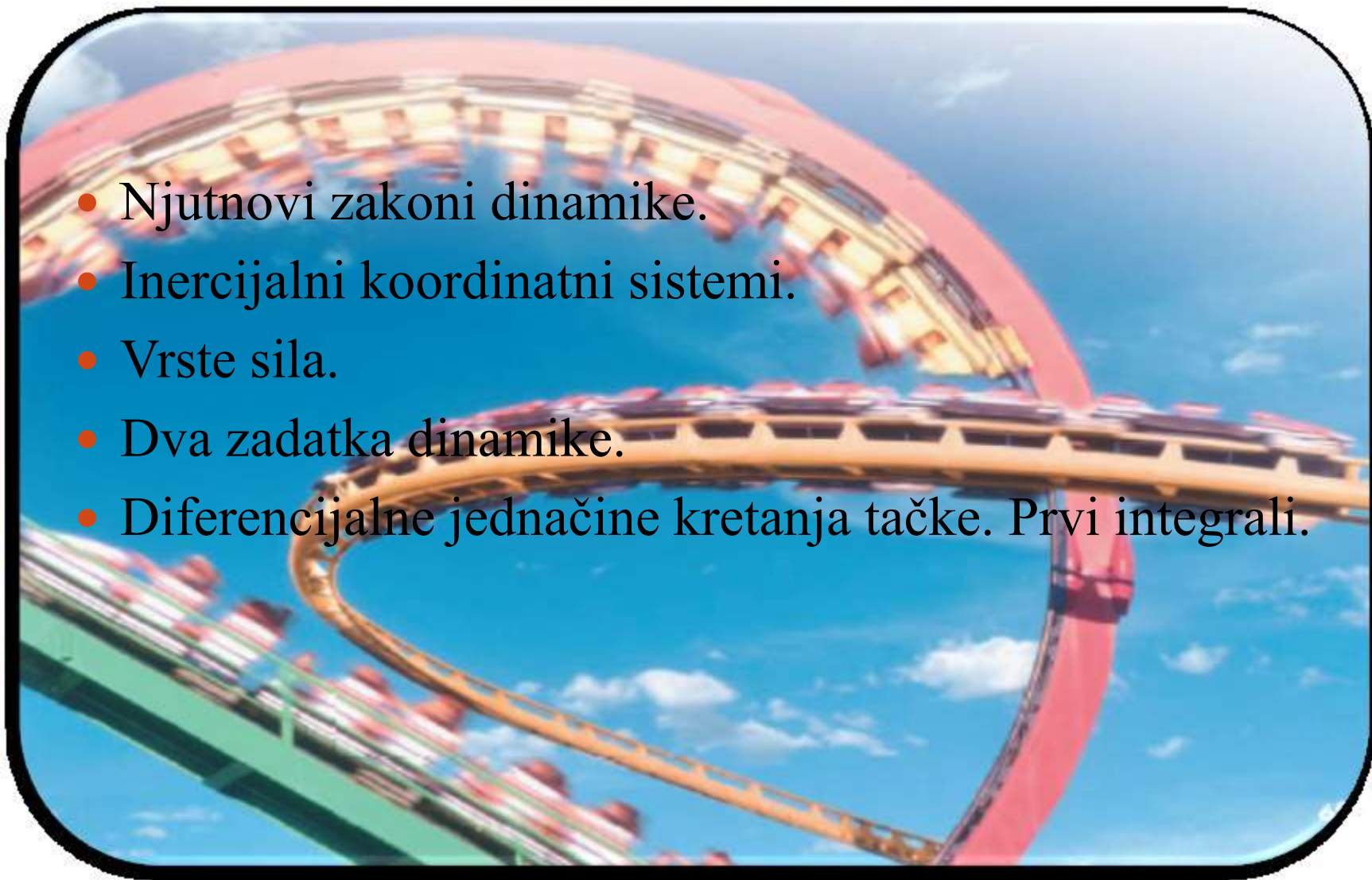
Literatura

- Đorđe S. Đukić, Teodor M. Atanacković, Livija J. Cvetićanin: **Mehanika**, Fakultet tehničkih nauka u Novom Sadu, Novi Sad, 2003.



Šta ćemo naučiti?

- Njutnovi zakoni dinamike.
- Inercijalni koordinatni sistemi.
- Vrste sila.
- Dva zadatka dinamike.
- Diferencijalne jednačine kretanja tačke. Prvi integrali.



Dinamika

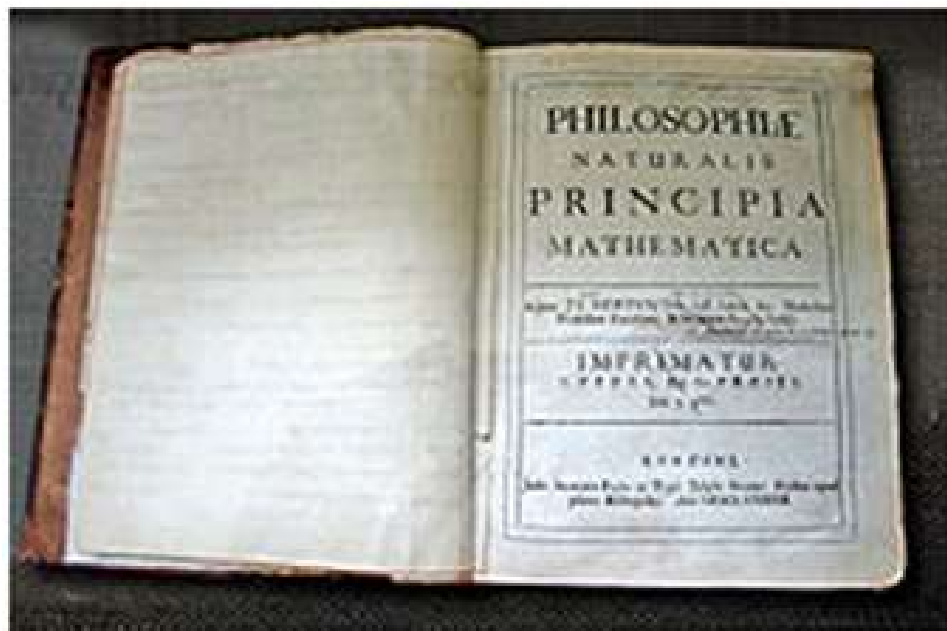
- **Dinamika** proučava kretanje materijalnih tela pod dejstvom sila i spregova koji deluju na dato telo.
- **Njutn-Laplosov princip određenosti** klasične mehanike tvrdi da početno stanje mehaničkog sistema, stanje u početnom trenutku vremena t_0 , koje je određeno položajem i brzinama tačaka sistema, jednoznačno određuje njegovo dalje kretanje.

Njutnovi zakoni dinamike

- Prvi Njutnov zakon- zakon inercije
- Drugi Njutnov zakon- osnovna jednačina dinamike
- Treći Njutnov zakon- zakon akcije i reakcije



Sir Isaac Newton
(25 December 1642 – 20 March 1727)



Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica
(Matematički principi prirodne filozofije), 1697.

Njutnovi zakoni dinamike

- **Prvi Njutnov zakon- zakon inercije**

- **Svako telo ostaje u stanju mirovanja ili jednolikog pravolinijskog kretanja dok pod dejstvom sile ne bude prinuđeno da to svoje stanje promeni.**
- Tačka ostaje u miru ako je bila u miru u početnom trenutku t_0 . Kreće se jednoliko i pravolinijski, konstantnom brzinom $\mathbf{v}$, ako je u početnom trenutku t_0 imala brzinu $\mathbf{v}$.

$$\begin{array}{ll} \vec{r}(t_0) = \vec{r}_0, \vec{v}(t_0) = \mathbf{0} & \Rightarrow \quad \vec{r}(t) = \vec{r}_0, \vec{v}(t) = \mathbf{0} \\ \vec{r}(t_0) = \vec{r}_0, \vec{v}(t_0) = \vec{v}_0 & \Rightarrow \quad \vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t, \vec{v}(t) = \vec{v}_0 \end{array}$$

- Ovim zakonom se ukazuje na svojstvo tačke da zadrži svoje stanje, mirovanja ili jednolikog pravolinijskog kretanja (prirodna stanja kretanja)- inertnost.
- Masa- mera inercije- [kg]

Njutnovi zakoni dinamike

- Slučaj kada na telo deluje više sila:

$$\vec{F}_r = \sum_{i=1} \vec{F}_i = \vec{0}$$

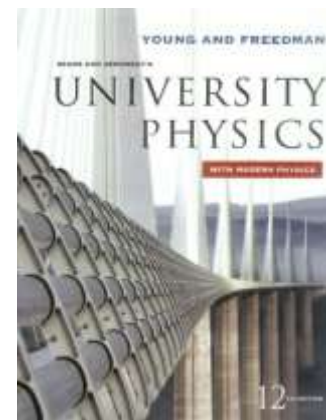
- **Primer** (Ne)poznavanja prvog Njutnovog zakona:

U naučno fantastičnom filmskom klasiku “Rocketship X-M” iz 1950. svemirskom brodu, koji se kreće u vakuumu, daleko od bilo kog nebeskog tela, iznenada otkazuje motor. Brod usporava i staje.?

Conceptual Example 4.2

Zero net force means cons

In the classic 1950 science fiction film *Rocketship X-M*, a spaceship is moving in the vacuum of outer space, far from any planet, when its engine dies. As a result, the spaceship slows down and stops. What does Newton’s first law say about this event?

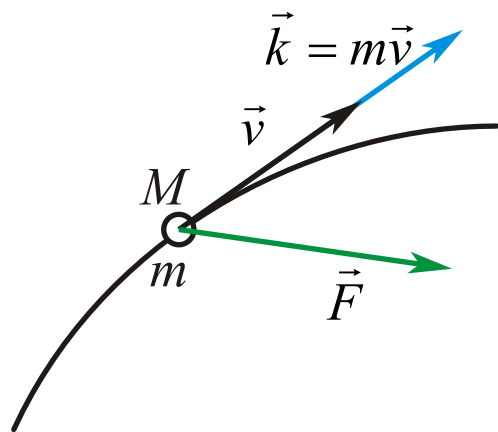


Njutnovi zakoni dinamike

- **Drugi Njutnov zakon- osnovna jednačina dinamike**
 - Promena kretanja proporcionalna je sili koja deluje na telo i vrši se u pravcu sile.
 - Promena (izvod) količine kretanja materijalne tačke jednaka je sili koja na tu tačku deluje.

-količina kretanja

$$\vec{k} = m\vec{v}$$



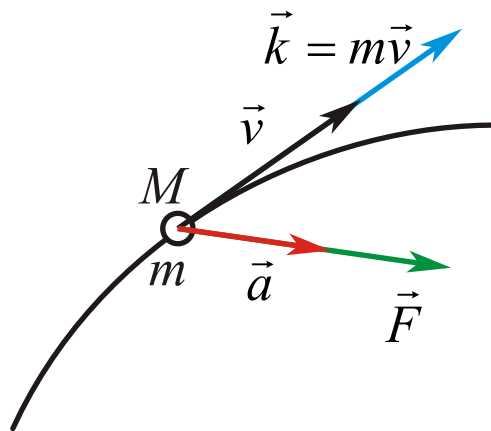
$$\frac{d\vec{k}}{dt} = \vec{F}$$

Njutnovi zakoni dinamike

- “uobičajeni” oblik:
 - Proizvod mase i vektora ubrzanja tačke jednak je sili koja na tačku deluje.

$$m = \text{const},$$

$$\dot{\vec{k}} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m\vec{a}$$



$$\boxed{m\vec{a} = \vec{F}}$$

$$\vec{F} = \vec{F}_r = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i$$

- Vezano (neslobodno) kretanje tačke

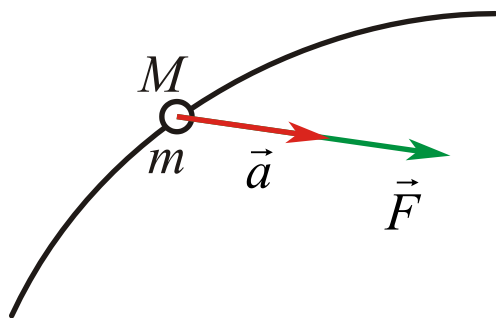
$$\boxed{m\vec{a} = \vec{F} + \vec{R}}$$

$$\vec{R} = \vec{R}_r = \sum_{j=1}^M \vec{R}_j$$

Njutnovi zakoni dinamike

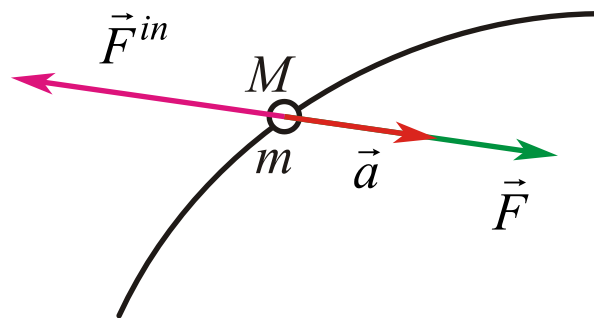
- Drugi Njutnov zakon

$$m\vec{a} = \vec{F}$$



- D'alambertov princip

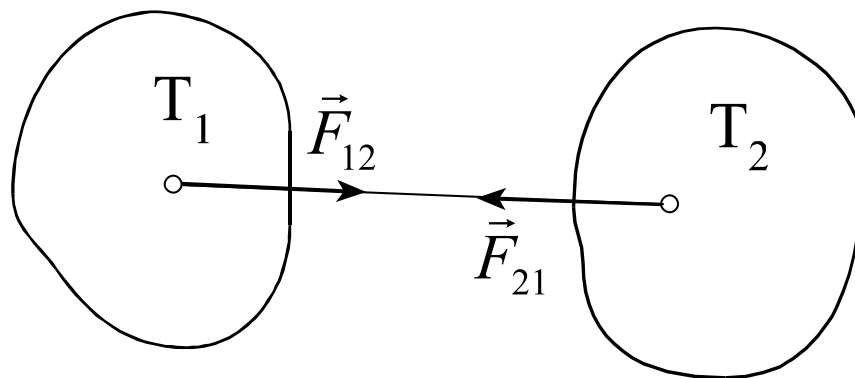
$$\vec{F} + \vec{F}^{in} = 0$$



$$m\vec{a} = \vec{F} \rightarrow \vec{F} + (-m\vec{a}) = 0$$
$$\vec{F}^{in} = -m\vec{a} \rightarrow \vec{F} + \vec{F}^{in} = 0$$

Njutnovi zakoni dinamike

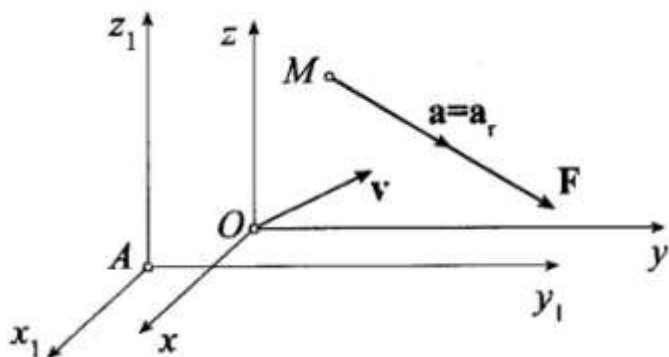
- **Treći Njutnov zakon- zakon akcije i reakcije**
- **Dejstvu (akciji) uvek je jednako protivdejstvo (reakcija), ili: međusobna dejstva dvaju tela uvek su jednaka i suprotno usmerena.**



$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$$

Inercijalni koordinatni sistemi

- Drugi Njutnov zakon ima potpuno isti oblik u pokretnom koordinatnom sistemu ($Oxyz$) koji se kreće translatorno konstantnom brzinom $\mathbf{v}$, kao i u nepokretnom ($Ax_1y_1z_1$).



$$Ax_1y_1z_1 \rightarrow m\vec{a} = \vec{F}$$

$$Oxyz \rightarrow m(\vec{a}_p + \vec{a}_r + \vec{a}_c) = \vec{F}$$

$$\vec{v} = \overrightarrow{const} \rightarrow \vec{a}_p = \vec{a}_c = 0$$

$$Oxyz \rightarrow m\vec{a}_r = \vec{F}$$

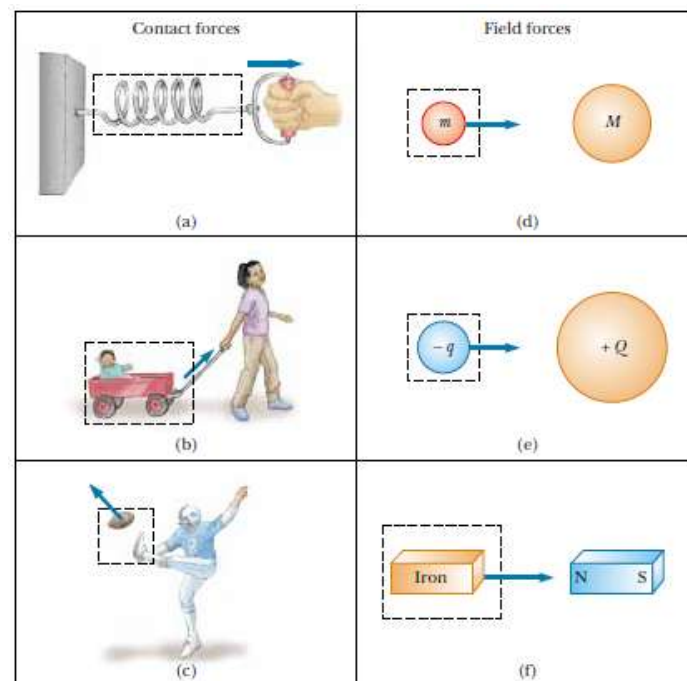
- Princip relativnosti klasične mehanike (Galilej).
- Koordinatni sistemi koji se kreću translatorno konstantnom brzinom $\mathbf{v}$ u odnosu na apsolutno nepokretni sistem nazivaju se inercijalnim koordinatnim sistemima.

Vrste sila (Sile u mehanici)

- U opštem slučaju sila može zavisiti od vremena, položaja i brzine tačke:

$$\vec{F} = \vec{F}(t, \vec{r}, \vec{v})$$

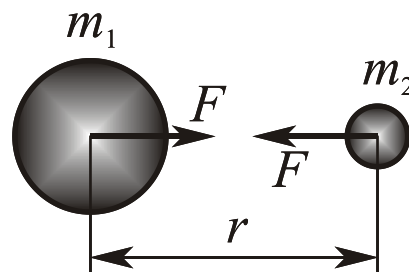
- Dva načina delovanja sile:
 - **Indirektni** (posredstvom fizičkog polja)
 - **Direktni** (neposredni kontakt)
- **Polje sile.** Ako u svakoj geometrijskoj tački ograničenog ili neograničenog dela prostora na materijalnu tačku, koja se nađe u njoj, deluje sila, onda je taj prostor polje te sile.



Vrste sila (Sile u mehanici)

- Gravitacione sile

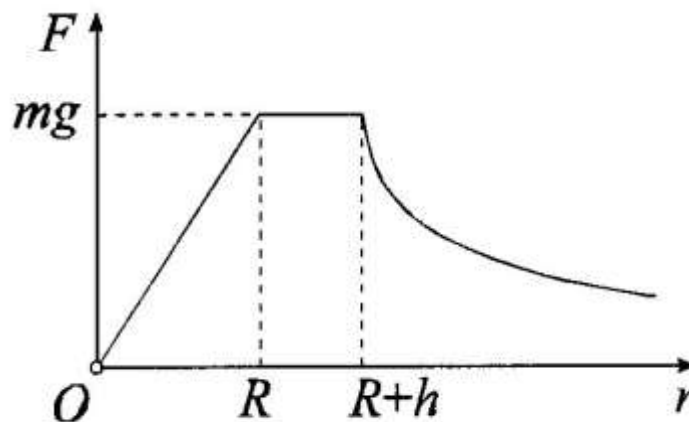
$$F = k \frac{m_1 m_2}{r^2}$$



- Sila težine

$$F = mg$$

$$k = 6,67 \times 10^{-11} \left[\frac{\text{kg m}^2}{\text{s}^2} \right]$$



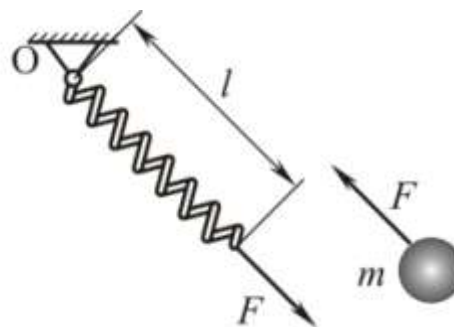
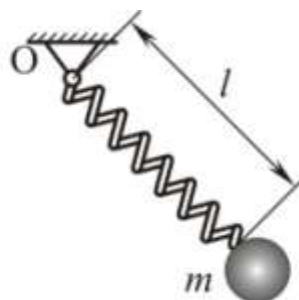
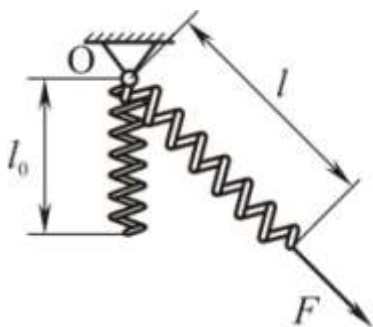
Dijagram sile delovanja Zemlje na tela,
u zavisnosti od njihovog rastojanja r od težišta Zemlje.

Vrste sile (Sile u mehanici)

- Elektromagnetne sile
 - Električna sila $F = k_1 \frac{q_1 q_2}{r^2}; \quad \vec{F} = q\vec{E}$
 - Magnetne sila $\vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B})$
 - Elektromagnetna sila $\vec{F} = q\vec{E} + q(\vec{v} \times \vec{B})$
- Nuklearne sile

Vrste sila (Sile u mehanici)

- Sila trenja
- Sila zavisna od deformacija. Sila u opruzi:

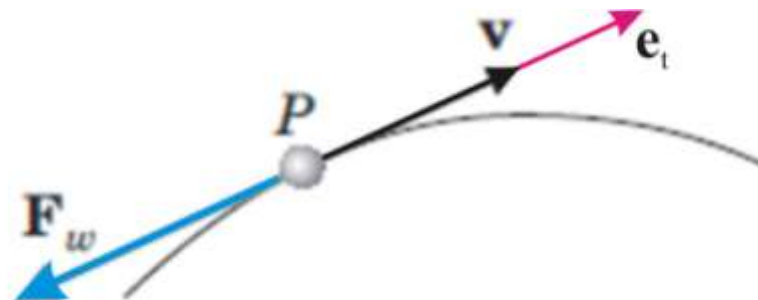


$$F = c \Delta l; \quad \Delta l = l - l_0$$

- Sila fluidnog otpora

$$\vec{F}_w = -\kappa f(v) \vec{e}_t; \quad \vec{e}_t = \vec{v}/v$$

$$f(v) = \alpha v, \quad f(v) = \beta v^2$$



Vrste sila (Sile u mehanici)

- гравитациона сила између Сунца и Земље $3,5 \times 10^{22} \text{ N}$
- погонска сила шатла при лансирању $3,1 \times 10^7 \text{ N}$
- вучна сила локомотиве $8,9 \times 10^5 \text{ N}$
- тежина јабуке средње величине 1 N
- најмање јаје инсекта $2 \times 10^{-6} \text{ N}$
- електрична сила између протона и електрона у атому водоника $8,2 \times 10^{-8} \text{ N}$
- тежина бактерије $1 \times 10^{-18} \text{ N}$
- тежина атома водоника $1,6 \times 10^{-26} \text{ N}$
- тежина електрона $8,9 \times 10^{-30} \text{ N}$
- гравитациона сила између протона и електрона у атому водоника $3,6 \times 10^{-47} \text{ N}$

Dva zadatka dinamike

- Prvi zadatak dinamike

- Dato: $\vec{r} = \vec{r}(t)$ (ili $\vec{v} = \vec{v}(t)$ ili $\vec{a} = \vec{a}(t)$)

- Odrediti: $\vec{F} = \vec{F}(t)$

$$m\vec{a} = \vec{F}$$



$$\vec{F} = m\vec{a}$$

$$\vec{F}(t) = m\ddot{\vec{r}}(t)$$

Dva zadatka dinamike

- Drugi zadatak dinamike

- Dato: $\vec{F} = \vec{F}(t, \vec{r}, \vec{v})$

- Odrediti: $\vec{r} = \vec{r}(t)$

Diferencijalna jednačina
kretanja (vektorska)

$$m\vec{a} = \vec{F}$$



$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}$$

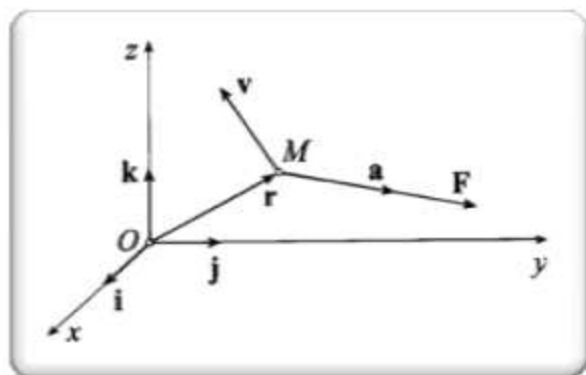
Početni uslovi:

$$t = t_0,$$

$$\vec{r}(0) = \vec{r}_0, \vec{v}(0) = \vec{v}_0$$

Diferencijalne jednačine kretanja

- Dekartov koordinatni sistem



$\vec{a} :$

$\vec{F} :$

$$= \left(\sum_{i=1}^N F_{ix} \right) \vec{i} + \left(\sum_{i=1}^N F_{iy} \right) \vec{j} + \left(\sum_{i=1}^N F_{iz} \right) \vec{k}$$

$$= F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}$$

$$m\vec{a} = \vec{F}(t, \vec{r}, \vec{v})$$

Diferencijalne jednačine
kretanja (skalarne)

$$m\ddot{x} = F_x(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$$

$$m\ddot{y} = F_y(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$$

$$m\ddot{z} = F_z(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$$

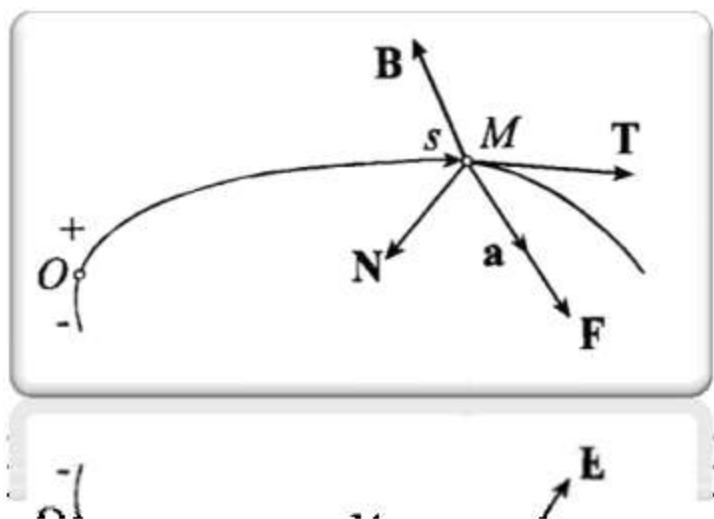
Početni uslovi:

$$t = t_0, \quad x(0) = x_0, y(0) = y_0, z(0) = z_0,$$

$$\dot{x}(0) = \dot{x}_0, \dot{y}(0) = \dot{y}_0, \dot{z}(0) = \dot{z}_0.$$

Diferencijalne jednačine kretanja

- Prirodni koordinatni sistem



$$m\vec{a} = \vec{F}(t, \vec{r}, \vec{v})$$

Diferencijalne jednačine
kretanja (skalarne)

$$m\ddot{s} = F_T(t, s, \dot{s})$$

$$m \frac{\dot{s}^2}{R_k} = F_N(t, s, \dot{s})$$

$$0 = F_B(t, s, \dot{s})$$

Početni uslovi:

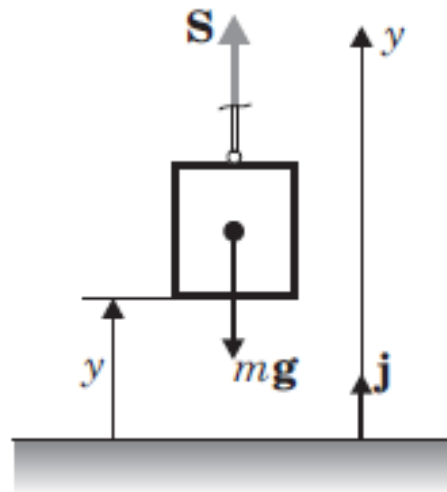
$$t = t_0, \quad s(0) = s_0, \quad \dot{s}(0) = \dot{s}_0.$$

$$\vec{F} = F_T \vec{T} + F_N \vec{N} + F_B \vec{B}$$

Diferencijalne jednačine kretanja

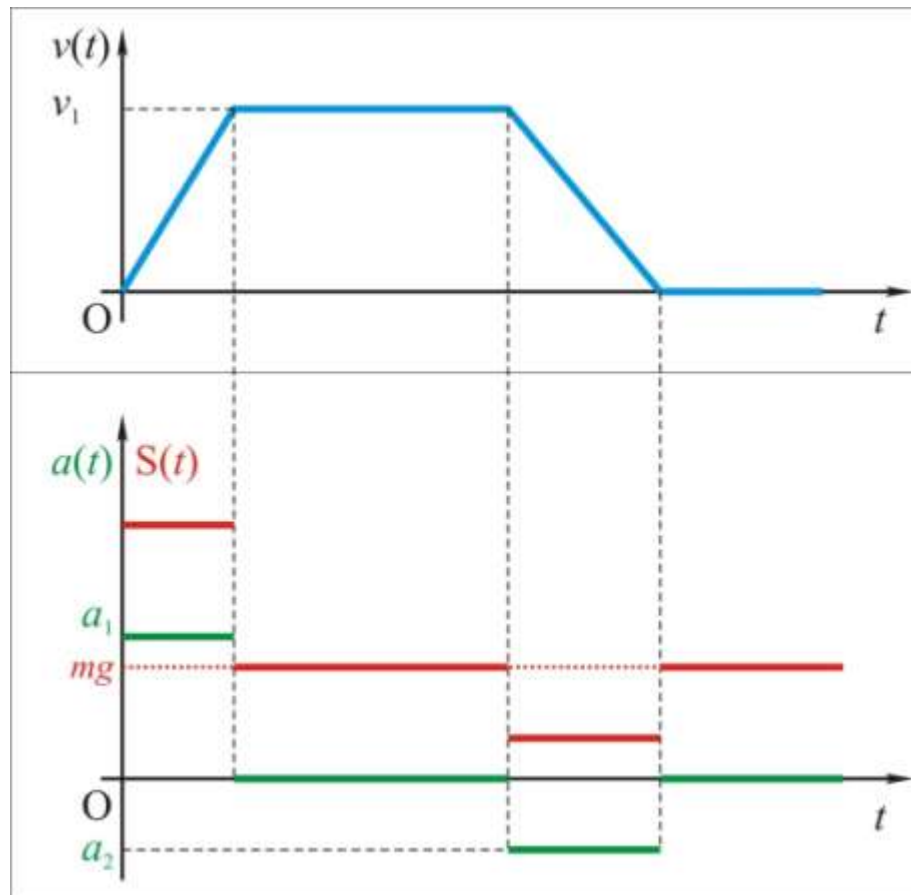
- Primer:

Lift, čija je masa zajedno sa putnicima m , započinje kretanje bez početne brzine. Tokom prvog vremenskog intervala $t \in [0, t_1]$ kreće se ubrzano $a_1 > 0$; zatim tokom intervala $t \in [t_1, t_2]$ kreće jednoliko $v_1 = \text{const}$, a u poslednjem intervalu $t \in [t_2, t_3]$ kreće se usporeno $-a_2 > 0$ do zaustavljanja $v(t_3) = 0$. Odrediti silu u užetu lifta tokom ovog kretanja.



Diferencijalne jednačine kretanja

- Rešenje:

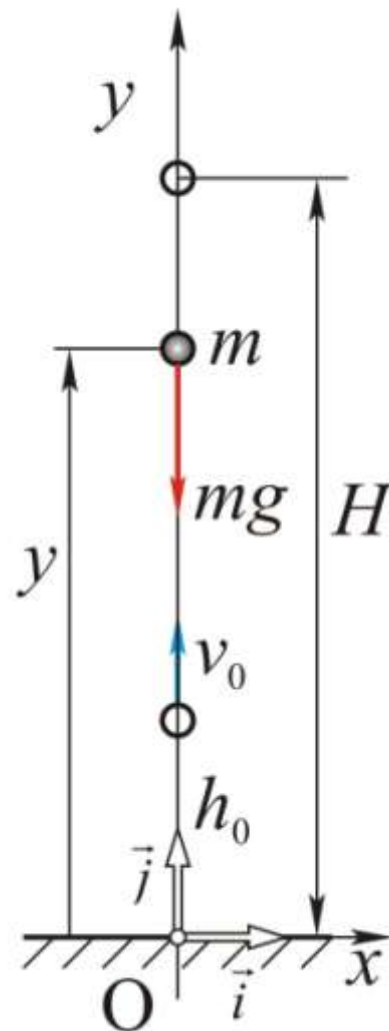


Diferencijalne jednačine kretanja

- Primer:

Materijalna tačka, mase m , kreće se u homogenom polju sile zemljine teže. Sa visine h_0 iznad površine Zemlje bačena je vertikalno uvis brzinom v_0 . Zanemarujući sve sile osim sile težine odrediti:

- a) kretanje materijalne tačke,
- b) visinu leta H .



Diferencijalne jednačine kretanja

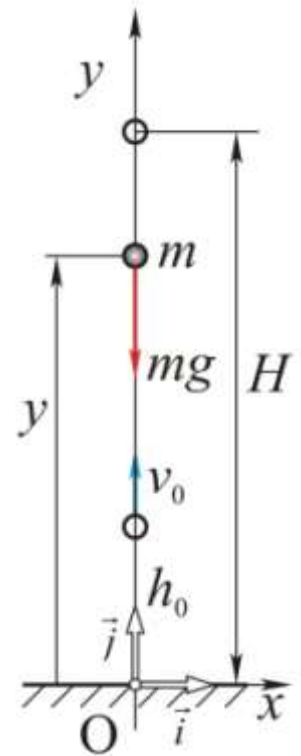
- Rešenje:

$$m\vec{a} = \vec{F} \rightarrow m\ddot{y}\vec{j} = -mg\vec{j} \rightarrow \boxed{\ddot{y} = -g}$$

$$\left. \begin{aligned} \vec{r}(0) &= y(0)\vec{j} = h_0\vec{j} \\ \vec{v}(0) &= \dot{y}(0)\vec{j} = v_0\vec{j} \end{aligned} \right\} \rightarrow \boxed{\begin{aligned} y(0) &= h_0, \\ \dot{y}(0) &= v_0 \end{aligned}}$$

$$\boxed{\dot{y}(t) = -gt + v_0, y(t) = -g\frac{t^2}{2} + v_0t + h_0}$$

$$\dot{y}(t_1) = -gt_1 + v_0 = 0 \rightarrow t_1 = \frac{v_0}{g} \rightarrow H = y(t_1) = \frac{v_0^2}{2g} + h_0$$



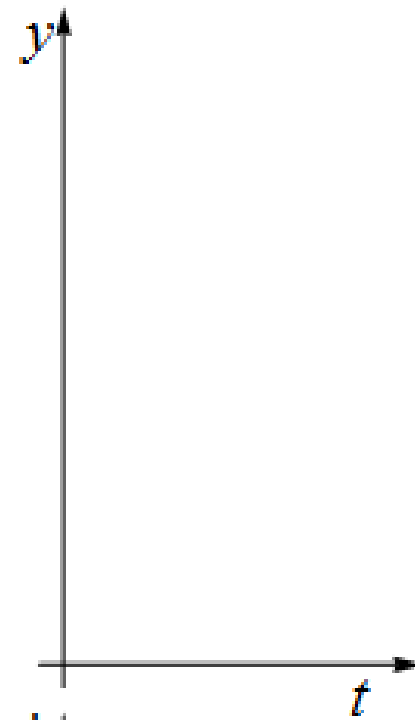
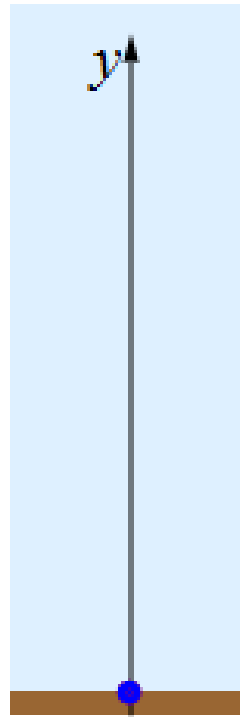
$$y(0) = h_0 = 0$$

$$\dot{y}(0) = v_0 = 10\text{m/s}$$

$$g = 9.81\text{m/s}^2$$

$$t_1 = \frac{v_0}{g} = 1.02\text{s}$$

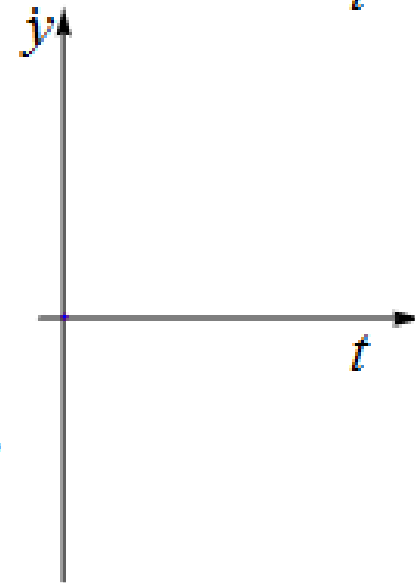
$$H = \frac{v_0^2}{2g} = 5.1\text{m}$$



$t=0.\text{s}$

$y=0.\text{m}$

$\dot{y}=10.\text{m/s}$



Prvi integrali

Diferencijalna jednačina kretanja

$$m\ddot{s} = F_T(t, s, \dot{s})$$

Prvi integral

$$\psi(t, s, \dot{s}) = C$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial s} \dot{s} + \frac{\partial \psi}{\partial \dot{s}} \ddot{s} = 0$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial s} \dot{s} + \frac{\partial \psi}{\partial \dot{s}} \frac{F_T}{m} = 0$$

Šta smo naučili?

- Njutnovi zakoni dinamike.
- Inercijalni koordinatni sistemi.
- Vrste sila.
- Dva zadatka dinamike.
- Diferencijalne jednačine kretanja tačke. Prvi integrali.

